Maximale Tori

. . . .

"Diagonalisierung" in Lie-Gruppen

Oliver Bräunling

1. Vorbemerkungen

Wir wollen uns mit der Frage beschäftigen, ob eine gegebene Gruppe G eine (möglichst kleine) Untergruppe T besitzt, so dass T alle Konjugationsklassen schneidet. Dazu bemerken wir zunächst:

Proposition 1. *Es sei G eine Gruppe und T eine Untergruppe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *T schneidet jede Konjugationsklasse.*
(2) *Für alle $a \in G$ gibt es ein $g \in G$ und ein $t \in T$, so dass $a = gtg^{-1}$.*

Proof. Klar. $\square$

Hier findet man mögliche Anwendungen für eine solche Untergruppe T. Beispielsweise könnte G eine Matrizengruppe sein und T eine Untergruppe, für die man weiß, dass $\det(t) = 1$ für alle $t \in T$. Dann würde für ein beliebiges $a \in G$ die Aussage

$$\det(a) = \det(gtg^{-1}) = \det(g)\det(t)\det(g)^{-1} = \det(t) = 1$$

folgen, d.h. man kann eine Aussage für T beweisen und sie dann für ganz G folgern. Damit so ein Argument praktikabel ist, müsste man aber erstmal zeigen, dass ein solches T überhaupt existiert und dort in der Tat die Determinante leichter als im Allgemeinen zu berechnen ist. Man denke hierbei exemplarisch vielleicht an die komplizierte allgemeine Determinantenformel und daran, dass man für Dreiecksmatrizen lediglich die Hauptdiagonalelemente multiplizieren muss, um die Determinante zu berechnen.

Es ist allerdings keineswegs klar, dass so ein nützliches T existiert; es ist sogar oft falsch (bzw. T ist so groß, dass die Existenz von T nichts nützt). Vergleiche dazu mit dem Satz am Ende dieses Textes über endliche Gruppen.

Proposition 2. *Es sei $G := O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ oder $Sp(n)$. Dann gibt es eine echte Untergruppe T, die alle Konjugationsklassen schneidet.*

Diese Proposition könnte man viel detaillierter ausführen und T explizit angeben; wir werden dies gleich in zwei Beispielen andeuten. Der Beweis der obigen Aussage sollte im Wesentlichen bereits in AGLA II gemacht worden sein. Dort spricht man allerdings eher von einem 'Basiswechsel', denn wenn man eine Matrix X in ein anderes Basissystem überführt, ergibt sich genau AXA^{-1}, was ja nichts anderes ist als die Konjugation innerhalb der Gruppe (man muss allerdings aufpassen, dass auch der 'Basiswechsel' A in der betrachteten Gruppe G liegt). Und natürlich ist der Begriff des Basiswechsels anschaulich viel zugänglicher als der der Konjugation.

EXAMPLE 1. *In $U(n)$ und $SU(n)$ ist jede Matrix bekanntermaßen*[1] *konjugiert zu einer Matrix der Gestalt*

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & & & & & \\ & e^{i\phi_2} & & & & \\ & & e^{i\phi_3} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{i\phi_n} \end{pmatrix}$$

(mit $\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_n \in 2\pi\mathbb{Z}$ im Falle von $SU(n)$). Die Matrizen von dieser Form bilden eine Untergruppe T. Diese Untergruppe schneidet aber nicht nur jede Konjugationsklasse, sie ist sogar abelsch, wie man leicht sieht. Damit haben wir in der Tat eine Untergruppe T gefunden, die die von uns gewünschte Eigenschaft hat. Überdies ist diese Gruppe noch von besonders einfacher Gestalt.

EXAMPLE 2. *In $SO(2n)$ ist jede Matrix bekanntermaßen konjugiert zu einer Matrix der Gestalt*

$$\begin{pmatrix} \cos\phi_1 & \sin\phi_1 & & & & \\ -\sin\phi_1 & \cos\phi_1 & & & & \\ & & \cos\phi_2 & \sin\phi_2 & & \\ & & -\sin\phi_2 & \cos\phi_2 & & \\ & & & & \ddots & \sin\phi_n \\ & & & & -\sin\phi_n & \cos\phi_n \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen bilden wieder eine Untergruppe. Zudem verhalten sich die einzelnen Drehungen zweidimensionaler Unterräume bekanntermaßen additiv bezüglich des Drehwinkels, wenn sie nacheinander ausgeführt werden, d.h. wieder haben wir ein T mit den von uns gewünschten Eigenschaften gefunden und wieder ist T abelsch.

Wir werden uns jetzt gleich der allgemeinen Theorie zuwenden und dabei sehen, dass ein solches T bei kompakten und zusammenhängenden Lie-Gruppen stets existiert und auch stets abelsch ist.

