Geodäten

Mathias Michaelis

28. Januar 2004

1 Vektorfelder

Definition 1.1 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Ein *Vektorfeld* auf S ist eine Abbildung $v : S \to \mathbb{R}^3$ so, dass $v(p) \in T_nS$ für alle $p \in S$.

Ein Vektorfeld ordnet also jedem Punkt auf der Fläche einen Vektor zu, der in diesem Punkt tangential an die Fläche ist.

Beispiel 1.1 Sei $f : S \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Da die erste Fundamentalform nicht ausgeartet ist, gibt es bei festgehaltenem Punkt p genau einen Vektor $v(p) \in T_pS$ mit der Eigenschaft

$$d_pf(X) = \langle v(p), X\rangle$$

für alle $X \in T_pS$. Dadurch wird das Gradientenvektorfeld $v := \mathit{gradf}$ definiert.

Definition 1.2 Sei S eine reguläre Fläche, sei $c : I \to S$ eine parametrisierte Kurve. Ein *Vektorfeld an S längs c* ist eine Abbildung $v : I \to \mathbb{R}^3$, so dass $v(t) \in T_{c(t)}S$ ist für alle $t \in I$.

Beispiel 1.1 Das Geschwindigkeitsfeld $v(t) = \dot{c}(t)$ ist ein solches Vektorfeld längs c.

2 kovariante Ableitungen

Wir möchten nun Vektorfelder ableiten. Leitet man ein Vektorfeld an S längs c in gewohnter Weise ab, so erhält man eine Abbildung, die i. Allg. nicht mehr tangential an die Fläche ist. Daher wenden wir nach der Ableitung eine Projektion auf die Tangentialebene im entsprechenden Kurvenpunkt an. Dies führt uns auf folgende Definition:

Definition 2.1 Sei S eine reguläre Fläche, sei $c : I \to S$ eine parametrisierte Kurve und sei $v : I \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld an S längs c. Für jeden Punkt $p \in S$ sei $\Pi_p : \mathbb{R}^3 \to T_pS$ die Orthogonalprojektion, d.h. ist $N(p)$ einer der beiden Einheitsnormalenvektoren an S im Punkt p, so ist

$$\Pi_p(X) = X - \langle X, N(p)\rangle N(p).$$

Dann heißt

$$\frac{\nabla}{dt} v(t) := \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t)),$$

$t \in I$, die *kovariante Ableitung* von v.
Mit v ist also auch $\frac{\nabla}{dt}v$ ein Vektorfeld an S längs c.

Beispiel 2.1 Sei $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die x-y-Ebene und c eine parametrisierte ebene Kurve, $c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0)^T$. Ein Vektorfeld v an S längs c ist dann von der Form $v(t) = (v^1(t), v^2(t), 0)^T$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} v(t) &= \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t)) \\ &= \Pi_{c(t)}\Big((\dot{v_1}(t), \dot{v_2}(t), 0)^T\Big) \\ &= (\dot{v_1}(t), \dot{v_2}(t), 0)^T \\ &= \dot{v}(t). \end{aligned}$$

Für die Ebene stimmen also gewöhnlich Ableitung und die kovariante Ableitung überein.

Man kann die kovariante Ableitung auch mit Hilfe lokaler Parametrisierungen berechnen. Dazu drücken wir für die lokale Parametrisierung (U, F, V) von S die Vektoren $\frac{\delta^2 F}{\delta u^i \delta u^j}(u) \in \mathbb{R}^3$ in der Basis $\frac{\delta F}{\delta u^1}(u)$, $\frac{\delta F}{\delta u^2}(u)$ und $N(F(u))$ aus:

$$\frac{\delta^2 F}{\delta u^i \delta u^j}(u) = \Gamma^1_{i,j}(u)\frac{\delta F}{\delta u^1}(u) + \Gamma^2_{i,j}(u)\frac{\delta F}{\delta u^2}(u) + h_{i,j}(u)N(F(u)).$$

