1 Distributionen und der Satz von Frobenius

1.1 Vorbemerkungen

Definition 1.1. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit, sei (U, φ) ein Koordinatensystem auf M mit Koordinatenfunktionen $x_1, \ldots, x_d$. Sei $0 \leq c \leq d$ eine ganze Zahl, sei $a \in \varphi(U)$. Sei

$$S := \{m \in U : x_i(m) = r_i(a), i = c+1, \ldots, d\}.$$

Dann ist der Unterraum S mit den Koordinatenfunktionen $x_j, j = 1, \ldots, c$ eine Mannigfaltigkeit, sie wird mit der Inklusion $i : N \to M$ eine Untermannigfaltigkeit von M und heißt **Scheibe** des Koordinatensystems (U, φ).

Definition 1.2. Eine Menge $x_1, \ldots, x_j$ mit $x_i \in C^\infty(U), i = 1, \ldots, j$, wobei U eine Umgebung eines Punktes $m_0 \in M$ ist, heißt **unabhängig bei** m_0, wenn die Differentiale $dy_1, \ldots, dy_j$ linear unabhängig in $(T_{m_0}M)^*$ sind.

Lemma 1.3. *Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit, sei $x_1, \ldots, x_d$ eine Menge bei $m_0 \in M$ unabhängiger Funktionen. Dann bilden die $x_1, \ldots, x_d$ ein Koordinatensystem auf einer Umgebung von m_0.*

1.2 Vektorfelder

Definition 1.4. Sei $\psi : N \to M$ glatt, sei X ein Vektorfeld auf M, sei $\tilde{X}$ ein Vektorfeld auf N. X und $\tilde{X}$ heißen **ψ-verwandt**, falls

$$d\psi \circ \tilde{X} = X \circ \psi$$

Lemma 1.5. *Sei $\psi : N \to M$ glatt, seien X, Y Vektorfelder auf M, sei $\tilde{X}, \tilde{Y}$ Vektorfelder auf N. Wenn X und $\tilde{X}$ sowie Y und $\tilde{Y}$ ψ-verwandt sind, so sind auch $[X, Y]$ und $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ ψ-verwandt.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
d\psi([X,Y]_n)(f) &= [X,Y]_n(f \circ \psi) = X_n(Y(f \circ \psi)) - Y_n(X(f \circ \psi)) \\
&= X_n(d\psi \circ Y(f)) - Y_n(d\psi \circ X(f)) \\
&= X_n(\tilde{Y}(f) \circ \psi) - Y_n(\tilde{X}(f) \circ \psi) \\
&= d\psi(X_n)(\tilde{Y}(f)) - d\psi(Y_n)(\tilde{X}(f)) \\
&= \tilde{X}_{\psi(n)}(\tilde{Y}(f)) - \tilde{Y}_{\psi(n)}(\tilde{X}(f)) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{\psi(n)}(f)
\end{aligned}$$

□

Lemma 1.6. *Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit, sei $m \in M$, sei X ein glattes Vektorfeld auf M mit $X_m \neq 0$. Dann existiert ein Koordinatensystem (U, ϕ) mit Koordinatenfunktionen $x_1, \ldots, x_d$ auf einer Umgebung von m, so dass*

$$X_{|U} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{|U}$$

1.3 Distributionen und Integral-Mannigfaltigkeiten

Definition 1.7. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit, sei $c \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq c \leq d$. Eine **c-dimensionale Distribution D auf M** ist eine Wahl eines c-dimensionalen Unterraumes $D(m)$ von $T_m M$ für jedes $m \in M$.

Die Distribution heißt **glatt**, falls es für jedes $m \in M$ eine Umgebung U von m und glatte Vektorfelder $X_1, \ldots, X_c$ auf U gibt, die D an jedem Punkt in U aufspannen.

Ein Vektorfeld X auf M **gehört zu** (oder **liegt in**) der Distribution D ($X \in D$), falls $X_m \in D(m)$ für alle $m \in M$.

Eine glatte Distribution D heißt **involutiv** oder **vollständig integrierbar**, falls $[X, Y] \in D$ für alle Vektorfelder X, Y, die in D liegen.

