Kurz-Skript zu „Algebraischen Topologie“

Thomas Schick*

Last compiled 4. Juli 2005; last edited 3.7. 2005 or later

Hinweis: dieses Skript ist wurde nicht korrekturgelesen. Es gibt mit Sicherheit eine Menge Fehler. Einige davon konnten unter anderem Dank der Hinweise André Böhlkes behoben werden. Für weitere Hinweise auf Fehler schreiben Sie bitte eine email an schick@uni-math.gwdg.de. Das Skript stellt nur eine Approximation an die Vorlesung dar: Nicht alle Sätze und Beweise werden notwendigerweise vorgeführt, andererseits mögen nicht alle behandelten Sätze und Beispiele hier notiert sein.

Inhaltsverzeichnis

*email: thomas.schick@uni-math.gwdg.de

Organisatorisches

(1) Kommunikation: immer Fragen stellen

(2) Termin: bleibt Mo, Do 11:15–13:00

(3) Termin für die Übungen: Fr 14:15-16:00 w"'are auch möglich (auch hier wieder mit leichten Verschiebungen)

(4) Übungsleiter: Frank Schuhmacher (in der Bibliothek, 303, Raum Tel 7796, email: schuhma@uni-math.gwdg.de; http: www.uni-math.gwdg.de/schuhma)

(5) Sprache: momentan Englisch?

1 Grundlegende Fragestellungen und Methoden der algebraischen Topologie

1.1 Äquivalenzproblem

Eine ganz wichtige Aufgabe (von Mathematikern) ist es, die betrachteten Objekte unterscheiden zu können.

1.1 Beispiel. K-Vektorräume verschiedener Dimension sind nicht isomorph.

Es geht in der Regel darum, festzustellen, ob zwei Objekte äquivalent sind bezüglich einer natürlich gegebenen Äquivalenzrelation, z.B. Isomorphie.

In der Topologie werden (unter anderem) betrachtet: (differenzierbare) Räume, Zellkomplexe (wie Simplizialkomplexe), topologische Räume und die Relationen Homöomorphie, Diffeomorphie, Homotopie-Äquivalenz, ...

Mit anderen Worten: Topologen versuchen, topologische Räume und die Beziehungen zwischen ihnen zu verstehen.

1.2 Definition. Topologischer Raum (X, τ) besteht aus Menge X und $\tau \subset P(X)$ (die offenen Mengen), so dass: $\emptyset \in \tau$; $U, V \in \tau \implies U \cap V \in \tau$; $U_i \in \tau \forall i \in I \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

$f\colon X \to Y$ heißt *stetig*, falls $f^{-1}(U)$ offen in X für alle $U \subset Y$ offen.

1.3 Beispiel. Jeder metrische Raum (X, d) ist ein topologischer Raum, indem man setzt: $U \subset X$ offen $\iff \forall x \in U\ \exists r > 0$ so dass $B_r(x) \subset U$.

1.4 Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räume ist ein Homöomorphismus, falls f stetig, bijektiv, und falls die Umkehrabbildung auch stetig ist.

Dann heißen X, Y homöomorph.

1.5 Beispiel. $(a, b) \approx \mathbb{R}$, $D^n \approx [0, 1]^n$.

1.6 Definition. Eigenschaften topologischer Räume.

(1) zusammenhängend

(2) wegzusammenhängend

(3) hausdorffsch

(4) kompakt

All diese Eigenschaften sind invariant unter Homöomorphie, aber oft für alle Räume einer vorgegebenen Klasse gleichzeitig erfüllt. Wichtig sind daher *Invarianten.*

Ein Beispiel für eine Invariante (aus der linearen Algebra) ist die Dimension eines Vektorraums.

1.7 Beispiel. Euler Charakteristik endlicher Polyeder.

1.8 Definition. Ein *affines k-Simplex* im $\mathbb{R}^m$ ist die *konvexe Hülle* $\sigma = (v_0, \ldots, v_k)$ *affin unabhängiger* Vektoren $v_0, \ldots, v_k$.

Die konvexe Hülle eine Teilmenge von $\{v_0, \ldots, v_k\}$ heißt *Teilsimplex* oder *Seite* von σ.

Wählt man für $v_0, \ldots, v_k$ die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{R}^{k+1}$, so heißt σ das *Standard-k-Simplex.*

1.9 Definition. Ein (endlicher) *geometrischer Simplizialkomplex* K im $\mathbb{R}^m$ ist eine (endliche) Menge von affinen Simplizes im $\mathbb{R}^m$ so dass

(1) $\sigma \in K \implies$ jede Seite von σ gehört zu K

(2) $\sigma_1, \sigma_2 \in K \implies$ entweder $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ oder $\sigma_1 \cap \sigma_2$ ist eine Seite sowohl von σ_1 als auch von σ_2.

Die *geometrische Realisierung* von K ist definiert als $|K| := \bigcup_{\sigma\in K} \sigma \subset \mathbb{R}^m$.

Ein Raum X heißt *(endliches) Polyeder*, falls es einen (endlichen) Simplizialkomplex K gibt, so dass $X \approx |K|$. Ein solcher Homöomorphismus heißt *Triangulierung von K*

1.10 Definition. Sei K endlicher Simplizialkomplex, c_i die Anzahl der i-Simplizes von K.

$$\chi(K) := \sum_i (-1)^i c_i$$

heißt *Eulercharakteristik* von K, $\dim(K) := \max\{i \mid c_i > 0\}$.

1.11 Definition. Sei X ein endliches Polyeder, $X \approx |K|$. Setze $\chi(X) := \chi(K)$ und $\dim(X) := \dim(K)$.

1.12 Satz. *$\chi(X)$ und $\dim(X)$ sind wohldefiniert, also Homöomorphie-Invarianten endlicher Polyeder.*

1.13 Definition. Seien $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ topologische Räume. Die *disjunkte Vereinigung* ist die feinste Topologie (d.h. mit so vielen offenen Mengen wie möglich) auf der mengentheoretischen disjunkten Vereinigung $\bigcup_{i\in I} X_i \times \{i\}$,l so dass alle Einbettungen $X_i \hookrightarrow \amalg_{i\in I} X_i$ stetig werden, d.h. offene Mengen sind von der Gestalt $\bigcup_{i\in I} U_i \times \{i\}$ mit $U_i \in \tau_i$.

1.14 Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit X/τ. Die *Quotiententopologie* auf X/τ ist die feinste Topologie auf X/τ, so dass die kanonische Projektion $\pi\colon X \to X/\tau$ stetig wird. Eine Menge $V \subset X/\tau$ ist also genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(V) \subset X$ offen ist.

1.15 Definition. Ein *abstrakter Simplizialkomplex* K ist eine Kollektion $\{\sigma\}$ endlicher Teilmengen einer (Hintergrund)Menge M, der Menge der *Simplizes*, so dass gilt:

(1) jede einelementige Teilmenge von M gehört zu K

(2) ist $\sigma \in K$ und $\tau \subset \sigma$, so auch $\tau \in K$

. Die $(k+1)$-elementigen $\sigma \in K$ werden k-Simplizes von K genannt, setze dann $\dim(\sigma) = k$.

Die *geometrische Realisierung* $|K|$ eines abstrakten Simplizialkomplex K ist folgendermaßen definiert: zunächst wählt man sich eine totale Ordnung auf M. Dann

$$|K| := \left(\amalg_{\sigma\in K}\{\sigma\} \times \Delta^{\dim(\sigma)}\right) / \sim$$

wobei $\sim$ erzeugt wird von $(\sigma, \iota_i(x)) \sim (\delta_i\sigma, x)$. Hierbei läßt δ_i den i-ten Punkt von σ weg, und $\iota_i\colon \Delta^{k-1} \hookrightarrow \Delta^k$ ist die affin-lineare Einbettung des Standard $(k-1)$-Simplex in de Standard k-Simplex, welche den i-ten Eckpunkt ausläßt $(i - 0, \dots, k)$.

1.2 Problem der Realisierung von Invarianten

Gegeben sei eine Familie F von topologischen Räumen (mit gewissen "schönen" Eigenschaften), für die eine Invariante I definiert ist. Welche Werte $I(X)$ mit $X \in F$ werden realisiert? Hier hat man also eine Konstruktionsaufgabe: stelle $X \in F$ mit vorgegebenem $I(X)$ her.

1.16 Beispiel. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler Vektorraum.

1.17 Definition. (Topologische) Mannigfaltigkeit: ein Raum M ist eine topologische Mannigfaltigkeit, falls M hausdorffsch mit abzählbarer Basis der Topologie, und falls er lokal zu $\mathbb{R}^m$ ist; m ist die *Dimension* der Mannigfaltigkeit.

1.18 Frage. Was sind die möglichen Eulercharakteristiken von zusammenhängenden kompakten 2-Mannigfaltigkeiten?

Diese Frage macht Sinn, denn

1.19 Satz. *Jede kompakte 2-Mannigfaltigkeit ist ein endliches Polyeder.*

1.20 Aufgabe. Zeige, dass die Euler-Charakteristik einer Fläche vom Geschlecht g gerade $2-2g$ ist.

1.21 Definition. (Konstruktion von topologischen Räumen: Verkleben) Seien X, Y topologische Räume, $A \subset X$ ein Teilraum (also eine Untermenge mit der Teilraumtopologie), $f\colon A \to Y$ stetig. Definiere $X \cup_f Y$ (oft schreibt man $X \cup_A Y$, wenn f ein Homöomorphismus auf sein Bild), die *Verklebung von* X *und* Y *entlang* f, als Quotienten von $X \amalg Y/\sim$ wobei $\sim$ von $a \sim f(a)$ für alle $a \in A$ erzeugt wird.

1.22 Beispiel. (1) Zylinder $[0,1] \times [0,1]/(0,x) \sim (1,x)$

(2) Torus $[0,1] \times [0,1]/((0,x) \sim (1,x), (x,0) \sim (x,1))$.

(3) Fläche vom Geschlecht g.

1.23 Definition. $\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/v \sim \lambda v$ für alle $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $\lambda \neq 0$. Es handelt sich um die Menge der 1-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Entsprechend definiert man $\mathbb{C}P^n$ und $\mathbb{H}P^n$.

1.24 Aufgabe. $\mathbb{R}P^n$ ist n-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit, $\mathbb{C}P^n$ ist $2n$-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit.

1.25 Definition. (Zusammenhängende Summe zweier Mannigfaltigkeiten) Seien M, N zwei m-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Wähle Einbettungen $i_M\colon D^m \hookrightarrow M$, $i_N\colon D^m \hookrightarrow N$. Setze $M\#N := M \setminus i_M((D^m)^\circ) \cup_{S^{m-1}} N \setminus i_N((D^m)^\circ)$.

1.26 Satz. *Die möglichen Eulercharakteristiken von zusammenhängenden kompakten 2-Mannigfaltigkeiten sind* $2, 1, 0, -1, \cdots$.

1.3 Klassifikationsproblem

Ausgehend von den Abschnitten 1.1 und 1.3 stellt sich als ultimative Frage die folgende.:

1.27 Frage. Gegeben eine Klasse K von topologischen Räume, finde (eine oder mehrere) Invarianten I so dass $I(X) = I(Y)$ genau dann, wenn X und Y äquivalent sind (unter der gerade betrachteten Äquivalenzreltation, z.B. Homöomorphie), und erstelle eine Liste aller möglichen Werte von I.

Damit hat man dann die Elemente von K vollständig (bis auf Äquivalenz) verstanden).

Jeder von uns kennt mindestens eine solche Klassifikation (aus der linearen Algebra):

1.28 Satz. *Zwei Vektorräume über einem Körper k sind genau dann isomorph, wenn ihre Dimension übereinstimmt.*

Außerdem gibt es für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\{0\}}$ *einen Vektorraum mit Dimension* n *(und zwar den* k^n*).*

Auf ähnliche Weise gibt es auch Klassifikationsresultate für topologische R"aume.

1.29 Beispiel. Jede zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand ist homöomorph entweder zu $\mathbb{R}$ oder zu S^1, je nachdem, ob sie kompakt ist oder nicht.

Die Klassifikation liefert hier also eine Liste mit nur zwei Elementen (und das Beispiel passt nicht ganz, da man hier kaum von einer Invariante sprechen kann, welche die beiden unterscheidet).

1.30 Beispiel. Zwei zusammenhängende kompakte orientierbare 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind genau dann homöomorph, wenn ihre Eulercharakteristik übereinstimmt. Die Eulercharakteristik nimmt die Werte $\{2, 0, -2, \cdots\}$ an.

Hier liefert die Euler-Charakteristik also eine Bijektion zwischen der Menge K den Homöomorphieklassen von kompakten zusammenhängenden orientierbaren 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ohne Rand und der Menge $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 2\}$.

Die Fläche vom Geschlecht g (also mit g "Löchern") hat Euler-Charakteristik $2 - 2g$, wobei $g(S^2) = 0$, $g(T^2) =, \dots$.

1.31 Beispiel. Ein berühmtes Beispiel für ein Klassifikationsproblem ist die *(verallgemeinerte) Poincaré Vermutung.* Sie sagt: jede kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand welche homotopieäquivalent zu S^n ist, ist auch homöoomorph zu S^n.

Dies ist richtig für $n = 1, 2$ (und folgt aus obigen Klassfikationen), auch für $n \geq 5$ (1961 von Smale bewiesen) und für $n = 4$ (1982 von Friedmann bewiesen). Der Fall $n = 3$ ist eines der Clay-Millenium problems, für seine Lösung ist ein Preis von 1 Mio Dollar ausgesetzt. M. Perelman behauptet in aktuellen Arbeiten, diese Vermutung bewiesen zu haben, der Beweis ist aber noch nicht entgültig geprüft worden.

1.4 Einbettungsproblem

1.32 Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt (topologische) Einbettung, wenn $f\colon X \to f(X)$ ein Homöomorphismus ist.

In der Regel versucht man, Einbettungen in "schöneRRäume, z.B. $\mathbb{R}^n$, zu finden. Analog wird für Gruppen die Darstellungstheorie entwickelt, wo man z.B. versucht, Homomorphismen nach $GL(n, \mathbb{R})$ zu verstehen.

1.33 Beispiel.

- Jede glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n läßt sich in $\mathbb{R}^{2n}$ einbetten.
- $\mathbb{R}P^2$ läßt sich (entsprechend) in $\mathbb{R}^4$ einbetten. $\mathbb{R}P^2$ läßt sich aber nicht in $\mathbb{R}^3$ einbetten.
- Schönfließ-Theorem: jede Einbettung $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ lässt sich zu einer Einbettung $D^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ fortsetzen.

  Für $n \geq 3$ ist die analoge Aussage falsch.
- jeder metrisierbare Raum lässt sich in einen Banachraum einbetten (Kuratowski-Einbettung).

1.5 Problem der Fortsetzung („Liftung“) von Abbildungen

Sei X ein topologischer Raum. Gegeben eine Abbildung $f\colon S^n \to X$. Frage: kann f fortgesetzt werden zu einer Abbildung $F\colon D^n \to X$? Diese Frage ist wichtig bei der Berechnung der Homotopiegruppen von X.

1.34 Beispiel. $X = S^n$, $f\colon S^n \to S^n$ sei die Identität. Betrachtet man die Beispiele $n = 1$ und $n = 2$, wird man schnell vermuten, dass es keine Fortsetzung F wie in der Frage geben kann.

Um dies zu beweisen, brauchen wir Invarianten, die nicht nur die Objekte, sondern auch die Abbildungen zwischen diesen Objekten berücksichtigen. Hierzu ist der Begriff des *Funktors* von fundamentaler Bedeutung (und das weit über die algebraische Topologie hinaus).

1.35 Definition. Eine *Kategorie* C besteht aus einer Klasse von Objekten Ob(C), und für je zwei Objekte $X, Y \in Ob(C)$ aus einer Menge von Morphismen $Mor_C(X, Y) = Mor(X, Y)$, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- Für beliebige $X, Y, Z \in Ob(C)$ gibt es eine Verknüpfungsabbildung
$$\circ\colon Mor(Y, Z) \times Mor(X, Y) \to Mor(X, Z); (g, f) \mapsto g \circ f.$$
- Für jedes $X \in Ob(C)$ gibt es ein ausgezeichnetes Element $\mathrm{id}_X \in Mor(X, X)$.
- $f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f$ wenn immer dies Sinn macht
- Assoziativität: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, wennimmer dies Sinn macht (man kann ja nicht beliebige Morphismen komponieren).