Vorher vielleicht aber noch eine kleine Anmerkung zur Anschauung. Wir hatten bereits erwähnt, dass der 'Basiswechsel' die anschaulichere Terminologie für die Konjugation in einer Matrizengruppe ist. Dann wäre eine Konjugationsklasse grob gesprochen also die Gesamtheit aller Matrizen, die beim Durchlaufen aller (via G) erreichbaren Basen einen Operator repräsentieren. Das klingt noch nicht wirklich anschaulich. Es ist allerdigs so, dass die Eigenwerte eines Operators unabhängig von der Basiswahl sind; schließlich lassen sich die Eigenwerte auch völlig ohne Erwähnung einer Basis definieren. Dies bedeutet, dass sich bei der Konjugation in einer Matrixgruppe die Eigenwerte innerhalb einer Konjugationsklasse nicht ändern können; d.h. die Eigenwerte sind entlang einer Konjugationsklasse

[1] 'bekanntermaßen' verwenden wir im Sinne von 'ist Stoff einer AGLA oder Algebra-Vorlesung'

konstant. Man kann nun fragen, ob dies genügt, eine Konjugationsklasse sogar völlig zu beschreiben. Für die Gruppen $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ und $SU(n)$ funktioniert das zum Beispiel. Für $U(n)$ und $SU(n)$ kann man sich das direkt klarmachen anhand des ersten obigen Beispiels. Allgemein scheitert dieses Prinzip jedoch, z.B. in $GL(2)$, wie man an den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sehen kann, die beide nur den Eigenwert 1 besitzen, aber in zwei verschiedenen Konjugationsklassen liegen (beachte: die linke Matrix ist das Einselement, also Teil einer ein-elementigen Konjugationsklasse). Aber falls das Prinzip funktioniert, also z.B. in $O(n)$, kann man sich eine Konjugationsklasse in der Gruppe einfach als einen festen Satz von Eigenwerten vorstellen. Damit hat man in diesem Fall eine recht einfache Konkretisierung des Begriffes der Konjugationsklasse gefunden.

2. Tori als Prototyp

Proposition 3 (Struktursatz für Tori). *Es sei G eine Lie-Gruppe und T eine* abelsche, zusammenhängende Untergruppe *(fortan* Torus *genannt)*

(1) *Dann ist* $\exp : \mathfrak{t} \to T$ *ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.*
(2) *Dann gilt $G \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ für ein geeignetes n, d.h. G ist ein topologischer Torus.*

Proof. (1) Da $T \subseteq G$ eine abelsche Untergruppe ist, gilt $\exp(X)\exp(Y) = \exp(Y)\exp(X)$ bzw. $[X,Y] = 0$ in der Lie-Algebra $\mathfrak{t}$ (von T), d.h. nach BCH-Formel

$$\exp(X+Y) = \exp(X)\cdot\exp(Y).$$

Insofern ist $\exp : \mathfrak{t} \to T$ ein Gruppenhomomorphismus, d.h. $\operatorname{im}\exp(\mathfrak{t})$ ist eine Untergruppe von T.

(2) Nun wissen wir bereits, dass exp einen Diffeomorphismus einer Nullumgebung von $\mathfrak{t}$ auf eine Einsumgebung von T liefert, d.h. $\{\exp(X+\varepsilon), \varepsilon$ aus Nullumgebung in $\mathfrak{t}\}$ ist wegen

$$\exp(X+\varepsilon) = \exp(X)\cdot \underset{\text{(Einsumgebung)}}{\exp(\varepsilon)}$$

eine offene Umgebung von $\exp(X)$. Da dies für alle $X \in \mathfrak{t}$ funktioniert, ist das Bild $\operatorname{im}\exp(\mathfrak{t})$ offen. Demnach ist $\operatorname{im}\exp(\mathfrak{t})$ eine offene Untergruppe von T. Damit ist es bekanntermaßen auch eine abgeschlossene Untergruppe. Also ist $\operatorname{im}\exp(\mathfrak{t})$ offen *und* abgeschlossen in T. Da T zusammenhängend ist, folgt $\operatorname{im}\exp(\mathfrak{t}) = G$, d.h. exp ist surjektiv.

(3) Als Gruppe aufgefasst gilt $\mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^n$. Weiter ist $\ker\exp(\mathfrak{t})$ eine *diskrete* Untergruppe von $\mathfrak{t}$ (denn exp ist Diffeomorphismus der Nullumgebung von $\mathfrak{t}$, d.h. jedes Element, dass auf 1 abgebildet wird, muss isoliert sein), somit gilt bekanntermaßen $\ker\exp(\mathfrak{t}) \simeq \mathbb{Z}^n$. Aus dem Homomorphiesatz für Gruppen folgt $\operatorname{im}\exp(\mathfrak{t}) \cong \mathfrak{t}/\ker\exp(\mathfrak{t})$ bzw. $T \simeq \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$. Das ist aber ein topologischer Torus. □

Zunächst ist überhaupt nicht klar, ob eine Lie-Gruppe überhaupt Tori besitzt. In dieser Hinsicht müssen wir uns jedoch keine Sorgen machen.