Definition 1.8. Eine Untermannigfaltigkeit (N, ψ) von M ist eine **Integral-Mannigfaltigkeit einer Distribution D auf M**, falls für alle $n \in N$ gilt

$$d\psi(T_n N) = D(\psi(n)).$$

Lemma 1.9. *Sei D eine glatte Distribution auf M, so dass durch jeden Punkt von M eine Integral-Mannigfaltigkeit von D läuft. Dann ist D involutiv.*

Beweis. Seien $X, Y \in D$ glatte Vektorfelder. Zu zeigen ist $[X, Y] \in D$, also $[X, Y]_m \in D(m)$ für alle $m \in M$. Sei (N, ψ) Integral-Mannigfaltigkeit von D durch m, mit $\psi(n_0) = m$.

$d\psi : T_n N \to D(\psi(n))$ ist injektiv, weil ψ eine Immersion ist, und surjektiv, weil (N, ψ) Integral-Mannigfaltigkeit von D ist. Also ist $d\psi$ für jedes $n \in N$ ein Isomorphismus.

Also existieren Vektorfelder $\tilde{X}, \tilde{Y}$ auf N, die zu X, bzw. Y ψ-verwandt sind, d.h.

$$\begin{aligned} d\psi \circ \tilde{X} &= X \circ \psi \\ d\psi \circ \tilde{Y} &= Y \circ \psi \end{aligned}$$

Damit sind nach Lemma 1.5 $[X, Y]$ und $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ ebenfalls ψ-verwandt, d.h.

$$d\psi \circ [\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y] \circ \psi.$$

Also ist $[X, Y]_m = d\psi([\tilde{X}, \tilde{Y}]_{n_0}) \in D(m)$. □

Lemma 1.10. *Es sei M eine d-dimensionale Manngifaltigkeit, D eine c-dimensionale Distribution auf M und (U, φ) ein Koordinatensystem mit Koordinatenfunktionen $x_1, \ldots, x_d$. Äquivalent sind*

1. *Für alle $m \in U$ ist $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ eine Basis von $D(m)$.*
2. *Die Scheiben $x_i =$ konstant für $i = c + 1, \ldots, d$ sind Integral-Mannigfaltigkeiten von D.*

Beweis. Es sei $m \in U$ und N eine Scheibe mit $x_i =$ konstant für $i = c+1, \ldots, d$ mit $m \in N$. Dann ist

$$\begin{aligned} T_m N &= \left\{ \sum_{i=1}^{c} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \\ &= di(T_m N) = D(i(m)) = D(m). \end{aligned}$$

□

1.4 Der Satz von Frobenius

Satz 1.11 (Frobenius)**.** *Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit, sei D eine c-dimensionale, glatte, involutive Distribution auf M, sei $m \in M$. Dann existiert eine Integral-Mannigfaltigkeit von D durch m.*
Es existiert sogar ein kubisches, um m zentriertes Koordinatensystem (U, φ) mit Koordinatenfunktionen $x_1, \ldots, x_d$, so dass die Scheiben

$$x_i = \text{ const für alle } i = c+1, \ldots, d$$

Integral-Mannigfaltigkeiten von D sind. Falls außerdem (N, ψ) eine zusammenhängende Integral- Mannigfaltigkeit von D ist, so dass $\psi(N) \subset U$, dann ist $\psi(N)$ in einer dieser Scheiben.

Beweis. Induktion nach c:
<u>$c = 1$:</u>
D ist eine 1-dimensionale, glatte Distribution, also gibt es auf einer Umgebung U von m ein glattes Vektorfeld X, welches D aufspannt, d.h. $X_m \neq 0$. Hierfür liefert Lemma 1.6 ein Koordinatensystem (U, φ), welches kubisch und zentriert gewählt werden kann, so dass

$$X_{|U} = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Dann kann man eine Scheibe $x_i =$ konstant für $i = 2, \ldots, d$ betrachten, sie heiße N. Damit ist (N, i) nach Lemma 1.10 eine Integral-Mannigfaltigkeit der Distribution D, da $\frac{\partial}{\partial x_1}$ eine Basis von D ist. Also gilt der Satz für $c = 1$.
<u>Induktionsschritt:</u> Angenommen, der Satz sei für $c - 1$ richtig. Dann ist zu zeigen, dass er dann auch für c richtig ist.

Sei also D eine c-dimensionale, glatte, involutive Distribution auf M. Da D glatt ist, existieren glatte Vektorfelder $X_1, \ldots, X_c$, die D auf einer Umgebung $\tilde{V}$ von m aufspannen.