1.36 Beispiel.
- Die Kategorie $\mathbb{R} - VECT$ der $\mathbb{R}$-Vektorräume und linearen Abbildungen.
- Die Kategorie TOP der topologischen Räume und stetigen Abbildungen
- Die Kategorie $ABEL$ der abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen
- Die Kategorie $GRUP$ der Gruppen und Gruppenhomomorphismen.
- Sei G eine Gruppe. Wir definieren eine Kategorie G mit genau eine Objekt $*$, und mit $Mor(*, *) := G$, wobei die Komposition genau durch die Verknüpfung in G gegeben sein soll.

1.37 Definition. Ein *kovarianter Funktor* F zwischen zwei Kategorien C und D ordnet jedem $X \in Ob(C)$ ein Objekt $F(X) \in Ob(D)$ zu, und jedem Morphismus $f \in Mor(X, Y)$ einen Morphismus $F(f) \in Mor(f(X), f(Y))$, so dass folgendes erfüllt ist:

(1) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ für jedes $X \in Mor(C)$

(2) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ wennimmer dies Sinn macht.

Ein *kontravarianter Funktor* ist definiert wie ein Kovarianter Funktor, mit der Ausnahme dass alle Morphismen umgedreht werden. Falls $f \in Mor(X,Y)$ gilt also hier $F(f) \in Mor(f(Y), f(X))$. Natürlich muss dann auch $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ gefordert werden.

1.38 Beispiel. Es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen kovarianten Funktor H_n (n-te Homologie) von TOP nach ABEL. Falls $n \geq 1$ gilt $H_n(D^{n+1}) = 0$, und $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

Aufgabe; zeige damit, dass es tatsächlich keine Fortsetzung von id_{S^n} auf D^{n+1} geben kann.

Lösung: Gäbe es eine solche Abbildung $F\colon D^{n+1} \to S^n$, so erhielte man wegen der Funktoreigenschaft folgendes kommutative Diagramm abelscher Gruppen ($i\colon S^n \to D^{n+1}$ ist die Einbettung):

$$\begin{tikzcd}
H_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "H_n(i)"] & \mathbb{Z} \cong H_n(S^n) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
H_n(D^{n+1}) = \{0\} \arrow[r, "H_n(F)"] & \mathbb{Z} = H_n(S^n)
\end{tikzcd}$$

Da aus algebraischen Gründen $H_n(i) = 0 = H_n(F)$, erhält man den Widerspruch $0 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.

1.6 Problem der Existenz von Zusatzstrukturen

Wir haben bereits gesehen, dass es für topologische Räume nützlich sein kann, Zusatzstrukturen (z.B. eine Triangulierung) zu betrachten. Die Frage ist dann oft: gibt es solche Zusatzstrukturen, und wenn ja, wie viele (bis auf Äquivalenz).

1.39 Beispiel. (1) Ist ein Raum X metrisierbar?

(2) welche Topologischen Mannigfaltigkeiten erlauben eine glatte Struktur (nicht alle, und diese ist in der Regel nicht eindeutig).

(3) Hat jede Mannigfaltigkeit der Dimension n eine Triangulierung (Hauptvermutung sagt: Ja).

Antworten: richtig für $n = 2, 3$, aber falsch für $n \geq 5$ und für $n = 4$.

Für glatte Mannigfaltigkeiten ist die Aussage wiederum richtig.

2 Fundamentalgruppe 1

2.1 Definition. Seien X, Y topologische Räume. Zwei Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ heißen *homotop*, falls es eine *Homotopie* $H\colon X \times [0,1] \to Y$ zwischen ihnen gibt, also eine stetige Abbildung, so das $H \circ i_0 = f$ und $H \circ i_1 = g$, wobei $i_t\colon X \to X \times [0,1];\ x \mapsto (x,t)$.

Sei $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Wir schreiben $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, falls $f\colon X \to Y$ stetige Abbildung mit $f(x_0) = y_0$. Man spricht dann von *punktierten* Abbildungen.

Eine Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to Y$ heißt *punktiert*, falls $H(x_0, t) = y_0$ für alle $t \in [0,1]$.

Wir schreiben $[X, Y]$ für die Menge aller Homotopieklassen von Abbildungen von X nach Y, und $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ für die Menge der punktierten Homotopieklassen.

2.2 Aufgabe. Zeige, dass Homotopie tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist: man kann Homotopien umdrehen und verketten.

2.3 Lemma. *Seien $f, g\colon X \to Y$ homotop (mit Homotopie H), und seien $h\colon Y \to Z$ und $u\colon U \to X$ stetig. Dann sind auch $h \circ f \circ u$ und $h \circ g \circ u$ homotop (mit Homotopie $H' := h \circ H \circ (u \times \mathrm{id}_{[0,1]})$).*

Beweis. Als Verknüpfung stetiger Abbildungen ist auch $H'\colon U \times [0,1] \to Z$ stetig. Außerdem gilt $H'(p, 0) = h(H(u(p), 0) = h(f(u(p)))$ und $H'(p, 1) = h(g(u(p)))$, somit ist H' die gewünschte Homotopie. □

2.4 Definition. Sei $x_0 \in X$. Wir definieren $\pi_1(X, x_0) := [(S^1, 1), (X, x_0)]$. Hierbei ist $S^1 \subset \mathbb{C}$, mit $1 \in \mathbb{C}$.

2.5 Bemerkung. Es gibt einen Homöomorphismus $[0,1]/(0 \sim 1) \to S^1; t \mapsto \exp(2\pi i t)$, welcher $0 \sim 1$ auf 1 abbildet. $\pi_1(X, x_0)$ ist damit isomorph zu

$$[([0,1], \{0,1\}), (X, x_0)],$$

der Menge von Homotopieklassen von Abbildungen von $[0,1]$ nach X, wobei immer sowohl 0 also auch 1 auf x_0 abgebildet werden.

2.6 Definition. $\pi_1(X, x_0)$ wird eine (in der Regel nicht abelsche) Gruppe, mit Verknüpfung $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2]$ gegeben durch Hintereinanderausführen der beiden Schleifen.

Präziser: sind $f, g\colon ([0,1], \{0,1\}) \to (X, x_0)$ gegeben, so definiere $f \cdot g\colon [0,1] \to X$ durch

$$f \cdot g(t) := \begin{cases} f(2t); & 0 \le t \le 1/2 \\ g(2t-1); & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Das neutrale Element ist repräsentiert durch die Konstante Schleife, das Inverse durch die umgekehrte Schleife.

2.7 Aufgabe. Beweise, dass die Verknüpfung in $\pi_1(X, x_0)$ wohldefiniert ist, und dass sich wie angegeben eine Gruppe ergibt.

2.8 Lemma. *Sei $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ stetig. Dann induziert f einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0); [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$.*

Beweis. Die Abbildung ist wohldefiniert nach Lemma 2.3, die Definition ergibt, dass es sich um einen Gruppenhomomorphismus handelt. □

2.9 Bemerkung. Damit haben wir zwar einen schönen Funktor von TOP nach GRUP definiert. Ein Nachteil ist allerdings, dass wir bisher noch fast keine Fundamentalgruppe ausrechnen können.

Weitere Frage: wie hängt π_1 vom gewählten Basispunkt $x_0 \in X$ ab?

2.10 Lemma. *Seien $x_0, x_1 \in X$ und $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. "Konjugieren mit γ" liefert dann einen Isomorphismus*

$$\gamma_*\colon \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0); [f] \mapsto [\gamma^{-1} f \gamma],$$

wobei $\gamma^{-1}f\gamma$ definiert ist als

$$\begin{cases} \gamma(3t); & 0 \le t \le 1/3 \\ f(3t-1/3); & 1/3 \le t \le 2/3 \\ \gamma(3-3t); & 2/3 \le t \le 1. \end{cases}$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

2.11 Definition. Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, falls für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ ein Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ existiert mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$.

2.12 Korollar. *Sei X wegzusammenhängend. Für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ sind $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph.*

2.13 Bemerkung. Vorsicht: da der Isomorphismus in Korollar 2.12 im allgemeinen nicht kanonisch gegeben ist (und schon gar nicht eindeutig ist), ist es in der Regel nicht richtig, von *der* Fundamentalgruppe zu sprechen.

Ausnahme: wenn die Fundamentalgruppe abelsch ist, ist der Isomorphismus kanonisch.

2.14 Lemma. $\pi_1(\{x_0\}, x_0) = \{1\}$.

Beweis. Es gibt nur die konstante Abbildung von S^1 zum Einpunktraum. □

2.15 Lemma. *Seien $f = g \in [(X, x_0), (Y, y_0)]$. Dann gilt $\pi_1(f) = \pi_1(g)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.*

Beweis. Seien $i_0, i_1\colon X \to X \times [0,1]$ die Inklusionen als Deckel und Boden des Zylinders ($i_0(x) = (x, 0), i_1(x) = (x, 1)$). Dann ist $i_0 \simeq i_1$. Wir zeigen: $\pi_1(i_0) = \gamma_* \circ \pi_1(i_1)$, wobei $\gamma_*\colon \pi_1(X \times [0,1], (x_0, 0)) \to \pi_1(X \times [0,1], (x_0, 1))$ der Isomorphismus von Lemma 2.10 ist, welcher durch den Weg $\gamma(t) = (x_0, 1-t)$ geliefert wird.

Für $f\colon (S^1, 1) \to (X, x_0)$ ist eine Homotopie zwischen $i_0 \circ f$ und $\gamma^{-1} i_1 \circ f\gamma$ durch "Hochschiebennach oben" gegeben, womit die Zwischenbehauptung folgt.

Wir nutzen nun die Funktorialität von π_1 aus, Verknüpfen mit $H\colon X \times [0,1] \to Y$, und das Resultat folgt. □

2.16 Bemerkung. Falls eine Homotopie H wie in Lemma 2.15 den Basispunkt nicht erhält, ergibt sich mit dem gleichen Beweis, dass $\pi_1(f) = H(\gamma)_* \pi_1(g)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

2.17 Definition. Zwei Räume X, Y heißen *homotopieäquivalent*, falls es Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$.

X heißt kontrahierbar, falls X homotopieäquivalent zum Einpunktraum ist.

2.18 Korollar. *Sei X kontrahierbar. Dann ist X wegzusammenhängend und es gilt $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$.*

Z.B. ist für jedes n D^n kontrahierbar.

Beweis. Übungsaufgabe. □

3 Überlagerungen

3.1 Definition. Ein topologischer Raum $\Gamma = (\Gamma, \tau)$ heißt *diskret*, wenn jede Teilmenge offen ist, also $\tau = P(\Gamma)$.

3.2 Definition. Sei C eine Kategorie (z.B. TOP). Ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ Z & \xrightarrow{u} & W. \end{array}$$

heißt kommutativ, falls $hf = ug$: verschiedene Wege vom selben Start- zum selben Zielpunkt liefern (wenn komponiert) den gleichen Morphismus.

Entsprechend wird Kommutativität auch bei anderen Diagrammen definiert.

3.3 Definition. Seien $\overline{X}, X$ topologische Räume. Eine Abbildung $p\colon \overline{X} \to X$ heißt *Überlagerungsabbildung*, wenn für jedes $x \in X$ eine Umgebung U und eine diskrete Menge Γ existiert, so dass man folgendes kommutative Diagramm erh"'alt.

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \underset{\approx}{\xrightarrow{f}} & U \times \Gamma \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{pr}_U}\downarrow \\ U & = & U. \end{array}$$

Lokal sieht also $\overline{X}$ wie $X \times \Gamma$ aus. Die Kardinalzahl $|\Gamma|$ wird *Blätterzahl* der Überlagerung genannt. Für $p \in X$ ist die Menge $p^{-1}(x)$ (die Faser von p an x) homöomorph zur diskreten Menge Γ.

3.4 Beispiel. (1) Die Abbildung $\exp\colon \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$; $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ ist eine Überlagerung. Für einen Punkt $q \in S^1$ kann man $U := S^1 \setminus \{-q\}$ wählen. Dann ist ja $S^1 \setminus \{-q\} \approx (0,1)$. Umgekehrt ist z.B.'$p^{-1}(0) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \approx (0,1) \times \mathbb{Z}$, und die Homöomorphismen kann man auch mit den Projektionen verträglich wählen.

(2) Die Projektion $p\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ (Einschränkung der kanonische Projektion $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}P^n$) ist eine Überlagerung, die Blätterzahl ist 2.

3.5 Aufgabe. Sei $p\colon \overline{X} \to X$ eine Überlagerung, X zusammenhängend. Zeige, dass dann $\left|p^{-1}(x)\right| = \left|p^{-1}(y)\right|$ für alle $x, y \in X$. Die Blätterzahl ist also wohldefiniert.

Zeige, dass p ein lokaler Homöomorphismus ist, dass es also für jedes $\overline{x} \in \overline{X}$ offene Umgebungen $\overline{U}$ von $\overline{x}$ und U von x gibt, so dass $p|\colon \overline{U} \to U$ ein Homöomorphismus ist. Finde ein Beispiel für einen lokalen Homöomorphismus, welche keine Überlagerung ist.

3.6 Aufgabe. Sei $p\colon \overline{M} \to M$ eine Überlagerung mit abzählbarer Blätterzahl und M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann hat $\overline{M}$ auf eindeutige Weise eine glatte Mannigfaltigkeit, so dass p ein lokaler Diffeomorphismus ist.

3.7 Definition. Sei X topologischer Raum. Wir setzen $Homeo(X) := \{f\colon X \to X \mid f \text{ Homöomorphismus}\}$. Dies ist eine Gruppe.

3.8 Definition. Sei G eine (diskrete) Gruppe, X ein topologischer Raum. Eine stetige (Links)-Operation von G auf X ist ein Gruppenhomomorphismus $\phi\colon G \to Homeo(X)$; man schreibt dies oft als "Multiplikation" $G \times X \to X; (g,x) \mapsto gx := \phi(g)(x)$. Dann gilt $1 \cdot x = x$ und $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ für alle $x \in X$, $g, h \in G$.

Falls X glatte Mannigfaltigkeit, dann heißt eine solche Operation *glatt*, wenn man Homöomorphismen durch Diffeomorphismen ersetzt.

Eine Operation ϕ heißt

(1) effektiv, falls $\ker(\phi) = 1$.

(2) *frei*, falls $g \cdot x = x$ impliziert, dass $g = 1$ (jedes nicht-triviale Element von G bewegt jeden Punkt von x)

(3) *diskret*, falls für alle $x, y \in X$ offene Umgebungen $U_x \ni x$, $U_y \ni y$ existieren, so dass $g \cdot U_x \cap U_y \neq \emptyset$ nur für endlich viele $g \in G$.

Jede Operation definiert eine Äquivalenzrelation auf X, mit $x \sim gx$ für alle $x \in X$, $g \in G$. Für den Quotientenraum schreibt man $\Gamma \backslash X$, er heißt auch der *Bahnenraum*.

3.9 Beispiel. Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $(z,t) \mapsto z + t$ ist eine glatte freie Operation von $\mathbb{Z}$ auf der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}$.

Die *triviale Operation* ist definiert durch $gx := x$ für jedes $g \in G$, $x \in X$. Sie ist das Gegenteil von effektiv.

3.10 Definition. Ein topologischer Raum X heißt *hausdorffsch*, falls es für je zwei Punkte $x \neq y \in X$ offene Umgebungen U_x, U_y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$ gibt.

3.11 Satz. *Sei $\overline{X}$ ein topologischer hausdorffscher Raum mit freier diskreter Operation der Gruppe Γ. Dann ist mit $X := \Gamma \backslash \overline{X}$ die Projektion $p\colon \overline{X} \to X$ eine Überlagerungsabbildung.*

Beweis. Übungsaufgabe.

Tipp: Wähle zu $x \in X$ ein Urbild $\overline{x} \in \overline{X}$.

Wähle dann Umgebung U_1 von $\overline{x}$ nach Definition von diskreten Operationen. Benutze die Hausdorff-Eigenschaft, um U_1 zu einer Umgebung U_2 zu verkleinern, so dass $U_2 \cap gU_2 = \emptyset$ für alle $g \neq 1$. Zeige nun, dass $p|_{U_2}$ ein Homöomorphismus ist, und dass $\Gamma \times U_2 \to \Gamma U_2 := \{gz \mid g \in G, z \in U_2\}$; $(g,z) \mapsto gz$ ein Homöomorphismus ist. Folgere zuletzt, dass p eine Überlagerung ist. $\square$

3.12 Aufgabe. Finde zwei Beispiel mit einer freien Operation, wo die Quotientenabbildung keine Überlagerung ist, wobei einmal die Operation nicht diskret ist, im zweiten Beispiel der Raum nicht hausdorffsch.

3.13 Definition. Sei X topologischer Raum.

(1) X heißt wegzusammenhängend, falls je zwei Punkte durch einen Weg verbunden werden können.

(2) X heißt lokal wegzusammenhängend falls für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung existiert, welche wegzusammenhängend ist.

