Seminar “L2-Bettizahlen und Anwendungen”

- Interessentenkreis: Studenten ab 5. Semester
- Dozenten: Thomas Schick
- Termin: Dienstag, 16:15–18:00 (oder nach Vereinbarung)
- **Vorbesprechung: Fr, 12.7,2013, 12:15, Sitzungssaal**
- Kontakt: schick@uni-math.gwdg.de, Tel. 0551/397766, Raum 201

Topologen untersuchen ihre Studienobjekte, z.B. Mannigfaltigkeiten oder allgemeinere topologische Räume, mit Hilfe einer Vielzahl von Techniken aus anderen Gebieten.

Klassisch werden zu jeder kompakten Mannigfaltigkeit ihre Bettizahlen definiert, die Dimensionen der Kohomologie-Vektorräume.

Die Kohomologie nicht-kompakter Mannigfaltigkeiten ist im allgemeinen unendlich dimensional, und liefern daher keinen sinnvollen Begriff einer Bettizahl.

Für nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten, die genügend Symmetrie besitzen, insbesondere solche, die als Überlagerung einer kompakten Mannigfaltigkeit auftreten, kann man mit Hilfe von funktionalanalytischen Methoden (unter Benutzung von Hilbertraum-Theorie, ...) die L2-Bettizahlen definieren (es ergeben sich nicht-negative reelle Zahlen). Um deren Eigenschaften zu verstehen, muss die Funktionalanalysis mit Algebra kombiniert werden.

Die L2-Bettizahlen enthalten neue Informationen über die betrachteten Räume, mit interessanten Anwendungen in verschiedenen Gebieten.

Man erhält zum Beispiel:

- Falls X ein endlicher CW-Komplex, so dass $\pi_1(X)$ mittelbar (z.B. auflösbar) und alle anderen Homotopiegruppen trivial, ist seine Euler-Charakteristik $\chi(X) = 0$.
- Falls M eine Mannigfaltigkeit mit negativer Schnittkrümmung der Dimension 4k ist, so ist ihre Euler-Charakteristik positiv.
- Falls G eine Gruppe mit unendlichem Normalteiler H ist, so dass H endlich erzeugt und G/H endlich präsentiert ist, so hat jede Präsentation von G höchstens einen Erzeuger mehr als Relationen vorliegen.

Interessant (und für die Anwendungen relevant) ist, dass die L2-Bettizahlen sowohl analytisch (mit Hilfe des Laplace-Operators) also auch kombinatorisch definiert werden können.

Im Seminar wollen wir von Grund auf die benötigte Theorie entwickeln. Hierzu auch die Grundlagen in Funktionalanalysis und homologischer Algebra (Überblicksweise) gelegt werden.

Über das Gebiet können Arbeiten verteilt werden.

Ablauf des Seminars

Thema	Quelle	Termin	Name
Überblick über L^2-Bettizahlen		**12.7., 12:15**	Thomas Schick
Hilberträume und Operatoren		??	
Gruppen- von Neumann Algebren und Hilbertmoduln	L 1.1.1, 1.1.2		
die zugehörige Dimensionstheorie	L 1.1.3		
Γ-CW-Komplexe und der zelluläre Kettenkomplex einer Überlagerung	L 1.2.1		
Homologische Algebra für Hilbertmoduln	L 1.1.4		
Zelluläre L2-Bettizahlen und ihre Eigenschaften I	L 1.2.2 und 1.2.3 bis 1.38		
Zelluläre L2-Bettizahlen und ihre Eigenschaften II	L 1.2.2 und 1.2.3 bis 1.38		
Amenable Gruppen und L2-Bettizahlen	L 6.4, E		
Defekt und Euler-Charakteristik von Gruppen	L 7.2, 7.3		
Approximation von L2-Bettizahlen und Konsequenzen I	L 13.1, 13.2		
Approximation von L2-Bettizahlen und Konsequenzen II	L 13.1, 13.2		
Ganzzahligkeit von L2-Bettizahlen I	L 10.2		
Ganzzahligkeit von L2-Bettizahlen II	L 10.3.3–V.6		
Nicht-Ganzzahligkeit von L2-Bettizahlen	DS, L 10.1.4		

Literatur

DS Dicks, Warren and Schick, Thomas. The spectral measure of certain elements of the complex group ring of a wreath product. Geom. Dedicata 93 (2002), 121137.

E Elek, Gbor On the analytic zero divisor conjecture of Linnell. Bull. London Math. Soc. 35 (2003), no. 2, 236238

Li Peter Linnell: Division rings and group von Neumann algebras. Forum Math. 5 (1993), no. 6, 561576.

L Wolfgang Lück: L2-Invariants, Theory and Applications to Geometry and K-Theory; Springer Verlag 2002

Viele weitere Literaturangaben finden sich in Lücks Buch.