# Überlagerungen
# & einfach zusammenhängende Liegruppen.


Sebastian Hage*


30.05.2005

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[dd, "\exp"'] \arrow[dr, bend right, "\psi_1^{-1}"', "\cong"] \arrow[drrr, "\psi"] & & \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \arrow[ll, "\mathrm{pr}_{\mathfrak{g}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}"] \arrow[dd] & \\
& \mathfrak{k} \arrow[ul, "\psi_1"'] \arrow[ur, bend right, "i"'] \arrow[rr, "\psi_2"'] \arrow[dd] & & \mathfrak{h} \arrow[dd, "\exp"] \\
G \arrow[dr, bend right, "\varphi_1^{-1}"', "\cong"] \arrow[drrr, dotted, "\varphi"] & & G \times H \arrow[ll, "\mathrm{pr}_G"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_H"] & \\
& K \arrow[ul, "\varphi_1"'] \arrow[ur, bend right, "i"'] \arrow[rr, "\varphi_2"'] & & H
\end{tikzcd}
$$

Vortrag im Seminar

*"Differentialtopologie und Liegruppen"*

von Prof. Schick

SS 2005


*email: sebhage@math.uni-goettingen.de

**Zusammenfassung**

Hauptanliegen der vorliegenden Betrachtung ist die Untersuchung der Überlagerungen von Liegruppen. Beginnend mit der weitestgehend anspruchslosen (nicht zuletzt wegen derzeitigen Beweismangels) Grundlagendarstellung der Überlagerungstheorie topologischer Räume mit dem erklärten Ziel, Hilfsmittel und zentrale Aussagen zur späteren Anwendung zu gewinnen, die dabei bis zur vollständigen Klassifikation (bis auf Isomorphie) von Überlagerungen fortschreitet, rückt im Hauptteil die Kategorie der Liegruppen in den Vordergrund. Nach kurzer, aber ergebnisreicher, Struktursuche in den Überlagerungsräumen glatter Mannigfaltigkeiten, erhält der algebraische Aspekt zentrale Bedeutung. Es findet sich zu jeder Liegruppe eine universelle Überlagerung mit Liegruppenstruktur und ein unerwarteter Zusammenhang zwischen Überlagerungsprojektionen und den Einschränkungen ihres Differentials, gefolgt von einem bemerkenswerten Existenz- und Eindeutigkeitskriterium für Liegruppenhomomorphismen bei gegebenen Homomorphismen ihrer Liealgebren. In diesem Zusammenhang erlangen einfach zusammenhängende Liegruppen eine besondere Auszeichnung, und alles führt (allerdings weitesgehend ohne detaillierte Beweise) zum ausgesprochenen Hauptresultat: einer Korrespondenz von Isomorphieklassen einfach zusammenhängender Liegruppen und Isomorphieklassen von Liealgebren.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Überlagerungen topologischer Räume

Ausgehend von einem weg- und lokal wegzusammenhängenden topologischen $T_2$-Raum entfalten wir im Sinne eines einführenden Ausflugs die Grundpfeiler der Überlagerungstheorie mit dem Ziel ihrer (bis auf Isomorphie) vollständigen Klassifikation. Hierbei erfolgt nicht nebenbei die Ansammlung von Hilfsmitteln und Kriterien die bei der Überlagerung von Liegruppen im Hauptteil dieser Betrachtung schonungslose Anwendung finden. Zu Beginn hilft ein wenig Kategorientheorie bei der Erfassung des Überlagerungsbegriffs, dann folgen Hochhebungsstudien und algebraische Genetik, die bald zur weiteren Verfeinerung der Überlagerungskategorie und zur Klassifikation ihrer Objekte führen.

## 1.1 Topologische Räume über $X$ & lokale Trivialität

Zu Beginn richten wir eine Sprechweise ein, die es erlaubt den Überlagerungsbegriff kurz und präzise zu fassen. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die Kategoriesierung der Klasse von topologischen Räumen über einem (topologischen) Raum $X$.

**Definition 1.1.** Sei $X$ ein topologischer Raum. Ein **topologischer Raum über** $X$ ist ein Paar $(Y, p)$, bestehend aus einem topologischen Raum $Y$ und einer stetigen surjektiven Abbildung $p : Y \to X$. Für $x \in X$ heißt die Urbildmenge $Y_x := p^{-1}(x) \subset Y$ die **Faser** über $x$. Für $U \subset X$ ist unter $Y|_U$ die Einschränkung $(p^{-1}(U), p|_{p^{-1}(U)})$ zu verstehen.

**Definition 1.2.** Die Kategorie $\mathscr{Top}_X$ der topologischen Räume über $X$ wird durch folgende Daten gegeben:

- Die Objekte von $\mathscr{Top}_X$ sind die topologischen Räume $(Y, p)$ über $X$
- Ein Morphismus $\gamma \in \mathscr{Top}_X((Y, p), (Y', p'))$ ist eine stetige Abbildung mit $p' \circ \gamma = p$, die also das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "p"'] & & Y' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

  kommutativ macht.
- Die Verknüpfung von Morphismen $\gamma : (Y, p) \to (Y', p')$ und $\gamma' : (Y', p') \to (Y'', p'')$ ist gegeben durch die Komposition von Abbildungen $\gamma' \circ \gamma : (Y, p) \to (Y'', p'')$.

**Lemma 1.3.** *$\mathscr{Top}_X$ ist eine Kategorie.*

**Beweis**. Die Assoziativität der Verknüpfung von Morphismen in $\mathscr{Top}_X$

$$(Y, p) \xrightarrow{\gamma} (Y', p') \xrightarrow{\gamma'} (Y'', p'') \xrightarrow{\gamma''} (Y''', p''')$$

ist erfüllt, da die Kompositon stetiger Abbildungen assoziativ ist. Es ist zu zeigen, daß die Verknüpfung zweier Morphismen von $\mathscr{T}op_X$

$$(Y, p) \xrightarrow{\gamma} (Y', p') \xrightarrow{\gamma'} (Y'', p'')$$

tatsächlich einen Morphismus $\gamma' \circ \gamma = \gamma'\gamma \in \mathscr{T}op_X\,((Y, p), (Y'', p''))$ liefert, d.h. eine stetige Abbildung $\gamma'\gamma$ mit $p'' \circ \gamma'\gamma = p$. Da im Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "p"'] & Y' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "p'"] & Y'' \arrow[dl, "p''"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

beide Teildreiecke kommutativ sind, gilt unter Verwendung der Assoziativität

$$\begin{aligned} p &= p' \circ \gamma \\ &= (p'' \circ \gamma') \circ \gamma = p'' \circ (\gamma' \circ \gamma) \\ &= p'' \circ \gamma'\gamma, \end{aligned}$$

womit sich $\gamma'\gamma$ als Morphismus von $\mathscr{T}op_X$ erweist. Die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$ liefert die Identität $\mathrm{id}_{(Y,p)}$ in $\mathscr{T}op_X$, denn für $f \in \mathscr{T}op_X\,((Y, p), (Y', p'))$ und $g \in \mathscr{T}op_X\,((Y', p'), (Y, p))$ gilt

$$\mathrm{id}_{(Y,p)} \circ g = g \quad \text{und} \quad f \circ \mathrm{id}_{(Y,p)} = f.$$

Damit ist der Kategorienachweis erbracht. □

Zwei topologische Räume $(Y, p)$ und $(\widetilde{Y}, \widetilde{p})$ über $X$ sind dann isomorph in $\mathscr{T}op_X$, wenn es einen Isomorphismus $h : (Y, p) \to (\widetilde{Y}, \widetilde{p})$, d.h. einen Homöomorphismus $h : Y \to \widetilde{Y}$ gibt, so daß

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & \widetilde{Y} \arrow[dl, "\widetilde{p}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Zu bemerken ist, daß $h$ die Faser $Y_x$ homöomorph auf die Faser $\widetilde{Y}_x$ über $x$ abbildet. Läßt man als Morphismen nur Homöomorphismen zu, so erhält man die verminderte Kategorie $\overset{*}{\mathscr{T}op}_X$, die jedoch ein Gruppoid ist.

**Definition 1.4.** Ein topologischer Raum $(Y, p)$ über $X$ heißt **trivial**, falls es einen topologischen Raum $\Gamma$ gibt, so daß $(Y, p) \cong (X \times \Gamma, \mathrm{pr}_X)$ in $\mathscr{T}op_X$ ist. Dabei bezeichnet $\mathrm{pr}_X$ oder $\mathrm{pr}_1$ die kanonische Projektion auf die erste Komponente.

Nun fordern wir diese Art von Trivialität als lokale Eigenschaft.

**Definition 1.5.** Ein topologischer Raum $(Y, p)$ über $X$ heißt **lokal trivial**, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U_x \subset X$ gibt, für die $Y|_{U_x} = (p^{-1}(U_x), p|_{p^{-1}(U_x)})$ trivial ist. Man bezeichnet $X$ als **Basis** und $Y$ als **Totalraum**.

Das nachstehende Diagramm verdeutlicht die Situation eines lokal trivialen Raumes

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_x) \arrow[rr, "\varphi_x", "\approx"'] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(U_x)}"'] & & U_x \times \Gamma \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{U_x}"] \\ & U_x & \end{tikzcd}$$

Kategorienfrei läßt sich der Sachverhalt auf folgende Weise schildern:

**Definition 1.6.** Der Homöomorphismus $\varphi_x : p^{-1}(U_x) \overset{\approx}{\to} U_x \times \Gamma$ heißt **lokale Trivialisierung** über $U_x$. Eine stetige Abbildung $p : Y \to X$ heißt **lokal trivial**, mit typischer Faser $\Gamma$, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung besitzt, über der eine lokale Trivialiserung mit typischer Faser $\Gamma$ existiert.

Dieser Abschnitt schließt mit der

**Notiz 1.7.** Für den Fall, daß für eine Umgebung $U_x$ von $x \in X$ die Einschränkung $Y|_{U_x}$ trivial ist, gilt

$$Y|_{U_x} = \big(p^{-1}(U_x), p|_{p^{-1}(U_x)}\big) \cong \big(U_x \times Y_x, \mathrm{pr}_{U_x}\big) \quad \text{in } \mathscr{Top}_{U_x},$$

da aufgrund der Faserhomöomorphie

$$Y_x = p^{-1}(x) \approx \mathrm{pr}_{U_x}^{-1}(x) = \{x\} \times \Gamma \approx \Gamma \quad \text{für alle } x \in U_x$$

gilt und der Homöomorphietyp der Fasern $p^{-1}(x)$ lokal konstant ist.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(x) \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(x)}"'] & & \{x\} \times \Gamma \approx \Gamma \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{\{x\}}"] \\ & \{x\} & \end{tikzcd}$$

Sind alle Fasern zu einem festen Raum $\Gamma$ homöomorph, so ist $(Y, p)$ lokal trivial mit typischer Faser $\Gamma$. Bei zusammenhängenden Basisräumen ist der Homöomorphietyp der Fasern sogar global konstant.

## 1.2 Der Überlagerungsbegriff

Nach Bereitstellung einer geeigneten Terminologie begründet nun die folgende Definition den Überlagerungsbegriff. Hierbei betrachten wir als Basis nur zusammenhängende Räume $X$, was jedoch keine wesentlich Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, da eine Überlagerung eines unzusammenhängenden Raumes in Überlagerungen der Zusammenhangskomponenten zerfällt. Als weitere Forderung an $X$ sprechen wir den lokalen Wegzusammenhang aus.

**Definition 1.8.** Sei $X$ ein topologischer Raum. Eine **Überlagerung** von $X$ ist ein lokal trivialer Raum $(Y, p)$ über $X$ mit diskreter typischer Faser $\Gamma$. $Y$ wird als *Überlagerungsraum* bezeichnet und $p$ als die *Projektion* der Überlagerung.

**Satz 1.9.** *Ein topologischer Raum $(Y,p)$ über einem zusammenhängenden Raum $X$ ist genau dann eine Überlagerung von $X$, wenn für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U_x$ existiert, deren Urbild $p^{-1}(U_x) \subset Y$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen $V_x^{(i)} \subset Y$ ist, die durch die jeweilige Einschränkungsabbildung $p|_{V_x^{(i)}} : V_x^{(i)} \xrightarrow{\approx} U_x$ homöomorph auf $U_x$ abgebildet werden.*

**Beweis**. Dieser Satz hat hauptsächlich illustrativen Charakter. Er beinhaltet die gebräuchliche Definition von Überlagerungen. Wir zeigen hier lediglich die (im Grunde offensichtliche) Äquivalenz dieser Definitionen, um mit der Handhabung des Überlagerungsbegriffes vertraut zu werden.

($\Longrightarrow$) Sei zunächst $(Y,p)$ eine Überlagerung von $X$ im Sinne obiger Definition. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U_x$ mit

$$Y|_{U_x} = \left(p^{-1}(U_x), p|_{p^{-1}(U_x)}\right) \cong \left(U_x \times \Gamma, \mathrm{pr}_{U_x}\right) \quad \text{in } \mathscr{Top}_{U_x},$$

was nichts anderes bedeutet, als daß $p^{-1}(U_x)$ und $U_x \times \Gamma$ über $U_x$ homöomorph sind, was das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_x) \arrow[rr, "\varphi_x", "\approx"'] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(U_x)}"'] & & U_x \times \Gamma \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{U_x}"] \\ & U_x & \end{tikzcd}$$

zum Ausdruck bringt. Bezeichne $\varphi_x$ diesen Homöomorphismus, der also eine lokale Trivialisierung über $U_x$ ist. Da $\Gamma$ diskret ist, ist das Produkt

$$U_x \times \Gamma \approx \coprod_{y\in\Gamma} U_x \times \{y\}$$

homöomorph zur topologischen Summe der offenen Mengen $U_x \times \{y\}$, die jeweils wiederum homöomorph zu $U_x$ selbst sind. Anwendung der inversen Abbildung $\varphi_x^{-1}$ liefert

$$\varphi_x^{-1}\left(\coprod_{y\in\Gamma} U_x \times \{y\}\right) = \coprod_{y\in\Gamma} \varphi_x^{-1}\left(U_x \times \{y\}\right),$$

wobei die Mengen $V_x^{(y)} := \varphi_x^{-1}\left(U_x \times \{y\}\right)$ offen in $Y$ sind. Man findet somit, daß das Urbild von $U_x$ unter $p$ die disjunkte Vereinigung offener Mengen ist, und es gilt zudem für alle $y \in \Gamma$

$$\varphi_x|_{\varphi_x^{-1}(U_x\times\{y\})} : \varphi_x^{-1}\left(U_x \times \{y\}\right) \xrightarrow{\approx} U_x \times \{y\} \approx U_x,$$

d.h. die Einschränkungen $p|_{V_x^{(y)}}$ bilden die Mengen $V_x^{(y)}$ für alle $y \in \Gamma$ homöomorph auf $U_x$ ab.