(3) X heißt semilokal einfachzusammenhängend, falls für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U_x, so dass jede Schleife $\gamma\colon S^1 \to U_x$ in X zu einer konstanten Schleife homotop ist; präziser: in Inklusion induziert auf $\pi_1(U_x, b) \to \pi_1(X, b)$ für jedes $b \in U$ die triviale Abbildung.

3.14 Aufgabe. Finde Beispiele, für welche die Eigenschaften aus 3.13 getrennt erfüllt bzw. nicht erfüllt sind (es gibt also 8 Fälle zu unterscheiden).

3.15 Satz. *Sei X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfachzusammenhängend.*

Dann gibt es eine Bijektion zwischen den Untergruppen U von $\pi_1(X, x_0)$ und Isomorphieklassen von zusammenhängenden Überlagerungen $p_U\colon (X_U, x_U) \to (X, x_0)$.

Eine Isomorphie von Überlagerungen ist dabei ein Homöomorphismus

$$f\colon (X_U, x_U) \to (X'_U, x'_U) \quad \textit{mit} \quad p'_H \circ f = p_H.$$

Der Beweis benötigt einige vorbereitende Aussagen.

3.16 Lemma. *Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\gamma\colon I \to X$ stetig, $t_0 \in I$ und $\tilde\gamma(t_0) \in Y$ ein Lift von $\gamma(t_0)$ (also $p(\tilde\gamma(t_0)) = \gamma(t_0)$).*

Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $\tilde\gamma\colon I \to Y$ mit $\tilde\gamma(t_0)$ wie vorgegeben, und so dass $p \circ \tilde\gamma = \gamma$.

Man spricht von der eindeutigen Wegeliftungseigenschaft *von überlagerungen.*

Beweis. Da p lokaler Homöomorphismus ist, existiert lokal ein Lift. Seien $\tilde\gamma_1\colon I_1 \to Y$ und $\tilde\gamma_2\colon I_2 \to Y$ zwei Lifts, die auf zwei Teilintervallen von I definiert sind (mit $t_0 \in I_1 \cap I_2$). Sei $t_1 := \sup\{t \in I_1 \cap I_2 \mid \tilde\gamma_1(t) = \tilde\gamma_2(t)\}$. Falls $t_1 \in I$, wähle Umgebung U von $\gamma(t_1)$ mit Überlagerungskarte $f\colon p^{-1}(U) \to U \times Z$ mit diskreter Menge Z. Für $t < t_1$ genügend nahe bei t_1 ist $\gamma(t) \in U$ und die Lifts $\tilde\gamma_1(t) = \tilde\gamma_2(t)$ existieren. Wegen der lokalen Homöomorphie gälte dann auch $\tilde\gamma_1(t_0) = \tilde\gamma_2(t_0) = \lim_{t\to t_0} \tilde\gamma_1(t)$. Es ist also entweder $t_1 \notin I_1$ oder $t_1 \notin I_2$, auf dem gemeinsamen Definitionsbereich stimmen $\tilde\gamma_1$ und $\tilde\gamma_2$ jedenfalls überein (dasselbe geht natürlich auch links von t_0).

Sei nun $I_1 \subset I$ das maximale Definitionsintervall, auf welchem der (eindeutige) Lift $\tilde\gamma$ von γ definiert werden kann. Die obige Überlegung mit den lokalen Diffeomorphismen zeigt, dass I_1 sowohl offenes als auch abgeschlossenes Teilintervall von I ist. Da I zusammenhängend, also $I_1 = I$. □

3.17 Lemma. *Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung und $H\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ eine stetige Abbildung, mit Lift $\tilde H(0) \in Y$ von $H(0)$.*

Dann gibt es einen eindeutigen Lift $\tilde H\colon [0,1] \times [0,1] \to Y$ mit vorgegebenem Wert $\tilde H(0)$.

Beweis. Da jeder Punkt in $[0,1] \times [0,1]$ mit $(0,0)$ durch einen Pfad verbunden werden kann, und da die Lifts von Pfaden eindeutig sind, kann es höchstens einen stetigen Lift von H geben.

Sei $r := \sup\{t \in [0,1] \mid \tilde H|_{[0,t]\times[0,1]} \text{ stetig}\}$. Wegen der lokalen Homöomorphie gibt es für jedes $(r,s) \in [0,1] \times [0,1]$ eine offene Umgebung, so dass der auf $[0,r) \times [0,1]$ stetige Abbildung $\tilde H$ von H (eindeutig) stetig fortgesetzt werden kann. Wäre $r < 1$, könnte wegen der Kompaktheit von $[0,1]$ dann der Lift $\tilde H$

sogar stetig auf ein $[0, r+\epsilon] \times [0,1]$ fortgesetzt werden, mit geeignetem $\epsilon > 0$. Das widerspricht aber der Definition von r, also gilt $r = 1$, und der stetige Lift $\tilde{H}$ ist auf $[0,1] \times [0,1]$ definiert. □

3.18 Korollar. *Sei* $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *eine Überlagerung. Dann ist* $p_*\colon \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ *injektiv.*

Beweis. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \tilde{X}$ eine "Schleife" bei x_0, also $\gamma(0) = \gamma(1) = \tilde{x}_0$, so dass $p \circ \gamma$ homotop zur konstanten Schleife ist. Sei $H\colon [0,1] \times [0,1] toX$ eine solche Homotopie, also $H(0,t) = H(1,t) = H(s,1) = x_0$.

Dann hat H eindeutige Liftung zu $\tilde{H}$ mit (wegen der Eindeutigkeit gelifteter Wege) $\tilde{H}(0,t) = \tilde{H}(1,t) = \tilde{H}(s,1) = \tilde{x}_0$ für alle $s, t \in [0,1]$. Damit ist $\tilde{H}$ eine Homotopie zwischen γ und der konstanten Schleife, insbesondere ist jedes Element im Kern von p_* selbst schon trivial. □

3.19 Satz. *Sei* $p\colon \tilde{X} \to X$ *eine Überlagerung und* $f\colon Y \to X$ *stetig. Sei* $y_0 \in Y$ *und ein Lift* $\tilde{f}(y_0) \in \tilde{X}$ *von* $f(y_0)$ *vorgegeben und sei* Y *wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend (d.h. für jedes* $y \in Y$ *und jede offene Menge* $U \subset Y$ *mit* $y \in U$ *gibt es eine offene Umgebung* $V \subset U$ *von* y*, so dass* V *wegzusammenhängend).*

Falls $\pi_1(f)(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{f}(y_0))) \subset \pi_1(X, f(y_0))$*, dann gibt es einen eindeutigen stetigen Lift* $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ *von* f *mit vorgegebenem* $\tilde{f}(y_0)$*.*

Beweis. Zu $y \in Y$ wähle Weg $c\colon [0,1] \to Y$ von y_0 nach y, mit eindeutigem Lift $\tilde{(f \circ c)}\colon [0,1] \to \tilde{X}$ zum Anfangspunkt $\tilde{f}(y_0)$. Sei $c_2\colon [0,1] \to Y$ ein zweiter Weg von y_0 nach y. Dann ist die Hintereinanderausführung $\gamma\colon [0,1] \to Y$ von c und dem Inversen von c_2 ein Weg mit Anfangs- und Endpunkt y_0 (also eine Schleife), also $f \circ \gamma\colon [0,1] \to X$ ein Schleife in X mit Anfangs- und Endpunkt x_0. Nach Voraussetzung über die Beziehung der Fundamentalgruppen von $X, Y, \tilde{X}$ gibt es eine Schleife $\beta\colon [0,1] \to \tilde{X}$ und eine punktierte Homotopie $H\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ zwischen $f \circ \gamma$ und $p \circ \beta$, wobei $H(t,0) = H(t,1) = x_0$ für alle $t \in [0,1]$ (hier wird benutzt, dass der Kreis S^1 zum Intervall $[0,1]$ aufgeschnitten wird, aber natürlich weiterhin der Basispunkt von S^1 konstant nach x_0 abgebildet wird).

Die Homotopie H hat nun nach Lemma 3.17 einen eindeutigen Lift $\tilde{H}\colon [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$, wobei insbesondere $\tilde{H}(0,t) = \tilde{H}(1,t) = \tilde{f}(y_0)$ für jedes $t \in [0,1]$. Beachte, dass wegen der Eindeutigkeit des Lifts insbesondere der Lift von $f \circ c$ und von $f \circ c_2$ zum Anfangspunkt $\tilde{f}(y_0)$ identisch, nämlich gleich $\tilde{H}(1, 1/2)$ ist.

Wir definieren $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ durch $\tilde{f}(y) := \tilde{(f \circ c)}(1)$ für einen Weg von y_0 nach y.

Wir müssen noch beweisen, dass diese Abbildung stetig ist. Sei dazu $y \in Y$ und $W \subset X$ offene Umgebung von $f(y)$, so dass lokal $p^{-1}(W) \cong W \times Z$ mit diskretem Z.

Wähle wegzusammenhängende Umgebung $U \subset f^{-1}(W) \subset Y$ von y. Man erhält dann einen Weg c_z von y_0 zu $z \in U$, indem man einen festen Weg c_0 nach y_0 mit einem in U verlaufenden Weg e_z von y zu z verkettet. Der (eindeutige) Lift von $f \circ c_z$ ist dann die Verkettung des Lifts von $f \circ c_0$ mit $f \circ e_z$. Letzterer verläuft aber ganz in einem der Blätter von $p^{-1}(W)$. Die Abbildung $\tilde{f}|_U$ erhält man also, indem man f mit dem inversen des lokalen Homöomorphismus p (eingesschränkt auf das richtige Blatt) verknüpft: als verknüpftung zweier stetiger Abbildungen ist sie stetig. □

3.20 Korollar. *Seien* $p_1\colon (X_1, x_1) \to (X, x_0)$ *und* $p_2\colon (X_2, x_2) \to (X, x_0)$ *zwei wegzusammenhängende Überlagerungen eines lokal wegzusammenhängenden und wegzusammenhängenden Raums* X*. Es sei* $\operatorname{im}((p_1)_*) = \operatorname{im}((p_2)_*) \subset \pi_1(X, x_0)$*. Dann gibt es einen eindeutigen Homöomorphismus* $f\colon (X_1, x_1) \to (X_2, x_2)$ *mit* $p_2 \circ f = p_1$*.*

Beweis. Da X lokal wegzusammenhängend, und da dies eine lokale Eigenschaft ist, sind auch die (lokal zu X homöomorphen) Räume X_1 und X_2 lokal wegzusammenhängend. Man kann also auf das Paar von Abbildung (p_1, p_2) zweimal den Satz 3.19 anwenden, und erhält (eindeutige) Lifts $f\colon (X_1, x_1) \to (X_2, x_2)$, $g\colon (X_2, x_2) \to (X_1, x_1)$. Wegen der Eindeutigkeit der Lifts gilt insbesondere $g \circ f = \mathrm{id}_{X_1}$ (also Lift von $p_1\colon X_1 \to X$) und $f \circ g = \mathrm{id}_{X_2}$, somit erhält man die gewünschten Homöomorphismen, wir haben bereits gezeigt, dass diese eindeutig sind. □

Zum Beweis des Hauptsatzes fehlt jetzt nur noch eine Konstruktion:

3.21 Satz. *Sei* X *wegzusammenhängend und semilokal einfachzusammenhängend mit Basispunkt* x_0*. Sei* H *Untergruppe von* $\pi_1(X, x_0)$*. Dann gibt es eine zusammenhängend Überlagerung* $p\colon \tilde{X} \to X$ *mit* $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = H$*.*

Beweis. Wir definieren $\tilde{X} := \{\gamma\colon [0,1] \to X \mid \gamma(0) = x_0\}/\sim$ wobei $\gamma_1 \sim \gamma_2$ genau dann, wenn die Verkettung von γ_1 und γ_2^{-1} ein Element aus H repräsentiert. Nach Definition der Verknüpfung in $\pi_1(X, x_0)$ ist dies eine Äquivalenzrelation, da H Untergruppe.

Man hat eine offensichtiche Projektion $p\colon \tilde{X} \to X; [\gamma] \mapsto \gamma(1)$. Sei $[\gamma] \in \tilde{X}$ mit $\gamma(1) = x$. Wähle semilokal-einfachzusammehängende Umgebung $U \subset X$ von x. Setze $U_{[\gamma]}$ als Menge aller (Klassen von) Wegen, die sich als Komposition von γ mit einem Weg in U ergeben. Da U semilokal-einfachzusammenhängend ist $p\colon U_{[\gamma]} \to U$ eine Bijektion. Wir definieren nun einfach, dass die Mengen $U_{[\gamma]}$ eine Basis der Topologie von $\tilde{X}$ bilden sollen. Beachte, dass jede Teilmenge einer Menge U_x wie aus der Definition von lokalem einfachzusammenhang selbst wieder dieselben Eigenschaften hat, daher ist der Schnitt zweier Mengen $U_{[\gamma]}$ und $V_{[c]}$ selbst wieder einer dieser Mengen aus der Basis der Topologie von $\tilde{X}$, so dass die Topologie von $\tilde{X}$ selbst nur aus Vereinigungen solcher Mengen besteht, und so dass insbesondere die Abbildungen $p|_{U_{[\gamma]}}\colon U_{[\gamma]} \to U$ Homöomorphismen sind.

Fixiere nun $y \in X$, und betrachte $Z := p^{-1}(y) \subset \tilde{X}$ mit Umgebungen $U_{[\gamma]}$ für $[\gamma] \in Z$. Sei $[c] \in U_{[\gamma_1]} \cap U_{[\gamma_2]}$, d.h. die Verkettung von γ_1 mit einem in U verlaufenden Weg c_1 und von γ_2 mit einem in U verlaufenden Weg γ_2 ist homotop (relativ Endpunkt). Nach Voraussetzung an U kann man (durch geeignete Homotopie) annehmen dass $c_1 = c_2$ und weiterhin die Verkettung von γ_1 und γ_2 mit c_1 homotop relativ Endpunkt sind. Dann sind aber auch γ_1 und γ_2 homotop relativ Endpunkten. Somit ist $p_{-1}(U)$ homöomorph zu $U \times Z$, also ist p eine Überlagerung.

Es bleibt noch, die Fundamentalgruppe von $\tilde{X}$ zu bestimmen. Sei $c\colon [0,1] \to X$ Repräsentant einer Schleife in H. Definiere Lift $\tilde{c}\colon [0,1] \to \tilde{X}$ durch $\tilde{c}(t) := [c|_{[0,t]}]$. Nach Definition der Topologie auf $\tilde{X}$ ist diese Abbildung stetig. Es ist eine Schleife, da $\tilde{c}(1) = [c] \in H$, also c äquivalent zur konstanten Schleife, also zu $\tilde{c}(0)$. Die gleiche Konstruktion zeigt aber auch, dass eine Schleife, die nicht in H liegt, nicht zu einer Schleife in $\tilde{X}$ geliftet werden kann (Lift von Wegen ist eindeutig). Folglich gilt $\operatorname{im}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$, wie behauptet. $\square$

3.22 Satz. *Verbesserte Version von Satz 3.19:*

Sei X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfachzusammenhängend. Wähle $x_0 \in X$. Dann gibt es eine (bis auf Überlagerungsisomorphie eindeutige) universelle Überlagerung $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *mit $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 1$. Auf $\tilde{X}$ operiert $\pi_1(X, x_0)$ frei und diskret, und $\tilde{X}/\pi_1(X, x_0) = X$. Lokal sieht $\tilde{X}$ aus wie $U \times \Gamma$.. Die Zwischenüberlagerungen sind bijektiv zu den Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ und werden durch entsprechende Quotientenbildung erhalten.*

Beweis. Existenz folgt aus dem Beweis von Satz 3.21, Eindeutigkeit aus Korollar 3.20. $\square$

3.1 Abkürzungen zum Beweis des Hauptsatzes

Gegeben sein ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfachzusammenhängender Raum X mit Basispunkt $x_0 \in X$. Wir wollen folgendes Diagramm studieren:

$$\begin{aligned}\{&\text{isoklassen von punktierten Überlagerungen } p\colon (\overline{X}, x) \to (X, x_0)\}\\ &\to \{\text{Untergruppen von } \pi_1(X, x_0)\}. \qquad (3.23)\end{aligned}$$

Die Abbildung von links nach rechts ist gegeben durch $(p\colon (\overline{X}, x) \to (X, x_0)) \mapsto p_*(\pi_1(\overline{X}, x)) \subset \pi_1(X, x_0)$.

Diese Abbildung ist injektiv wegen **Satz 3.19 und Korollar 3.20**. Die beiden Beweise können mit Bildern recht gut veranschaulicht werden.