Proposition 4 (Existenzsatz für Tori). *Jede Lie-Gruppe besitzt Tori und insbesondere maximale Tori.*

Proof. (1) Das ist ganz einfach. Ist G nichttrivial, so ist die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mindestens eindimensional. Also nehmen wir ein nichtverschwindendes $X \in \mathfrak{g}$ und dann ist der Abschluss $\overline{\{\exp(tX)\}_{t\in\mathbb{R}}}$ eine Untergruppe von G. Sie ist trivialerweise abgeschlossen, klarerweise abelsch (denn $\mathbb{R}$ ist abelsch) und zusammenhängend, denn $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend und die Exponentialabbildung ist stetig. Damit haben wir einen Torus gefunden.
(2) Jetzt müssen wir noch zeigen, dass Tori nicht beliebig groß sein können, d.h. das sie maximal sein können. Es sei dazu

$$T \supset T_1 \supset T_2 \supset \cdots \supset G$$

eine unendliche echt aufsteigende Folge immer größerer Tori in G. Dann gehört zu jedem Torus T_i eine zugehörige Lie-Algebra t_i und wir enthalten eine analoge Folge

$$\mathfrak{t} \supset \mathfrak{t}_1 \supset \mathfrak{t}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}.$$

Die die Dimension der Lie-Algebren denen der Tori entspricht, steigt die Dimension der Lie-Algebren in einer unendlichen Folge zwangsläufig unendlich an. Da $\mathfrak{g}$ aber eine feste endliche Dimension hat, kann eine solche unendliche Folge $T \supset T_1 \supset T_2 \supset \cdots$ nicht existieren, d.h. jede Folge aufsteigender Tori muss ein maximales Element haben. □

3. Konjugation maximaler Tori

Technische Hilfsmittel: Wir wollen als nächstes zeigen, dass zwei maximale Tori stets zueinander konjugiert sind. Dazu benötigen wir zwei technische Hilfssätze, die wir gleich beweisen. Möglicherweise ist es hilfreich, sie zunächst zu überlesen und als gegeben anzunehmen; und sie dann erst im Anschluss an das Hauptresultat nachzuvollziehen.

Wir wollen zunächst darlegen, dass jeder Torus als Abschluss einer von einem Element erzeugten Untergruppe geschrieben werden kann. Auf diese Weise können wir Aussagen über ein einzelnes Element auf einen ganzen Torus übertragen.

Proposition 5 (Erzeugersatz). *Es sei T ein Torus. Dann gibt es ein $u \in T$ mit $T = \overline{\langle u \rangle}$.*

Proof. 1.) Wir betrachten den Torus T der Dimension n als $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ und wählen für die kanonischen Repräsentanten in $[0,1)^n$ die Maximumsnorm. Es seien $U_0, U_1, U_2, \ldots$ eine Basis offener Mengen von T.
Ein Würfel (der Größe ε) ist eine Menge der Gestalt

$$C = \{x \in T \mid |x_i - \xi_i| \leq \varepsilon\}.$$

Sei ein Würfel C_m der Größe ε in T gegeben. Dann gibt es sicher irgendeine Ganzzahl n_m, sodass $n_m \cdot \varepsilon > 1$. Das bedeutet aber, dass das $n \cdot C_m = T$ ist. Es gibt also mit Sicherheit einen Würfel, nennen wir ihn C_{m+1}, sodass $n_m \cdot C_{m+1} \subset U_m$ gilt.
2.) Auf diese Weise bekommen wir eine Folge $C_0, C_1, C_2, \ldots$ abgeschlossener Würfel. Wegen der Kompaktheit von T folgt, dass

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} C_m \neq \varnothing.$$

Wir wählen u aus diesem Schnitt. Sei nun m beliebig. Dann gilt $u^{n_m} = n_m \cdot_{\mathbb{R}} u$ mit $u \in C_{m+1}$, aber $n_m \cdot C_{m+1} \subset U_m$, d.h. $u^{n_m} \in U_m$. Da $U_0, U_1, U_2, \ldots$ eine Basis offener Mengen sind, gilt offenbar $T = \overline{\langle u \rangle}$, denn in jeder offenen Menge von T liegt eine Potenz von u. $\square$

Dieser Beweis lässt sich wesentlich leichter verstehen, wenn man sich die obige Konstruktion in einem Bild veranschaulicht.

Nun zu unserem zweiten technischen Hilfsmittel:

PROPOSITION 6. *Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe. Dann gibt es ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, sodass für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ und $g \in G$ die Gleichung*

$$\langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle$$

gilt. Dann ist

(1) $\mathrm{Ad}(g)$ *eine Isometrie für alle $g \in G$ (trivial);*
(2) $\mathrm{ad}(X)$ *schiefadjungiert für alle $X \in \mathfrak{g}$.*

Wir wollen als Vorbereitung die folgende Ableitung berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathrm{Ad}(\exp(tV)) \mid_{t=0} &= d(\mathrm{Ad}(\exp(tV)))(e_1) \mid_{t=0} \\ &= d\,\mathrm{Ad}_e \circ d \exp_0 V \\ &= \mathrm{ad}(V). \end{aligned}$$

Dass $d\,\mathrm{Ad}_e = \mathrm{ad}$ etc. entnehme der Leser bitte aus dem Vortrag von Johannes.