($\Longleftarrow$) Sei nun umgekehrt eine Überlagerung $(Y, p)$ im neuen Sinne gegeben. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U_x$, so daß

$$p^{-1}(U_x) = \coprod_{y \in p^{-1}(x)} V_x^{(y)}$$

ist mit offenen disjunkten Mengen $V_x^{(y)} \subset Y$, und es gibt eine Homöomorphismenfamilie

$$\mathscr{H}_{U_x} := \left\{ p|_{V_x^{(y)}} : V_x^{(y)} \xrightarrow{\approx} U_x \right\}_{y \in p^{-1}(x)},$$

die durch die Einschränkungen von $p$ auf die offenen Mengen $V_x^{(y)}$ gegeben ist. Die kanonische Homöomorphie $U_x \approx U_x \times \{*\}$ liefert aufgrund der Transitivität

$$V_x^{(y)} \approx U_x \times \{y\}$$

mittels eines Homöomorphismus $\varphi_x|_{V_x^{(y)}}$. Definiere $\varphi_x$ durch

$$\varphi_x : p^{-1}(U_x) \longrightarrow U_x \times p^{-1}(x), \quad \xi \longmapsto \left( p|_{V_x^{(y_\xi)}}(\xi), y_\xi \right),$$

wobei $y_\xi \in p^{-1}(x)$ denjenigen Punkt der Faser bezeichnet, so daß $\xi \in V_x^{(y_\xi)}$ gilt. Es sind offensichtlich, daß $\varphi_x$ ein Homöomorphismus ist, da $p^{-1}(U_x)$ die disjunkte Vereinigung der offenen Mengen $V_x^{(y)}$ ist und die Einschränkungen $p|_{V_x^{(y)}}$ Homöomorphismen sind. Insbesondere gilt

$$\varphi_x|_{V_x^{(y)}} \left( V_x^{(y)} \right) = U_x \times \{y\}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\left( \mathrm{pr}_{U_x} \circ \varphi_x \right)(\xi) &= \mathrm{pr}_{U_x} \left( p|_{V_x^{(y_\xi)}}(\xi), y_\xi \right) \\
&= p|_{V_x^{(y_\xi)}}(\xi) \\
&= p|_{p^{-1}(U_x)}(\xi)
\end{aligned}$$

hat man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_x) \arrow[rr, "\varphi_x", "\approx"'] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(U_x)}"'] & & U_x \times p^{-1}(x) \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{U_x}"] \\
& U_x &
\end{tikzcd}$$

Die Faser $p^{-1}(x)$ trägt als Teilraum von $Y$ die diskrete Topologie, da $V_x^{(y)} \cap p^{-1}(x) = \{y\}$ ist, und ist, da die Basis $X$ zusammenhängend ist, global vom selben Homöomorphietyp. Setze $\Gamma := p^{-1}(x)$, dann ist $p^{-1}(\eta) \approx \Gamma$ für alle $\eta \in X$. Somit ist

$$Y|_{U_x} \cong \left( U_x \times \Gamma, \mathrm{pr}_{U_x} \right) \quad \text{in } \mathscr{Top}_{U_x}.$$

$(Y, p)$ ist also lokal trivial mit diskreter typischer Faser $\Gamma$.

Damit ist die Äquivalenz der beiden Definitionen gezeigt. Für die weiteren Betrachtungen stellt sich die letztere als praktikabel heraus. $\square$

Der vorangehende Beweis gibt Anlaß zu weiterer Namensgebung. Die Summanden $\varphi_x^{-1}(U_x \times \{y\})$ der topologischen Summe $p^{-1}(U_x) = \coprod_{y\in\Gamma} \varphi_x^{-1}(U_x \times \{y\}) = \coprod_{y\in\Gamma} V_x^{(y)}$ heißen *Blätter* der Überlagerung. Im endlichen Fall bezeichnet man die Kardinalität der typischen Faser als die *Blätterzahl* der Überlagerung. Die ausgezeichneten Umgebungen $U_x$ von $x \in X$ heißen *zulässige* oder *kanonische* Umgebungen von $x$ bezüglich $p$.

Es stellen sich die folgenden grundlegenden Eigenschaften von Überlagerungen heraus.

**Lemma 1.10.** *Sei $(Y, p)$ eine Überlagerung von $X$. Dann ist die Überlagerungsprojektion $p : Y \to X$ offen und ein lokaler Homöomorphismus.*

**Lemma 1.11.** *Ist $(Y, p)$ eine Überlagerung des semi-lokal einfach zusammenhängenden Raumes $X$. Erfüllt $X$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, dann ist auch der Überlagerungsraum $Y$ zweitabzählbar.*

## 1.3 Hochheben von Wegen und Homotopien

Sind zwei topologische Räume $X$ und $Z$, eine stetige Abbildung $f : Z \to X$ und sowie eine Überlagerung $(Y, p)$ von $X$ gegeben, so ist es von großem Interesse, etwas über das Hochhebeverhalten der Überlagerung in Erfahrung zu bringen, nämlich ob $f$ zu einer Abbildung $\widetilde{f} : Z \to Y$ hochgehoben werden kann. Zunächst betrachten wir eine spezielle Klasse von stetigen Abbildungen: Wege und ihre Homotopien.

**Definition 1.12.** Sei $(Y, p)$ ein topologischer Raum über $X$ und $f : Z \to X$ stetig. Eine stetige Abbildung $\widetilde{f} : Z \to Y$ heißt **Hochhebung** von $f$ entlang $p$, falls $f = p \circ \widetilde{f}$ gilt.

Dieser Sachverhalt wird durch das kommutative Dreieck

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

veranschaulicht. Wir beginnen mit einem Eindeutigkeitssatz für Hochhebungen bei Überlagerungen. Die Existenz schieben wir ein wenig auf.

**Satz 1.13.** *Sei $(Y, p)$ eine Überlagerung von $X$. Ist $Z$ zusammenhängend und sind $\widetilde{f}, \widehat{f} : Z \to Y$ Hochhebungen von $f : Z \to X$ mit $\widetilde{f}(z_0) = \widehat{f}(z_0)$ für ein $z_0 \in Z$, so gilt $\widetilde{f} \equiv \widehat{f}$.*

**Beweis**. Sei $\widetilde{Z} := \{z \in Z | \widetilde{f}(z) = \widehat{f}(z)\}$. Es ist zu zeigen, daß $\widetilde{Z} = Z$ ist. Da $Z$ zusammenhängend und $\widetilde{Z}$ wegen $z_0 \in \widetilde{Z}$ nichtleer ist, genügt es nachzuweisen, daß $\widetilde{Z}$ offen und abgeschlossen ist.

- <u>$\widetilde{Z}$ ist offen.</u> Sei $z \in \widetilde{Z}$. Dann gibt es eine zulässige Umgebung U von $f(z) = p\widetilde{f}(z) = p\widehat{f}(z) \in X$ bezüglich der Überlagerung $(Y, p)$, so daß $p^{-1}(U) \cong U \times F$ über $U$ ist. Sei $\varphi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$ die lokale Trivialisierung über $U$. Wegen $\widetilde{f}(z) = \widehat{f}(z)$ gibt es ein $a \in F$ mit $\varphi\widetilde{f}(z), \varphi\widehat{f}(z) \in U \times \{a\}$. Setze $V := \varphi^{-1}(U \times \{a\}) \subset p^{-1}(U)$. Dann ist $V$ offen in $p^{-1}(U)$ und $f(z) \in V$. Mit $W := \widetilde{f}^{-1}(V) \cap \widehat{f}^{-1}(V) \subset Z$ erhalten wir eine offene Umgebung von $z$. Da $\mathrm{pr}_U$ durch Einschränkung einen Homöomorphismus $U \times \{a\} \cong U$ liefert, ist auch $p|_V$ wegen $p|_V = \mathrm{pr}_U|_{U \times \{a\}} \circ \varphi|_V$ ein Homöomorphismus, insbesondere injektiv.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[r, "\varphi|_V", "\cong"'] \arrow[d, "p|_V"] & U \times \{a\} \arrow[dl, "\cong", "pr_U|_{U\times\{a\}}"'] \\ W \arrow[ur, shift left, "\widetilde{f}|_W"] \arrow[ur, shift right, "\widehat{f}|_W"'] \arrow[r, "f|_W"'] & U & \end{tikzcd}$$

Da $\widetilde{f}$ und $\widehat{f}$ Hochhebungen von $f$ entlang $p$ sind, gilt $p \circ \widetilde{f} = p \circ \widehat{f} = f$, insbesondere $p|_V \circ \widetilde{f}|_W = p|_V \circ \widehat{f}|_W$ und aufgrund der Injektivität von $p|_V$ schließlich $\widetilde{f}|_W \equiv \widehat{f}|_W$, womit $W \subset \widetilde{Z}$ ist. Damit ist $\widetilde{Z}$ offen. $\diamondsuit$

- $\widetilde{Z}$ ist abgeschlossen. Betrachte die Abbildung

$$\widetilde{f} \times \widehat{f} : Z \longrightarrow Y \times Y, \quad y \longmapsto \left(\widetilde{f}(y), \widehat{f}(y)\right).$$

Dann ist $\widetilde{f} \times \widehat{f}$ stetig. Sei $D_Y := \{(y, y) |\ y \in Y\} \subset Y \times Y$ die Diagonale in $Y \times Y$. Da $Y$ hausdorffsch ist, ist $D_Y$ abgeschlossen in $Y \times Y$ (eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert). Somit ist $(\widetilde{f} \times \widehat{f})^{-1}(D_Y) = \widetilde{Z}$ abgeschlossen in $Z$. $\diamondsuit$

Es folgt $\widetilde{Z} = Z$ und so $\widetilde{f} \equiv \widehat{f}$. $\square$

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Hochhebbarkeit von Homotopien bei Überlagerungen.

**Satz 1.14. (Homotopiehochhebungseigenschaft)** *Sei $(Y, p)$ eine Überlagerung von $X$ und $Z$ ein kompakter, zusammenhängender und lokal zusammenhängender Raum. Weiterhin sei $f : Z \to Y$ stetig und $h : Z \times I \to X$ eine Homotopie mit $h_0(z) = h(z, 0) = p \circ f(z)$ für alle $z \in Z$. Dann existiert eine Homotopie $\widetilde{h} : Z \times I \to Y$ mit $\widetilde{h}_0(z) = f(z)$ und $p \circ \widetilde{h} = h$.*

Die Überlagerung $p : Y \to X$ besitzt also die Homotopiehochhebungseigenschaft (HHE oder HLP), wenn das nachstehende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
Z \times \{0\} \arrow[r, "f=\widetilde{h}_0"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, "p"] \\
Z \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{h}"] & X
\end{tikzcd}$$

Hieraus ergibt sich die Weghochhebungseigenschaft (WHE oder PLP) für Überlagerungen.

**Korollar 1.15. (Weghochhebungseigenschaft)** *Sei $(Y, p)$ eine Überlagerung von $X$ und $a : I \to X$ ein Weg in $X$. Weiterhin sei $y_0 \in Y$ derart, daß $a(0) = p(y_0)$ gilt. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Hochhebung $\widetilde{a}$ von $a$ entlang $p$ mit Anfangspunkt $\widetilde{a}(0) = y_0$.*

Die Weghochhebungseigenschaft bedeutet gerade, daß das folgende kommutative

Diagramm auf eindeutige Weise vervollständigt werden kann:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, "p"] \\
I \arrow[r, "a"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{a}"] & X
\end{tikzcd}$$

**Beweis**. Da das Einheitsintervall $I \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend ist, ist die Eindeutigkeit der Hochhebung bereits bewiesen, denn existierten zwei Hochhebungen $\widetilde{a}$ und $\widehat{a}$ von $a$ mit den genannten Eigenschaften, dann wäre $\widetilde{a}(0) = \widehat{a}(0) = y_0$ und somit nach dem Eindeutigkeitssatz für Hochhebungen $\widetilde{a} \equiv \widehat{a}$.
Den Existenzbeweis liefert der Homotopiehochhebungssatz für den einpunktigen Fall $Z = \{*\}$ und $f : Z \to Y$ mit $f(*) = y_0$. Die Projektion $\mathrm{pr}_I$ ist dann ein Homöomorphismus $Z \times I \xrightarrow{\cong} I$, der die Identifikation von $Z \times I$ und $I$ erlaubt. Fasse also den Weg $a$ als Abbildung $Z \times I \to X$ auf. Dann gilt $a(*, 0) = p \circ f(*) = p(y_0)$. Nach dem Homotopiehochhebungssatz existiert nun eine Homotopie $\widetilde{h} : Z \times I \longrightarrow Y$, so daß

$$p \circ \widetilde{h} = a \text{ und } \widetilde{h}(*, 0) = f(*) = y_0.$$

Definiere $\widetilde{a} : I \to Y$ durch $\widetilde{a}(t) := \widetilde{h}(*, t)$.

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, "p"] \\
\{*\} \times I \arrow[r, "a"'] \arrow[ur, "\widetilde{a}=\widetilde{h}(*)" description] & X
\end{tikzcd}$$

Damit besitzt $\widetilde{a}$ die gewünschten Eigenschaften. □

Wir ziehen eine weitere Folgerung aus dem Homotopiehochhebungssatz.

**Korollar 1.16.** *Sei $(Y, p)$ eine Überlagerung von $X$, und seien $a, b : I \to X$ zwei Wege in $X$ mit $a \simeq b$ (homotop mit festem Anfangs- und Endpunkt). Sind $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ Hochhebungen von $a$ und $b$ entlang $p$ mit $\widetilde{a}(0) = \widetilde{b}(0) = y_0 \in Y$, so gilt auch $\widetilde{a}(1) = \widetilde{b}(1)$ und darüberhinaus $\widetilde{a} \simeq \widetilde{b}$.*

**Beweis**. Wegen $a \simeq b$ gibt es eine Wegehomotopie $h : I \times I \to X$ mit

$$h_0 = a, \;\; h_1 = b$$

sowie

$$h_t(0) = a(0) = b(0) \;\text{ und }\; h_t(1) = a(1) = b(1) \;\text{ für alle } t \in I.$$

Seien $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ die eindeutig bestimmten Hochhebungen von $a$ und $b$ entlang $p$ zum Anfangspunkt $y_0$. Nach dem Homotopiehochhebungssatz existiert eine Homotopie $\widetilde{h} : I \times I \to Y$ mit $\widetilde{h}_0 = a$ und $p \circ \widetilde{h} = h$.

$$\begin{tikzcd}
I \times \{0\} \arrow[r, "\widetilde{h}_0 = \widetilde{a}"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, "p"] \\
I \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{h}"] & X
\end{tikzcd}$$

Betrachte die Anfangspunktabbildung

$$\alpha : I \longrightarrow Y, \quad t \longmapsto \widetilde{h}_t(0).$$

Wegen $p \circ \widetilde{h}_t = h_t$ bildet $\alpha$ in die Faser über $a(0)$ ab, also $\alpha(I) \subset Y_{a(0)} = p^{-1}\,(a(0))$. Da $\alpha$ stetig und die Faser $Y_{a(0)}$ diskret ist, folgt, daß $\alpha$ konstant sein muß, d.h. $\widetilde{h}_t(0) = \widetilde{a}(0) = y_0$ für alle $t \in I$. Insbesondere ist $p \circ \widetilde{h}_1 = h_1 = b$ und $\widetilde{h}_1(0) = y_0 = \widetilde{b}(0)$, was aus Eindeutigkeitsgründen $\widetilde{h}_1 = \widetilde{b}$ impliziert, womit $\widetilde{a} \simeq \widetilde{b}$ ist. Für die Endpunktabbildung

$$\omega : I \longrightarrow Y, \quad t \longmapsto \widetilde{h}_t(1)$$

gilt nun analog $\omega(I) \subset Y_{a(1)}$ und aus Stetigkeit von $\omega$ und Diskretheit der Faser ergibt sich, daß $\omega$ konstant ist. □

Wir stellen im Folgenden noch fest, daß einfach zusammenhängende Räume keine überraschenden Überlagerungen besitzen: die möglichen Überlagerungsräume sind lediglich homöomorph zum Basisraum.