Für die Surjektvität brauchen wir jetzt "'nur" noch eine Konstruktion; diese wird anschaulich klar gemacht.

Umkehrabbildung:

3.24 Definition. Sei $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ eine *universelle Überlagerung* eines wegzsh, lokal wegszh und semilokal einfachzsh Raums (X, x). Per Definition heißt dies, dass $\tilde{X}$ wegzusammenhängend ist, und dass $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = \{1\}$.

Dann operiert $\pi_1(X, x)$ stetig, frei und diskret auf $\tilde{X}$ auf folgende Weise: zu einem $y \in \tilde{X}$ wähle einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to \tilde{X}$ von y nach $\tilde{x}$. Sei $g \in \pi_1(X, x)$ repräsentiert durch $c\colon [0,1] \to X$. Dann wird $g \cdot y$ definiert als Endpunkt des Lifts der Schleife $(;p\gamma)^{-1} \cdot c \cdot (p\gamma)$ mit Startpunkt y. Da $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = \{1\}$, hängt dies nicht von der Wahl von γ ab (wegen der Eindeutigkeit des Endpunkts zweier Lifts von Wegen welche homotop mit festen Endpunkten sind). Genausowenig hängt es von der Wahl von c ab.

Mit $\pi_1(x, X)$ operiert auch jede seiner Untergruppen U frei und diskret auf $\tilde{X}$. Der Quotient $\tilde{X}/U$ ist dann eine Überlagerung von X mit Fundamentalgruppe U (und hat selbst als universelle Überlagerung $\tilde{X}$).

3.25 Bemerkung. Die Klassifikation von Überlagerungen ist hier sehr ähnlich der Klassifikation von Körpererweiterungen aus der Algebra: Zwischenüberlagerungen entsprechen Untergruppen.

4 Fundamentalgruppe II

Wir wollen nun starten, ein paar nicht-triviale Fundamentalgruppen zu berechnen. Dazu dient uns zunächst Satz 3.22.

4.1 Satz. *Die Fundamentalgruppe von S^1 ist $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Ein Erzeuger ist* $\mathrm{id}\colon S^1 \to S^1$.

Die universelle Überlagerung von S^1 ist $\mathbb{R}$, mit Überlagerungsabbildung $p\colon \mathbb{R} \to S^1; t \mapsto \exp(2\pi i t)$. Die Decktranslationsgruppe $\mathbb{Z}$ operiert durch Translation.

Beweis. p ist Überlagerung, S^1 ist wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und seminlokal einfachzusammenhängend (jeder Punkt hat eine Umgebung homöomorph zu $(0,1)$). Außerdem ist $\mathbb{R}$ zusammenziehbar, insbesondere ist $\pi_1(\mathbb{R}) = \{1\}$. Somit ist $\mathbb{R}$ die eindeutige universelle Überlagerung. Die Operation $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}; (r, z) \mapsto r + z$ ist frei und diskret, und $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$. □

4.2 Definition. Seien X, Y topologische Räume. Die *Produkttopologie* auf $X \times Y$ ist die gröbste Topologie (also mit möglichst wenigen offenen Mengen), so dass die beiden Projektionen $p_X : X \times Y \to X$ und $p_Y : X \times Y \to Y$ stetig sind.

Sie wird erzeugt von allen Mengen der Form $U \times V$ mit $U \subset X$ offen und $V \subset Y$ offen.

Hierbei ist die von einer Teilmenge $\mathcal{A}$ der Potenzmenge *erzeugte Topologie* die gröbste Topologie, die $\mathcal{A}$ erhält (also der Schnitt aller Topologien (als Teilmengen der Potenzmenge)) welche $\mathcal{A}$ enthalten. "Konkret" kann man sie folgendermaßen beschreiben: eine Menge U ist offen in der erzeugten Topologie, wenn es eine Indexmenge I gibt, für jedes $i \in I$ ein $n_i \in \mathbb{N}$ und offene Mengen $U_{i,j_1}, \dots, U_{i,j_{n_i}}$ so dass $U = \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{k=1}^{n_i} U_{i,j_k})$.

Im Fall der Produkttopologie wird es etwas einfacher, da $U_1 \times V_1 \cap U_2 \times V_2 = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$: eine Menge ist offen genau dann, wenn $U = \bigcup_{i\in I} U_i \times V_i$ mit geeigneten I und $U_i \subset X$ offen, $V_i \subset Y$ offen.

4.3 Satz. *Seien X und Y topologische Räume. Dann ist*

$$\begin{aligned}\pi_1(X, x_0) \times p_1(Y, y_0) \to \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0));\\ ([f\colon S^1 \to X], [g\colon S^1 \to Y]) \mapsto [f \times g\colon S^1 \to X \times Y]\end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Die Umkehrabbildung ordnet jedem $k\colon S^1 \to X \times Y$ die beiden Komponentenabbildungen zu. Dieselben Konstruktionen kann man auch mit Homotopien machen.

Man muss nur noch (aus der Definition der Produkttopologie) überprüfen, dass die auftauchenden Abbildungen alle stetig sind, dann ergibt sich Wohldefiniertheit und die Tatsache, dass man zu einander inverse Isomorphismen erhält. □

4.4 Korollar. *Für den n-dimensionalen Torus $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\ mal}$ gilt $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$.*

4.5 Korollar. *Es gibt keine Fortsetzung $D^2 \to S^1$ der identischen Abbildung $\partial D^2 = S^1 \to S^1$.*

Beweis. Geht wie in der Einführung (wegen der Funktoreigenschaft von π_1), vergleiche Beispiel 1.38. Allerdings haben wir direkt, um zu zeigen, dass $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, schon gezeigt dass $[\mathrm{id}_{S^1}] \in \pi_1(S^1)$ nicht trivial ist, und dies ist gerade die obige Aussage. □

4.6 Bemerkung. Damit haben wir natürlich noch nicht sehr viele Möglichkeiten, Fundamentalgruppen zu berechnen.

Wichtige weitere Sätze zur Berechnung sind die folgenden.

(1) Satz von Seifert van Kampen, welches für $X = A \cup B$ die Fundamentalgruppe von X in mittels der Fundamentalgruppen von A, B und $A \cap B$ ausdrückt (soweit alle vorkommenden Räume wegzusammenhängend sind und technische Zusatzvoraussetzungen erfüllt sind).

(2) Lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen für Faserungen. Eine Faserung ist eine Verallgemeinerung von kartesischen Produkten, die "lange exakte Sequenz" ist entsprechend eine Verallgemeinerung von Satz 4.3.

(3) Der *Hurewicz*-Homomorphismus liefert einen Isomorphismus zwischen der Abelschmachung von $\pi_1(X, x)$ und der ersten Homologiegruppe $H_1(X)$, falls X wegzusammenhängend ist.

4.7 Definition. Seinen G_1, G_12 Gruppen. Ein freies Produkt X von G_1 und G_2 ist eine Gruppe G zusammen mit Gruppenhomomorphismen $\phi_1 \colon G_1 \to G$ und $\phi_2 \colon G_2 \to G$, so dass für jede Gruppe X und jedes Paar von Gruppenhomomorphismen $\psi_1 \colon G_1 \to X$ und $\psi_2 \colon G_2 \to X$ genau ein Gruppenhomomorphismus $\psi \colon G \to X$ existiert, so dass $\psi_1 = \psi \circ \phi_1$ und $\psi_2 = \psi \circ \phi_2$. Man schreibt für G dann $G_1 * G_2$.

Man kann dies natürlich auch iterieren.

Ein freies Produkt $\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ (mit k Faktoren) heißt *freie Gruppe* mit k Erzeugern.

4.8 Satz. *Für je zwei Gruppen G_1 und G_2 gibt es ein freies Produkt $G_1 * G_2$. Es ist eindeutig bis auf kanonische Isomorphie (die Abbildungen $\phi_j \colon G_j \to G_1 * G_2$ berücksichtigend).*

Die Homomorphismen $\phi_i \colon G_i \to G_1 * G_2$ sind injektiv.

Beweis. Die Gruppe $G_1 * G_2$ wird einfach definiert als Menge von Äquivalenzklassen $x_1 y_1 \cdots x_n y_n$ mit $x_i \in G_1$, $y_i \in G_2$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Ein elementarer Reduktionsschritt ersetzt $x_1 \cdots y_k \cdot 1 \cdot y_{k+1} \cdots y_n$ durch $x_1 \cdots (y_k y_{k+1} \cdots y_n$, falls $x_{k+1} = 1$, oder entsprechend, falls eins der $y_i = 1$. Wir betrachten die Äquivalenzrelation, die von diesen elementaren Reduktsionsschritten erzeugt wird. Die Gruppenoperation ist durch hintereinanderschalten gegeben, das neutrale Element durch $1 \cdot 1$, das inverse von $x_1 \cdots y_n$ durch $1 y_n^{-1} \cdots x_1^{-1} 1$.

Die universelle Eigenschaft ist nun direkt nachzurechnen.

Eindeutigkeit ist allgemeier Unsinn. □

4.9 Satz. ***(Spezialfall des Satzes von van Kampen)***
Sei $X = X_1 \cup X_2$ mit $X_1, X_2, X_1 \cap X_2 =: X_0$ wegzusammenhängend und offen in X. Sei $x \in X_0$, und es gelte $\pi_1(X_0, x) = \{1\}$.

Dann ist $\pi_1(X, x)$ mit den von den Inklusionen induzierten Homomorphismen $\pi_1(X_i, x) \to \pi_1(X, x)$ das freies Produkt von $\pi_1(X_1, x)$ und $\pi_1(X_2, x)$.

Beweis. Wir wollen nur kurz die Beweisidee angeben. Für einen ausführlichen Beweis wird auf die Lehrbuchliteratur verwiesen.

Wir müssen zeigen, dass $\pi_1(X, x)$ die universelle Eigenschaft erfüllt. Seien also $\psi_i : \pi_1(X_i, x) \to H$ zwei Gruppenhomomorphismen.

Wir müssen dann die eindeutige Existenz eines $\psi : \pi_1(X, x) \to H$ zeigen, so dass die Verknüpfung mit den von Inklusionen induzierten Abbildungen gerade ψ_i ergibt.

Für die Eindeutigkeit beweisen wir, dass jedes Element $g \in \pi_1(X, x)$ ein Produkt $g = \prod x_1 y_1 \cdots x_n y_n$ mit $x_i \in \operatorname{im} \pi_1(X_1, x)$ und $y_i \in \operatorname{im}(\pi_1(X_2, x)$ ist. Da eine Abbildung ψ auf $\operatorname{im}(\pi_1(X_1, x)) \cup \operatorname{im}(\pi_2(X_2, x)$ eindeutig festgelegt ist, kann dann höchstens eine Abbildung ψ mit den gewünschten Eigenschaften existieren.

Sei also $g \in \pi_1(X, x)$ und $\gamma : [0, 1] \to X$ ein Repräsentant von g. Dann ist $\{\gamma^{-1}{}^{‘}(X_1), \gamma^{-1}(X_2)\}$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Es gibt also (Lebesgue-Zahl) $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, so dass jedes der Teilintervalle $[t_k, t_{k+1}]$ von γ ganz in $X_{\alpha(k)}$, $\alpha(k) = 1, 2$ abgebildet wird, wobei wir erreichen können, dass $\alpha(k + 1) \neq \alpha(k)$ für alle k. Jeder der Punkte $\gamma(t_k)$ liegt dann in X_0, und man wähle einen im wegzusammenhängenden X_0 (also auch in X_1 und X_2) verlaufenden Weg c_k von $\gamma(x_k)$ nach x_0. Dann ist γ homotop zur Verkettung von Schleifen $(c_n \cdot \gamma|_{[t_{n-1}, t_n]} \cdot c_{n-1}^{-1}) \cdots (c_1 \cdot \gamma|_{[t_0, t_1]} \cdot c_0^{-1})$, wobei die Schleife $c_k \cdot \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \cdot c_{k-1}^{-1}$ ganz in $X_{\alpha_{k-1}}$ verläuft, also ein Element in $\pi_1(X, x)$ repräsentiert, was im Bild der $\pi_1(X_{\alpha_{k-1}}, x)$ liegt.

Um die Existenz des gewünschten Homomorphismus zu beweisen, zeigen wir, dass die Zerlegung von g als Produkt von Elementen im Bild von $\pi_1(X_1, x)$ und von $\pi_1(X_2, x)$ sogar eindeutig ist, damit erhält man eine wohldefinierte Abbildung $\psi(g) = \prod_{k=1}^{n} \psi_{\alpha k-1([c_k \cdot \gamma|_{[t_{k-1} t_k]} \cdot c_{k-1}^{-1}])}$ (wobei im Produkt die Reihenfolge beachtet werden muss, da G nicht notwendig abelsch ist).

Man beachte zunächst, dass die Wahl der Wege c_i keine Rolle spielt: da $\pi_1(X_0, x) = \{1\}$, sind je zwei solche Wege homotop mittels einer Homotopie mit festen Endpunkten. Ändert man die Zerlegung, erhält man eine zweite Zerlegung, so dass sich beide Einzelzerlegungen von der gemeinsamen Verfeinerung nur um Teilstücke unterscheiden, die ganz in X_0 verlaufen. Da $\pi_1(X_0, x) = \{1\}$, entspricht dies gerade einer elementaren Reduktion (bzw. ihrer Umkehrung); das dadurch als Bild von ψ definierte Element von G ändert sich jedenfalls nicht.

Wesentlich mühsamer ist es, dass die Konstruktion auch unabhängig von der Schleife γ ist, welche das Element g repräsentiert. Sei dazu $H : [0, 1] \times [0, 1]$ eine Homotopie (mit festen Endpunkten) von γ zu γ'. Wähle (Lebesgue-Zahl!) $n > 0$, so dass jeder Würfel $[(k - 1)/n, k/n] \times [(l - 1)/n, l/n]$ nach $X_{\alpha(k.l)}$ mit $\alpha(k, l) \in \{1, 2\}$ abgebildet wird. Es genügt nun, für zwei “aufeinanderfolgende” Schleifen $H_{(k-1)/n}$ und $H_{k/n}$ zu zeigen, dass die resultierende Zerlegung von g als Produkt übereinstimmt, induktiv folgt dies dann auch für die zu γ und γ' gehörenden Zerlegungen.

Hier kann man nun (durch Zusammenfassen von Teilwürfeln) $0 = t_0, t_1, \ldots, t_r = 1$ wählen, so dass $[(k - 1)/n, k/n] \times [t_{i-1}, t_i]$ von H komplett nach $\alpha(i) \in \{1, 2\}$ abgebildet wird, so dass $\alpha(i-1) \neq \alpha(i)$ für alle i. Ähnlich wie bei der Konstruktion der in X_1 und X_2 verlaufenden an x basierten Teil-Schleifen, konstruiert man nun auch ganz in X_1 oder X_2 verlaufende Homotopien (mit festen Endpunkten) zwischen diesen Teilschleifen. Die Resultierenden Elemente aus $\pi_1(X_1, x)$ und $\pi_1(X_2, x)$ bleiben also gleich.

Mit ähnlichen Mitteln sieht man dass die Resultierende Abbildung $\pi_1(X, x) \to G$ ein Gruppenhomomorphismus ist.‘ $\square$

4.10 Bemerkung. Falls $\pi_1(X_0, x)$ in Satz 4.9 nicht trivial ist, muss das freie Produkt durch das *pushout* der Gruppen $\pi_1(X_1, x)$ und $\pi_1(X_2, x)$ entlang von $\pi_1(X_0, x)$ (mit den durch die Inklusionen induzierten Abbildungen) ersetzt werden.

5 Axiomatische Homologie

Wir werden nun eine der wichtigsten Invarianten in der algebraischen Topologie einführen, die Homologie. Dieses Konzept hat sich als so erfolgreich erwiesen, dass es auch in viele andere Gebiete der Mathematik exportiert wurde: Homologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie, der Zahlentheorie, der Algebra, ...

Leider ist es nicht leicht, Homologie zu definieren. Wir gehen daher zunächst axiomatisch vor und geben eine Liste von Eigenschaften an, die eine Homologietheorie erfüllen soll. Später werden wir dann (tatsächlich sogar verschiedene) Homologietheorien tatsächlich konstruieren.

Der Axiomatische Zugang ist deshalb sinnvoll, weil in der Regel für Berechnungen nicht mehr als die Information aus den Axiomen benutzt wird; dies werden wir an einigen Beispielen sehen.

Wir erwarten: Homologie ist ein Funktor von topologischen Räumen nach einer algebraischen Kategorie. Dies ist auch ungefähr richtig. Tatsächlich brauchen wir aber unendlich viele (in Beziehung stehende) Funktoren, und nicht nur topologische Räume.