Definition 2.2 Die Koeffizientenfunktionen

$$\Gamma^k_{i,j} : U \to \mathbb{R}$$

heißen Cristoffel-Symbole. Aus $\frac{\delta^2 F}{\delta u^i \delta u^j} = \frac{\delta^2 F}{\delta u^j \delta u^i}$ folgt direkt die Symmetrie der Cristoffel-Symbole in den unteren Indizes

$$\Gamma^k_{i,j} = \Gamma^k_{j,i}.$$

3 Geodäten

Ziel: Wie sehen die kürzesten Verbindungskurven zwischen zwei Punkten auf einer regulären Fläche aus? Wir wissen bereits, dass diese auf einer Ebene die Geraden sind. Wir benötigen einige weitere Definitionen

Definition 3.1 Sei S eine reguläre Fläche. Sei $c : I \to S$ eine parametrisierte Kurve. Dann ist die *Länge* von c definiert durch

$$L[c] := \int_I \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle} dt.$$

Für viele Anwendungen ist es jedoch günstiger, statt der Länge die Energie einer Kurve zu betrachten:

Definition 3.2 Sei S eine reguläre Fläche. Sei $c : I \to S$ eine parametrisierte Kurve. Dann ist die *Energie* von c definiert durch

$$E[c] := \frac{1}{2} \int_I \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle dt.$$

Bem.: Eine Parametertransformation ändert die Länge einer parametrisierten Kurve nicht, die Einergie allerdings sehr wohl.

Lemma 3.1 Sei S eine reguläre Fläche. Sei $c : [a, b] \to S$ eine parametrisierte Kurve. Dann ist

$$L[c]^2 \leq 2(b - a)E[c],$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. wenn

$$\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle \equiv const.$$

Beweis: Wir setzen $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(t) := \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle}$. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} L[c]^2 &= \left(\int_a^b f(t) \cdot 1 dt \right)^2 \\ &\leq \int_a^b f(t)^2 dt \cdot \int_a^b 1^2 dt \\ &= 2 \cdot E[c] \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn f und 1 linear abhängig sind, f also konstant ist. Dies bedeutet gerade, dass c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. $\square$

Als wichtige Folgerung können wir nun festhalten, dass eine Verbindungskurve minimale Energie genau dann hat, wenn sie minimale Länge hat und proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Wir möchten nun verschiedene Kurven zwischen zwei gegebenen Punkten p und q betrachten und Aussagen über die Variation ihrer Energie treffen. Zunächst benötigen wir folgendes Lemma, dessen Beweis in [1] zu finden ist:

Lemma 3.2 Sei S eine reguläre Fläche. Sei $c : I \times J \to S, (s,t) \mapsto c(s,t)$, eine glatte Abbildung. Dann gilt

$$\frac{\nabla}{\delta s}\frac{\delta c}{\delta t} = \frac{\nabla}{\delta t}\frac{\delta c}{\delta s}.$$

Satz 3.1 (Variation der Energie) Sei S eine reguläre Fläche. Seien $p, q \in S$. Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to S$ eine glatte Abbildung, so dass für $c_s : [a,b] \to S, c_s(t) := c(s,t)$, gilt:

$$c_s(a) = p, \quad c_s(b) = q.$$

Sei $V(t) := \frac{\delta c}{\delta s}(0,t)$ das sogenannte Variationsvektorfeld. Dann gilt:

$$\frac{d}{ds}E[c_s]\Big|_{s=0} = -\int_a^b \langle V(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}_0(t)\rangle \, dt$$

Beweis: nutze das obige Lemma und differenziere unter dem Integral.

Korollar 3.1 Sei S eine reguläre Fläche. Seien $p, q \in S$. Ist $c : [a,b] \to S$ eine Verbindugskurve von p nach q mit minimaler Energie, so gilt:

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = 0$$

für alle $t \in [a,b]$

In diesem Zusammenhang erscheint die nun folgende Definition der Geodäten sinvoll:

Definition 3.3 Sei S eine reguläre Fläche, I ein Intervall. Eine parametrisierte Kurve $c : i \to S$ heißt *Geodätische*, falls

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = 0$$

für alle $t \in I$ gilt.