**Satz 1.17.** *Ist $(Y, p)$ eine Überlagerung des einfach zusammenhängenden Raumes $X$, so ist die Projektion $p$ ein Homöomorphismus.*

## 1.4 Hochheben beliebiger stetiger Abbildungen

Nachdem sich im Zuge der vorangehenden Überlegungen ein durchaus zufriedenstellendes Ergebnis erreichen ließ, nämlich, daß Überlagerungen die Weg- und Homotopiehochhebungseigenschaft besitzen, erhebt sich im natürlichen Prozeß fortschreitender Verallgemeinerung die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit von Hochhebungen beliebiger stetiger Funktionen. Es ist nicht zu erwarten, daß jede beliebige stetige Abbildung entlang einer Überlagerungsprojektion eindeutig hochgehoben werden kann, aber tatsächlich lassen sich recht nützliche Kriterien finden, die Existenz und Eindeutigkeit solcher Hochhebungen sicherstellen. Im Laufe der Untersuchungen zeigt sich, daß das Hochhebeverhalten einer Überlagerung im wesentlichen in Form algebraischer Information genetisch in ihr verankert ist. Es handelt sich hierbei um eine Gruppe, der sogenannten charakteristischen Untergruppe der Überlagerung, die durch das Bild des von der Projektion induzierten Fundamentalgruppenhomomorphismus bestimmt ist. Dies spielt insbesondere bei der Klassifaktion von Überlagerungen eine herausragende Rolle.

Da die Betrachtung der Fundamentalgruppe eines Raumes eine Punktierung fordert, um den Schleifen einen Basispunkt zu geben, betrachten wir hier die punktierte Kategorie $\mathscr{Top}^o$ der topologischen Räume mit Grundpunkt und grundpunkterhaltenden stetigen Abbildungen sowie entsprechend die Kategorie $\mathscr{Top}^o_{(X,x_0)}$ der punktierten topologischen Räume über $(X, x_0)$.

**Satz 1.18. (Exakte Homotopiesequenz)** *Sei $((Y, y_0), p)$ eine Überlagerung von $(X, x_0)$. Bezeichne $p_*$ den induzierten Homomorphismus der Fundamentalgruppen und $\Gamma := p^{-1}(x_0)$ die Faser über dem Grundpunkt $x_0$. Sei $\widetilde{a}$ die Hochhebung der Schleife $a$ in $(X, x_0)$ mit $\widetilde{a}(0) = y_0$, so definiere die Abbildung $\gamma : \pi_1(X, x_0) \to \pi_0(\Gamma)$ durch $\gamma([a]) := \widetilde{a}(1)$. Dann ist die Sequenz*

$$1 \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\gamma} \pi_0(\Gamma) \longrightarrow 1$$

*exakt.*

Betrachtung der exakten Homotopiesequenz ergibt zunächst

**Korollar 1.19.** *Sei $((Y, y_0), p)$ eine Überlagerung von $(X, x_0)$. Dann ist der induzierte Homomorphismus der Fundamentalgruppe*

$$p_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

*ein Monomorphismus, dessen Bild aus den Homotopieklassen derjenigen Schleifen in $(X, x_0)$ besteht, die entlang $p$ geschlossen (d.h. zu Schleifen in $(Y, y_0)$) hochgehoben werden.*

Dieses homomorphe Bild enthält nun algebraisch die Hochhebeinformation der Überlagerung bezüglich Schleifen. Dies veranlaßt

**Definition 1.20.** Das Bild $p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$ des injektiven Fundamentalgruppenhomomorphismus $p_*$ heißt die **charakteristische Untergruppe** der Überlagerung $((Y, y_0), p)$ und wird mit $\mathscr{G}(Y, y_0)$ notiert.

Wir sehen uns jetzt dem Hochhebungssatz stetiger Abbildungen gegenüber, der ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Existenz und Eindeutigkeit von Hochhebungen mit sich bringt.

**Satz 1.21. (Hochhebung stetiger Abbildungen)** *Sei $((Y, y_0), p)$ eine Überlagerung von $(X, x_0)$, $Z$ ein wegweise und lokal wegweise zusammenhängender topologischer Raum. Sei $f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ stetig. Genau dann existiert eine Hochhebung $\widetilde{f} : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ von $f$, wenn $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset \mathscr{G}(Y, y_0)$ gilt.*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "p_*", "\cong"'] \arrow[dr, "p_*"] & \\
\pi_1(Z, z_0) \arrow[ur, dotted, "\widetilde{f}_*"] \arrow[r, "f_*"] & \mathscr{G}(Y, y_0) \arrow[r, hook] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

*Im Existenzfall ist $\widetilde{f}$ eindeutig bestimmt.*

$$\begin{tikzcd} & (Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\ (Z, z_0) \arrow[ur, dotted, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Ist der Raum $Z$ zudem einfach zusammenhängend, so folgen Existenz und damit Eindeutigkeit einer Hochhebung ohne weitere Voraussetzungen.

**Korollar 1.22.** *Ist $((Y, y_0), p)$ eine Überlagerung von $(X, x_0)$ und $f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ stetig mit einfach, wegweise und lokal wegweise zusammenhängendem Raum $Z$. Dann existiert in jedem Fall eine Hochhebung $\widetilde{f} : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y)$ von $f$ mit $\widetilde{f}(z_0) = y$ für eine beliebig gegebenen Punkt $y \in p^{-1}(x_0)$.*

## 1.5 Klassifikation von Überlagerungen

Nun erfolgt die Grundsteinlegung für die Klassifikation von Überlagerungen eines punktierten topologischen Raumes $(X, x_0)$. Dafür ist es im Existenzbeweis notwendig, eine weitere Forderung an $X$ zu stellen. Dabei handelt es sich um den semilokal einfachen Zusammenhang, d.h. für jedes $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U_x \subset X$, derart, daß jede Schleife in $U_x$ mit Grundpunkt $x_0$ nullhomotop in $X$, wobei die Betonung auf der Globalität ihrer Homotopie zur kontanten Schleife liegt (die Homotopie findet in $X$ statt, nicht lediglich in $U_x$). Für die Klassifikation ist es zweckmäßig, eine Kategorie der Überlagerungen eines festen Basisraums $X$ zu definieren. Letztlich handelt es sich dabei natürlich um eine Verfeinerung der Kategorie $\mathscr{Top}_X$.

**Definition 1.23.** Die Kategorie $\mathscr{\ddot{U}ber}_X$ der Überlagerungen mit Basis $X$ wird durch folgende Daten bestimmt:

- Die Objekte von $\mathscr{\ddot{U}ber}_X$ sind Überlagerungen $(Y, p)$ von $X$.
- Die Morphismenmenge $\mathscr{\ddot{U}ber}_X\,((Y, p), (Y', p'))$ ist gegeben durch stetige Abbildungen $f : Y \to Y'$, durch die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

  zu kommutieren beginnt.

Es ist offensichtlich, daß durch $\mathscr{\ddot{U}ber}_X$ eine Kategorie gegeben ist. Die Isomorphismen in $\mathscr{\ddot{U}ber}_X$ entsprechen wie gewohnt den Homöomorphismen zwischen den Überlagerungsräumen, die die Kommutativität des obigen Diagramms hervorrufen. Entsprechend $\mathscr{Top}^o_{(X,x_0)}$ definiert sich auch die punktierte Kategorie $\mathscr{\ddot{U}ber}^o_{(X,x_0)}$. Nun jedoch zum Eindeutigkeitssatz.

**Satz 1.24. (Eindeutigkeit)** *Seien $((Y, y_0), p)$ und $((Y', y_0'), p')$ Überlagerungen von $(X, x_0)$ mit wegweise und lokal wegweise zusammenhängenden Überlagerungsräumen $Y$ und $Y'$. Genau dann gibt es einen Isomorphismus*

$$(Y, y_0) \xrightarrow{\cong} (Y', y_0') \quad \textit{in} \quad \mathscr{\ddot{U}ber}^o_{(X,x_0)},$$

*wenn $\mathscr{G}(Y, y_0) = \mathscr{G}(Y', y_0')$ gilt.*

$$\begin{tikzcd} (Y, y_0) \arrow[rr, dotted, "\approx"] \arrow[dr, "p"'] & & (Y', y_0') \arrow[dl, "p'"] \\ & (X, x_0) & \end{tikzcd}$$

**Satz 1.25. (Existenz)** *Sei $X$ wegweise, lokal wegweise und semilokal einfach zusammenhängend. Ist $G \subset \pi_1(X, x_0)$ eine beliebige Untergruppe, so gibt es eine wegweise und lokal wegweise zusammenhängende Überlagerung $((Y, y_0), p)$ von $(X, x_0)$ mit $\mathscr{G}(Y, y_0) = G$.*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y,y_0) \arrow[dl, dotted, two heads] \arrow[d, dotted, two heads, "p_*"', "\cong"] & \\
\mathscr{G}(Y,y_0) \arrow[r, equal] \arrow[dr, hook] & G \arrow[r, squiggly] \arrow[d, hook] & (Y,y_0) \arrow[d, dotted, two heads, "p"] \\
 & \pi_1(X,x_0) & (X,x_0)
\end{tikzcd}$$

**Beweis**. Jeder Weg $a$ in $Y$ ist die eindeutig bestimmte Hochhebung des Weges $p \circ a$ in $X$ zum Anfangspunkt $a(0)$. Dabei ist $a$ genau dann eine Schleife, wenn

$$[p \circ a] \in \mathscr{G}(Y, y_0)$$

ist. Deshalb ist der Endpunkt $a(1) \in Y$ bestimmt durch die Homotopieklasse $[p \circ a]$. Wir konstruieren damit die Punkte von $Y$ aus Wegen in $X$.

- <u>Definition von $Y$</u>

  Sei $PX(x_0, x)$ die Menge aller in $x_0$ beginnenden Wege in $X$. Erkläre auf $\mathrm{PX}(x_0, x)$ eine Äquivalenzrelation $\overset{G}{\sim}$ durch

  $$a \overset{G}{\sim} b \;:\Longleftrightarrow\; a(1) = b(1) \text{ und } \left[ab^{-1}\right] \in G.$$

  Durch $\overset{G}{\sim}$ ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation gegeben, denn

  1. $\left[aa^{-1}\right]=\left[e_{x_0}\right]=1 \in G$, also $a \overset{G}{\sim} a$.
  2. Falls $a \overset{G}{\sim} b$, dann $\left[ba^{-1}\right]=\left[ab^{-1}\right]^{-1} \in G$, also auch $b \overset{G}{\sim} a$.
  3. Falls $a \overset{G}{\sim} b$ und $b \overset{G}{\sim} c$, so ist $a(1) = b(1) = c(1)$ und $\left[ac^{-1}\right]=\left[ab^{-1}bc^{-1}\right]$ $=\left[ab^{-1}\right]\left[bc^{-1}\right]\in G$, i.e. $a \overset{G}{\sim} c$.

  Definiere

  $$Y := PX(x_0, x)/ \overset{G}{\sim}$$

  als die Menge der Äquivalenzklassen $[*]_{\overset{G}{\sim}}$ unter $\overset{G}{\sim}$.

- <u>Definition der Projektion $p : Y \to X$</u>

  Definiere nun die Abbildung $p : Y \to X$ durch

  $$p\left([a]_{\overset{G}{\sim}}\right) := a(1).$$

  Der Wegzusammenhang von $X$ impliziert die Surjektivität von $p$.

- Topologie auf $Y$ und Hausdorffeigenschaft

  Für $[a]_{\underset{\sim}{G}} \in Y$ sei $U \subset X$ eine offene Umgebung von $a(1)$. Setze

  $$\left([a]_{\underset{\sim}{G}}, U\right) := \left\{[ab]_{\underset{\sim}{G}} \mid b \in PU\left(a(1)\right)\right\}.$$

  Die Menge $\mathcal{B}_\tau := \left\{\left([a]_{\underset{\sim}{G}}, U\right)\right\} \cup \{\emptyset\}$ bildet eine Basis der Topologie $\tau$ auf $Y$, denn

  1. $Y = \left([e_{x_0}]_{\underset{\sim}{G}}, X\right)$
  2. Sind $\left([a_1]_{\underset{\sim}{G}}, U_1\right), \left([a_2]_{\underset{\sim}{G}}, U_2\right) \in \mathcal{B}_\tau$ und ist $[c]_{\underset{\sim}{G}} \in \left([a_1]_{\underset{\sim}{G}}, U_1\right) \cap \left([a_2]_{\underset{\sim}{G}}, U_2\right)$, dann gilt $\left([c]_{\underset{\sim}{G}}, U_1 \cap U_2\right) \subset \left([a_1]_{\underset{\sim}{G}}, U_1\right) \cap \left([a_2]_{\underset{\sim}{G}}, U_2\right)$.

  Es ist noch die Hausdorffeigenschaft des topologischen Raumes $(Y, \tau)$ nachzuweisen. Dazu seien $[a_1]_{\underset{\sim}{G}}, [a_2]_{\underset{\sim}{G}} \in Y$ mit $[a_1]_{\underset{\sim}{G}} \neq [a_2]_{\underset{\sim}{G}}$.

  1. Ist $a_1(1) \neq a_2(1)$, so gibt es aufgrund der Hausdorffeigenschaft von $X$ disjunkte offene Umgebungen $U_1, U_2 \subset X$ von $a_1(1)$ und $a_2(1)$, und es gilt dann
  $$\left([a_1]_{\underset{\sim}{G}}, U_1\right) \cap \left([a_2]_{\underset{\sim}{G}}, U_2\right) = \emptyset.$$
  2. Ist andererseits $a_1(1) = a_2(1)$, so existiert aufgrund des semilokal einfachen Zusammenhangs von $X$ eine offene Umgebung $U \subset X$ von $a_1(1) = a_2(1)$, derart, daß jede Schleife in $U$ $X$-homotop zu einem konstanten Weg $e_*$ ist.

□

## 1.6 Fasertransport & Monodromie

Sei $(Y, p)$ eine Überlagerung von $X$ und $w : I \to X$ ein Weg mit Anfang $x_0$ und Ende $x_1$. Die WHE versichert, daß es zu jedem $y \in p^{-1}(x_0)$ eine Hochhebung $\widetilde{w} : I \to Y$ von $w$ entlang $p$ gibt mit $\widetilde{w}(0) = y$. Für den Endpunkt der Hochhebung gilt stets $\widetilde{w}(1) \in p^{-1}(x_1)$. Wie schon gezeigt, sind für homotope Wege $w \simeq w'$ die Endpunkte ihrer Hochhebungen $\widetilde{w}$, $\widetilde{w}'$ mit gleichem Anfang gleich: $\widetilde{w}(1) = \widetilde{w}'(1)$.

**Definition 1.26.** Die Abbildung

$$\tau_{[w]} : p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_1)$$

gegeben durch $\tau_{[w]}(y) := \widetilde{w}(1)$ heißt **Fasertransport** entlang $w$.

**Lemma 1.27.** *Der Fasertransport $\tau_{[w]}$ hängt nur von der Homotopieklasse $[w]$ ab und hat die folgenden Eigenschaften:*

*(F1)* $\tau_{[v \cdot w]} = \tau_{[w]} \circ \tau_{[v]}$ *für alle Wege* $v, w : I \to X$ *mit* $v(1) = w(0)$

*(F2)* $\tau_{[e_*]} = \tau_1 = \mathrm{id}_{p^{-1}(*)}$

*(F3)* $\tau_{[w]}$ *ist bijektiv für alle Wege $w$ in $X$*

*(F4)* $\tau_{[w^{-1}]} = \tau_{[w]}^{-1}$.

**Beweis**. Da für homotope Wege $w \simeq w'$ in $X$ mit Hochhebungen $\widetilde{w}, \widetilde{w}'$ zum gleichen Anfangspunkt auch die Endpunkte de Hochhebungen übereinstimmen, also $\widetilde{w}(1) = \widetilde{w}'(1)$, hängt der Fasertransport $\tau_{[w]}$ wegen $\tau_{[w]} = \tau_{[w']}$ lediglich von der Homotopieklasse $[w]$ ab.