5.1 Definition. Die Kategorie TOP^2 ist die Kategorie der *Paare topologischer Räume*. Ein Objekt (X, A) ist ein topologischer Raum X mit einem Teilraum $A \subset X$.

$Mor((X, A), (Y, B)) := \{f : X \to Y \text{ stetig } \mid f(A) \subset B\}$.

Zwei Morphismen $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ heißen *homotop als Abbildungen von Raumpaaren* falls es eine Homotopie $H \in Mor((X \times [0, 1], A \times [0, 1]), (Y, B))$ gibt, so dass $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Die Menge der entsprechenden Homotopieklassen von Abbildungen bezeichnen wir mit $[(X, A), (Y, B)]$.

5.2 Bemerkung. Ein Spezialfall für Raumpaare sind die von uns in Kapitel 3 betrachteten punktierten Räume $(X, x_0) = (X, \{x_0\})$.

5.3 Definition. Wir haben einen Inklusionsfunktor $TOP \to TOP^2$ welcher X auf $(X, \emptyset)$ abbildet. Auf diese Weise werden wir oft einen Raum als ein Raumpaar ansehen.

5.4 Definition. Eine *Homologietheorie* besteht aus einer Sequenz von Funktoren

$$h_n : TOP^2 \to ABEL; \qquad n \in \mathbb{Z},$$

und natürlichen Transformationen

$$\delta_n(X, A) : h_n(X, A) \to h_{n-1}(A, \emptyset).$$

Natürliche Transformation heisst hierbei, dass für jeden Homomorphismus

$$f\colon (X,A) \to (Y,B)$$

das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} h_n(X,A) & \xrightarrow{\partial_n(X,A)} & h_{n-1}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle h_n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle h_{n-1}(f)} \\ h_n(Y,B) & \xrightarrow{\partial_n(Y,B)} & h_{n-1}(B) \end{array}$$

kommutiert. Wir definieren $h_n(X) := h_n(X, \emptyset)$.

Es handelt sich um eine Homologietheorie, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(1) **(Homotopie-Invarianz)**: Falls $f, g\colon (X,A) \to (Y,B)$ homotop als Abbildungen von Paaren sind, dann gilt $h_n(f) = h_n(g)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(2) **(Paarsequenz)**: Man hat eine lange exakte Sequenz

$$\to h_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X,A)} h_n(A) \to h_n(X) \to h_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n(X,A)}$$

wobei die nicht benannten Homomorphismen von den Inklusionen induziert sind.

(3) **(Ausschneidung)**: Falls $U \subset A \subset X$, so dass der Abschluss von U im Inneren von A enthalten ist, dann ist die von der Inklusion induzierte Abbildung

$$h_n(X - U, A - U) \to h_n(X,A)$$

ein Isomorphismus.

(4) **Summenaxiom**: Falls $X = \amalg_{i \in I} X_i$, so gilt

$$h_n(X) = \bigoplus_{i \in I} h_n(X_i)$$

5.5 Definition. Eine Homologie-Theorie heisst gewöhnlich, falls $h_n(\{*\}) = 0$ für $n \neq 0$.

5.6 Bemerkung. In der Definition von Homologietheorien läßt man in der Praxis oft etwas zusätzliche Flexibilität zu. Dies betrifft insbesondere zwei Punkte:

(1) Man wird oft anstelle von TOP^2 andere Kategorien von topologischen Räumen/Raumpaaren betrachten; insbesondere Unterkategorien, wobei auf den Räumen gleichzeitig zusätzliche Struktur gegeben ist. Beispiel: geometrische Simplizialkomplexe und Unterkomplexe; Mannigfaltigkeiten; CW-Komplexe und Unterkomplexe.

(2) In den Voraussetzungen an das Ausschneidungsaxiom werden oft Änderungen vorgenommen (man kann Ausschneidung z.B. für beliebige 'Tripel $U \subset A \subset X$ fordern), oder auch für noch speziellere Tripel als in der obigen Formulierung.

Für den Rest des Kapitels wollen wir eine gewöhnliche Homologietheorie h_* fixieren.

5.7 Aufgabe. Sei (X,A) als Paar Homotopieäquivalent zu (Y,B). Dann gilt $h_n(X,A) \cong h_n(Y,B)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

5.1 Reduzierte Homologie

Jede (nichtleere) Menge enthält einen Punkt, und genauso ist die Homologie des Punktes in der Homologie jeden Raums enthalten. Diese „überflüssige“ Information macht manche Formeln etwas unübersichtlich, zur Vereinfachung betrachtet man daher die reduzierte Homologie.

5.8 Definition. Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum. Dann gibt es genau eine (stetige) Abbildung $X \to \{*\}$.

Setze $\tilde{h}_n(X) := \ker(h_n(X) \to h_n(\{*\}))$.

Falls $\emptyset \neq A \subset X$, setze $\tilde{h}_n(X, A) := h_n(X, A)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

5.9 Lemma. *Falls h eine gewöhnliche Homologietheorie ist, gilt $h_n(*) = 0$ für $n \neq 0$, also $\tilde{h}_n(X) = h_n(X)$ für $n \neq 0$. Für $n = 0$ (und für eine Homologietheorie, die nicht gewöhnlich ist), erhält man $h_n(X) \cong \tilde{h}_n(X) \oplus h_n(*)$.*

Beweis. Es muss nur die letzte Aussage bewiesen werden. Da $X \neq \emptyset$ gibt es mindestens eine (stetige) Abbildung $i\colon \{*\} \to X$, und die Verknüpfung $\{*\} \to X \to \{*\}$ ist die Identität auf X. Wir erhalten eine entsprechende Sequenz

$$h_n(*) \xrightarrow{h_n(i)} h_n(X) \xrightarrow{h_n(p)} h_n(*) \tag{5.10}$$

für die Homologiegruppen, so dass die Komposition die Identität ist. Betrachte nun die Abbildung $\tilde{h}_n(X) \oplus h_n(*) \to h_n(X)$, die durch die kanonische Inklusion und $h_n(i)$ gegeben ist. Mit Hilfe von (5.10) sieht man, dass diese Abbildung injektiv und surjektiv, also ein Isomorphismus ist. Sei nämlich $a \in h_n(X)$, dann ist $a - h_n(i)(h_n(p)(a)) \in \ker(h_n(p)) = \tilde{h}_n(X)$, demzufolge $a = (a - h_n(i)(h_n(p)(a))) \oplus h_n(i)(h_n(p)(a))$ im Bild von $\tilde{h}_n(X) \oplus h_n(*)$. Falls umgekehrt $h_n(i)(b) + c = 0$ mit $b \in h_n(*)$, $c \in \tilde{h}_n(X)$, dann $0 = h_n(p)(h_n(i)(b) + x) = h_n(p)(h_n(i)(b)) = b$, und demzufolge auch $c = 0$. $\square$

5.11 Bemerkung. Beachte, dass die Spaltung $h_n(X) = \tilde{h}_n(X) \oplus h_n(*)$ nicht natürlich ist, da sie von der Wahl der Abbildung $i\colon \{*\} \to X$ abhängt.

Es ist leicht, nachzuprüfen, dass die Homologieaxiome "Homotopieinvarianz" und "lange exakte Paarsequenz" auch für reduzierte Homologie $\tilde{h}_*$ gelten. Dies gilt nicht für Ausschneidung (falls man ganz A wegschneidet) und für das Summenaxiom.

5.2 Berechunungen in Homologie

5.12 Satz. *Sei h_* eine gewöhnliche Homologietheorie mit $h_0(*) = G$. Sei $D^n_+ \subset S^n$ die obere Halbsphäre (also $D^n_+ \approx D^n$). Dann gilt für alle $n \geq 0$.*

$$\tilde{h}_i(D^n_+) = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{Z} \tag{5.13}$$

$$\tilde{h}_i(S^n) \cong \begin{cases} G & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases} \tag{5.14}$$

$$h_i(S^n, D^n_+) \cong \begin{cases} G & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases} \tag{5.15}$$

$$h_i(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} G & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases} \tag{5.16}$$

Die Konstruktion liefert jeweils kanonische Isomorphismen mit G.

Falls $h_0(*) = \mathbb{Z}$ (mit einer festen Identifikation), erhält man entsprechend unter Verwendung dieser Isomorphismen kanonisch gegebene Bilder von $1 \in \mathbb{Z}$. Diese werden mit $[S^n] \in h_n(S^n)$ und $[D^n, S^{n-1}] \in h_n(D^n, S^{n-1})$ bezeichnet.

Beweis. Beachte zunächst, dass D_n homotopieäquivalent zu $\{*\}$. Damit folgt sofort (5.13). Die übrigen Aussagen beweisen wir per Induktion nach n. Beachte zunächst dass S^0 die disjunkte Vereinigung von zwei Punkten ist, und D^0_+ einer dieser beiden. Ausschneidung liefert $h_i(S^0, D^0_+) \cong h_i(*)$, also (5.16) für $n = 0$.

Die lange exakte Sequenz des Paares (S^n, D^n_+) liefert

$$0 = \tilde{h}_i(D^n_+) \to \tilde{h}_i(S^n) \to h_i(S^n, D^n_+) \to \tilde{h}_{i-1}(D^n_+) = 0,$$

also $h_i(S^n) \cong h_i(S^n, D^n_+)$, so dass (5.14) und (5.16) für jedes gegebene n äquivalent sind.

Sei $U \subset D^n_+$ eine kleine Scheibe um den "Nordpol", deren Abschluss im Inneren von D^n_+ enthalten ist. Ausschneidung impliziert

$$h_i(S^n, D^n_+) \cong h_i(S^n - U, D^n_+ - U).$$

Andererseits ist $(S^n - U, D^n_+ - U)$ homotopieäquivalent (als Paar) zu (D^n, S^{n-1}) (man muss nur den „überschüssigen" Anteil auf den Rand S^{n-1} zusammendrücken). Mit Aufgabe 5.7 folgt

$$h_i(S^n - U, D^n_+ - U) \cong h_i(D^n, S^{n-1}).$$

Also sind auch (5.16) und (5.15) für jedes n äquivalent.

Wir betrachten nun noch die exakte Sequenz des Paares (D^n, S^{n-1}) und erhalten

$$0 = h_i(D^n) \to h_i(D^n, S^{n-1}) \to h_{i-1}(S^{n-1}) \to h_{i-1}(D^n) = 0,$$

so dass $h_{i-1}(S^{n-1}) \cong h_i(D^n, S^{n-1})$. Das heisst, die äquivalenten Aussagen (5.15),(5.14) und (5.16) für $n-1$ implizieren die entsprechenden Aussagen für n. Dies ist der Induktionsschritt. Da wir eine (und damit alle) Aussagen bereits für $n = 0$ bewiesen hatten, folgt die Behauptung. □

5.17 Korollar. *Es gibt keine Abbildung $D^n \to S^{n-1}$ deren Einschränkung auf den Rand S^{n-1} die Identität ist.*

Beweis. Diesen Beweis haben wir ganz am Anfang, nämlich in Beispiel 1.38, schon gesehen. □

5.18 Korollar. ***(Browderscher Fixpunktsatz)***
Sei $f\colon D^n \to D^n$ eine Abbildung. Dann gibt es einen Punkt $x \in D^n$ mit $f(x) = x$.

Beweis. Nimm an dass $f(x) \neq x$ für jedes $x \in D^n$. Sei E^n die Scheibe vom Radius 2 in $\mathbb{R}^n$. Dann können wir eine neue Abbildung

$$g\colon E^n \to E^n \colon x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } |x| \leq 1 \\ f(x/|x|) \cdot (2 - |x|) & \text{falls } 1 \leq |(|x) \leq 2. \end{cases}$$

Dann hat g keine Fixpunkte, weil $g(E^n) \subset (D^n)$, wo g und f übereinstimmen. Beachte, dass $g(x) = 0$ falls $|x| = 2$. Definiere jetzt

$$r\colon E^n \to 2S^{n-1}\colon x \mapsto 2(x - g(x))/\left|x - g(x)\right|.$$

Diese Abbildung ist stetig, und für $|x| = 2$ gilt $r(x) = 2x/|x| = x$, da dann $g(x) = 0$. Dies ist im Widerspruch zu Korollar 5.17, also muss die ursprüngliche Abbildung f einen Fixpunkt besessen haben. □

5.19 Definition. Sei $f\colon S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung, h_* eine gewöhnliche Homologietheorie mit $h_0(*) \cong \mathbb{Z}$. Definiere den *Grad* $\deg_h(f) \in \mathbb{Z}$ von f durch

$$h_n(f)(a) = \deg_h(f) \cdot a \qquad \forall a \in \tilde{h}_n(S^n).$$

Da $\tilde{h}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, und jeder Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ durch Multiplikation mit einem Element aus $\mathbb{Z}$ gegeben ist, gibt es genau eine solche Zahl $\deg_h(f)$.

Entsprechend kann man auch $\deg_h(f) \in \mathbb{Z}/n$ definieren, falls $h_0(*) \cong \mathbb{Z}/n$.

Wir werden später sehen, dass diese Definition unabhängig von der verwendeten Homologietheorie (mit $h_0(*) \cong \mathbb{Z}$) ist. Wir verwenden daher $\deg(f)$ anstelle von $\deg_h(f)$ für jede gewöhnliche Homologietheorie mit $h_0(*) \cong \mathbb{Z}$.

5.20 Lemma. *Seien $f, g\colon S^n \to S^n$ stetige Abbildungen. Dann gilt*

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g).$$

Beweis. Funktorialität der Homologie. □

5.21 Satz. ***(Satz von der Gebietsinvarianz)*** *Seien $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon U \to V$ ein Homöomorphismus. Dann gilt $n = m$.*

Beweis. Wir benutzen, dass es eine gewöhnliche Homologietheorie mit $h_0(*) = \mathbb{Z}$ gibt (diese muss natürlich noch konstruiert werden!) Wähle $x \in U$.

Dann ist $f\colon (U, U\backslash\{x\}) \to (V, V\backslash\{f(x)\})$ ein Homöomorphismus von Raumpaaren. Insbesondere ist

$$h_n(f)\colon h_n(U, U \setminus \{x\}) \to h_n(V, V \setminus \{f(x)\}) ein Isomorphismus. \tag{5.22}$$

Wähle nun $\epsilon > 0$ so dass $\overline{B}_\epsilon(x) \subset U$. Dann gilt nach Ausschneidung

$$h_k(U, U\backslash\{x\}) \cong h_k(B_\epsilon(x), B_\epsilon(x)\backslash\{x\}) \xrightarrow[\cong]{(*)} h_k(D^n, D^n\backslash\{0\}) \cong h_nk(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}; & k = n \\ 0; & k \neq n \end{cases}$$

Dieselbe Rechnung liefert $h_k(V, V \setminus \{f(x)\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}; & k = m \\ 0; & k \neq m. \end{cases}$, also wegen Gleichung (5.22) $n = m$. □

5.23 Aufgabe. Begründe im Beweis von Satz 5.21, warum der Isomorphismus $(*)$ ein Isomorphismus ist.

5.3 Hurewicz-Homomorphismus

Wir konstruieren nun eine natürliche Transformation von der Fundamentalgruppe zur ersten Homologie.

5.24 Definition. Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Dann definiert

$$Hu_1 \colon \pi_1(X, x_0) \to h_1(X); [f \colon S^1 \to X] \mapsto h_1(f)([S^1])$$

einen Gruppenhomomorphismus, so dass für jedes $f \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{Hu_1} & h_1(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1(f)} & & \downarrow{\scriptstyle h_1(f)} \\ \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{Hu_1} & h_1(Y). \end{array}$$

5.25 Bemerkung. Es muss noch gezeigt werden, dass der Hurewicz-Homomorphismus wohldefiniert ist und dass er tatsächlich natürlich ist. Dies folgt aus der Homotopieinvarianz von h_1 und der Natürlichkeit von h_1.