PROOF. (1) Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf der Lie-Algebra. Dann setzen wir

$$\langle X, Y \rangle' := \int_G \langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y \rangle \, dg,$$

wobei wir das Haar-Maß benutzen. Wegen der Kompaktheit von G ist dieses Integral stets endlich. Ferner ist die Bilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ sofort ersichtlich aufgrund der Linearität des Integrals. Wir bekommen ferner $\langle X, X \rangle' \geq 0$, da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist und das Integral über nichtnegative Zahlen nichtnegativ ist. Haben wir $\langle X, X \rangle' = 0$, so muss $\langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)X \rangle = 0$ für alle g gelten, denn $\langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)X \rangle$ ist stets nichtnegativ und stetig, d.h. gäbe es ein $\langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)X \rangle > 0$, so wäre die Funktion auch in einer Umgebung von g positiv, d.h. das Integral wäre positiv. Gilt jedoch $\langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)X \rangle = 0$, so muss $X = 0$ sein, da $\langle X, X \rangle$ positiv definit ist. Also ist auch $\langle X, Y \rangle'$ positiv definit; und somit ein Skalarprodukt.

(2) Wir haben gefordert, dass das Skalarprodukt unter der adjungierten Wirkung invariant ist, d.h. für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\frac{d}{dt} \langle \mathrm{Ad}(\exp(tZ))X, \mathrm{Ad}(\exp(tZ))Y \rangle \mid_{t=0} = 0.$$

Allerdings wissen wir, dass

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Ad}(\exp(tZ))X \mid_{t=0} = \mathrm{ad}(Z)X$$

und damit gelangen wir mit der Produktregel zu

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{ad}(Z)X, Y \rangle + \langle X, \mathrm{ad}(Z)Y \rangle &= 0 \\ \langle \mathrm{ad}(Z)X, Y \rangle &= - \langle X, \mathrm{ad}(Z)Y \rangle, \end{aligned}$$

d.h. $\mathrm{ad}(Z)$ ist schiefadjungiert. $\square$

Hauptresultat: Jetzt kommen wir zum Hauptresultat dieses Abschnitts: Zwei beliebige maximale Tori T, T' sind stets zueinander konjugiert.

Bevor wir das beweisen, kann man sich vielleicht erstmal Gedanken machen, wie man so einen Beweis am besten angehen könnte. Es klingt recht stressig, ein g finden zu müssen, sodass $gTg^{-1} = T'$, d.h.

$$\forall t \in T : gtg \in T'.$$

Wie soll man ein g finden, dass so vielen Inklusionsbeziehungen auf einmal genügt? Nun, hierzu könnte man vielleicht das erste unserer beiden technischen Hilfsmittel verwenden. Anstatt ganz T zu betrachten, wählen wir uns einen Ein-Element-Erzeuger u für T und u' für T'. Befassen wir uns nun erstmal mit der einfachen Frage, wie man

$$\forall t \in T : t \in T'$$

prüfen kann (wegen der Maximalität von T und T' ist die obige Aussage offenbar äquivalent zu $T = T'$), indem man nur auf die Erzeuger u und u' guckt. Schließlich hat *ein* Torus T *unendlich viele* denkbare Erzeuger u. Schnell erkennt man, dass wenn $T = T'$ gilt, u und u' in der gleichen abelschen Untergruppe liegen, d.h. $u'u = uu'$. Andererseits, kommutieren u und u' und wären T und T' unterschiedlich, so könnte man das Lie-Algebra-Element U mit $\exp(U) = u$ [beachte, dass wir bewiesen hatten, dass die Exponentialabbildung auf Tori surjektiv ist] einfach an die Lie-Algebra von T' "ankleben" und bekäme eine entsprechende größere abelsche Lie-Algebra und somit eine größere zugehörige Lieuntergruppe, die wieder abelsch und zusammenhängend wäre. Allerdings war T' schon ein maximaler Torus, d.h. so etwas kann es nicht geben. Es folgt $T = T'$. Zusammengefasst: Das Kommutieren der Erzeuger u und u' ist äquivalent dazu, dass T und T' gleich sind. So, damit kann man also die Gleichheit zweier maximaler Tori vollständig mittels zweier Erzeuger prüfen. Sind U und U' die Lie-Algebra-Elemente zu u und u', genügt es daher $[U, U'] = 0$ zu zeigen, um die Gleichheit der Tori zu bekommen. Wie ist das nun mit der Konjugation? Nun, das Differential der Konjugation in der Lie-Gruppe ist gerade Ad (am Einselement), d.h. die Gleichheit zu einem konjugierten Torus zeigt man, indem man $[U, \mathrm{Ad}(g)U'] = 0$ beweist. Wir müssen also lediglich ein $g \in G$ finden, dass eine fest gewählte Lie-Klammer verschwinden lässt. Das klingt viel leichter handhabbar als die Klasse von Inklusionsbeziehungen, mit der wir diesen Gedanken begonnen haben. Also, auf geht's:

Proposition 7. *Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe und T, T' zwei maximale Tori. Dann gibt es ein $u \in G$ mit*

$$gTg^{-1} = T',$$

d.h. alle maximalen Tori sind konjugiert zueinander.