Beispiel 3.3 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ die x-y-Ebene. Wie wir bereits wissen, stimmt dann die kovariante Ableitung mit der gewönhlichen Ableitung überein,

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = \ddot{c}(t).$$

Die Geodätischen sind also genau die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufenen Geraden,

$$c(t) = p + t \cdot v.$$

Es gilt sogar noch allgemeiner:

Lemma 3.1 Geodätische sind propotional zur Bogenlänge parametrisiert.

Bislang wissen wir also über Kurven bzw. Geodätische somit Folgendes:

$$energieminimierend$$
$$\Updownarrow$$
$$längenminimierend\ und\ proportional\ zur Bogenlänge\ parametrisiert$$
$$\Downarrow$$
$$Geodätische$$
$$\Downarrow$$
$$proportional\ zur Bogenlänge\ parametrisiert.$$

Die Umkehrung des lezten Pfeils gilt i.Allg. nicht. So sind im Fall der Sphäre $S = S^2$ alle Breitenkreise proportional zur Bogenlänge parametrisierbar, aber nur der Äquator ist eine Geodäte.

Die Umkehrung des mittleren Pfeils gilt nur lokal. Bleiben wir bei dem Beispiel der Sphäre S^2 . Dann ist der Äquator eine Geodätische, um jedoch von einem Punkt p auf dem Äquator wieder zu eben diesem Punkt zu kommen, ist die Weg um die Kugel sicher länger als die kontante Kurve $c(t) = p$. Lokal aber gilt die Umkehrung. Der Beweis ist schwierig und daher in den angegebenen Quellen nicht zu finden.

Wir möchten nun Existenz und Eindeutigkeit der Geodäten beweisen. Dies kann man auf die Existenz und Eindeutigkeitstheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen:

Für eine lokale Parametrisierung (U, F, V) und eine Kurve c schreiben wir, wo definiert, $u := F^{-1} \circ c$, d. h. $c = F \circ u$. Die Geodätengleichung lautet dann:

$$0 = \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = \sum_k \left(\ddot{u}^k(t) + \sum_{ij} \Gamma^k_{i,j}(u(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) \right) \frac{\delta F}{\delta u^k}(u(t)).$$

Dabei haben wir u.a. verwendet:

$$\frac{\nabla}{\delta u_1}\dot{c}(t) = \Pi\Big(\frac{\delta}{\delta \dot{u}_1}\dot{u}_1 \cdot \frac{\delta F}{\delta \dot{u}_1} + \dot{u}_1 \cdot \frac{\delta^2 F}{\delta \dot{u}_1^2}\Big) + \Pi\Big(\frac{\delta}{\delta \dot{u}_2}\dot{u}_2 \cdot \frac{\delta F}{\delta \dot{u}_2} + \dot{u}_2 \cdot \frac{\delta^2 F}{\delta \dot{u}_2^2}\Big)$$

und

$$(\dot{u}_1 \frac{\delta}{\delta \dot{u}_1} + \dot{u}_2 \frac{\delta}{\delta \dot{u}_2})\dot{u}_1 = \ddot{u}_1$$

Die Geodätengleichung ist also äquivalent zu dem System (nichtlinearer) gewöhnlicher Differentialgleichungen für $u(t) = (u^1(t), u^2(t))$:

$$\ddot{u}^k(t) + \sum_{ij} \Gamma^k_{ij}(u(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) = 0,$$

Satz 3.2 (Existenz von Geodätischen). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S, v \in T_pS$ und $t_0 \in \mathbb{R}$.
Dann gibt es ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und eine Geodätische $c : I \to S$ mit den Anfangsbedingungen

$$c(t_0) = p \quad und \quad \dot{c}(t_0) = v.$$

Beweis: Wir wählen eine lokale Parametrisierung (U, F, V) so, dass $p \in V$. Wir setzen $u_0 := F^{-1}(p) \in U$ und $X := (D_{u0}F)^{-1}(v) \in \mathbb{R}^2$. Nun können wir nach dem Existenzsatz für gewöhliche Differentialgleichungen die obigen Gleichungen mit den Anfangsbedingungen $u(t_0) = u_0$ und $\dot{u}(t_0) = X$ lösen. Mit $c := F \circ u$ haben wir dann eine Geodätische mit den gewünschten Eigenschaften gefunden.