5.26 Lemma. *Der Hurewicz-Homomorphismus $Hu_1 \colon \pi_1(X, x_0) \to h_1(X)$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Falls $\gamma \colon [0, 1] \to X$ ein Weg von x_0 nach x_1 ist, so gilt $Hu_1 \circ \gamma_* = Hu_1$.*

Beweis. Als Vorbereitung betrachten wir den Raum $S^1 \vee S^1 := S^1 \times \{0\} \amalg S^1 \times \{1\}/((1, 0) \sim (1, 1))$, hier werden also zwei Kreise an einem Punkt zusammengehängt. Man erhält zwei offensichtliche Inklusionen $i_0, i_1 \colon S^1 \to S^1 \vee S^1$. Wir betrachten nun die lange exakte Sequenz des Paares $(S^1 \vee S^1, i_1(S^1))$ und erhalten (da $h_0(i_1)$ injektiv ist)

$$0 \to h_1(S^1) \xrightarrow{h_1(i_1)} h_1(S^1 \vee S^1) \to h_1(S^1 \vee S^1, i_1(S^1)) \to 0$$

Wegen Ausschneidung erhalten wir außerdem einen Isomorphismus

$$h_1(S^1) \to h_1(S^1, \{1\}) \xrightarrow{h_1(i_0)} h_1(S^1 \vee S^1, i_1(S^1)).$$

Insgesamt erhalten wir den Isomorphismus

$$h_1(S^1) \oplus h_1(S^1) \xrightarrow{h_1(i_0) \oplus h_1(i_1)} h_1(S^1 \vee S^1). \tag{5.27}$$

Dieser hat die Inverse $h_1(S^1 \vee S^1) \xrightarrow{h_1(p_1) \oplus h_1(p_0)} h_1(S^1) \oplus h_1(S^1)$, wobei $p_k \colon S^1 \vee S^1 \to S^1$ den gesamten k-ten Summanden auf den Punkt 1 abbildet, und den anderen Summanden identisch.

Betrachte nun die Abbildung

$$c \colon S^1 \to S^1 \vee S^1; \exp(2\pi it) \mapsto \begin{cases} (\exp(2\pi i2t), 0); & 0 \leq t \leq 1/2 \\ (\exp(2\pi it), 1); & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}.$$

Gegeben $\alpha, \beta \colon (S^1, 1) \to (X, x_0)$, so definiert man $\alpha \vee \beta \colon (S^1 \vee S^1, [(1, 0)]) \to (X, x_0)$ auf die offensichtliche Weise. Mit dieser Definition ergibt sich

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [(\alpha \vee \beta) \circ c].$$

Nun gilt (indem man die genaue Kenntniss des Isomorphismus (5.27) und seiner Inversen ausnutzt)

$$h_1(C)[S^1] = (i_0)_*[S^1] + (i_1)_*[S^1]$$
$$h_1(\alpha \vee \beta)((i_0)_*[S^1]) = h_1(\alpha)[S^1];$$
$$h_1(\alpha \vee \beta)(i_1)_*[S^1] = h_1(\beta)[S^1]$$

Zusammengenommen

$$Hu_1([\alpha]) + Hu_1[\beta] = h_1(\alpha)[S^1] + h_1(\beta)[S^1] = \\ h_1(\alpha \vee \beta)((i_0)_*[S^1] + (i_1)_*[S^1]) = h_1(\alpha \vee \beta \circ c)[S^1] = Hu_1([\alpha] \cdot [\beta])$$

Sei $\alpha\colon (S^1, 1) \to (X, x_0)$ eine Schleife. Dann ist jeder Repräsentant von $\gamma_*[\alpha]$ als Abbildung $S^1 \to X$ homotop zu $\alpha\colon S^1 \to X$, somit $Hu_1([\alpha]) = Hu_1(\gamma_*[\alpha])$. □

6 Singuläre Homologie

Wir wollen nun endlich ein Modell für eine (gewöhnliche) Homologietheorie in unserem Sinn konstruieren.

Wir brauchen dazu folgende Grundbegriffe:

6.1 Definition. Der*Standard k-Simplex* σ_k ist die konvexe Hülle der Einheitsvektoren $e_0, \dots, e_k$ in $\mathbb{R}^{k+1}$.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und für jedes $i = 0, \dots, k$ haben wir die Standard-Einbettung $j_i\colon \sigma_{k-1} \hookrightarrow \sigma_k$ welche affin linear ist und so dass $e_j \mapsto \begin{cases} e_j; & j < i \\ e_{j+1}; & j > i. \end{cases}$. Entsprechend gibt es natürlich Einbettungen für jede Einbettung von $\{0, \dots, k-1\} \hookrightarrow \{0, \dots, k\}$.

6.2 Lemma. *Genauer sollte man $j_i^k\colon \sigma_{k-1} \to \sigma_k$ schreiben. Wir haben für $\alpha < \beta$*

$$j_\beta^k \circ j_\alpha^{k-1} = j_{\alpha+1}^k \circ j_\beta^{k-1}.$$

Beweis. Einsetzen der Eckpunkte. □

6.3 Definition. Ein *Kettenkomplex* abelscher Gruppen

$$\to C_k \xrightarrow{c_k} C_{k-1} \xrightarrow{c_{k-1}} X_{k-2} \to$$

ist eine Folge abelscher Gruppen C_k mit Homomorphismen $c_k\colon C_k \to C_{k+1}$, so dass $c_{k-1}c_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Sehr häufig wird $C_k = 0$ für $k < 0$ gelten, dann handelt es sich um einen *positiven Kettenkomplex*. die c_k werden die Randabbildungen des Kettenkomplex genannt.

Die *Homologiegruppen* von (C_*, c_*) sind definiert als

$$H_k(C_*, c_*) := \ker(c_k)/\operatorname{im}(c_{k+1}).$$

Eine *Kettenabbildung* f_* zwischen zwei Kettenkomplexen (C_*, c_*) und (D_*, d_*) besteht aus Homomorphismen $f_k\colon C_k \to D_k$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$, so dass f_* mit den Differentialen verträglich ist, also $d_k \circ f_k = f_{k-1} \circ c_k$.

Diese Bedingung impliziert, dass jede Kettenabbildung Abbildungen auf der Homologie der Kettenkomplexe induziert: $H_k(f)\colon H_k(C_*) \to H_k(D_*)$.

Auf offensichtliche Weise haben wir so die Kategorie der Kettenkomplexe (abelscher Gruppen) definiert. Der Übergang zu den Homologiegruppen liefert Funktoren H_k von dieser Kategorie zur Kategorie der abelschen Gruppen.2

Wir beginnen mit einer historischen Bemerkung/Definition:

6.4 Definition. Sei K ein (geometrischer) Simplizialkomplex wie in Definition 1.9.

Für einen k-Simplex σ aus K ist eine *Orientierung* eine Äquivalenzklasse von affin linearen Homöomorphismen $\sigma_k \to \sigma$. Ein solcher affiner Homöomorphismus durch eine Bijektion von $\{e_0, \dots, e_k\}$ mit den Ecken von σ gegeben.

Zwei heißen *von gleicher Orientierung*, falls sie sich um eine Permutation der Ecken von σ_k unterscheiden, welche positive Signatur hat.

Wir definieren nun folgenden *Kettenkomplex*:

C_k ist die freie abelsche Gruppe erzeugt von den k-Simplizes aus K. Elemente aus C_k sind also endliche (formale) linearkombinationen $\sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma$ mit $\lambda_\sigma \in \mathbb{Z}$ und σ k-Simplex aus K.

Die Randabbildungen $c_k\colon C_k \to C_{k-1}$ sind auf folgende Weise definiert: $c_k(\sigma) := \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_i(\sigma) o(\partial_i(\sigma), \sigma)$. Hierbei ist $\partial_i(\sigma)$ das Bild von j_i unter einem (ein für alle Mal gewählten) Repräsentanten $\sigma_k \to \sigma$ der Orientierung von σ, und $o(\partial_i(\sigma), \sigma) \in \{1, -1\}$ $+1$ oder -1, je nachdem, ob die sich Ergebende Abbildung $\sigma_{k=1} \to \partial_i(\sigma)$ die Orientierung von
$boundary_i(\sigma)$ repräsentiert oder nicht. Die Abbildung wird dann linear auf ganz C_k ausgedehnt. Dabei ist $C_k := \{0\}$ für $k < 0$ und für $k > \dim(K)$.

Dies ist ein Kettenkomplex; seine Homologiegruppen $H_k(K, \mathbb{Z})$ heißen die simplizialen Homologiegruppen von K.

6.5 Satz. *Die Definition aus 6.4 macht wirklich Sinn: c_k ist also wohldefiniert und liefert einen Kettenkomplex.*

Auf diese Weise erhält man eine Homologietheorie auf der Kategorie der geometrischen Simplizialkomplexe; die also Homotopieinvarianz, Ausschneidung, Funktorialität etc. erfüllt (wobei noch eine geeignete Definition für die relativen Homologiegruppen von Raumpaaren ergänzt werden muss).

Wir werden diesen Satz nicht beweisen, auch nicht die Definition wie erforderlich ergänzen. Historisch und für konkrete Berechnungen hat die simpliziale Homologie durchaus ihren Wert. Vom theoretischen Standpunkt ist sie allerdings problematisch: man muss für die Definition viele Wahlen treffen; am schlimmsten ist die Wahl der Triangulierung —-es ist doch recht schwer, unabhängigkeit davon zu zeigen (erst recht Homotopieinvarianz, und auch nicht Funktorialität).

Unser Ansatz ist radikal: wir definieren einen Kettenkomplex, der alle möglichen Triangulierungen auf einmal kodiert (und noch viele "nicht-zugelassene" Triangulierungen).

6.6 Definition. Sei M eine Menge. Die freie abelsche Gruppe erzeugt von M, genannt $F(M)$, ist definiert als

$$F(M) := \{\phi\colon M \to \mathbb{Z} \mid \phi(p) = 0 \text{ für fast alle } p \in M\},$$

mit der Punktweisen Addition (wie üblich bei gruppenwertigen Funktionen). In der Regel schreiben wir $\phi \in F(M)$ als formale Linearkombination $\sum_{p\in M} \lambda_p p$ mit $\lambda_p = \phi(p) \in \mathbb{Z}$ (nur endlich viele λ_p sind ungleich Null).

6.7 Aufgabe. Sei A eine beliebige abelsche Gruppe, M eine Menge, $f\colon M \to A$ eine Abbildung von Mengen. Dann gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $F\colon F(M) \to A$ so dass $F(p) = f(p)$ für jedes $p \in M$ (hierbei steht $p \in F(M)$ für die formale Linearkombination mit $\lambda_p = 1$ und $\lambda_q = 0$ für jedes $q \neq p$).

6.8 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Ein *singulärer k-Simplex* in X ist eine stetige Abbildung $f\colon \sigma_k \to X$ vom Standard k-Simplex nach X.

Wir definieren die k-te singuläre Kettengruppe $C_k^{sing}(X)$ als die freie abelsche Gruppe erzeugt von allen singulären k-Simplizes.

Wir definieren Kettenabbildungen $c_k\colon C_k^{sing}(X) \to C_{k-1}^{sing}(X)$ durch

$$c_k(f\colon \sigma_k \to X) := \sum_{j=\alpha=0}^{k} (-1)^\alpha [f \circ j_\alpha].$$

6.9 Lemma. *Es handelt sich bei den c_k aus Definition 6.8 tatsächlich um Kettenabbildungen.*

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass $c_{k-1} \circ c_k = 0$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Sei $f\colon \sigma_k \to X$ gegeben. Dann ist

$$c_{k-1} \circ c_k(f) = \sum_{\beta=0}^{k-1} \sum_{\alpha=0}^{k} (-1)^\beta (-1)^\alpha [f \circ j_\alpha^k \circ j_\beta^{k-1}].$$

Diese Summe teile man jetzt auf in den Anteil mit $\beta < \alpha$ und mit $\beta \geq \alpha$. Unter Benutzung von Lemma 6.2 rechnet man nach, dass die beiden Beiträge sich gerade wegheben. $\square$

6.10 Definition. Sei $\Phi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Sie induziert eine Kettenabbildung

$$C_*^{sing}(\Phi)\colon C_*^{sing}(X) \to C_*^{sing}(Y); [f\colon \sigma_k \to X] \mapsto [\Phi \circ f\colon \sigma_k \to Y].$$

Beweis. Wir müssen beweisen, dass es sich tatsächlich um eine Kettenabbildung handelt. Es gilt aber

$$c_k(C_k(\Phi)f) = \sum_{\alpha=0}^{k} (-1)^k [\Phi \circ f \circ j_\alpha] = C_{k-1}(\Phi) c_k(f).$$

$\square$

Wir haben damit einen Funktor C_*^{sing} von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Kettenkomplexe abelscher Gruppen definiert. Nach Komposition mit den Homologiefunktoren erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{Z}$ einen Funktor $H_k^{sing}\colon TOP \to ABEL$.

Es ist in der Regel extrem schwierig, direkt aus der Definition die Homologiegruppen von Räumen zu berechnen. Möglich ist dies aber z.B. für den Einpunktraum $X = \{*\}$. Dann gibt es für jedes $k \geq 0$ genau ein singuläres k-Simplex $\sigma_k \to X$, somit ist kanonisch $C_k^{sing}(X) = \mathbb{Z}$. Für die Kettenabbildungen ergibt sich

$$c_k([\sigma_k \to X]) = \sim_{\alpha=0}^{k} (-1)^\alpha [\sigma_{k-1} \to X] = \begin{cases} 0; & k \text{ gerade} \\ 1; & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Somit erhält man den Kettenkomplex

$$\to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0 \to 0,$$

wobei das letzte $\mathbb{Z}$ im Grad 0 sitzt. Damit ergibt sich sofort f"'ur die Homologie

6.11 Satz.

$$H_k^{sing}(\{*\}) = \begin{cases} \{0\}; & k \neq 0 \\ \mathbb{Z}; k = 0. \end{cases}$$

Wir haben damit schon die Hälfte der formalen Forderungen an eine Homologietheorie erfüllt. Es fehlt allerdings noch die Definition für Raumpaare und der Randoperator (in der langen exakten Paarsequenz). Beides werden wir mittels der Definition für einzelne Räume gewinnen, und zwar so, dass die lange exakte Paarsequenz automatisch erfüllt ist. Dazu müssen wir noch etwas mehr homologische Algebra (mit Kettenkomplexen) durchführen.

6.12 Definition. Eine Sequenz $0 \to (C_*, c_*) \xrightarrow{f_*} (D_*, d_*) \xrightarrow{g_*} (E_*, e_*) \to 0$ von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen (wobei 0 für den Kettenkomplex steht, in dem allen Gruppen $\{0\}$ sind) heißt *exakt*, falls $0 \to C_k \to D_k \to E_k \to 0$ exakt für jedes $k \in \mathbb{Z}$.

6.13 Satz. *Sei $0 \to (C_*, c_*) \xrightarrow{f_*} (D_*, d_*) \xrightarrow{g_*} (E_*, e_*) \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann erhält man eine induzierte lange exakte Sequenz von Homologiegruppen mit Randhomomorphismen δ_k*

$$\to H_{k+1}(E_*) \xrightarrow{\delta_{k+1}} H_k(C_*) \xrightarrow{H_k(f_*)} H_k(D_*) \xrightarrow{H_k(g_*)} H_k(E_*) \xrightarrow{\delta_{k-1}} H_{k-1}(C_*) \to$$

Die Konstruktion ist natürlich *für Morphismen zwischen kurzen Exakten Sequenzen von Kettenkomplexen, d.h. ist $0 \to C'_* \xrightarrow{f'_*} D'_* \xrightarrow{g'_*} E'_* \to 0$ eine weitere Kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen und sind $\phi^C_*\colon C_* \to C'_*$, $\phi^d_*\colon D_* \to D'_*$, $\phi^E_*\colon E_* \to E'_*$ Kettenabbildungen die mit f_*, f'_*, g'_*, g'_* verträglich sind (also $f'_k\phi^C_k = \phi^D_k f_k$ und $g'_k\phi^D_k = \phi^E_k g_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), dann gilt für die induzierten Abbildungen auf Homologie*

$$\delta'_k H_k(\phi^E) = H_{k-1}(\phi^C)\delta_k.$$

Beweis. Dies beweist man durch Diagrammjagd, die Details bleiben Übungsaufgabe. Wir wollen aber die Randabbildungen δ_k definieren. Sei dazu $[x] \in H_k(E_*)$. Dann ist $[x]$ repräsentiert durch $x \in E_k$ mit $e_k(x) = 0$. Da g_k surjektiv ist, gibt es $y \in D_k$ mit $g_k(y) = e_k$. Betrachte nun $z := d_k(y) \in D_{k-1}$. Da g_* Kettenabbildung, gilt $g_{k-1}(z) = g_{k-1}(d_k(y)) = e_k(g_k(y)) = e_k(x) = 0$. Da $0 \to C_{k-1} \to D_{k-1} \to E_{k-1} = to0$ exakt, existiert also ein $w \in C_{k-1}$ mit $f_{k-1}(w) = z$. Da f_* Kettenabbildung ist, gilt $f_{k-2}(c_{k-1}(w)) = d_{k-2}(f_{k-1}(w)) = d_{k-2}(z) = d_{k-2}(d_{k-1}(y)) = 0$. Da f_{k-2} injektiv, also auch $c_{k-1}(w) = 0$. Damit repräsentiert w ein Element $[w] \in H_{k-1}(C_*)$. Wir setzen $\delta_k([x]) := [w]$.