(F1) Seien $v, w : I \to X$ Wege in $X$ mit $v(1) = w(0)$. Sei $\widetilde{v} : I \to Y$ Hochhebung von $v$ entlang $p$ mit Anfang $\widetilde{v}(0) = y \in Y_{v(0)}$. Dann verbindet $\widetilde{v}$ die Punkte $y$ und $\tau_{[v]}(y)$. Analog gibt es eine eindutig bestimmte Hochhebung $\widetilde{w}$ von $w$ mit Anfang $\widetilde{w}(0) = \tau_{[v]}(y)$. Dann ist $\widetilde{w}$ ein Weg von $\tau_{[v]}(y)$ nach $\tau_{[w]}(\tau_{[v]}(y))$. Das Produkt $\widetilde{v} \cdot \widetilde{w}$ ist nun eine Hochhebung von $v \cdot w$ mit $(\widetilde{v} \cdot \widetilde{w})(0) = y$ und $(\widetilde{v} \cdot \widetilde{w})(1) = \tau_{[v \cdot w]}(y)$. Somit haben wir

$$\tau_{[v \cdot w]} = \tau_{[w]} \circ \tau_{[v]} : Y_{v(0)} \longrightarrow Y_{w(1)},$$

was zu zeigen war.

(F2) Bezeichne $e_*$ den konstanten Weg in $* \in X$. Die eindeutig bestimmte Hochhebung $\widetilde{e}_*$ von $e_*$ mit Anfang in $y \in p^{-1}(*)$ ist dann der konstante Weg $e_y$ in $y$. Somit ist

$$\tau_{[e_*]}(y) = \widetilde{e}_*(1) = e_y(1) = y \quad \text{für alle } y \in p^{-1}(*)$$

und damit

$$\tau_{[e_*]} = \tau_1 = \mathrm{id}_{p^{-1}(*)}.$$

(F3) Sei $w : I \to X$ ein Weg in $X$. Betrachte den inversen Weg $w^{-1}$. Der entsprechende Fasertransport ist gegeben durch

$$\tau_{[w^{-1}]} : p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_1).$$

Für die Kompositionen

$$\tau_{[w^{-1}]} \circ \tau_{[w]} : p^{-1}(w(0)) \longrightarrow p^{-1}(w(1)) \longrightarrow p^{-1}(w(0))$$

und

$$\tau_{[w]} \circ \tau_{[w^{-1}]} : p^{-1}(w(1)) \longrightarrow p^{-1}(w(0)) \longrightarrow p^{-1}(w(1))$$

gilt nach (F1) und (F2)

$$\tau_{[w^{-1}]} \circ \tau_{[w]} = \tau_{[w \cdot w^{-1}]} = \tau_{\left[e_{w(0)}\right]} = \mathrm{id}_{p^{-1}(w(0))}$$

sowie

$$\tau_{[w]} \circ \tau_{[w^{-1}]} = \tau_{[w^{-1} \cdot w]} = \tau_{\left[e_{w(1)}\right]} = \mathrm{id}_{p^{-1}(w(1))}.$$

Die Fasertransporte $\tau_{[w]}$ und $\tau_{[w^{-1}]}$ sind demnach Inverse und damit bijektiv.

(F4) Da $\tau_{[w]}$ und $\tau_{[w^{-1}]}$ inverse Abbildungen sind, gilt

$$\tau_{[w^{-1}]} = \tau_{[w]}^{-1}.$$

Damit sind alle Einzelaussagen für den Fasertransport nachgewiesen. □

Wir beschäftigen uns nun mit der Operation der Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser $Y_{x_0} = p^{-1}(x_0)$.

**Definition 1.28.** Die Rechtsoperation der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ des Basisraumes auf der Faser $Y_{x_0}$ wird gegeben durch die Abbildung

$$Y_{x_0} \times \pi_1(X, x_0) \longrightarrow Y_{x_0}, \quad (y, \omega) \longmapsto y \cdot \omega := \tau_\omega(y) \quad \text{mit } \omega = [w]\,,$$

und wird als *Monodromie-Operation* bezeichnet.

Festzustellen sind die folgenden Eigenschaften der Monodromie-Operation:

**Lemma 1.29.** *Für die Operation $Y_{x_0} \times \pi_1(X, x_0) \longrightarrow Y_{x_0}$ der Fundamendamentalgruppe der Basis $X$ auf der Faser gilt*

*(M1)* $(y \cdot \alpha) \cdot \beta = y \cdot (\alpha\beta)$ *für alle* $y \in Y_{x_0}$, $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$

*(M2)* $y \cdot 1 = y$ *für alle* $y \in Y_{x_0}$

*(M3)* $\pi_1(X, x_0)$ *operiert transitiv auf der Faser* $Y_{x_0}$.

*(M4) Die Standgruppe* $(\pi_1(X, x_0))_{y_0}$ *an der Stelle* $y_0 \in Y_{x_0}$ *ist die charakteristische Untergruppe* $\mathscr{G}(Y, y_0)$.

*(M5) Die Abbildung*

$$\phi : \mathscr{G}(Y, y_0)\backslash\pi_1(X, x_0) \longrightarrow Y_{x_0}, \quad \mathscr{G}(Y, y_0)\alpha \longmapsto y_0 \cdot \Big(\mathscr{G}(Y, y_0)\alpha\Big)$$

*ist bijektiv.*

Zusammenfassend halten wir fest:

**Satz 1.30.** *Ist* $((Y, y_0), p)$ *eine Überlagerung von* $(X, x_0)$, *so gibt es eine* $1:1$-*Korrespondenz zwischen der Menge* $\mathscr{G}(Y, y_0)\backslash\pi_1(X, x_0)$ *der Rechtsnebenklassen und der Faser* $Y_{x_0}$.

Hieraus lassen sich einfache Folgerungen die Blätterzahl der Überlagerung betreffend ziehen.

**Korollar 1.31.** *Die Blätterzahl einer Überlagerung* $((Y, y_0), p)$ *von* $(X, x_0)$ *entspricht dem Index von* $\mathscr{G}(Y, y_0)$ *in* $\pi_1(X, x_0)$.

**Korollar 1.32.** *Ist* $((Y, y_0), p)$ *eine Überlagerung von* $(X, x_0)$ *und* $Y$ *einfach zusammenhängend, so ist die Blätterzahl gleich der Ordnung von* $\pi_1(X, x_0)$.

## 1.7 Decktransformation & normale Überlagerungen

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit Decktransformationen von Überlagerungen. Es folgt nun die Einführung der Decktransformationen.

**Definition 1.33.** Eine **Decktransformation** einer Überlagerung $(Y, p) \in \mathrm{Ob}(\ddot{\mathscr{U}}\mathit{ber}_X)$ ist ein Automorphismus $(Y, p) \overset{\cong}{\to} (Y, p)$ in $\ddot{\mathscr{U}}\mathit{ber}_X$, oder mit anderen Worten: ein Homöomorphismus $Y \overset{\approx}{\to} Y$ über $X$. Bezeichne $\Delta(Y, p)$ die Menge aller Decktransformationen der Überlagerung $(Y, p)$.

Die Decktransformationen $\Delta(Y, p)$ tragen auf naheliegende Weise eine Gruppenstruktur.

**Lemma 1.34.** *Bezeichne $\circ$ die Komposition von Abbildungen. Das Paar $(\Delta(Y, p), \circ)$ bildet eine Gruppe, die Decktransformationsgruppe.*

**Beweis**. Ist $D \in \Delta(Y, p)$ eine Decktransformation von $(Y, p)$, so gilt dies auch für $D^{-1}$. Ebenso ist die Komposition zweier Decktransformationen (derselben Überlagerung) wieder eine Decktransformation. Das neutrale Element ist gegeben durch die Identität $\mathrm{id}_Y$. $\square$

Es zeigt sich, daß nichttriviale Decktransformationen fixpunktfrei sind.

**Korollar 1.35.** *Ist $D \in \Delta(Y, p)$ eine Decktransformation, die einen Fixpunkt besitzt, so gilt $D \equiv id_Y$.*

Die Decktransformationsgruppe $\Delta(Y, p)$ operiert auf dem Überlagerungsraum Y mittels $\Delta(Y, p) \times Y \to Y$, $(D, y) \longmapsto D(y)$. Diese Operation ist nach dem vorangehenden Korollar frei: nur die Identität besitzt Fixpunkte.

**Satz 1.36.** *Ist $D \in \Delta(Y, p)$ eine Decktransformation von $(Y, p)$ und $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ sowie $y \in Y_{x_0}$, so gilt $(Dy) \cdot \alpha = D(y \cdot \alpha)$.*

**Satz 1.37.** *Sei $((Y, y_0), p)$ eine Überlagerung von $(X, x_0)$ und sei $y \in Y_{x_0}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

*(1) Es gibt $D \in \Delta(Y, p)$ mit $D(y_0) = y$.*

*(2) Es gibt $\alpha \in N\Big(\mathscr{G}(Y, y_0)\Big)$ mit $y = y_0 \cdot \alpha$.[1]*

*(3) $\mathscr{G}(Y, y_0) = \mathscr{G}(Y, y)$.*

**Korollar 1.38.** *Die charakteristische Untergruppe $\mathscr{G}(Y, y_0)$ ist genau dann ein Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$, wenn die Decktransformationsgruppe $\Delta(Y, p)$ transitiv auf der Faser $Y_{x_0}$ operiert.*

[1]Dabei bezeichnet $N_H = N(H) = \big\{g \in G |\ gHg^{-1} = H\big\}$ den Normalisator der Untergruppe $H \subset G$.

Wir kommen nun zum Begriff der normalen Überlagerung.

**Definition 1.39.** Eine Überlagerung $((Y, y_0), p)$ von $(X, x_0)$ heißt **normal**, falls $\Delta(Y, p)$ transitiv auf der Faser $Y_{x_0}$ operiert, oder gleichbedeutend damit, wenn

$$\mathscr{G}(Y, y_0) \triangleleft \pi_1(X, x_0)$$

ist.

Das Vorhaben, eine Klassifikation der Decktransformationen durchzuführen, veranlaßt

**Definition 1.40.** *Definiere die Abbildung $\Theta$ durch*

$$\Theta : N\Big(\mathscr{G}(Y, y_0)\Big) \longrightarrow \Delta(Y, p), \quad \alpha \longmapsto D_\alpha,$$

*wobei $D_\alpha$ die eindeutig bestimmte Decktransformation mit $D_\alpha(y_0) = y_0 \cdot \alpha$ bezeichnet.*

**Satz 1.41. (Klassifikation von Decktransformationen)** *Die Abbildung $\Theta$ ist ein Epimorphismus mit Kern $\mathscr{G}(Y, y_0)$. Es gilt*

$$\Delta(Y, p) \cong N\Big(\mathscr{G}(Y, y_0)\Big) \setminus \mathscr{G}(Y, y_0).$$

**Korollar 1.42.** *Ist $(Y, p)$ eine normale Überlagerung von $X$ so gilt*

$$\Delta(Y, p) \cong \pi_1(X, x_0) \setminus \mathscr{G}(Y, y_0).$$

## 1.8 Universelle Überlagerungen

Wie schon gesehen, sind wegweise und lokal wegweise zusammenhängende Überlagerungen $(Y, p)$ von einfach zusammenhängenden Basisräumen einblättrig und lediglich Homöomorphismen. Das bedeutet, daß sämtliche Überlagerungsräume $Y$ eines einfach zusammenhängenden Raumes $X$ vollständig durch die Homöomorphieklasse $[X] \in \mathrm{Ob}\Big(\mathscr{Top}\Big)/_{\cong}$ von $X$ bestimmt sind und damit selbst sämtlich homöomorph untereinander. Ungleich ergiebiger gestaltet sich die Angelegenheit bei Betrachtung von Überlagerungen mit einfach zusammenhängenden Überlagerungsräumen.
Zunächst taufen wir die vielversprechenden einfach zusammenhängenden Überlagerungen im Zuge der nachstehenden Defintionszeremonie.

**Definition 1.43.** Eine wegweise und lokal wegweise zusammenhängende Überlagerung $(Y, p)$ von $X$ heißt **universell**, falls $Y$ einfach zusammenhängend ist.

Die Klassifikation der Überlagerungen liefert Existenz und Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie) universeller Überlagerungen.

**Korollar 1.44.** *Ist $(X, x_0)$ wegweise, lokal wegweise und semilokal einfach zusammenhängend, so existiert (bis auf Isomorphie) eine eindeutig bestimmte universelle Überlagerung $\Big((\widetilde{X}, \widetilde{x}_0), \pi\Big)$ von $X$.*

Zu bemerken ist, daß die charakteristische Untergruppe $\mathscr{G}(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ der universellen Überlagerung $\Big((\widetilde{X},\widetilde{x}_0),\pi\Big)$ von $(X,x_0)$ trivial ist und damit natürlich Normalteiler der Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ des Basisraumes. Deshalb ist die universelle Überlagerung eines Raumes stets normal und für die Decktransformationsgruppe $\Delta(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ gilt

$$\Delta(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\cong\pi_1(X,x_0).$$

Die einzigartige Universalität der universellen Überlagerung findet im Folgenden Ausdruck.

**Satz 1.45. (Universelle Überlagerung)** *Sei $(X,x_0)$ ein wegweise, lokal wegweise und semilokal einfach zusammenhängender Raum und $\Big((\widetilde{X},\widetilde{x}_0),\pi\Big)$ die universelle Überlagerung von $(X,x_0)$, sowie $\Delta(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ die Decktransformationsgruppe der Überlagerung. Dann ist für jede Untergruppe $\Xi\subset\Delta(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ das Paar*

$$\Big((\widetilde{X}/\Xi,[\widetilde{x}_0]),\widetilde{\pi}\Big)$$

*eine wegzusammenhängende Überlagerung von $(X,x_0)$. Zudem sind auf diese Weise (bis auf Isomorphie) alle existenten wegweise zusammenhängenden Überlagerungen von $(X,x_0)$ gegeben.*

Wir erhalten so den weitreichenden Klassifikationssatz für Überlagerungen wegweise, lokal wegweise und semilokal einfach zusammenhängender Räume $X$.

**Satz 1.46. (Klassifikation von Überlagerungen)** *Es gibt eine $1:1$-Korrespondenz zwischen Isomorphieklassen von Überlagerungen $((Y,y_0),p)$ von $X$ und Untergruppen der Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$.*

# 2 Überlagerungen von Liegruppen

Da Liegruppen sowohl die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit als auch eine Gruppenstruktur tragen, ist es sinnvoll, zunächst Überlagerungen von Mannigfaltigkeiten zu betrachten, in der Hoffnung brauchbare Informationen über die strukturelle Beschaffenheit des Überlagerungsraumes zu gewinnen. Hiernach wenden wir uns der Gruppenstruktur des Basisraumes zu, mit dem Wunsch mittels Vererbungslehre auch auf dem Überlagerungsraum Spuren algebraischer Strukturen zu entdecken und freizulegen.

## 2.1 Überlagerungen von Mannigfaltigkeiten

Betrachte zunächst Überlagerungen von Mannigfaltigkeiten. In diesem Sinne sei $M$ eine glatte, $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit und $(\widetilde{M}, p)$ eine Überlagerung von $M$. Es zeigt sich, daß dann auf dem Überlagerungsraum $\widetilde{M}$ auf eindeutige Weise die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit induziert wird, so daß $p$ glatt ist.