Lemma 1.6 liefert dann ein Koordinatensystem $(V, y_1, \ldots, y_d)$ mit $V \subset \tilde{V}$, welches um m zentriert ist und

$$X_1|_V = \frac{\partial}{\partial y_1}$$

erfüllt. Definiere nun auf V

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \\ Y_i &= X_i - X_i(y_1) X_1 \quad i = 2, \ldots, c. \end{aligned}$$

Dann sind die Y_i glatt, unabhängig und sie spannen D auf. Die Glattheit folgt daraus, dass die X_i glatt sind, linear unabhängig sieht man so:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{c} \lambda_i Y_i(m) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\lambda_1 - \sum_{i=2}^{c} \lambda_i X_i(y_1)\right) X_1(m) + \sum_{i=2}^{c} \lambda_i X_i(m) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda_1 - \sum_{i=2}^{c} \lambda_i X_i(y_1) = 0 \text{ und } \lambda_i = 0 \text{ für } i = 2, \ldots, c \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda_i = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, c
\end{aligned}$$

Ähnlich sieht man, dass die Y_i D aufspannen: sei $v = \sum_{i=1}^{c} \lambda_i X_i(m) \in D$. Setze dann $\mu_i = \lambda_i$ für $i = 2, \ldots, c$ und $\mu_1 = \lambda_1 + \sum_{i=2}^{c} \lambda_i X_i(y_1)$. Dann ist $v = \sum_{i=1}^{c} \mu_i Y_i(m)$, also spannen die Y_i D auf.

Sei S die Scheibe mit $y_1 = 0$ und sei

$$Z_i = Y_i | S \quad (i = 2, \ldots, d).$$

Dann gilt weiterhin

$$Y_i(y_1) = (X_i - X_i(y_1) X_1)(y_1) = X_i(y_1) - (X_i(y_1) \underbrace{X_1(y_1)}_{=1}) = 0. \tag{1}$$

Seien $\alpha_{ij} : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$Y_i(q) = \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Wegen (1) ist dann $\alpha_{i1}(q) = 0$, damit ist dann für $q \in S$

$$Z_i(q) = Y_i(q) = \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j=2}^{d} \alpha_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial y_j} \in T_q S, \tag{2}$$

die Z_i sind also Vektorfelder auf S. Sie sind glatt und linear unabhängig an jedem $q \in S$, da die Y_i diese Eigenschaften haben, also spannen die Z_i eine $(c-1)$-dimensionale Distribution $\tilde{D}$ auf S auf. Diese ist involutiv:

Z_i und Y_i sind i-verwandt, wobei $i : S \to M$ die Inklusion bezeichnet, wie man aus (2) sieht. Also sind auch ihre Lie-Klammern nach Lemma 1.5 i-verwandt. Es gilt

$$[Y_i, Y_j]_q(y_1) = (Y_i)_q(Y_j(y_1)) - (Y_j)_q(Y_i(y_1)) = 0,$$

daher gibt es C^∞-Funktionen c_{ijk}, so dass

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=2}^{c} c_{ijk} Y_k,$$

also

$$[Z_i, Z_j] = \sum_{k=2}^{c} c_{ijk|S} Z_k \in \tilde{D}.$$

Seien nun $A, B \in \tilde{D}$ Vektorfelder auf S, mit $A = \sum_{i=2}^{c} a_i Z_i$ und $B = \sum_{i=2}^{c} b_i Z_i$. Dann ist

$$[A, B] = \sum_{i,j} a_i b_j [Z_i, Z_j] \in \tilde{D}.$$

Damit ist $\tilde{D}$ involutiv.

Nach Induktionsannahme existiert also ein Koordinatensystem $w_2, \ldots, w_d$ auf einer Umgebung von m in S, so dass die Scheiben $w_i =$ konstant für $i = c+1, \ldots, d$ genau die Integral- Mannigfaltigkeiten der Distribution $\tilde{D}$ sind.