Es bleibt noch nachzuprüfen, dass dies (in Homologie, nicht in C_{k-1}) von den Wahlen unabhängig ist, und danach zu zeigen, dass der sich ergebende Sequenz wirklich exakt ist.

Natürlichkeit folgt direkt aus der Konstruktion. □

6.14 Definition. Sei (X, A) ein Paar topologischer Räume. Dann ist auf kanonische Weise $C_*^{sing}(A)$ ein Unterkomplex von $C^*_{sing}(X)$ (d.h. die von der Inklusion induzierte Abbildung ist injektiv und (sowieso) eine Kettenabbildung). Definiere $C_k^{sing}(X, A) := C_*^{sing}(X)/C_*^{sing}(A)$, mit Kettenabbildungen von denen in $C_*^{sing}(X)$ induziert. Damit erhält man (per Konstruktion) eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \to C_*^{sing}(A) \to C_*^{sing}(X) \to C_*^{sing}(X, A) \to 0.$$

Wir definieren die singuläre Homologie des Paares (X, A) als

$$H_k(X, A) := H_k(C_*^{sing}(X, A)).$$

Beachte, dass für $A = \emptyset$ $C_*^{sing}(A) = 0$, so dass $C_*^{sing}(X, \emptyset) = C_*^{sing}(X)$.

6.15 Satz. *Mit dieser Definition erhält man wegen Satz 6.13 automatisch die Randoperatoren und die lange exakte Paarsequenz.*

Wir wollen noch eine einfache, allgemein gültige, Rechnung durchführen.

6.16 Definition. Sei $C_*^i; i \in I$ eine Kollektion von Kettenkomplexen, indiziert durch eine Indexmenge I. Dann definiert man den Kettenkomplex $\bigoplus_{i\in I} C_*^i$ durch $(\bigoplus_{i\in I} C_*^i)_k := \bigoplus_{i\in I} C_k^i$.

6.17 Lemma. *In der Situation von Definition 6.16 gilt*

$$H_k(\bigoplus_{i\in I} C_*^i) \cong \bigoplus_{i\in I} H_k(C_I^*),$$

wobei der Isomorphismus durch die Inklusionen $C_*^i \hookrightarrow \bigoplus C_*^i$ induziert ist.

Beweis. Die Umkehrung ist durch die Projektionen $\bigoplus_{i\in I} C_*^i \to C_*^i$ induziert. $\square$

6.18 Satz. *Sei X ein topologischer Raum mit Wegzusammenhangskomponenten X_α, $\alpha \in I$. Dann erhält man durch die Inklusionen induzierte Isomorphismen*

$$\bigoplus_{\alpha\in I} H_k^{sing}(X_\alpha) \to H_k^{sing}(X).$$

Beweis. Da jedes σ_k zusammenhängend ist, ist jeder singuläre k-simplex von X eine singulärer k-Simplex genau eines X_α (und umgekehrt). Es zerlegt sich dann $C_*^{sing}(X) = \bigoplus_{\alpha\in I} C_*^{sing}(X_\alpha)$. Die Aussage folgt dann aus Lemma 6.17. $\square$

Um zu beweisen, dass singuläre Homologie die Axiome einer gewöhnlichen Homologietheorie erfüllt, müssen wir nun noch zwei Dingen zeigen: Homotopieinvarianz und Ausschneidung. Hierfür muss man leider nun etwas mehr Mühe aufwenden (was aber auch nicht überraschend sein sollte).

6.19 Satz. *Seien $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ zwei homotope stetige Abbildungen, d.h. es existiert $h\colon (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \to (Y, B)$ mit $h_0 = f$ und $h_1 = g$.*

Dann gilt $H_n^{sing}(f) = H_n^{sing}(g)$ als Abbildungen von $H_n(X, A)$ nach $H_n^{sing}(Y, B)$.

Der Beweis dieses Satzes ist etwas umfangreicher. Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir ab sofort $A = B = \emptyset$. Alles verallgemeinert sich aber automatisch auch zu Raumpaaren. Wir zeigen zunächst, dass er (wegen der Funktoreigenschaft) aus dem folgenden Lemma, welches einen Spezialfall darstellt, folgt, und beweisen dann das Lemma.

6.20 Lemma. *Sei X ein topologischer Raum. Seien $i_0\colon X \to X \times [0,1]$ und $i_1\colon X \to X \times [0,1]$ gegeben durch $i_k(x) = (x,k)$ für $k = 0,1$. Dann gilt*

$$H_n^{sing}(i_0) = H_n^{sing}(i_1)\colon H_n^{sing}(X) \to H_n^{sing}(X \times [0,1]) \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{Z}.$$

Wir zeigen jetzt zunächst, dass aus dieser Eigenschaft bereits die Homotopie-Invarianz-Eigenschaft, also der Satz, folgt:

Beachte dazu, dass in der Situation des Satzes $f = h \circ i_0$ und $g = h \circ i_1$. Es folgt

$$\begin{aligned} H_n^{sing}(f) &= H_n^{sing}(h \circ i_0) = H_n^{sing}(h) \circ H_n^{sing}(i_0) \\ H_n^{sing}(g) &= H_n^{sing}(h \circ i_1) = H_n^{sing}(h) \circ H_n^{sing}(i_1). \end{aligned}$$

Aus dem Lemma folgt also bereits, dass diese beiden Ausdrücke übereinstimmen.

Um das Lemma zu beweisen, entwickeln wir (wie jetzt schon üblich) erst wieder etwas homologische Algebra.

6.21 Definition. Seien (C_*, c_*) und (D_*, d_*) zwei Kettenkomplexe, $f_*\colon C_* \to D_*$ und $g_*\colon C_* \to D_*$ zwei Kettenabbildungen. Eine *Kettenhomotopie* zwischen f_* und g_* ist eine Folge von Homomorphismen

$$h_n\colon C_n \to D_{n+1}; \qquad n \in \mathbb{Z}$$

(beachte die Grad-Verschiebung um eins nach oben — eine Kettenhomotopie geht immer in die entgegengesetzte Richtung zu den Differentialen), die folgende Eigenschaft haben:

$$d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ c_n = f_n - g_n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Wenn so eine Kettenhomotopie existiert, heissen f_* und g_* kettenhomotop.

Die Kettenabbildung $f_*\colon C_* \to D_*$ heisst eine *Kettenhomotopieäquivalenz*, falls eine Kettenabbildung $u_*\colon D_* \to C_*$ existiert, die *Kettenhomotopieinverse* von f_*, so dass $u_* \circ f_*\colon C_* \to C_*$ und $f_* \circ u_*\colon D_* \to D_*$ beide kettenhomotop zur Identität sind.

Zwei Kettenkomplexe heissen *Kettenhomotopieäquivalent*, wenn eine Kettenhomotopieäquivalenz zwischen ihnen existiert.

6.22 Lemma. *Seien $f_*, g_*\colon C_* \to D_*$ zwei kettenhomotope Kettenabbildungen. Dann gilt $H_n(f_*) = H_n(g_*)\colon H_n(C_*) \to H_n(D_*)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Sei $h_n\colon C_n \to D_{n+1}$ eine Kettenhomotopie zwischen f_* und g_*. Sei $x \in C_n$ mit $c_n(x) = 0$ (d.h. x repräsentiert das Element $x + \mathrm{im}(c_{n+1}) \in H_n(C_*)$). Aus der Definition einer Kettenhomotopie folgt

$$f_n(x) - g_n(x) = d_{n+1}(h_n(x)) + h_{n-1}(c_n(x)) = d_{n+1}(h_n(x)) \in \mathrm{im}(d_{n+1}).$$

Also repräsentieren $f_n(x)$ und $g_n(x)$ dasselbe Element in $H_n(D_*)$. Da x beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

6.23 Korollar. *Sei $f_*: C_* \to D_*$ eine Kettenhomotopieäquivalenz. Dann ist $H_n(f_*): H_n(C_*) \to H_n(D_*)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $g_*: D_* \to C_*$ eine Kettenhomotopieinverse. Dann sind $f_* \circ g_*$ und $g_* \circ f_*$ kettenhomotop zur Identität. Die Funktoreigenschaft und das Lemma implizieren dass $H_n(f_*)$ und $H_n(g_*)$ inverse Homomorphismen sind. □

Um unser topologisches Lemma zu beweisen, werden wir nun eine Kettenhomotopie zwischen

$$C_*(i_0): C_*(X) \to C_*(X \times [0,1])$$

und zwischen

$$C_*(i_1): C_*(X) \to C_*(X \times [0,1])$$

konstruieren. Die Aufgabe ist also, jedem singulären n-Simplex $\sigma: \Delta_n \to X$ ein singuläres $(n+1)$-Simplex in $X \times [0,1]$ zuzuordnen (oder besser gesagt, eine ganze Kette). Die einzig vernünftige Möglichkeit ist die Multiplikation von allem mit $[0,1]$ (also bilde σ ab auf $\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}$). Dummerweise ist das zweite kein Simplex mehr, da $\Delta_n \times [0,1]$ nicht der Standard $(n+1)$-Simplex ist. Aber wir können geeignet unterteilen:

6.24 Definition. Definiere für $0 \le j \le n$ $\alpha_j^n: \Delta_{n+1} \to \Delta_n \times [0,1]$ durch affin lineare Fortsetzung der Abbildung, wobei

$$\alpha_j^n(e_i) := \begin{cases} (e_i, 0); & i \le j \\ (e_{i-1}, 1); & k > j. \end{cases}$$

Zeichne zwei- und drei-dimensionalen Fall.

Es gilt tatsächlich, dass die Bilder aller α_j^n für festes n eine Triangulierung von $\Delta_n \times [0,1]$ als geometrischen Simplizialkomplex liefern. Wir werden das allerdings nicht benötigen, und daher auch nicht beweisen.

Wir definieren nun die Kettenhomotopie

$$h_n: C_n(X) \to C_{n+1}(X \times [0,1]) \text{ durch } h_n(\phi) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (\phi \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \alpha_j^n$$

falls $\phi: \sigma_n \to X$ ein singulärer n-Simplex, und durch lineare Fortseztung. Wir müssen natürlich noch zeigen, dass dies wirklich eine Kettenhomotopie wie gewünscht ist. Dazu benötigen wir das folgende Lemma, das die Beziehung zwischen der Triangulierung α_j^n von $\sigma_n \times [0,1]$ und den Seitenabbildungen j_k^n herstellt.

6.25 Lemma. *Es gelten für $0 \le i \le n+1$, $0 \le k \le n$ folgende Identitäten von Abbildungen von σ_n nach $\sigma_n \times [0,1]$:*

$$\alpha_k^n \circ j_i^{n+1} = \begin{cases} (j_i^n \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \alpha_{k-1}^{n-1}; & i < k \\ (j_{k-1}^n \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \alpha_k^{n-1}; & i > k+1 \\ \alpha_{k-1}^n \circ j_k^{n+1}; & i = k > 0 \\ \alpha_{k+1}^n \circ j_{k+1}^{n+1}; & i = k+1 \le n \\ i_1; & i = k = 0 \\ i_0; & i = n+1, k = n, \end{cases}$$

wobei $i_k: \sigma_n \to \sigma_n \times [0,1]$ die Inklusionen nach $\sigma_n \times \{k\}$ ist.

Beweis. Elementares Nachrechnen. □

Damit ergibt sich für $\phi\colon \sigma_n \to X$

$$\begin{aligned}
&h_{n-1}(c_n(\phi)) + c_{n+1}(h_n(\phi))\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{k+i}((\phi\circ j_i^n)\times \mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_k^{n-1} +\\
&\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+i}(\phi\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_k^n\circ j_i^{n+1}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{i+k}(\phi\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ(j_i^n\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_k^{n-1}\\
&+\sum_{i<k}(-1)^{i+k}(\phi\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ(j_i^n\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_{k-1}^{n-1}\\
&+\sum_{i>k+1}(-1)^{i+k}(\phi\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ(j_{i-1}^n\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_k^{n-1}\\
&+\sum_{i=1}^{n}(\phi\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_i^n\circ j_i^{n+1}\\
&+\sum_{i=1}^{n+1}(-1)\cdot(\phi\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_{i-1}^n\circ j_i^{n+1}\\
&+(\sigma\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_0^n\circ j_0^{n+1} + (-1)^{n+(n+1)}(\sigma\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_n^n\circ j_{n+1}^{n+1}
\end{aligned}$$

Wobei für die Umformung das obige Lemma verwendet wurde. Man benenne nun im zweiten Summanden k um zu $k+1$, und im dritten i zu $i+1$. Daran sieht man, dass diese beiden Summanden zusammen genau das negative des ersten Summanden ergeben. Das Lemma zeigt ebenfalls, dass der vierte Summand sich gegen den fünften weghebt. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
&h_{n-1}(c_n(\phi)) + c_{n+1}(h_n(\phi))\\
&= (\phi\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_0^n\circ j_0^{n+1} - (\sigma\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ\alpha_n^n\circ F_{n+1}^{n+1}\\
&= \phi\circ i_1 - \phi\circ i_0 = C_n(i_1)(\phi) - C_n(i_0)(\phi).
\end{aligned}$$

Durch lineare Fortsetzung folgt das Homotopie-Lemma, und damit Homotopieinvarianz von singulärer Homologie.

6.26 Korollar. *Seien X und Y zwei homotopieäquivalente topologische Räume. Dann gilt $H_n(X) \cong H_n(Y)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$. Insbesondere, falls ein Raum X zusammenziehbar ist (also homotopieäquivalent zu einem Punkt), gilt $H_n(X) = 0$ für $n \neq 0$, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

6.27 Satz. *Singuläre Homologie erfüllt das starke Ausschneidungsaxiom, d.h. falls $B \subset A \subset X$ mit $\overline{(B)} \subset A^\circ$, dann induziert die Inklusion Isomorphismen*

$$H_k(X - B, A - B) \xrightarrow{\cong} H_k(X, A).$$

Beweis. Wir werden nicht alle Details angeben, sondern nur die Idee des Beweises angeben.

Der relative singuläre Kettenkomplex ist definiert als Quotient $C_k(X,A) := C_k(X)/C_k(A)$, entsprechend $C_k(X-B, A-B) = C_k(X-B)/C_k(A-B)$. Wenn jeder singuläre Simplex entweder ganz in $X-B$ läge oder ganz in B, dann wäre $C_k(X) = C_k(X-B) \oplus C_k(B)$, und die Inklusion $C_k(X-B, A-B) \to C_k(X,A)$ ein Isomorphismus (da der Summand $C_k(B)$ sowieso herausdividiert wird).

Wir werden nun versuchen, bis auf Homologie jede Kette entweder in ganz A oder ganz in $X-B$ zu realisieren, um dann ein ähnliches Argument anzuwenden. Dies geschieht durch Unterteilen.

Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X, so dass $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U^\circ = X$. Ein singulärer Simplex $\sigma\colon \Delta^n \to X$ heisst *$\mathcal{U}$-klein*, falls $\operatorname{im}(\sigma) \subset U$ für ein $U \in \mathcal{U}$. Definiere $C_k^{\mathcal{U}}(X)$ und $C_k^{\mathcal{U}}(X,A)$ wie $C_k(X)$ und $C_k(X,A)$, nur dass jetzt nur $\mathcal{U}$-kleine Simplizes zugelassen werden.

6.28 Lemma. *Die Homologie von $C_*^{\mathcal{U}}(X)$ und $C_*(X)$ ist isomorph, und entsprechend für $C_*^{\mathcal{U}}(X,A)$ und $C_*(X,A)$.*

Beweis. **(Idee)**
Wir können jeden singulären Simplex $\sigma\colon \Delta^k \to X$ so zerlegen,(d.h. in eine homologe Summe von Simplizes verwandeln), dass alle Teilstücke $\mathcal{U}$-klein werden. Es folgt, dass $H_*^{\mathcal{U}}(X) \to H_*(X)$ surjektiv ist. Das Argument gilt genauso für eine Kette, deren Rand a $\mathcal{U}$-klein ist (d.h. $[a]$ liegt im Kern der Abbildung $H_*^{\mathcal{U}}(X) \to H_*(X)$). Also ist a Rand auch einer $\mathcal{U}$-kleinen Kette, d.h. $[a] = 0 \in H_*^{\mathcal{U}}(X)$, also ist $H_*^{\mathcal{U}}(X) \to H_*(X)$ auch injektiv.