Proof. 1.) Wir betrachten zunächst nur den maximalen Torus T. Es sei $u \in T$ ein topologischer Erzeuger. Da die Exponentialabbildung surjektiv auf den Torus abbildet, gibt es ein $U \in \mathfrak{g}$ mit $u = \exp(U)$.
2.) Nun definieren wir für ein beliebiges $X \in \mathfrak{g}$ die reellwertige Funktion

$$\begin{aligned} F_X : G &\to \mathbb{R} \\ g &\mapsto \langle \mathrm{Ad}(g)U, X \rangle . \end{aligned}$$

Wegen der Kompaktheit von G besitzt diese Funktion sicher ein Extremum, sagen wir $\hat{g}$. Dann muss aber für jede Kurve, die durch $\hat{g}$ geht, die Ableitung von F_X

entlang der Kurve null sein. Beachte dazu, dass $\gamma : t \mapsto \exp(tV)\hat{g}$ eine Kurve ist mit $\gamma(0) = \hat{g}$. Also gilt für alle "Richtungen" $V \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} F(\exp(tV)\hat{g}) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \langle \mathrm{Ad}(\exp(tV)\hat{g})U, X \rangle \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \langle \mathrm{Ad}(\exp(tV)) \,\mathrm{Ad}(\hat{g})U, X \rangle \mid_{t=0} \\
&= \left\langle \frac{d}{dt} \mathrm{Ad}(\exp(tV)) \mid_{t=0} \mathrm{Ad}(\hat{g})U, X \right\rangle \\
&= \langle \mathrm{ad}(V) \,\mathrm{Ad}(\hat{g})U, X \rangle \\
&= - \langle \mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(\hat{g})U)V, X \rangle \text{ (Antikommutativität der Lie-Klammer)} \\
&= \langle V, \mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(\hat{g})U)X \rangle \text{ (Schiefadjungiertheit von } \mathrm{ad}(\cdot)).
\end{aligned}$$

3.) Nun war $V \in \mathfrak{g}$ aber beliebig, d.h. es gilt $\langle V, \mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(\hat{g})U)X \rangle = 0$ für alle V. Wegen der Nichtentartung des Skalarprodukts folgt damit $\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(\hat{g})U)X = 0$ bzw.

$$[\mathrm{Ad}(\hat{g})U, X] = 0.$$

4.) Nun ist $\mathrm{Ad}(\hat{g}^{-1})$ ein Automorphismus der Lie-Algebra, d.h. wir bekommen

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Ad}(\hat{g}^{-1}) \,\mathrm{Ad}(\hat{g})U, \mathrm{Ad}(\hat{g}^{-1})X] &= 0 \\
[U, \mathrm{Ad}(\hat{g}^{-1})X] &= 0.
\end{aligned}$$

5.) Dies bedeutet aber, dass die Elemente $\exp(U)$ und $\exp(\mathrm{Ad}(\hat{g}^{-1})X)$ der Gruppe kommutieren. Nun ist $\exp(U)$ aber ein topologischer Erzeuger des Torus T, d.h. wenn Elemente mit $\exp(U)$ kommutieren, dann kommutieren sie mit dem gesamten Torus. Dann muss aber

$$\exp(\mathrm{Ad}(\hat{g}^{-1})X) \in T$$

sein. Aber

$$T \ni \exp(\mathrm{Ad}(\hat{g}^{-1})X) = \hat{g}^{-1} \exp(X)\hat{g}.$$

Nun war bis jetzt $X \in g$ völlig beliebig. Nun wählen wir X als topologischen Erzeuger des zweiten maximalen Torus T'. Dann folgt aus obigem, d.h. aus $\hat{g}^{-1} \exp(X)\hat{g} \in T$ aber, dass $\hat{g}^{-1}T'\hat{g} \subseteq T$ und aus Symmetriegründen sind wir fertig. □

4. Allgemeiner Konjugationssatz

4.1. Berechnung einiger Ableitungen en Detail. Wir betrachten die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to G$. Weiter sei $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung $t \mapsto (t, t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi(t,t) \mid_{t=0} &= \frac{d}{dt}(\phi \circ q)(t) \mid_{t=0} \\
&= d(\phi \circ q)_t(e_1) \mid_{t=0} \\
&= d\phi_{q(0)} \circ dq_0(e_1) \\
&= (d\phi_{(0,0)} \circ (1,1))(e_1) \\
&= d\phi_{(0,0)}(e_1, e_1) \\
&= d\phi_{(0,0)}(e_1, 0) + d\phi_{(0,0)}(0, e_2) \\
&= \frac{d}{dt}\phi(t,0) \mid_{t=0} + \frac{d}{dt}\phi(0,t) \mid_{t=0} .
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt für die Abbildung $\phi(s,t) := \exp(tX)g\exp(-tX)$ dass

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\exp(tX)g\exp(-tX))\mid_{t=0} &= \frac{d}{dt}\exp(tX)g\mid_{t=0} + \frac{d}{dt}g\exp(-tX)\mid_{t=0} \\ &= d(R_g\circ\exp(tX))_0(e_1) + d(L_g\circ\exp(-tX))_0(e_1) \\ &= (dR_g)_{\exp(0)}\circ(d\exp)_0(e_1) + (dL_g)_{\exp(0)}\circ(d\exp)_0(-e_1) \\ &= (dR_g)_e(e_1) - (dL_g)_e(e_1).\end{aligned}$$

Proposition 8 (E. Cartan). *Es sei G eine kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe und T ein beliebiger maximaler Torus. Dann gilt*

$$G = \bigcup_{g\in G} gTg^{-1},$$

d.h. jedes Element der Gruppe ist konjugiert zu einem Element des maximalen Torus.