Es bezeichne $\pi : V \to S$ die Projektion im y-Koordinatensystem, dann werden durch

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_i &= w_j \circ \pi \quad (j = 2, \ldots, d) \end{aligned}$$

Koordinatenfunktionen eines Koordinatensystemes (U, φ) auf einer Umgebung $U \subset V \subset M$ von m definiert, da die x_i unabhängig bei m sind und $x_i(m) = 0$ gilt. Dieses kann kubisch gewählt werden. Die Unabhängigkeit der x_i sieht man so: es ist $(w_2, \ldots, w_d)$ ein Diffeomorphismus, d.h. die Ableitung $(dw_2, \ldots, dw_d)$ ist ein Isomorphismus, also sind $dw_2, \ldots, dw_d$ linear unabhängig. Da nun aber $dx_j = dw_j \circ d\pi, (j = 2, \ldots, d)$ ist, sind diese auch linear unabhängig. Diese verschwinden aber alle in y_1-Richtung, anders als dy_1, daher kann $dx_1 = dy_1$ nicht als Linearkombination der $dx_i, i = 2, \ldots, d$ geschrieben werden.

Zu zeigen ist, dass

$$Y_i(x_{c+r}) \equiv 0 \text{ auf } U \quad (i = 1, \ldots, d; r = 1, \ldots, d-c), \tag{3}$$

denn dann ist $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_c}$ an jedem Punkt aus U eine Basis von D; das sieht man so: es ist $Y_i = \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$ mit $\alpha_{ij} \in C^\infty(U)$. Damit gilt dann

$$Y_i(x_{c+r}) = \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij} \frac{\partial x_{c+r}}{\partial x_j} = \alpha_{i(c+r)} = 0$$

und somit $Y_i = \sum_{j=1}^{c} \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$. Damit ist dann

$$\begin{aligned} D(m) &= \left\{ \sum_{i=1}^{c} \lambda_i (Y_i)_m : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{c} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{c} \alpha_{ij}(m) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{c} \left(\sum_{j=1}^{c} \lambda_i \alpha_{ij}(m) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

und die $\frac{\partial}{\partial x_j}$ erzeugen $D(m)$. Linear unabhängig sind sie, weil die x_i Koordinatenfunktionen sind, d.h. die $\frac{\partial}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, d$ bilden bereits eine Basis des $T_m M$ und sind daher linear unabhängig.

Hieraus folgt nach Lemma 1.10, dass die Scheiben x_i = konstant für $i = c+1, \dots, d$ Integral-Mannigfaltigkeiten von D sind. Damit wäre der Induktionsschritt bewiesen.

Es bleibt (3) zu zeigen. Es gilt

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_1} = \begin{cases} 1 & (j = 1) \\ 0 & (j = 2, \dots, d) \end{cases}$$

nach Definition der x_j. Und deswegen ist dann

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \text{ auf } U, \tag{4}$$

denn sei $Y_1 = \sum_{i=1}^d c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, dann ist

$$\begin{aligned} Y_1(x_j) &= \sum_{i=1}^d c_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = c_j \text{ und} \\ Y_1(x_j) &= \frac{\partial x_j}{\partial y_1}, \end{aligned}$$

daher gilt $c_1 = 1$ und $c_j = 0$ für $j = 2, \dots, d$. Also gilt (3) für $i = 1$.

Sei daher nun $i \in \{2, \dots, c\}$ und $r \in \{1, \dots, d-c\}$. Damit ist dann

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Y_i(x_{c+r})) = Y_1(Y_i(x_{c+r})) - \underbrace{Y_i(Y_1(x_{c+r}))}_{=0} = [Y_1, Y_i](x_{c+r}).$$

Da D involutiv ist und $Y_i \in D$ ist, ist auch $[Y_1, Y_i] \in D$, d.h. es existieren $c_{ik} \in C^\infty(U)$, so dass

$$[Y_1, Y_i] = \sum_{k=1}^c c_{ik} Y_k,$$

und also

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Y_i(x_{c+r})) = \sum_{k=2}^c c_{ik} Y_k(x_{c+r}). \tag{5}$$

Sei nun T eine Scheibe von U mit x_2 = konstant, $\dots, x_d$ = konstant. Auf T ist nun $Y_i(x_{c+r})$ eine Funktion, die nur von x_1 abhängt, damit wird dann (5) zu einem System von $c-1$ homogenen linearen Differentialgleichungen. Ein solches System hat bei gegebenen Anfangsbedingungen eine eindeutige Lösung. Da das System homogen ist, sind die Null-Funktionen eine Lösung.