**Satz 2.1.** *Sei $M$ eine glatte, $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit und $(\widetilde{M}, p)$ eine Überlagerung von $M$. Dann ist $\widetilde{M}$ ein lokal euklidischer Hausdorffraum und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Weiterhin gibt es eine eindeutige differenzierbare Struktur auf $\widetilde{M}$, für die die Projektion $p$ glatt und nicht-singulär ist.*

**Beweis**. Da $M$ als Mannigfaltigkeit mittels Karten lokal diffeomorph zu einer Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist, ist dies auch für den Überlagerungsraum $\widetilde{M}$ der Fall. Zu jedem Punkt $x \in M$ existiert eine Karte $(\varphi_x, U_x)$ und eine offene Teilmenge $V_x = \varphi_x(U_x)$ des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$, so daß $\varphi_x : U_x \xrightarrow{\approx} V_x$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus ist. Da $(\widetilde{M}, p)$ eine Überlagerung von M ist, gibt es zu jedem Punkt $x \in M$ eine zulässige Umgebung $\hat{U}_x$ von $x$, d.h. eine offene Umgebung mit

$$p^{-1}(\hat{U}_x) = \coprod_{y \in p^{-1}(x)} V_x^{(y)},$$

wobei $V_x^{(y)} \subset \widetilde{M}$ disjunkte offene Teilmengen sind, die durch

$$p|_{V_x^{(y)}} : V_x^{(y)} \xrightarrow{\approx} \hat{U}_x$$

diffeomorph auf $\hat{U}_x$ abgebildet werden. Definiere zu jedem $y \in p^{-1}(x)$ die offene Menge

$$\widetilde{W}_y := V_x^{(y)} \cap p^{-1}(U_x) \quad \subset V_x^{(y)}. \tag{1}$$

Dann ist

$$\varphi \circ p|_{\widetilde{W}_y} : \widetilde{W}_y \xrightarrow{\approx} \varphi(\hat{U}_x \cap U_x) \subset \varphi(U_x) = V \subset \mathbb{R}^n \tag{2}$$

ein Diffeomorphimus zwischen einer offenen Umgebung $\widetilde{W}_y \subset \widetilde{M}$ von $y \in \widetilde{M}$ und einer offenen Menge $\widetilde{V}_y := \varphi(\hat{U}_x \cap U_x) \subset \mathbb{R}^n$. Setze

$$\widetilde{\varphi}_y := \varphi \circ p|_{\widetilde{W}_y}. \tag{3}$$

Für $y \in p^{-1}(x)$ gibt es also eine Karte

$$(\widetilde{\varphi}_y, \widetilde{W}_y). \tag{4}$$

Die Surjektivität von $p$ versichert die Existenz solcher Karten für alle $y \in \widetilde{M}$. Genauer: da die offenen Umgebungen

$$\begin{aligned} p(\widetilde{W}_y) &= p\left(V_x^{(y)} \cap p^{-1}(U_x)\right) \\ &= p\left(V_x^{(y)}\right) \cap p\left(p^{-1}(U_x)\right) \\ &= \hat{U}_x \cap U_x \ \ni x \end{aligned}$$

von Punkten $x \in M$ eine offene Überdeckung $\mathcal{U}_M := \left\{\hat{U}_x \cap U_x\right\}_{x \in M}$ von $M$ bilden, ist durch die Kartengebiete eine offene Überdeckung

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{\widetilde{M}} := \left\{\widetilde{W}_y\right\}_{y \in \widetilde{M}} \tag{5}$$

von $\widetilde{M}$ gegeben, denn mit der Surjektivität von $p$ hat man

$$p^{-1}\left(\bigcup_{x \in M} \hat{U}_x \cap U_x\right) = \bigcup_{x \in M} p^{-1}\left(\hat{U}_x \cap U_x\right) = \bigcup_{x \in M} \coprod_{y \in p^{-1}(x)} \widetilde{W}_y = \bigcup_{y \in \widetilde{M}} \widetilde{W}_y = \widetilde{M},$$

die Kartengebiete überdecken $\widetilde{M}$ also vollständig. Zu betrachten sind noch die Kartenwechsel. Dazu seien $(\widetilde{\varphi}_{y_1}, \widetilde{W}_{y_1})$ und $(\widetilde{\varphi}_{y_2}, \widetilde{W}_{y_2})$ zwei Karten. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left(\widetilde{\varphi}_{y_1} \circ \widetilde{\varphi}_{y_2}^{-1}\right)|_{\widetilde{\varphi}_{y_2}(\widetilde{W}_{y_1} \cap \widetilde{W}_{y_2})} \\ = \ & \left(\varphi_1 \circ p|_{\widetilde{W}_{y_1}} \circ (\varphi_2 \circ p|_{\widetilde{W}_{y_2}})^{-1}\right)|_{\widetilde{\varphi}_{y_2}(\widetilde{W}_{y_1} \cap \widetilde{W}_{y_2})} \\ = \ & \varphi_1|_{p(\widetilde{W}_{y_1} \cap \widetilde{W}_{y_2})} \circ \underbrace{p|_{\widetilde{W}_{y_1} \cap \widetilde{W}_{y_2}} \circ \left(p|_{\widetilde{W}_{y_1} \cap \widetilde{W}_{y_2}}\right)^{-1}}_{= \mathrm{id}_{p(\widetilde{W}_{y_1} \cap \widetilde{W}_{y_2})}} \circ \left(\varphi_2|_{\varphi_2 \circ p(\widetilde{W}_{y_1} \cap \widetilde{W}_{y_2})}\right)^{-1} \\ = \ & \varphi_1|_{p(\widetilde{W}_{y_1} \cap \widetilde{W}_{y_2})} \circ \left(\varphi_2|_{\varphi_2 \circ p(\widetilde{W}_{y_1} \cap \widetilde{W}_{y_2})}\right)^{-1} \\ = \ & \left(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\right)|_{\varphi_2\left(p(\widetilde{W}_{y_1} \cap \widetilde{W}_{y_2})\right)}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $p(\widetilde{W}_{y_1} \cap \widetilde{W}_{y_2}) \subset U_1 \cap U_2$. Da die Kartenwechsel von $M$

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

glatt sind, sind auch die Kartenwechsel von $\widetilde{M}$

$$\widetilde{\varphi}_{y_1} \circ \widetilde{\varphi}_{y_2}^{-1} : \widetilde{\varphi}_{y_2}(\widetilde{W}_{y_1} \cap \widetilde{W}_{y_2}) \longrightarrow \widetilde{\varphi}_{y_1}(\widetilde{W}_{y_1} \cap \widetilde{W}_{y_2}), \tag{6}$$

die lediglich die Einschränkungen

$$\left(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\right)|_{\varphi_2\left(p(\widetilde{W}_{y_1}\cap\widetilde{W}_{y_2})\right)} : \varphi_2\left(p(\widetilde{W}_{y_1}\cap\widetilde{W}_{y_2})\right) \longrightarrow \varphi_1\left(p(\widetilde{W}_{y_1}\cap\widetilde{W}_{y_2})\right) \tag{7}$$

von Kartenwechseln auf $M$ sind, glatt. Wir erhalten also eine glatte Struktur $\mathscr{F}_{\widetilde{M}}$ auf $\widetilde{M}$, d.h. einen Atlas, durch

$$\mathscr{F}_{\widetilde{M}} := \left\{(\widetilde{\varphi}_y, \widetilde{W}_y)|\ y \in \widetilde{M}\right\}, \tag{8}$$

die ihre Maximalität von der Struktur $\mathscr{F}_M$ auf $M$ erbt. □

## 2.2 Überlagerungen von Liegruppen

Sei $G$ eine zusammenhängende Liegruppe. Dann besitzt $G$ als glatte Mannigfaltigkeit eine universelle Überlagerung $(\widetilde{G}, \pi)$. Der Überlagerungsraum $\widetilde{G}$ trägt dann eine eindeutig bestimmte differenzierbare Struktur, für die die Überlagerungsprojektion $\pi$ glatt und nicht-singulär ist, d.h. die linearen Abbildungen

$$\mathrm{d}\pi|_{T_g\widetilde{G}} : T_g\widetilde{G} \longrightarrow T_{\pi(g)}G, \quad g \in G,$$

haben trivialen Kern. Das erste Resultat, das diesen Gegebenheiten entspringt, ist die bemerkenswerte Aussage, daß auf dem einfach zusammenhängenden Überlagerungsraum $\widetilde{G}$ eine Gruppenstruktur induziert wird, durch die $\widetilde{G}$ zu einer Liegruppe und die Projektion $\pi$ zu einem Liegruppen-Homomorphismus wird.

**Satz 2.2.** *Sei $G$ eine zusammenhängende Liegruppe und $(\widetilde{G}, \pi)$ die universelle Überlagerung von $G$. Weiterhin liege $\widetilde{e}$ über dem neutralen Element $e$ von $G$, also $\widetilde{e} \in \pi^{-1}(e)$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Liegruppenstruktur auf dem Überlagerungsraum $\widetilde{G}$, derart, daß $\widetilde{e}$ das neutrale Element von $\widetilde{G}$ ist und die Projektion $\pi$ ein Liegruppen-Homomorphismus. Darüberhinaus liegt der Kern von $\pi$ im Zentrum $Z(\widetilde{G})$ von $\widetilde{G}$.*

**Beweis**. Bezeichne $e \in G$ das neutrale Element der Liegruppe $G$. Wähle $\widetilde{e} \in \widetilde{G}_e = \pi^{-1}(e)$. Betrachte die Abbildung

$$\alpha : (\widetilde{G} \times \widetilde{G}, (\widetilde{e}, \widetilde{e})) \longrightarrow (G, e), \quad (\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) \longmapsto \pi(\widetilde{\sigma})\pi(\widetilde{\tau})^{-1}.$$

Mit $\widetilde{G}$ ist auch $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ einfach zusammenhängend und damit ist

$$\alpha_*\left(\pi_1(\widetilde{G} \times \widetilde{G}, (\widetilde{e}, \widetilde{e}))\right) = \alpha_*(1) = 1 \subset \mathscr{G}(\widetilde{G}, \widetilde{e}).$$

Nach dem Existenzsatz für Hochhebungen existiert dann eine eindeutig bestimmte Hochhebung

$$\widetilde{\alpha} : (\widetilde{G} \times \widetilde{G}, (\widetilde{e}, \widetilde{e})) \longrightarrow (\widetilde{G}, \widetilde{e})$$

von $\alpha$ entlang $\pi$ mit $\widetilde{\alpha}(\widetilde{e},\widetilde{e}) = \widetilde{e}$.

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{G},\widetilde{e}) \arrow[d, "\pi"] \\ \left(\widetilde{G}\times\widetilde{G},(\widetilde{e},\widetilde{e})\right) \arrow[ur, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"'] & (G,e) \end{tikzcd}$$

Für $\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau} \in \widetilde{G}$ definiere

$$\boxed{\widetilde{\tau}^{-1} := \widetilde{\alpha}(\widetilde{e},\widetilde{\tau}), \quad \widetilde{\sigma}\widetilde{\tau} := \widetilde{\alpha}(\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau}^{-1})}\,. \tag{9}$$

Wir weisen nun die Gruppenaxiome für $\widetilde{G}$ nach.

- <u>Neutrales Element $\widetilde{e}$ von $\widetilde{G}$</u>

  Betrachte nun das Abbildungstripel $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ gegeben durch

$$\theta_1,\theta_2,\theta_3 : \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G} \quad , \quad \begin{array}{l} \theta_1(\widetilde{\sigma}) := \widetilde{\sigma}\widetilde{e} \\ \theta_2(\widetilde{\sigma}) := \widetilde{e}\widetilde{\sigma} \\ \theta_3(\widetilde{\sigma}) := \widetilde{\sigma}. \end{array}$$

  Damit gilt für $\theta_1$

$$\begin{aligned} (\pi\circ\theta_1)(\widetilde{\sigma}) &= \pi(\widetilde{\sigma}\widetilde{e}) = (\pi\circ\widetilde{\alpha})(\widetilde{\sigma},\widetilde{e}^{-1}) \\ &= \alpha(\widetilde{\sigma},\widetilde{\alpha}(\widetilde{e},\widetilde{e})) = \pi(\widetilde{\sigma})\pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{e},\widetilde{e})\right)^{-1} \\ &= \pi(\widetilde{\sigma})\alpha(\widetilde{e},\widetilde{e})^{-1} = \pi(\widetilde{\sigma})e^{-1} \\ &= \pi(\widetilde{\sigma}). \end{aligned}$$

  Für $\theta_2$ bekommt man

$$\begin{aligned} (\pi\circ\theta_2)(\widetilde{\sigma}) &= \pi(\widetilde{e}\widetilde{\sigma}) = (\pi\circ\widetilde{\alpha})(\widetilde{e},\widetilde{\sigma}^{-1}) \\ &= \alpha\left(\widetilde{e},\widetilde{\alpha}(\widetilde{e},\widetilde{\sigma})\right) = \pi(\widetilde{e})\pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{e},\widetilde{\sigma})\right)^{-1} \\ &= e\alpha(\widetilde{e},\widetilde{\sigma})^{-1} = \left(\pi(\widetilde{e})\pi(\widetilde{\sigma})^{-1}\right)^{-1} \\ &= \pi(\widetilde{\sigma}), \end{aligned}$$

  und schließlich für $\theta_3 = \mathrm{id}_{\widetilde{G}}$

$$(\pi\circ\theta_3)(\widetilde{\sigma}) = (\pi\circ\mathrm{id}_{\widetilde{G}})(\widetilde{\sigma}) = \pi(\widetilde{\sigma}).$$

  Somit gilt $\pi\circ\theta_i = \pi$ für $i \in \{1,2,3\}$, d.h. die Abbildungen $\theta_i$ sind alle Hochhebungen von $\pi$ entlang sich selbst.

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{G},\widetilde{e}) \arrow[d, "\pi"] \\ (\widetilde{G},\widetilde{e}) \arrow[ur, Rrightarrow, "\theta_i"] \arrow[r, "\pi"'] & (G,e) \end{tikzcd}$$

Wegen $\theta_i(\widetilde{e}) = \widetilde{e}$ folgt aufgrund des einfachen Zusammenhangs von $\widetilde{G}$ mit dem Eindeutigkeitsatz für Hochhebungen, daß

$$\theta_1 \equiv \theta_2 \equiv \theta_3 \equiv \mathrm{id}_{\widetilde{G}}$$

ist, also

$$\boxed{\widetilde{\sigma}\widetilde{e} = \widetilde{e}\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma} \ \text{ für alle } \widetilde{\sigma} \in \widetilde{G}}\ . \tag{10}$$

- <u>Existenz des Inversen</u>

  Wir betrachten nun das Tripel $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, gegeben durch

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3 : \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G} \quad , \quad \begin{aligned} \xi_1(\widetilde{\sigma}) &:= \widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma}^{-1} \\ \xi_2(\widetilde{\sigma}) &:= \widetilde{\sigma}^{-1}\widetilde{\sigma} \\ \xi_3(\widetilde{\sigma}) &:= \widetilde{e}. \end{aligned}$$

Dann hat man für $\xi_1$

$$\begin{aligned} (\pi \circ \xi_1)(\widetilde{\sigma}) &= \pi(\widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma}^{-1}) = \pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{\sigma}, (\widetilde{\sigma}^{-1})^{-1})\right) \\ &= \alpha\left(\widetilde{\sigma}, (\widetilde{\sigma}^{-1})^{-1}\right) = \pi(\widetilde{\sigma})\pi\left((\widetilde{\sigma}^{-1})^{-1}\right) \\ &= \pi(\widetilde{\sigma})\pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{e}, \widetilde{\sigma}^{-1})\right) = \pi(\widetilde{\sigma})\pi(\widetilde{e})\pi(\widetilde{\sigma}^{-1}) \\ &= \pi(\widetilde{\sigma})\alpha(\widetilde{e}, \widetilde{\sigma}) = \pi(\widetilde{\sigma})\pi(\widetilde{e})\pi(\widetilde{\sigma})^{-1} \\ &= e = c_e(\widetilde{\sigma}); \end{aligned}$$

für $\xi_2$ erhält man

$$\begin{aligned} (\pi \circ \xi_2)(\widetilde{\sigma}) &= \pi(\widetilde{\sigma}^{-1}\widetilde{\sigma}) = \pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{\sigma}^{-1}, \widetilde{\sigma}^{-1})\right) \\ &= \alpha(\widetilde{\sigma}^{-1}, \widetilde{\sigma}^{-1}) = \pi(\widetilde{\sigma}^{-1})\pi(\widetilde{\sigma}^{-1})^{-1} \\ &= \pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{e}, \widetilde{\sigma})\right)\pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{e}, \widetilde{\sigma})\right)^{-1} = \alpha(\widetilde{e}, \widetilde{\sigma})\alpha(\widetilde{e}, \widetilde{\sigma})^{-1} \\ &= \pi(\widetilde{e})\pi(\widetilde{\sigma})\left(\pi(\widetilde{e})\pi(\widetilde{\sigma})\right)^{-1} = \pi(\widetilde{\sigma})\pi(\widetilde{\sigma})^{-1} \\ &= e = c_e(\widetilde{\sigma}), \end{aligned}$$

und schließlich

$$(\pi \circ \xi_3)(\widetilde{\sigma}) = \pi(\widetilde{e}) = e = c_e(\widetilde{\sigma}).$$

Somit stellt sich heraus, daß $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ein Hochhebungstripel der konstanten Abbildung $c_e : \widetilde{G} \to \{e\}$ ist mit $\xi_i(\widetilde{e}) = \widetilde{e}$.