Proof. (Variante 1) Wenn wir bereits wüssten, dass die Exponentialabbildung dann surjektiv ist, könnten wir das ganz schnell beweisen: Es sei $g \in G$ beliebig. Wegen der Surjektivität der Exponentialabbildung gibt es ein $V \in g$ mit $g = \exp V$. Dann ist der Abschluss von $\{\exp tV\}_{t\in\mathbb{R}}$ ein Torus, d.h. er liegt in irgendeinem maximalen Torus T', d.h. $g \in T'$. Nach Prop. (7) ist dieser Torus T' aber konjugiert zu unserem Torus T, d.h. es gibt ein $h \in G$ mit $hT'h^{-1} = T$. Dies bedeutet aber $hgh^{-1} \in T$. Demnach liegt jedes Element g der Gruppe in einer Konjugation von T, d.h. die Vereinigung aller Konjugationen von T ist bereits die gesamte Gruppe. □

Wir wissen aber (noch) nicht, dass die Exponentialabbildung kompakter Gruppen surjektiv ist. Man kann das aus dem Satz von Hopf-Rinow folgern; wir werden aber stattdessen ein direktes Argument geben. Mit diesem Resultat wird es uns dann möglich sein, die Surjektivität der Exponentialabbildung zu beweisen, sodass sich der Kreis schließt.

Der folgende Beweis nimmt in der Form hier über 2 Seiten ein. Das rührt ganz wesentlich daher, dass wir quasi alle Details vollkommen hineingeschrieben haben. Man sollte sich deshalb nicht vor der scheinbaren Länge entmutigen lassen; schreibt man den Beweis zügig auf, so benötigt man ca. eine 4/5 Seite.

Proof. (Variante 2) Die Lie-Gruppe G ist kompakt und T ist (als Torus) selbstverständlich auch kompakt. Somit ist $G \times T$ kompakt. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{K} : G\times T &\to G \\ (g,t) &\mapsto gtg^{-1}.\end{aligned}$$

Selbstverständlich ist $\mathcal{K}$ stetig und deswegen ist das Bild von $\mathcal{K}$, was wir Y nennen wollen, auch kompakt und deshalb abgeschlossen in G. Wir wollen nun die Surjektivität von K zeigen. Dazu werden wir zeigen, dass Y auch offen in G ist. Da G zusammenhängend ist, muss eine Menge, die sowohl offen als abgeschlossen ist, notwendigerweise $\varnothing$ oder ganz G sein, $\varnothing$ kommt aber nicht infrage, da das Bild einer Abbildung nichtleer ist. Es bleibt also zu zeigen, dass Y offen ist. Das machen wir via Induktion über die Dimension der Lie-Gruppe.

1.) Um Offenheit zu zeigen, beweisen wir, dass mit jedem Element $y \in Y$ auch eine

Umgebung von y in Y liegt. Dies brauchen wir aber nur für $y \in T$ zeigen, denn ein beliebiges $y \in Y$ lässt sich (eben weil es das Bild von K ist) in der Form

$$y = gtg^{-1}$$

mit $t \in T$ schreiben. Aber die Konjugation $g(\ldots)g^{-1}$ ist ein Homöomorphismus von G auf sich selbst, d.h. liegt um t eine offene Umgebung ganz in Y, so können wir diese via $g(\ldots)g^{-1}$ zu y verschieben und haben dann eine offene Umgebung von y, die vollständig in Y liegt.
2.) Also sei $y \in T$ beliebig. Nun machen wir eine Fallunterscheidung:

- *Es sei* $y \in T \cap Z(G)$. Wenn y zudem noch im Zentrum der Gruppe ist, können wir das ganz einfach mit der vorangehenden Proposition zeigen: Dann ist für eine entsprechende Nullumgebung $\mathcal{V}$ nämlich $y \exp(\mathcal{V})$ eine offene Umgebung von y (denn exp war ein Diffeomorphismus in einer Nullumgebung). Für ein V ist $\overline{\{\exp(tV)\}_{t\in\mathbb{R}}}$ ein Torus, d.h. liegt in einem maximalen Torus, d.h. es gibt (für $t = 1$) ein $g \in G$ und $t \in T$ mit

  $$\exp(V) = gtg^{-1}.$$

  Also haben wir

  $$\begin{aligned} y\exp(V) &= ygtg^{-1} \\ &\quad \text{und weil } y \text{ im Zentrum liegt} \\ &= g(yt)g^{-1}, \end{aligned}$$