Satz 3.3 (Eindeutigkeit von Geodätischen). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, I ein Intervall, $t_0 \in I$. Sei $c : I \to S$ eine Geodätische. Dann ist c durch $c(t_0) \in S$ und $\dot{c}(t_0) \in T_{c(t0)}S$ eindeutig festgelegt.

Beweis: Seien c_1 und c_2 Geodätische mit denselben Anfangsbedingungen $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ und $\dot{c_1}(t_0) = \dot{c_2}(t_0)$. Angenommen, es existiert ein $t \in I, t > t_0$, mit $c_1(t) \neq c_2(t)$. Wir setzen

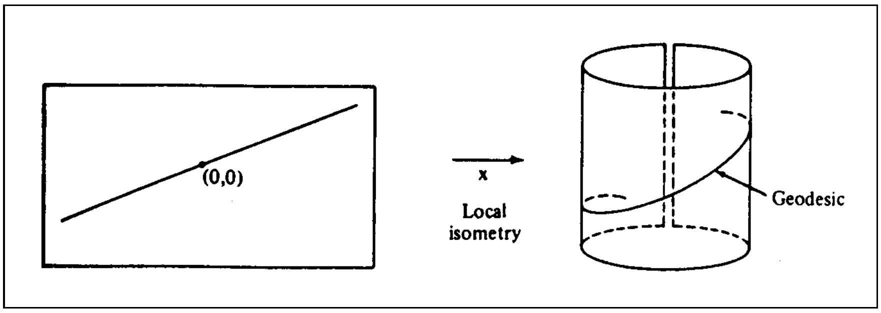
$$t_1 := sup\{t \in I | t > t_0, \text{ so dass } c_1(\tau) = c_2(\tau)\ \forall \tau \in [t_0, t]\}.$$

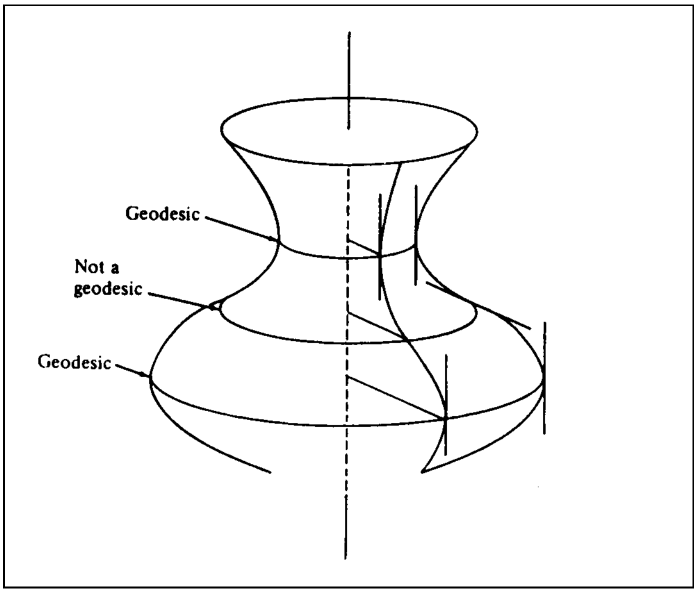
In Worten: t_1 ist gerade der Zeitpunkt, zu dem c_1 und c_2 aufhören, übereinzustimmen. Nun wählen wie eine lokale Parametrisierung (U, F, V) mit $c_1(t_1) \in V$. Wegen $c_1(t_1) = c_2(t_1)$ für alle $t < t_1$ (und $t \geq t_0$) gilt

$$c_1(t_1) = c_2(t_1) \text{ sowie } \dot{c_1}(t_1) = \dot{c_2}(t_1)$$

Der Eindeutigkeitssatz für gewönhliche Differentialgleichungen sagt uns nun, dass $c_1(t) = c_2(t)$ solange $c_1(t) \in V$ und $c_2(t) \in V$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist dies der Fall für alle $t \in (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$. Dies widerspricht der Maximalität von t_1.

Also ist $c_1(t) = c_2(t)$ für alle $t \geq t_0$. Der Beweis für $t \leq t_0$ geht analog.


(0,0)
x
Local
isometry
Geodesic


Geodesic
Not a
geodesic
Geodesic