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{G}, \widetilde{e}) \arrow[d, "\pi"] \\ (\widetilde{G}, \widetilde{e}) \arrow[ur, Rrightarrow, "\xi_i"] \arrow[r, "c_e"'] & (G, e) \end{tikzcd}$$

Die Eindeutigkeit von Hochhebungen liefert dann

$$\xi_1 \equiv \xi_2 \equiv \xi_3 \equiv c_{\widetilde{e}}$$

und damit die Existenz des Inversen zu jedem Element aus $\widetilde{G}$

$$\boxed{\widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma}^{-1} = \widetilde{\sigma}^{-1}\widetilde{\sigma} = \widetilde{e} \text{ für alle } \widetilde{\sigma} \in \widetilde{G}}\,. \tag{11}$$

- <u>Assoziativität von $\widetilde{G}$</u>

  Für den Nachweis der Assoziativität betrachte das Paar von Abbildungen $(\omega_1, \omega_2)$, gegeben durch

$$\omega_1 : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \times \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G}, \quad (\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, \widetilde{\gamma}) \longmapsto \widetilde{\sigma}(\widetilde{\tau}\widetilde{\gamma})$$

  und

$$\omega_2 : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \times \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G}, \quad (\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, \widetilde{\gamma}) \longmapsto (\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})\widetilde{\gamma}.$$

  Für $\omega_1$ berechnet sich

$$\begin{aligned}
(\pi \circ \omega_1)(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, \widetilde{\gamma}) &= \pi\left(\widetilde{\sigma}(\widetilde{\tau}\widetilde{\gamma})\right) = \pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{\sigma}, (\widetilde{\tau}\widetilde{\gamma})^{-1})\right) \\
&= \alpha\left(\widetilde{\sigma}, (\widetilde{\tau}\widetilde{\gamma})^{-1}\right) = \pi(\widetilde{\sigma})\pi\left((\widetilde{\tau}\widetilde{\gamma})^{-1}\right)^{-1} \\
&= \pi(\widetilde{\sigma})\pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{e}, \widetilde{\tau}\widetilde{\gamma})\right)^{-1} = \pi(\widetilde{\sigma})\alpha\left(\widetilde{e}, \widetilde{\tau}\widetilde{\gamma})\right)^{-1} \\
&= \pi(\widetilde{\sigma})\left(\pi(\widetilde{e}\pi(\widetilde{\tau}\widetilde{\gamma})^{-1}\right)^{-1} = \pi(\widetilde{\sigma})\pi(\widetilde{\tau}\widetilde{\gamma}) \\
&= \pi(\widetilde{\sigma})\pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{\tau}, \widetilde{\gamma}^{-1})\right) = \pi(\widetilde{\sigma})\alpha(\widetilde{\tau}, \widetilde{\gamma}^{-1}) \\
&= \pi(\widetilde{\sigma})\pi(\widetilde{\tau})\pi(\widetilde{\gamma}^{-1})^{-1} = \pi(\widetilde{\sigma})\pi(\widetilde{\tau})\pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{e}, \widetilde{\gamma})\right)^{-1} \\
&= \pi(\widetilde{\sigma})\pi(\widetilde{\tau})\alpha(\widetilde{e}, \widetilde{\gamma})^{-1} = \pi(\widetilde{\sigma})\pi(\widetilde{\tau})\left(\pi(\widetilde{e})\pi(\widetilde{\gamma})^{-1}\right)^{-1} \\
&= \pi(\widetilde{\sigma})\pi(\widetilde{\tau})\pi(\widetilde{\gamma}) =: \Omega(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, \widetilde{\gamma}),
\end{aligned}$$

  und zuletzt für $\omega_2$

$$\begin{aligned}
(\pi \circ \omega_2)(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, \widetilde{\gamma}) &= \pi\left((\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})\widetilde{\gamma}\right) = \pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}, \widetilde{\gamma}^{-1})\right) \\
&= \pi(\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})\pi\left(\widetilde{\gamma}^{-1}\right)^{-1} = \pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}^{-1})\right)\pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{e}, \widetilde{\gamma})\right)^{-1} \\
&= \alpha(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}^{-1})\alpha(\widetilde{e}, \widetilde{\gamma})^{-1} = \pi(\widetilde{\sigma})\pi(\widetilde{\tau}^{-1})^{-1}\pi(\widetilde{\gamma}) \\
&= \pi(\widetilde{\sigma})\pi\left(\widetilde{\alpha}(\widetilde{e}, \widetilde{\tau})\right)^{-1}\pi(\widetilde{\gamma}) = \pi(\widetilde{\sigma})\alpha(\widetilde{e}, \widetilde{\tau})^{-1}\pi(\widetilde{\gamma}) \\
&= \pi(\widetilde{\sigma})\pi(\widetilde{\tau})\pi(\widetilde{\gamma}) = \Omega(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, \widetilde{\gamma}).
\end{aligned}$$

  Die Abbildungen $\omega_1$ und $\omega_2$ sind also Hochhebungen von

$$\Omega : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \times \widetilde{G} \longrightarrow G, \quad \Omega(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, \widetilde{\gamma}) = \pi(\widetilde{\sigma})\pi(\widetilde{\tau})\pi(\widetilde{\gamma})$$

  mit

$$\omega_1(\widetilde{e}, \widetilde{e}, \widetilde{e}) = \widetilde{e} = \omega_2(\widetilde{e}, \widetilde{e}, \widetilde{e}),$$

  was das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& (\widetilde{G}, \widetilde{e}) \arrow[d, "\pi"] \\
\left(\widetilde{G}^3, (\widetilde{e}, \widetilde{e}, \widetilde{e})\right) \arrow[ur, shift left, "\omega_1"] \arrow[ur, shift right, "\omega_2"'] \arrow[r, "\Omega"'] & (G, e)
\end{tikzcd}$$

veranlaßt, und deshalb folgt auch hier

$$\omega_1 \equiv \omega_2$$

und damit die Assoziativität von $\widetilde{G}$

$$\boxed{\widetilde{\sigma}(\widetilde{\tau}\widetilde{\gamma}) = (\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})\widetilde{\gamma} \ \text{ für alle } \widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}, \widetilde{\gamma} \in \widetilde{G}} \, . \tag{12}$$

- <u>$\pi$ IST LIEGRUPPEN-HOMOMORPHISMUS</u>

  Auf diese Weise erhält $\widetilde{G}$ eine abstrakte Gruppenstruktur. Da die Hochhebung $\widetilde{\alpha}$ glatt ist und $\widetilde{G}$ durch die Überlagerungsprojektion $\pi$ ohnehin eine glatte Mannigfaltigkeit ist, wird $\widetilde{G}$ so zu einer Liegruppe. Für die Projektion $\pi$ gilt

$$\boxed{\pi(\widetilde{\tau}^{-1}) = \alpha(\widetilde{e}, \widetilde{\tau}) = \pi(\widetilde{e})\pi(\widetilde{\tau})^{-1} = \pi(\widetilde{\tau})^{-1} \ \text{ für alle } \widetilde{\tau} \in \widetilde{G}} \, , \tag{13}$$

$$\boxed{\pi(\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}) = \alpha(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}^{-1}) = \pi(\widetilde{\sigma})\pi\left(\widetilde{\tau}^{-1}\right)^{-1} = \pi(\widetilde{\sigma})\pi(\widetilde{\tau}) \ \text{ für alle } \widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau} \in \widetilde{G}} \, , \tag{14}$$

  sowie

$$\boxed{\pi(\widetilde{e}) = e} \, , \tag{15}$$

  womit $\pi : \widetilde{G} \to G$ ein Liegruppen-Homomorphismus ist.

Für den Nachweis der letzten Aussage definiere eine Abbildung $\beta$ durch

$$\beta : \ker(\widetilde{G}) \times \widetilde{G} \longrightarrow G, \quad (\widetilde{g}, \widetilde{h}) \longmapsto \pi(\widetilde{g}\widetilde{h}).$$

Tatsächlich gilt dann $\beta(\widetilde{g}, \widetilde{h}) = \pi(\widetilde{h})$, da $\pi$ Gruppenhomomorphismus ist. Betrachte zwei weitere Abbildungen

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}_1 \ &: \ \ker(\widetilde{G}) \times \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G}, \quad (\widetilde{g}, \widetilde{h}) \longmapsto \widetilde{g}\widetilde{h}, \\ \widetilde{\beta}_2 \ &: \ \ker(\widetilde{G}) \times \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G}, \quad (\widetilde{g}, \widetilde{h}) \longmapsto \widetilde{h}\widetilde{g}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$(\pi \circ \widetilde{\beta}_1)(\widetilde{g}, \widetilde{h}) \ = \ \pi(\widetilde{g}\widetilde{h}) = \beta(\widetilde{g}, \widetilde{h})$$

sowie

$$(\pi \circ \widetilde{\beta}_2)(\widetilde{g}, \widetilde{h}) \ = \ \pi(\widetilde{h}\widetilde{g}) = \beta(\widetilde{g}, \widetilde{h}),$$

womit sich $\widetilde{\beta}_1$ und $\widetilde{\beta}_2$ als Hochhebungen von $\beta$ entlang $\pi$ herausstellen.

$$\begin{tikzcd}
 & (\widetilde{G}, \widetilde{e}) \arrow[d, "\pi"] \\
\left(\ker(\pi) \times \widetilde{G}, (\widetilde{e}, \widetilde{e})\right) \arrow[ur, shift left, "\widetilde{\beta}_1"] \arrow[ur, shift right, "\widetilde{\beta}_2"'] \arrow[r, "\beta"'] & (G, e)
\end{tikzcd}$$

Wegen
$$\widetilde{\beta}_1(\widetilde{e},\widetilde{e}) = \widetilde{e} = \widetilde{\beta}_1(\widetilde{e},\widetilde{e})$$
und da $G$ zusammenhängend ist, folgt mit dem Eindeutigkeitssatz für Hochhebungen, daß
$$\widetilde{\beta}_1 \equiv \widetilde{\beta}_2$$
ist. Das bedeutet aber
$$\boxed{\widetilde{g}\widetilde{h} = \widetilde{h}\widetilde{g} \quad \text{für alle } \ \widetilde{h} \in \widetilde{G} \ \text{ und } \ \widetilde{g} \in \ker(\pi)} \tag{16}$$
also
$$\ker(\pi) = \pi^{-1}(e) \subset Z(\widetilde{G}),$$
womit der Beweis vollständig erbracht ist. □

Als nächstes erhalten wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, wann ein Liegruppen-Homomorphismus $\varphi : G \to H$ zwischen zusammenhängenden Liegruppen eine Überlagerungsprojektion ist. Zuvor benötigen wir jedoch die überraschende Aussage, daß eine zusammenhängende Liegruppe allein von einer Umgebung ihres neutralen Elementes erzeugt wird.

**Lemma 2.3.** *Sei $G$ eine zusammenhängende Liegruppe mit neutralem Element $e$. Ist $U$ eine Umgebung von $e$, so wird $G$ von $U$ erzeugt, d.h.*
$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n,$$
*wobei*
$$U^n := \left\{ \prod_{k=1}^{n} u_k | \ u_1, \ldots, u_n \in U \right\}$$
*aus allen $n$-fachen Produkten von Elementen aus $U$ besteht.*

**Beweis**. Sei $V \subset U$ eine offene Teilmenge, die $e$ enthält, so daß
$$V = V^{-1} = \left\{ v^{-1} | \ v \in V \right\}.$$
Wir können dafür $V = U \cap U^{-1}$ wählen. Definiere $H$ als die von $V$ erzeugte Menge:
$$H := \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n. \tag{17}$$
Dann ist $H$ eine abstrakte Untergruppe von $G$, die sogar offen in $G$ ist, da für alle $\sigma \in H$ die Menge $\sigma V$ stets in $H$ enthalten ist. Also ist wegen
$$\sigma H = \sigma \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma V^n \subset H, \quad \sigma \in H$$

jede Nebenklasse $\sigma H$ offen in $G$, da für jedes $\tau \in \sigma H$ für geeignetes $m \in \mathbb{N}$ eine offene Umgebung $\sigma V^m \subset H$ existiert. Nun ist $H$ das Komplement der Vereinigung aller Nebenklassen, die nicht gleich $H$ selbst sind, in $G$, also

$$H = G \setminus \left( \bigcup_{\substack{\sigma \in H \\ \sigma H \neq H}} \sigma H \right) \subset G.$$

Das bedeutet, daß $H$ auch abgeschlossen in $G$ ist. Da $G$ zusammenhängend und $H$ wegen $e \in H$ nichtleer ist, folgt

$$H = G.$$

Schließlich gilt

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n,$$

womit der Beweis beendet ist. □

Wir kommen nun zum erwähnten Überlagerungskriterium für Liegruppen.