  Also gilt $y \exp(V) \in Y$. Macht man dies für alle $V \in \mathcal{V}$, so folgt, dass eine Umgebung von y in Y liegt.
- *Es sei* $y \in T \setminus Z(G)$. **[a]** Nun kommt der aufwendigere Argumentationsschritt, da der nette Trick mit dem Zentrum jetzt nicht mehr funktioniert. Es sei $C_G(y)$ der Zentralisator von y, d.h. die Untergruppe von G der Elemente, die mit y kommutieren. Weiter sei $H := C_G(y)^o$, die zusammenhängende Komponente von $C_G(y)$ um das Einselement; ebenfalls eine Untergruppe von G, wie wir wissen. Wegen $y \notin Z(G)$ ist H echt kleiner als G [in H sind nur die Elemente, die mit y kommutieren; wegen $y \notin Z(G)$ gibt es mind. ein Element, dass nicht mit y kommutiert] und hat deswegen auch geringere Dimension als G (genauer: Hätte H die gleiche Dimension wie G, so hätten die Lie-Algebren gleiche Dimension. Da die Lie-Algebra von H aber eine Unteralgebra von G ist, wären die Lie-Algebren gleich - und somit die Gruppen. Das widerspricht aber $y \notin H$). Zudem ist H ebenfalls eine kompakte Lie-Gruppe, wegen $\cdot^o$erzwungenermaßen zusammenhängend und natürlich gilt $T \subseteq H$, denn $y \in T$ und T ist (als Torus) natürlich abelsch, d.h. alles kommutiert mit allem, u.a. also auch mit y. Da H echt kleinere Dimension hat, gilt unsere Proposition per Induktionsvoraussetzung: Wir wissen, dass

  $$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}} : H \times T &\to H \\ (g, t) &\mapsto gtg^{-1} \end{aligned}$$

  surjektiv ist. Das müssen wir jetzt irgendwie in eine Aussage über $G \times T \to G$ übersetzen:

[b] Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \hat{\mathcal{K}} : G \times H & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & ghg^{-1} \end{array}$$

und wollen zeigen, dass ihr Bild auch Y ist. Es ist klar, dass $Y \subseteq \mathrm{im}(\hat{\mathcal{K}})$, denn $T \subseteq H$. Nun sei aber $q \in \mathrm{im}(\hat{\mathcal{K}})$, d.h. es gibt $g \in G$ und $h \in H$ mit $ghg^{-1} = q$. Mittels der Surjektivität von $\tilde{\mathcal{K}}$ können wir h als $\tilde{g}t\tilde{g}^{-1}$ schreiben, d.h.

$$q = ghg^{-1} = \underbrace{g\tilde{g}}_{\in G} t \underbrace{\tilde{g}^{-1}g^{-1}}_{\in G},$$

d.h. $q \in \mathrm{im}\,\hat{\mathcal{K}} = Y$.

[c] (1) Nun betrachten wir das Differential der Abbildung $\hat{\mathcal{K}} : G \times H \to G$ bei (e, y). Für die erste Komponente $X \in \mathfrak{g}$ bekommen wir

$$d\hat{\mathcal{K}} \mid_{(e,y)} (X, 0) = \frac{d}{dt}(\exp(tX)y\exp(-tX)) \mid_{t=0} ,$$

denn $\exp(tX)$ ist eine Kurve durch e mit dem Tangentialvektor X.

$$= dR_y(X) - dL_y(X),$$

wie in der Vorbemerkung zu diesem Beweis [dort hatten wir das bereits ausgerechnet]. Damit bekommen wir

$$= dL_y(dR_y dL_{y^{-1}}(X) - X),$$

denn $L_y \circ R_y \circ L_{y^{-1}}(x) = y((y^{-1}x)y) = xy = R_y(x)$.

$$= dL_y(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id})(X),$$

da $\mathrm{Ad}(y^{-1})$ genau das Differential der Konjugation (d.h. $R_y \circ L_{y^{-1}}$) mit y^{-1} war; per Definition.

$$\Rightarrow d\hat{\mathcal{K}} \mid_{(e,y)} (\mathfrak{g}, 0) = dL_y(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id})(\mathfrak{g}).$$

(2) Für die zweite Komponente bekommen wir für ein $X \in T_yH$ (wir stellen das dar als $X = dL_y(X_0)$ mit $X_0 \in \mathfrak{h}$, damit wir das Problem in der Lie-Algebra (also dem Tangentialraum an der Eins) angehen können)

$$\begin{array}{rcl} d\hat{\mathcal{K}} \mid_{(e,y)} (0, X) & = & \frac{d}{dt}(e \underbrace{L_y \circ \exp(tX_0)}_{\text{Kurve durch } y \text{ in Richtung } X} e^{-1}) \mid_{t=0} \\ & = & dL_y \circ \frac{d}{dt} \exp(tX_0) \mid_{t=0} \\ & = & dL_y(X_0) = X. \\ & \Rightarrow & d\hat{\mathcal{K}} \mid_{(e,y)} (0, dL_y(\mathfrak{h})) = dL_y(\mathfrak{h}). \end{array}$$

Somit ergibt sich für das Bild des Differentials $d\hat{\mathcal{K}} \mid_{(e,y)}: \mathfrak{g} \times dL_y(\mathfrak{h}) \to dL_y(\mathfrak{g})$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{im}\, d\hat{\mathcal{K}} \mid_{(e,y)} & = & dL_y(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id})(\mathfrak{g}) + dL_y(\mathfrak{h}) \\ & = & dL_y(\mathfrak{h} + \mathrm{im}_{\text{bzgl. } \mathfrak{g}}(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id})). \end{array}$$