Eine solche Scheibe T hat genau einen Punkt mit $S \cap U$ gemein, und auf $S \cap U$ gilt

$$Y_i(x_{c+r}) = Z_i(w_{c+r}) = 0 \quad (i = 2, \dots, c),$$

denn die Scheiben des Koordinatensystems $w_2, \dots, w_d$ sind die Integral-Mannigfaltigkeiten von $\tilde{D}$, d.h. $\frac{\partial}{\partial w_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_c}$ ist eine Basis von $\tilde{D}(q)$, also ist $(Z_i)_q(w_{c+r}) = \lambda_2 \frac{\partial w_{c+r}}{\partial w_2} + \dots + \lambda_c \frac{\partial w_{c+r}}{\partial w_c} = 0$.

Also sind die $Y_i(x_{c+r})$ auf jedem solchen T identisch Null, d.h. aber, dass sie auf ganz U verschwinden. Also gilt (3) und der Induktionsschritt ist vollzogen.

Sei nun (N, ψ) eine zusammenhängende Integral-Mannigfaltigkeit von D mit $\psi(N) \subset U$. Es sei π die Projektion des $\mathbb{R}^d$ auf die letzten $d - c$ Koordinaten. Dann ist $\pi \circ \varphi = (0, \ldots, 0, x_{c+1}, \ldots, x_d)$. Damit verschwindet dann

$$d(\pi \circ \varphi) = (0, \ldots, 0, dx_{c+1}, \ldots, dx_d)$$

auf Vektoren aus D, denn sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und $\frac{\partial}{\partial x_i}$ mit $i \in \{1, \ldots, c\}$, dann ist

$$d(\pi \circ \varphi)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \pi \circ \varphi) = 0.$$

Da nun aber $d\psi(T_n N) = D(\psi(n))$ ist, gilt auch

$$d_n(\pi \circ \varphi \circ \psi) \equiv 0$$

für alle $n \in N$. Da N zusammenhängend ist, heißt dies, dass $\pi \circ \varphi \circ \psi$ eine konstante Abbildung ist, d.h. $\psi(N)$ ist in einer der Scheiben enthalten. $\square$

Definition 1.12. Sei D eine Distribution auf einer Mannigfaltigkeit M. Eine zusammenhängende Integral-Mannigfaltigkeit (N, ψ) heißt **maximale Integral-Mannigfaltigkeit**, wenn es keine zusammenhängende Integral-Mannigfaltigkeit (N_1, ψ_1) von D gibt, so dass $\psi(N) \subsetneq \psi_1(N_1)$ ist.

Satz 1.13. *Sei D eine c-dimensionale, involutive, glatte Distribution auf M^d, sei $m \in M$. Dann gibt es eine eindeutige maximale und zusammenhängende Integral-Mannigfaltigkeit von D durch m und jede zusammenhängende Integral-Mannigfaltigkeit von D durch m ist in der maximalen enthalten.*

Beweisidee. Sei $K \subset M$ die Menge aller Punkte $p \in M$, so dass es eine stückweise glatte Kurve von m nach p gibt und die glatten Stücke Integralkurven von D sind, d.h. ihre Tangentialvektoren liegen in D.

Mit der Inklusionsabbildung $i : K \to M$ wird (K, i) eine zusammenhängende Integral-Mannigfaltigkeit von D durch m.

Diese ist maximal, denn sei (N, ψ) eine weitere zusammenhängende Integral-Mannigfaltigkeit von D durch m und sei $p \in \psi(N)$. Da zusammenhängende Mannigfaltigkeiten wegzusammenhängend sind, existiert ein Weg $c : [0, 1] \to N$, der $\psi^{-1}(m)$ mit $\psi^{-1}(p)$ verbindet. Dann ist $\psi \circ c$ eine stückweise glatte Integralkurve von D, die m und p verbindet. Also ist $p \in K$, und damit $\psi(N) \subset K$ und K ist maximal.

Zur Eindeutigkeit: sei (N, ψ) eine andere maximale, zusammenhängende Integral-Mannigfaltigkeit von D durch m. Dann ist wie oben $\psi(N) \subset K$, d.h. ψ faktorisiert:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\psi_0"'] & M \\ & K \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Dann ist ψ_0 surjektiv, weil (N, ψ) maximal ist, d.h. $\psi(N)$ kann keine echte Teilmenge von K sein. Damit kann man folgern, dass ψ_0 ein Diffeomorphismus ist. $\square$