**Satz 2.4.** *Seien $G$ und $H$ zusammenhängende Liegruppen und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphimus. Dann ist $(G, \varphi)$ genau dann eine Überlagerung von $H$, wenn $d\varphi|_{T_eG} : T_eG \to T_eH$ ein Isomorphismus ist.*

**Beweis**. Wir widmen uns zunächst der Hinrichtung ($\Longrightarrow$). Sei also $(G, \varphi)$ eine Überlagerung von $H$. Angenommen, $\mathrm{d}\varphi|_{T_eG}$ ist nicht injektiv. Dann hat das Differential $\mathrm{d}\varphi|_{T_gG} : T_gG \to T_{\varphi(g)}H$ für alle $g \in G$ einen nichttrivialen Kern, da das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[r, mapsto, "l_g"] \arrow[dl, equal] & gx \arrow[dr, equal] & \\
x \arrow[d, "\varphi"'] & T_eG \arrow[r, "\mathrm{d}l_g", "\cong"'] \arrow[d, "\mathrm{d}\varphi|_{T_eG}"'] & T_gG \arrow[d, "\mathrm{d}\varphi|_{T_gG}"] & gx \arrow[d, "\varphi"] \\
\varphi(x) \arrow[dr, equal] & T_eH \arrow[r, "\cong", "\mathrm{d}l_{\varphi(g)}"'] & T_{\varphi(g)}H & \varphi(gx) \arrow[dl, equal] \\
 & \varphi(x) \arrow[r, mapsto, "l_{\varphi(g)}"'] & \varphi(g)\varphi(x) &
\end{tikzcd}$$

für alle $g \in G$ kommutativ ist. Da $\varphi$ ein Liegruppen-Homomorphismus ist, ist nämlich

$$\varphi \circ l_g = \mathrm{l}_{\varphi(g)} \circ \varphi \quad \text{für alle } g \in G,$$

denn man hat

$$(\varphi \circ l_g)(x) = \varphi(gx) = \varphi(g)\varphi(x) = (l_{\varphi(g)} \circ \varphi)(x)$$

für alle $x \in G$. Mit der Kettenregel ergibt sich dann

$$\mathrm{d}\varphi \circ \mathrm{d}l_g = \mathrm{d}(\varphi \circ l_g) = \mathrm{d}(l_{\varphi(g)} \circ \varphi) = \mathrm{d}l_{\varphi(g)} \circ \mathrm{d}\varphi.$$

Insbesondere gilt

$$\ker(\mathrm{d}\varphi|_{T_eG}) \cong \ker(\mathrm{d}\varphi|_{T_gG})$$

für alle $g \in G$, womit die Abbildung

$$\Theta : G \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g \longmapsto \dim\big(\ker(\mathrm{d}\varphi|_{T_gG})\big)$$

konstant ist. Diese Kerne $\ker(\mathrm{d}\varphi|_{T_gG})$, $g \in G$, bilden mittels der Zuordnung

$$\mathscr{D}\colon G \longrightarrow \wp(TG), \quad g \longmapsto \ker(\mathrm{d}\varphi|_{T_gG})$$

eine involutive Distribution auf $G$. Dem Kern $\mathscr{D}(e) = \ker(\mathrm{d}\varphi|_{T_eG}) \subset T_eG$, der ein Unterraum des Tangentialraums $T_eG$ ist, entspricht nun eine Unteralgebra $\widetilde{\mathfrak{g}}_e \subset \mathfrak{g}$ der Liealgebra $\mathfrak{g}$ von $G$. Wähle eine Basis

$$\mathscr{B}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} := \{X_1, \ldots, X_k\}, \quad k = \dim\big(\ker(\mathrm{d}\varphi|_{T_gG})\big) = \Theta(e)$$

von linksinvarianten Vektorfeldern von $\widetilde{\mathfrak{g}}_e$. Durch Auswertung dieser Vektorfelder am Punkt $e \in G$ erhält man eine Basis von $\ker(\mathrm{d}\varphi|_{T_gG})$

$$\mathscr{B}_{\ker(\mathrm{d}\varphi|_{T_eG})} := \{(X_1)_e, \ldots, (X_k)_e\}, \quad k = \Theta(e). \tag{18}$$

Da die Linkstranslationsdiffeomorphismen $l_g$ Isomorphismen $\mathrm{d}l_g$ der Tangentialräume induzieren, bildet

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_{\ker(\mathrm{d}\varphi|_{T_gG})} &= \big\{(\mathrm{d}l_g(X_1))_e, \ldots, (\mathrm{d}l_g(X_k))_e\big\} \\
&= \big\{(X_1 \circ l_g)_e, \ldots, (X_k \circ l_g)_e\big\} \\
&= \{(X_1)_g, \ldots, (X_k)_g\}, \qquad k = \Theta(e)
\end{aligned}$$

eine Basis von $\ker(\mathrm{d}\varphi|_{T_gG})$. Da linksinvariante Vektorfelder von Natur aus glatt sind, bildet $\mathscr{D}$ eine glatte Distribution auf $G$. Sie ist zudem involutiv, da die Lieklammer $[X, Y]$ linksinvarianter Vektorfelder $X, Y$ in $\mathscr{D}$ wieder ein linksinvariantes Vektorfeld in $\mathscr{D}$ liefert. Nach dem Satz von Frobenius verläuft dann durch jeden Punkt $g \in G$ eine Integralmannigfaltigkeit $(N_g, \psi_g)$ von $\mathscr{D}$, d.h. zu jedem Punkt $g \in G$ existiert eine Untermannigfaltigkeit $(N_g, \psi_g)$ von $G$ mit

$$\mathrm{d}\psi_g(T_nN_g) = D\ (\psi_g(n)) = \ker(\mathrm{d}\varphi|_{T_{\psi_g(n)}G})$$

für alle $n \in N_g$. Wegen

$$\mathrm{d}\varphi|_{T_{\psi_g(n)}G}\,(\mathrm{d}\psi_g(T_nN_g)) = \mathrm{d}\varphi|_{T_{\psi_g(n)}G}\Big(\ker(\mathrm{d}\varphi|_{T_{\psi_g(n)}G})\Big) = 0$$

kollabieren diese Untermannigfaltigkeiten unter $\varphi$ zu einem Punkt, denn es folgt

$$\varphi|_{\psi_g(N_g)} \equiv \text{const.}$$

Das bedeutet aber, daß $\varphi$ nirgends lokal bijektiv sein kann, was der Überlagerungseigenschaft von $\varphi$ widerspricht. Also ist $\mathrm{d}\varphi|_{T_eG}$ injektiv.
Angenommen, $\mathrm{d}\varphi|_{T_eG}$ ist nicht surjektiv. Dann sind wegen der Kommutativität des obigen Tangentialraumquadrates alle Einschränkungen $\mathrm{d}\varphi|_{T_gG} : T_gG \to T_{\varphi(g)}H$ nicht surjektiv. Da $\varphi$ eine Immersion ist, d.h. alle Abbildungen $\mathrm{d}\varphi|_{T_gG} : T_gG \to T_{\varphi(g)}H$ nicht-singulär sind, sind die Abbildungen $\mathrm{d}\varphi|_{T_gG}$ lokal $1:1$-Immersionen und $(G,\varphi)$ ist lokal eine echte Untermannigfaltigkeit von $H$. Dies widerspricht jedoch aus Dimensionsgründen der lokalen Homöomorphieeigenschaft der Überlagerung.
Wir wenden uns der Rückrichtung ($\Longleftarrow$) zu. Sei also $\mathrm{d}\varphi|_{T_eG} : T_eG \to T_eH$ ein Isomorphismus. Dann ist

$$I_{\mathrm{d}\varphi} := \left\{ \mathrm{d}\varphi|_{T_gG} : T_gG \xrightarrow{\cong} T_{\varphi(g)}H \right\}_{g\in G}$$

wegen der Kommutativität des obigen Quadrates eine Familie von Isomorphismen und $\varphi$ nach dem Satz über die Umkehrabbildung überall ein lokaler Diffeomorphismus. Da $\varphi(G)$ als homomorphes Bild eine Umgebung $\widetilde{U}_{e_H} = \varphi(U_{e_G})$ der Identität $e_H \in H$ enthält und diese wegen

$$H = \bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{U}_{e_H}^i$$

die zusammenhängende Liegruppe $H$ erzeugt, gilt

$$H = \bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{U}_{e_H}^i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi(U_{e_G})^i = \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{e_G}^i\right) = \varphi(G) :$$

$\varphi$ ist also surjektiv. Als zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist $G$ von Haus aus wegweise und lokal wegweise zusammenhängend. Damit reduziert sich der Beweis auf den Nachweis der Tatsache, daß jeder Punkt $h \in H$ eine zulässige Umgebung bezüglich $\varphi$ besitzt. Sei

$$D := \ker(\varphi) = \varphi^{-1}(e_H). \tag{19}$$

Da $\varphi$ lokaler Diffeomorphismus ist (d.h. lokal trivialen Kern hat), ist $D$ ein diskreter[2] Normalteiler von $G$. Da die Abbildung

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (\sigma,\tau) \longmapsto \sigma^{-1}\tau$$

glatt, insbesondere also stetig ist, gibt es eine Umgebung $V := V_{e_G}$ von $e_G \in G$ mit

$$\left(V^{-1}V\right) \cap D = \{e_G\}\,, \tag{20}$$

wobei $V^{-1}V = \left\{\sigma^{-1}\tau | \ \ \sigma,\tau \in V\right\}$ ist. Betrachte die Einschränkung $\varphi|_V : V \to \varphi(V)$. Sind $\sigma,\tau \in V$ mit $\varphi(\sigma) = \varphi(\tau)$, so gilt $\varphi(\sigma^{-1}\tau) = e_H$ und damit $\sigma^{-1}\tau = e_G$.

[2] Die Diskretheit von $D$ ist so verstehen, daß $D$ als Teilraumtopologie die diskrete Topologie trägt, mit anderen Worten: für alle $\sigma \in D$ existiert eine offene Umgebung $V_\sigma \subset G$ mit $V_\sigma \cap D = \{\sigma\}$.

Schließlich ist $\sigma = \tau$ und $\varphi|_V$ injektiv und als Homomorphismus auf sein Bild auch surjektiv, also bijektiv. Somit ist $\varphi|_V$ ein Diffeomorphismus und sein Bild $\varphi|_V(V)$ eine offene Umgebung von $e_H$. Wir zeigen nun

$$\varphi^{-1}(\varphi(V)) = \coprod_{\theta \in D} V\theta. \tag{21}$$

Zu Beginn die problemlose Rechtsinklusion ($\supset$). Diese ergibt sich aus

$$\varphi\left(\bigcup_{\theta \in D} V\theta\right) = \bigcup_{\theta \in V} \varphi(V\theta) = \bigcup_{\theta \in D} \varphi(V)\underbrace{\varphi(\theta)}_{=e_H} = \varphi(V),$$

also

$$\bigcup_{\theta \in D} V\theta \subset \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\bigcup_{\theta \in D} V\theta\right)\right) = \varphi^{-1}(\varphi(V)).$$

Die Linksinklusion ($\subset$) erhält man auf folgende Weise: Sei $\sigma \in G$, so daß $\varphi(\sigma) \in \varphi(V)$. Dann gibt es ein $\tau \in V$ mit $\varphi(\tau) = \varphi(\sigma)$, da $\varphi|_V$ Diffeomorphismus ist. Das bedeutet aber $\tau^{-1}\sigma \in D$ und $\sigma \in V\tau^{-1}\sigma$. So ergibt sich

$$\varphi^{-1}(\varphi(V)) \subset \bigcup_{\theta \in D} V\theta.$$

Es bleibt zu verifizieren, daß die offenen Mengen $V\theta$ disjunkt sind. Angenommen, der Schnitt zweier solcher Mengen $V\theta_1$ und $V\theta_2$ wäre nicht leer. Dann gäbe es ein Element $\sigma \in V\theta_1 \cap V\theta_2$, also $\sigma = \tau\theta_1 = \eta\theta_2$ für geeignete $\tau, \eta \in V$. Das bedeutet aber $\tau^{-1}\eta = \theta_1\theta_2^{-1}$, also $\tau^{-1}\eta \in D$, aber auch $\tau^{-1}\eta \in V^{-1}V$, deshalb $\tau^{-1}\eta \in (V^{-1}V) \cap D$. Dies impliziert jedoch $\tau = \eta$ und $\theta_1 = \theta_2$. Es zeigt sich auf diese Weise

$$V\theta_1 \cap V\theta_2 = \emptyset \quad \text{für alle } \theta_1, \theta_2 \in D \text{ mit } \theta_1 \neq \theta_2.$$

Das Urbild $\varphi^{-1}(\varphi(V))$ ist damit eine disjunkte Vereinigung offener Mengen, und wir haben die Darstellung

$$\varphi^{-1}(\varphi(V)) = \coprod_{\theta \in D} V\theta.$$

Das bedeutet, daß $\phi(V)$ eine zulässige Umgebung von $e_H \in H$ ist. Mit diesem Ergebnis ist $\varphi(\sigma V)$ eine offene Umgebung von $\varphi(\sigma) \in H$ mit

$$\boxed{\varphi^{-1}(\varphi(\sigma V)) = \coprod_{\theta \in D} \sigma V\theta}\,, \tag{22}$$

was besagt, daß das Urbild die disjunkte Vereinung der offenen Mengen $\sigma V\theta$ mit $\theta \in D$ ist, womit die Umgebung $\varphi(\sigma V)$ zulässig ist. $(G, \varphi)$ ist also eine Überlagerung von $H$. $\square$

## 2.3 Lie-Untergruppen & einfach zusammenhängende Liegruppen

Ausgehend von einer Liegruppe $G$ mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einer Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ erhebt sich die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit einer zusammenhängenden Lie-Untergruppe $(H, \varphi)$ von $G$, die gerade die Liealgebra $\mathfrak{h}$ besitzt.
Ist $(H, \varphi)$ eine Lie-Untergruppe von $G$ und sind $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}$ die zugehörigen Liealgebren, so ist $\mathrm{d}\varphi : \mathfrak{h} \overset{\cong}{\to} \mathrm{d}\varphi(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{h}$ und der Unteralgebra $\mathrm{d}\varphi(\mathfrak{h})$ von $\mathfrak{g}$. Wir führen auf den Lie-Untergruppen von $G$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ ein durch

**Definition 2.5.** Zwei Lie-Untergruppen $(H_1, \varphi_1)$ und $(H_2, \varphi_2)$ heißen äquivalent, $(H_1, \varphi_1) \sim (H_2, \varphi_2)$, falls es einen Liegruppen-Isomorphismus $\lambda : H_1 \xrightarrow{\cong} H_2$ gibt mit $\varphi_2 \circ \lambda = \varphi_1$.

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[rr, "\cong", "\lambda"'] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & H_2 \arrow[dl, "\varphi_2"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Eindeutigkeit einer Lie-Untergruppe bedeutet damit Eindeutigkeit bis auf Äquivalenz bezüglich der Relation $\sim$. Jede Äquivalenzklasse von Lie-Untergruppen besitzt nun einen eindeutigen Repräsentanten $(H, i)$, wobei $H \subset G$ eine Teilmenge ist, die eine (abstrakte) Untergruppe von $G$ ist und die Struktur einer Mannigfaltigkeit besitzt, welche $H$ zur einer Liegruppe macht, so daß $H$ unter der Inklusion $i : H \hookrightarrow G$ eine Untermannigfaltigkeit und damit auch eine Lie-Untergruppe von $G$ ist. Wir betrachten nun Untergruppen gerade dieser Form und benutzen lediglich die Bezeichnung $H$ für die Lie-Untergruppe $(H, i)$. Desweiteren wird die Liealgebra $\mathfrak{h}$ von $H$ mit $\mathrm{d}i(\mathfrak{h})$ identifiziert, die auf diese Weise zu einer Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, der Liealgebra von $G$ wird. Insbesondere wird ein linksinvariantes Vektorfeld $X$ auf $H$ mit dem inklusions-verwandten linksinvarianten Vektorfeld $\mathrm{d}i(X)$ auf $G$ assoziiert.

Das oben angesprochene Problem, zu einer Unteralgebra eine zugehörige Untergruppe zu finden, ist durch den schon bekannten Fundamentalsatz von Lie hinreichend geklärt.

**Satz 2.6. (Fundamentalsatz von Lie)** *Sei $\mathfrak{g}$ die Liealgebra einer Liegruppe $G$ und sei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra. Dann existiert eine eindeutig bestimmte zusammenhängende Lie-Untergruppe $(H, i)$ von $G$, die das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\exp"] \\ H \arrow[r, hook, "i"] & G \end{tikzcd}$$

*kommutativ macht. Infolge der obigen Überlegungen könnte es auch folgendermaßen formuliert werden: Ist $\widetilde{\mathfrak{h}}$ die Algebra dieser eindeutig bestimmten Lie-Untergruppe $H$, so gilt $d\varphi(\widetilde{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{h}$.*

Dies führt zu folgendem Ergebnis:

**Korollar 2.7.** *Es gibt eine* $1:1$*-Korrespondenz zwischen zusammenhängenden Lie-Untergruppen einer Liegruppe* $G$ *und Unteralgebren* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *ihrer Liealgebra* $\mathfrak{g}$.