Nun besteht der Kern (bzgl. $\mathfrak{g}$) der Abbildung $(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id})$ genau aus den Elementen der Lie-Algebra, die durch y^{-1} nicht echt konjugiert werden, d.h. $y^{-1}xy = x$ bzw. $y^{-1}x = xy^{-1}$, *d.h. der Elemente die mit y^{-1} kommutieren!* Aber das ist ja gerade der Zentralisator von y, also unser H bzw. die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{h}$, d.h. $\mathfrak{h} = \ker_{\text{bzgl. }\mathfrak{g}}(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id})$. So, und nun klart sich alles auf, denn so bekommen wir

$$= dL_y(\ker_{\text{bzgl. }\mathfrak{g}}(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}) + \mathrm{im}_{\text{bzgl. }\mathfrak{g}}(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}))$$

und weil Ad eine Isometrie ist, zerlegt sich der Raum orthogonal in Kern und Bild, d.h. die obige Summe ist bereits ganz $\mathfrak{g}$, d.h.

$$= dL_y(\mathfrak{g}).$$

Nun ist dL_y trivialerweise invertierbar, d.h. hat vollen Rang. Demnach hat das Differential von $\hat{\mathcal{K}}$ bei (e, y) voller Rang, d.h. es liegt noch eine offene Umgebung von $\hat{\mathcal{K}}((e, y)) = y$ komplett im Bild, d.h. in Y. Das ist aber genau, was wir noch brauchten.

Fertig (zurecht, war ja auch eine Menge Arbeit bis hier her). □

Nun folgt, dass die Exponentialabbildung surjektiv ist, denn jedes Element $x \in G$ kann ich nun als gtg^{-1} mit $g \in G$ und $t \in T$ schreiben. Wir hatten bereits ganz zu Beginn gezeigt, dass die Exponentialabbildung auf dem Torus surjektiv ist, d.h.

$$x = g \exp(X) g^{-1}$$

für ein geeignetes $X \in \mathfrak{g}$. Das ist aber mittels der universellen Eigenschaft der Exponentialabbildung nichts anderes als

$$x = \exp(\mathrm{Ad}(g)X),$$

d.h. $x \in \mathrm{im}\exp(\mathfrak{g})$.

5. Negativbeispiel

Zum Abschluss wollen wir noch kurz zeigen, dass diese Eigenschaften kompakter, zusammenhängender Lie-Gruppen keineswegs zu erwarten sind. Sie sind nämlich in endlichen Gruppen, die sonst vielfach als Prototyp für die Theorie kontinuierlicher Gruppen verwendet werden, alle obigen Resultate schlichtweg falsch. Stattdessen gilt:

Proposition 9. *Es sei G eine endliche Gruppe mit einer Untergruppe T, die alle Konjugationsklassen schneidet. Dann gilt*

$$T = G,$$

d.h. es gibt keine "interessanten" Untergruppen T mit dieser Eigenschaft.

Proof. Da T jede Konjugationsklasse schneidet, lässt sich jedes Element der Gruppe als gtg^{-1} mit $t \in T$ schreiben, d.h. jedes Element von G liegt in gTg^{-1} für ein passendes G. Also gilt

$$G = \bigcup_{g_i} g_i T g_i^{-1}, \tag{5.1}$$

wobei $g_1, \ldots, g_r$ ein minimaler Satz von Erzeugern der einzelnen Konjugationsklassen sein soll.
Wieviele Erzeuger benötigen wir? Es sei $\mathcal{U}$ die Menge aller Untergruppen von G.

Nun, die Gruppe G wirkt auf $\mathcal{U}$ durch Konjugation. Wegen (5.1) enthält der Orbit von $T \in \mathcal{U}$ genau r Elemente [die r zu T konjugierten Gruppen]. Nach der Orbitgleichung gilt jedoch

$$|G \cdot T| = |G| \,/\, |\mathrm{Stab}(T)| \,.$$

Es ist $|G \cdot T| = r$ und

$$\mathrm{Stab}(T) = \{g \in G \text{ mit } gTg^{-1} = U\}.$$

Freilich gilt für alle $t \in T$ aber $tTt^{-1} = T$ ($\subseteq$ ist klar, $=$ weil invertierbar), d.h. $|T| \leq |\mathrm{Stab}(T)|$. Somit bekommen wir

$$r = \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(T)|} \leq \frac{|G|}{|T|}. \tag{5.2}$$

Nun haben alle konjugierten Gruppen $g_i T g_i^{-1}$ genau $|T|$ Elemente, und alle enthalten das Einselement, d.h. sie überlappen *sobald es mehr als* eine *konjugierte Gruppe* gibt, d.h. die Vereinigung aller dieser Gruppen hat echt weniger als $r \cdot |T|$ Elemente:

$$|G| = \left| \bigcup_{g_i} g_i T g_i^{-1} \right| < r \cdot |T| \,.$$

Aber $r \cdot |T| \leq \frac{|G|}{|T|} \cdot |T| = |G|$ nach (5.2). Aber $|G| < |G|$ ist ein Widerspruch, d.h. es kann nur *eine* konjugierte Gruppe zu T geben; T selber, d.h. $G = eTe^{-1} = T$.

□