Wir betrachten nun ein Paar $(G, H)$ von zusammenhängenden Liegruppen. Diesem Paar kann eindeutig ein Paar $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ von Liealgebren zugeordnet werden, indem man diese als die entsprechenden Tangentialräume $T_eG$ bzw. $T_eH$ auffaßt.
Hat man nun einen Liealgebren-Homomorphismus $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ gegeben, so erhebt sich die Frage nach der Existenz (und später Eindeutigkeit) eines Liegruppen-Homomorphismus $\varphi : G \to H$ mit $\mathrm{d}\varphi|_{T_eG} = \psi$. Zumindest im einfach zusammenhängenden Fall von $G$ kann man sich sowohl der Existenz als auch der Eindeutigkeit versichern. Dazu trägt nicht unwesentlich das soeben bewiesene Überlagerungskriterium bei. Die einfach zusammenhängenden Liegruppen erhalten in diesem Zusammenhang eine besondere Bedeutung, die im folgenden begründet und präzisiert wird.

Nun erfolgt der schon erwähnte Existenz- und Eindeutigkeitsnachweis eines Liegruppen-Homomorphismus bei gegebenem Liealgebren-Homomorphismus für eine einfach zusammenhängende Liegruppe $G$.

**Satz 2.8.** *Seien* $G$ *und* $H$ *zusammenhängende Liegruppen mit Liealgebren* $\mathfrak{g}$ *und* $\mathfrak{h}$. *Weiterhin sei* $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *ein Liealgebren-Homomorphismus. Dann gibt es höchstens einen Liegruppen-Homomorphismus* $\varphi : G \longrightarrow H$ *mit* $\mathrm{d}\varphi|_{T_eG} = \psi$. *Ist* $G$ *einfach zusammenhängend, so existiert immer solch ein* $\varphi$.

**Beweis**. Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ die Liealgebren der Liegruppen $G$ und $H$, und sei $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Liealgebren-Homomorphismus. Setze $F := G \times H$ und $\mathfrak{f} := \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ und identifiziere kanonisch $\mathfrak{f}$ mit der Liealgebra von $F$. Wir beginnen mit der Eindeutigkeitsaussage.

- EINDEUTIGKEIT VON $\varphi$ IM EXISTENZFALL

  Definiere $\mathfrak{k}$ als den Graphen von $\psi$:

  $$\mathfrak{k} := \mathrm{graph}(\psi) = \{(X, \psi(X))| \;\; X \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{f}, \tag{23}$$

  wobei die Liealgebra $\mathfrak{g}$ von $G$ die Menge aller linksinvarianten Vektorfelder $X$ auf $G$ ist. Da $\psi$ ein Homomorphismus ist, ist $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{f}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{f}$. Nach dem Fundamentalsatz von Lie existiert eine eindeutig bestimmte Lie-Untergruppe $K \subset F = G \times H$ mit Liealgebra $\mathfrak{k}$. Sei nun $\varphi : G \longrightarrow H$ ein Liegruppen-Homomorphismus mit $\mathrm{d}\varphi|_{T_eG} = \psi$. Dann ist

  $$\rho : G \longrightarrow F = G \times H, \quad g \longmapsto (g, \varphi(g))$$

  ein Liegruppen-Homomorphismus und $\mathrm{d}\rho|_{T_eG}$ ist gegeben durch

  $$\mathrm{d}\rho|_{T_eG} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{f} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}, \quad X \longmapsto (X, \psi(X)).$$

  Es gilt also

  $$\mathrm{d}\rho(\mathfrak{g}) = \mathrm{graph}(\psi) = \mathfrak{k}$$

und wir schließen

$$\rho(G) = K,$$

was gerade

$$K = \operatorname{graph}(\varphi)$$

bedeutet.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, two heads, "\mathrm{d}\rho|_{\mathfrak{g}}"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{d}\rho"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{k} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"'] \\
G \arrow[r, two heads, "\rho|_G"'] \arrow[rr, bend right, "\rho"'] & K \arrow[r, hook] & G \times H
\end{tikzcd}$$

Da $K$ aber durch $\psi$ eindeutig bestimmt ist (weil die Liealgebra $\mathfrak{k}$ es ist), ist auch $\varphi$ eindeutig durch den Liealgebren-Homomorphismus $\psi$ bestimmt. $\diamondsuit$

- <u>Existenz von $\varphi$ im Fall des einfachen Zusammenhangs von $G$</u>

Sei $G$ einfach zusammenhängend. Bezeichne $\mathrm{pr}_G : G \times H \to G$ die Projektion auf die erste Komponente. Dann ist $\mathrm{pr}_G$ auf natürliche Weise ein Liegruppen-Homomorphismus mit Differential

$$\mathrm{d}(\mathrm{pr}_G) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad (X_1, X_2) \longmapsto X_1.$$

Sei $K \subset G \times H$ die eindeutig bestimmte Lie-Untergruppe von $F$ mit Liealgebra $\mathfrak{k} = \operatorname{graph}(\psi)$. Betrachte die Einschränkung $\varphi_1 := \mathrm{pr}_G|_K$. Es gilt

$$\psi_1 := \mathrm{d}\varphi_1 = \mathrm{d}(\mathrm{pr}_{\mathfrak{g}})|_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{k} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}, \quad (X, \psi(X)) \longmapsto X.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich ein Isomorphismus mit Inversem

$$\psi_1^{-1} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{k}, \quad X \longmapsto (X, \psi(X)).$$

Mit dem obigen Überlagerungskriterium folgt, daß $(K, \varphi_1)$ eine Überlagerung von $G$ ist. Da $G$ jedoch einfach zusammenhängend ist, ist die Projektion $\varphi_1$ (im doppelten Sinne)

$$\varphi_1 : K \xrightarrow{\cong} G$$

lediglich ein Isomorphismus zwischen Liegruppen. Die Tatsache, daß $\psi_1 = \mathrm{d}\varphi_1|_{T_eK}$ ein Liealgebren-Isomorphismus ist, bedeutet zudem, daß durch

$$I_{\mathrm{d}\varphi_1} = \left\{ \mathrm{d}\varphi_1|_{T_kK} : T_kK \xrightarrow{\cong} T_{\varphi_1(k)}G \right\}_{k \in K}$$

eine Familie von Vektorraum-Isomorphismen gegeben ist. Definiere nun

$$\varphi_2 := \mathrm{pr}_H \circ i : K \longrightarrow H,$$

wobei $\mathrm{pr}_H$ die Projektion

$$\mathrm{pr}_H : G \times H \longrightarrow H$$

und $i$ die Inklusion von Liegruppen

$$i : K \hookrightarrow G \times H$$

bezeichnet. Für das Differential $\psi_2 := \mathrm{d}\varphi_2|_{T_eK}$ gilt

$$\psi_2(X, \psi(X)) = \mathrm{d}\varphi_2|_{T_eK}(X, \psi(X)) = (\mathrm{d}(\mathrm{pr}_H \circ \mathrm{d}i))\,|_{T_eK}(X, \psi(X)) = \psi(X).$$

Wir haben somit $\psi_2 = \psi \circ \psi_1 = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \circ i$. Setze nun endlich

$$\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : G \xrightarrow{\cong} K \longrightarrow H. \tag{24}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi|_{T_eG}(X) &= \left(\mathrm{d}\varphi_2 \circ \mathrm{d}\varphi_1^{-1}\right)|_{T_eG}(X) = \mathrm{d}\varphi_2|_{T_eK}(X, \psi(X)) \\ &= \psi_2(X, \psi(X)) = \psi(X), \end{aligned}$$

womit ein Liegruppen-Homomorphismus $\varphi : G \longrightarrow H$ mit den gewünschten Eigenschaften gefunden ist.

Das folgende Diagramm veranschaulicht den Beweis in kompakter Würfelform.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[dd, "\exp"'] \arrow[drrr, "\psi"] \arrow[dr, bend right, "\psi_1^{-1}"', "\cong"] & & \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \arrow[ll, "\mathrm{pr}_{\mathfrak{g}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}"] \arrow[dd] & \\
& \mathfrak{k} \arrow[ul, "\psi_1"'] \arrow[ur, bend left, "i"] \arrow[rr, "\psi_2"'] \arrow[dd] & & \mathfrak{h} \arrow[dd, "\exp"] \\
G \arrow[drrr, dotted, "\varphi"] \arrow[dr, bend right, "\varphi_1^{-1}"', "\cong"] & & G \times H \arrow[ll, "\mathrm{pr}_G"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_H"] & \\
& K \arrow[ul, "\varphi_1"'] \arrow[ur, bend left, "i"] \arrow[rr, "\varphi_2"'] & & H
\end{tikzcd}$$

Wir haben somit für einfach zusammenhängendes $G$ einen Liegruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ konstruiert, der für einen gegebenen Liealgebren-Homomorphismus $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ die Bedingung $\mathrm{d}\varphi|_{T_eG} = \psi$ erfüllt. Seine Eindeutigkeit ergibt sich aus dem ersten Teil des Beweises. $\square$

Mühelos und unmittelbar ergibt sich die Folgerung

**Korollar 2.9.** *Seien $G$ und $H$ einfach zusammenhängende Liegruppen. Sind die zugehörigen Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ isomorph, so sind auch $G$ und $H$ isomorph.*

**Beweis**. Sei $\psi : \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}$ ein Liealgebren-Isomorphismus zwischen den (den einfach zusammenhängenden Liegruppen $G$ und $H$ zugehörigen) Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$. Dann gibt es nach dem vorangehenden Satz genau einen Liegruppen-Homomorphismus $\varphi : G \longrightarrow H$ mit $\mathrm{d}\varphi|_{T_eG} = \psi$. Die Abbildung $\mathrm{d}\varphi|_{T_eG}$ ist gerade die Abbildung

$$\mathrm{d}\varphi|_{T_eG} : T_eG \xrightarrow{\cong} T_eH$$

der Tangentialräume an die neutralen Elemente. Da dies ein Isomorphismus ist, ist $(G, \varphi)$ eine Überlagerung von $H$. Da $H$ jedoch einfach zusammenhängend ist, handelt es sich um einen Isomorphismus zwischen Liegruppen. Also $G \cong H$.
Ein anderer Isomorphiebeweis wäre: Ist $\psi$ wie oben Liealgebren-Isomorphismus, so existiert die Umkehrabbildung $\psi^{-1} : \mathfrak{h} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}$. Für beide Isomorphismen existiert jeweils genau ein Liegruppen-Homomorphismus $\varphi : G \longrightarrow H$ bzw. $\widetilde{\varphi} : H \longrightarrow G$ mit $\mathrm{d}\varphi|_{T_eG} = \psi$ bzw. $\mathrm{d}\widetilde{\varphi}|_{T_eH} = \psi^{-1}$. Dann gilt aber unter Verwendung der Kettenregel

$$\psi \circ \psi^{-1} = \mathrm{d}\varphi|_{T_eG} \circ \mathrm{d}\widetilde{\varphi}|_{T_eH} = \mathrm{d}(\varphi \circ \widetilde{\varphi})|_{T_eH} = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$$

und entsprechend

$$\psi^{-1} \circ \psi = \mathrm{d}\widetilde{\varphi}|_{T_eH} \circ \mathrm{d}\varphi|_{T_eG} = \mathrm{d}(\widetilde{\varphi} \circ \varphi)|_{T_eG} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}},$$

also

$$\varphi \circ \widetilde{\varphi} = \mathrm{id}_H$$

und

$$\widetilde{\varphi} \circ \varphi = \mathrm{id}_G,$$

was schließlich

$$\widetilde{\varphi} = \varphi^{-1}$$

nach sich zieht und nicht weniger als

$$G \cong H$$

bedeutet. □

Ein Homomorphismus $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ zwischen Liealgebren heißt eine Repräsentation von $\mathfrak{g}$, falls $\mathfrak{h} \in \{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zitiere an dieser Stelle einen Satz, der hier unbewiesen bleibt, jedoch zum Hauptresultat dieses Abschnitts führt. Er birgt die überaus bemerkenswerte Aussage, daß jede Liegruppe lokal isomorph zu einer Matrixgruppe ist.

**Satz 2.10.** **(nach Ado)** *Ist $\mathfrak{g}$ eine (endlich-dimensionale) Liealgebra, so besitzt sie eine $1:1$-Repräsentation $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gibt eine Lie-Untergruppe $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ mit $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{g}$.*

Eine bedeutende Konsequenz ist die hier unbewiesene Aussage, daß jede Liealgebra als Liealgebra einer einfach zusammenhängenden Liegruppe realisiert werden kann.

**Satz 2.11.** *Zu jeder (endlich-dimensionalen) Liealgebra* $\mathfrak{g}$ *existiert eine einfach zusammenhängende Liegruppe* $G$*, deren Liealgebra* $\mathfrak{g}$ *ist.*

Zusammen mit der Aussage, daß im Falle einfach zusammenhängender Liegruppen die Isomorphie ihrer Liealgebren die Isomorphie der Liegruppen selbst impliziert, liefert dies das folgende Hauptresultat dieser Betrachtung, nämlich die bedeutsame Beziehung zwischen Liealgebren und einfach zusammenhängenden Liegruppen.

**Satz 2.12.** *Es gibt eine* $1:1$*-Korrespondenz zwischen Isomorphieklassen von Liealgebren und Isomorphieklassen von einfach zusammenhängenden Liegruppen.*

Um dieses Ergebnis noch einmal zusammenfassend kategorientheoretisch darzustellen, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein. Sei

1. $\mathscr{LG}$ die Kategorie der Liegruppen und Liegruppen-Homomorphismen
2. $\mathscr{LG}_1$ die Unterkategorie der einfach zusammenhängenden Liegruppen und ihren Liegruppen-Homomorphismen
3. $\mathscr{LA}$ die Kategorie der Liealgebren und Liealgebren-Homomorphismen.

Bezeichne $\mathcal{L}$ den Linearisierungsfunktor

$$\mathcal{L} : \mathscr{LG} \longrightarrow \mathscr{LA},$$

der jeder Liegruppe $G$ ihre Liealgebra $\mathfrak{g} \cong T_eG$ und jedem Liegruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ den entsprechenden Liealgebren-Homomorphismus $\mathrm{d}\varphi|_{T_eG} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ zuordnet. Die Früchte obiger Untersuchungen schlagen sich nun in der abschließenden Aussage nieder: Die Einschränkung

$$\mathcal{L}|_{\mathscr{LG}_1} : \mathscr{LG}_1 \longrightarrow \mathscr{LA}$$

des Linearisierungsfunktors auf die Unterkategorie $\mathscr{LG}_1$ der einfach zusammenhängenden Liegruppen ist ein Isomorphismus von Kategorien, i.e. in der Kategorie $\mathscr{Cat}$ der Kategorien.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{LG} \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \mathscr{LA} \\
\mathscr{LG}_1 \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\cong", "\mathcal{L}|_{\mathscr{LG}_1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Wir wissen allerdings noch ein wenig mehr, denn sogar

$$\widetilde{\mathcal{L}}|_{\mathscr{LG}_1} : \mathrm{Ob}\left(\mathscr{LG}_1\right)_{/\cong} \longrightarrow \mathrm{Ob}\left(\mathscr{LA}\right)_{/\cong}$$

ist ein Isomorphismus von Isomorphieklassenmengen von Objekten.

## Literatur


[Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1993.

[Hsi98] W. Y. Hsiang. *Lectures on Lie Groups*, volume 2 of *Series on University Mathematics*. World Scientific Publishing, 1998.

[Jän94] K. Jänich. *Topologie*. Springer-Verlag, 1994.

[Mas89] W. S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*, volume 56 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York, 1989.

[ST67] I. M. Singer and J. A. Thorpe. *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York - Heidelberg - Berlin, 1967.

[tD00] T. tom Dieck. *Topologie*. de Gruyter Berlin - New York, 2000.

[Var84] V. S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations*, volume 102 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York - Berlin - Heidelberg - Tokyo, 1984.

[War71] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.