Entsprechende Argumente kann man auch im relativen Fall anwenden. □

Für die Ausschneidung setze nun $\mathcal{U} := \{A, X-B\}$. Da $\overline{B} \subset A^\circ$ folgt $A^\circ \cup (X-B)^\circ = A^\circ \cup X - \overline{B} = X$. Wegen Lemma 6.28 haben wir also einen Isomorphismus $H_*^{\mathcal{U}}(X,A) \to H_*(X,A)$. Beachte, dass wir Faktorisierungen

$$C_*(X-B) \to C_*^{\mathcal{U}}(X) \to C_*(X) \text{ und } C_*(A-B) \to C_*^{|mathcalU}(A) \to C_*(A),$$

also auch $C_*(X-B, A-B) \to C_*^{\mathcal{U}}(X,A) \to C_*(X,A)$ erhalten (hier ist $C_*^{\mathcal{U}}(A) = C_*(A)$). Beachte nun, dass $C_*^{\mathcal{U}} = C_*(X-B) + C_*(A)$ (diese Summe ist natürlich nicht direkt). Ausserdem gilt offensichtlich $C_*(A-B) = C_*(A) \cap C_*(X-B)$. Der Isomorphiesatz sagt uns also, dass

$$C_*(X-B)/C_*(A-B) \to C_*^{\mathcal{U}}(X)/C_*(A)$$

schon auf Kettenkomplex-Niveau ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist die induzierte Abbildung auf Homologie ein Isomorphismus.

Also zerlegt sich $H_*(X-B, A-B) \to H_*(X,A)$ also Komposition von zwei Isomorphismen

$$H_*(X-B, A-B) \to H_*^{\mathcal{U}}(X,A) \to H_*(X,A)$$

und ist demzufolge selbst ein Isomorphismus. □

6.29 Satz. *X kontrahierbar, dann $H_*^{sing}(X)$ trivial*

6.30 Definition. Kreuzprodukt $C_p(X) \times C_q(Y) \to C_{p+q}(X \times Y)$

6.31 Satz. *Sei $h_0(*) = \mathbb{Z}$. Dann ist für jeden zusammenhängenden Raum X der Hurewicz-Homomorphismus $Hu_1 \colon \pi_1(X, x) \to H_1(X)$ surjektiv.*

Besser noch: ist $\Psi \colon \pi_1(X, x) \to A$ ein Gruppenhomomorphismus, wobei A eine abelsche Gruppe ist, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\psi \colon h_1(X) \to A$ so dass $\Psi = \psi \circ Hu_1$. $H_1(X)$ ist also der „größte" abelsche Quotient von $\pi_1(X, x)$ und heißt die Abelsch-machung *von $\pi_1(X, x)$. Wir definieren fÜr eine Gruppe G die Untergruppe $[G, G]$ als die von allen Kommutatoren $[g, h] := g^{-1}h^{-1}gh$, $g, h \in G$ erzeugte Untergruppe (es handelt sich dabei um einen Normalteiler. Dann ist die abelschmachung von G gegeben durch $G/[G, G]$.*

Hierbei ist H_* die singuläre Homologie.

Beweis. Zum Beweis geben wir die inverse Abbildung an.

Sei $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i[\gamma_i \colon \sigma_1 \to X]$ ein Repräsentant eines Elements von $H_1^{sing}(X)$. Indem wir mehr Summanden notieren, erreichen wir $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ für alle i. Ersetzt man γ_i durch $\overline{\gamma}_i := \gamma_i \circ v$, wobei $v \colon \sigma_1 \to \sigma_1$ durch vertauschen der beiden Eckpunkte induziert wird, kann man $\epsilon_i = 1$ für alle i erreichen, ohne die Homologieklasse abzuändern. Hierbei benutzt man, dass jede konstante Abbildung $\sigma_1 \to X$ homolog zu Null ist, und wir benutzen die Abildung $\sigma_2 \xrightarrow{d1} \sigma_1 \to X$ mit $d_1(e_0) = d_1(e_2) = e_0$, $d_1(e_1) = e_1$, deren Rand gerade $\gamma_i - \overline{\gamma}_i + const$ ist.

Sei also nun $\epsilon_i = 1$ für jedes i.

Es gilt $\delta(\sum_i[\gamma_i] = 0$, d.h. für jedes i existiert ein j_i so dass der Endpunkt von γ_i der Anfangspunkt von γ_{j_i} ist. Auf diese Weise erhalten wir eine zykel-Zerlegung von $\sum_i \gamma_i$ in lauter geschlossene Zykel. Jedem dieser Zykel kann man auf offensichtliche Weise eine Homotopieklasse von geschlossenen Wegen zuordnen, allerdings mit nicht eindeutigem Anfangspunkt. Wählt man vom Anfangspunkt jeder dieser Schleifen einen Weg zu x, kann man durch Konjugieren ein Element in $\pi_1(X, x)$ definieren.

Schwierigster Teil des Satzes ist nun, zu beweisen dass dieses Element, aufgefaßt als Element in der Abelschmachung $\pi_1(X, x)/[\pi_1(X, x), \pi_1(X, x)]$ wohldefiniert ist. Aus der Konstruktion folgt dann fast sofort, dass die konstruierte Abbildung invers zum Hurewicz-Homomorphismus (auf $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$) ist.

Konjugation ist die Identität auf $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$. Daraus folgt, das die Wahl des Wegs zu x und die Wahl des Basispunkts auf der Schleife das Element in $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ nicht beeinflussen. Auch die Reihenfolge spielt keine Rolle, da $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ abelsch ist.

Wir zeigen zunächst, dass wir eine wohldefinierte Abbildung auf $\ker(c_1)$ konstruiert haben. Dazu ist zu beobachten, dass wir nur noch Unabhängigkeit von der Wahl der Schleifen (falls es mehrere Möglichkeiten gibt) beweisen müssen. Wann passiert dies: wenn für ein i mehr als eine Möglichkeit für j_i offensteht. Da alle Wege sich zu geschlossenen Schleifen zusammensetzen, erhält man für alle bis auf eine Wahl von j_i eine "Unterschleife", welche zurück zum Endpunkt von γ_i führt.

□

7 CW-Komplexe und zelluläre Homologie

In diesem Abschnitt werden CW-Komplexe eingeführt und untersucht. Es handelt sich, ähnlich wie bei de geometrischen Simplizialkomplexen und Polyedern aus Definition 1.9 um Räume, die mit einfachen Regeln aus Bausteinen (den sogenannten Zellen) aufgebaut sind. Allerdings sind CW-Komplexe viel allgemeiner (es können mehr Räume konstruiert werden) und viel flexibler (man kann leichter Operationen (Produkt,...) durchführen, ohne die Kategorie zu verlassen) und ökonomischer (man kommt mit viel weniger Zellen aus) als Simplizialkomplexe, so dass man mit Ihnen besser arbeiten kann. Dafür ist die Definition zunächst einmal etwas abstrakter.

7.1 Definition. Ein *CW-Komplex* ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer sogenannten *Filtrierung* (d.h. einer aufsteigenden Folge von Teilmengen) $\emptyset = X^{(-1)} \subset X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \cdots$, so dass $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X^{(i)} = X$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) X hat die *Limestopologie* der Vereinigungskette, d.h. $U \subset X$ ist offen genau wenn $U \cap X^{(i)} \subset X^{(i)}$ offen ist für alle $i \in \mathbb{N}$.

(2) Für jedes $n \geq 0$ geht X_n aus X_{n-1} durch Ankleben von n-Zellen hervor, d.h. es existiert ein Homöomorphismus

$$X^n \approx X^{(n-1)} \cup_{f_n} \amalg_{i \in I_n} D_i^n.$$

Hierbei ist I_n eine beliebige Indexmenge, jedes $D_i^n \approx D^n$, und $f = \amalg_{i \in I_n} q_i^n \colon \amalg_{i \in I_n} S^{n-1} \to X^{n-1}$ eine beliebige stetige Abbildung. D.h. jede Scheibe D^n wird entlang ihres Rands mit einer völlig beliebigen stetigen Abbildung and $X^{(n-1)}$ angeklebt.

Der Übersicht halber schreibt man dies oft als *pushout-Diagramm* auf folgende Weise:

$$\begin{tikzcd} \amalg_{i \in I_n} S^{n-1} \arrow[r, "\prod_{i \in I_n} q_i^n"] \arrow[d, "incl"] & X^{n-1} \arrow[d, "incl"] \\ \amalg_{i \in I_n} D^n \arrow[r, "\prod_{i \in I_n} Q_i^n"] & X^{(n)} \end{tikzcd} \tag{7.2}$$

Wir werden etwas später den Begriff des pushouts axiomatisch einführen und untersuchen.

7.3 Bemerkung. Die Homöomorphismen sind nicht teil der Struktur, wohl aber die Filtrierung.

7.4 Definition. Sei A ein topologischer Raum. Ein *relativer CW-Komplex* (X, A) wird genauso definiert wie ein (absoluter) CW-Komplex, nur setzen wir $X_{-1} = A$.

7.5 Beispiel. $X^{(0)} = \cdots = X^{(n-1)} = \{*\}$, $X^{(n)} = S^n$ gibt S^n die Struktur eines CW-Komplexes mit nur zwei Zellen, einer in Dimension Null und einer in Dimension n.

$X^{(0)} = S^0$, $X^{(1)} = S^1, \ldots, X^{(n)} = S^n$, mit $I_k = \{1, 2\}$, und $q_{1,2}^k = \mathrm{id} \colon S^k \to S^k$ gibt S^n ebenfalls die Struktur eines CW-Komplexes, allerdings mit je zwei Zellen in jeder Dimension ($\leq n$). Beachte, dass diese CW-Komplexe *nicht* isomorph sind, da sie verschiedene Filtrierungen haben.

7.6 Aufgabe. Finde mindestens eine CW-Struktur auf D^n und auf $\mathbb{R}^n$.

7.7 Definition. Der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ ist definiert als $\mathbb{C}P^n := S^{2n+1}/\sim$, wobei für $v, w \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^n$ definiert wird: $v \sim w \iff \exists z \in \mathbb{C}$ so dass $v = zw$. Wir versehen $\mathbb{C}P^n$ mit der Quotiententopologie.

7.8 Aufgabe. Zeige, dass $\mathbb{C}P^n$ eine CW-Struktur mit Filtrierung $X^0 \subset X^2 \subset \cdots X^{2n}$ mit $X^{2k} = \mathbb{C}P^k$ besitzt, mit genau einer Zelle der Dimension $2k$ für jedes $k \leq n$.

7.9 Definition. (1) Die q_i^n heissen *anheftenden Abbildungen.*

(2) Die Wegekomponenten von $X^{(n)} - X^{(n-1)}$ heissen die *offenen n-Zellen* von X (jede ist homöomorph zu $(D^n)^\circ$). Beachte, dass dies im allgemeinen *keine* offenen Teilmengen von X sind.

(3) Der Abschluss jeder offenen Zelle in X ist eine *abgschlossenen Zelle.*

(4) Der Rand einer Zelle ist das Komplement einer offenen Zelle in ihrem Abschluss.

(5) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ von CW-Komplexen heisst zellulär, falls

$$f(X_n) \subset Y_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beachte, dass dies von der CW-Struktur abhängt.

7.1 Pushouts von Räumen

7.10 Definition. Seien $f_1\colon X_0 \to X_1$ und $f_2\colon X_0 \to X_2$ stetige Abbildungen. Ein *pushout* von f_0 und f_1 besteht aus einem topologischen Raum X und stetigen Abbildungen $F_1\colon X_1 \to X$, $F_2\colon X_2 \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $F_1 \circ f_1 = F_2 \circ f_2$

(2) Zu jedem topologischen Raum Z und Abbildungen $g_1\colon X_1 \to Z$, $g_2\colon X_2 \to Z$ mit $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$ existiert genau eine Abbildung $g\colon X \to Z$ mit $g \circ F_1 = g_1$, $g \circ F_2 = g_2$.

7.11 Satz. *Pushouts existieren und sind eindeutig.*

Beweis. Eindeutigkeit folgt sofort aus der universellen Eigenschaft. Für die Existenz definiere $X := X_1 \amalg X_2/\sim$, wobei die Äquivalenzrelation erzeugt wird durch $f_1(a) \sim f_2(a)$ für alle $a \in X_0$. □

7.12 Bemerkung. Wir werden meist an der Situation interessiert sein, bei der f_1 eine Einbettung ist (oder die Inklusion eines Unterraums). Dann klebt man den Raum X_1 entlang des Unterraums X_0 mittels f_2 an den Raum X_2.

7.13 Beispiel. Das pushout

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \{*\} \\ \big\downarrow{\scriptstyle i_0} & & \big\downarrow \\ X \times [0,1] & \longrightarrow & CX \end{array}$$

beschreibt den Kegel über X. Ersetzt man die Abbildung $X \to \{*\}$ durch eine beliebige Abbildung $f\colon X \to Y$, erhält man als pushout den *Abbildungszylinder* von f.

7.14 Beispiel. Bei einem CW-Komplex erhält man $X^{(n)}$ aus $X^{(n-1)}$ durch folgendes pushout:

$$\begin{array}{ccc} \amalg_{i\in I_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\amalg q_i^n} & X_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \amalg_{i\in I_n} D^n & \xrightarrow{\amalg Q_i^n} & X_n. \end{array}$$

Die hier auftretenden Q_i^n heissen die charakteristischen Abbildungen. Sie entsprechen dem in unserer Definition zu wählenden Homöomorphismus.

7.15 Definition. Sei X ein CW-Komplex. Ein *Unterkomplex* von X besteht aus einem Unterraum Y derart, dass Y die Vereinigung einer Menge offener Zellen von X ist, deren Ränder auch alle in Y liegen.

7.16 Lemma. *Falls Y ein Unterkomplex von X ist, erhält Y selbst eine CW-Struktur durch $Y^{(m)} := X^{(m)} \cap Y$.*

7.17 Definition. Wir definieren die Kategorie CW^2, deren Objekte *Paare* von CW-Komplexen (X, A) sind (also ein CW-Komplex X mit Unterkomplex A, $A = \emptyset$ ist erlaubt). Die Morphismen $Mor((X, A), (Y, B))$ sind die zellulären Abbildungen $X \to Y$, die A auf B abbilden.

7.18 Definition. Eine Homologietheorie h_* auf CW^2 besteht aus einer Sequenz von Funktoren $h_n\colon CW^2 \to ABEL$ und natürlichen Randabbildungen $\delta_n\colon h_n(X, A) \to h_{n-1}(A, \emptyset)$, so dass folgende Axiome erfüllt sind:

(1) Homotopieinvarianz

(2) lange exakte Sequenz von Paaren

(3) Ausschneidung

(4) Summenaxiom

Die Homologietheorie heisst gewöhnlich, falls $h_n(*) = 0$ für $n \neq 0$.

7.19 Definition. Sei (X, A) ein Raumpaar. Eine Homotopie $H\colon X \times [0, 1] \to Y$ heisst *Homotopie relativ A*, falls $H(a, t) = H(a, 0)$ für alle $a \in A$ und alle $t \in [0, 1]$. Die Abbildungen H_0 und H_1 von X nach Y heissen dann homotop relativ A.

7.20 Satz. *Sei $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine stetige Abbildung zwischen CW-Paaren, deren Einschränkung auf A zellulär ist. Dann ist f homotop relativ A zu einer zellulären Abbildung.*

Beweis. Wir geben nur die Beweisidee. X entsteht durch ankleben von Zellen. Mittels Induktion kann man sich daher (mehr oder weniger) auf den Fall beschränken, dass $X = D^n$, und dass $f(S^{n-1}) \subset Y^{(n-1)}$. Ausserdem kann man, da das Bild von D^n in einem endlichen Teilkomplex von Y liegt, annehmen, dass $Y = Y' \cup_\phi D^m$, wobei $\phi\colon S^{m-1} \to Y'$ eine anklebende Abbildung und $m > n$, und muss dann f zu einer Abbildung f' homotopieren (relativ A), deren Bild in Y' enthalten ist. Damit kann man Schritt für Schritt alle Zellen der Dimension $m > n$ vermeiden, und endet nach endlich vielen Schritten in $Y^{(n)}$.

Sei $U = Y - Y' \approx \mathbb{R}^m$. Setze $M := f^{-1}(U)$. Dies ist eine offene Teilmenge von $(D^n)^\circ$, also ebenfalls eine glatte Mannigfaltigkeit. Sei $\emptyset \neq E \subset U$ mit $\overline{E}$ kompakt. Dann ist $V := f^{-1}(U - E)$ eine abgeschlossene Teilmenge von M. Eine starke Version des Satzes über glatte Approximierbarkeit von stetigen Funktionen impliziert, dass es eine zu $f|_M$ relativ V homotope Abbildung f' gibt, die auf $M - V$ glatt ist.

Die Homotopie und f' setzen sich (mittels $f|_{D^n - f^{-1}(E)}$) auf D^n fort, man erhält so eine zu f (relativ S^{n-1}) homotope Abbildung (da $D^n - f^{-1}(\overline{E})$ (wegen der Kompaktheit von $\overline{E}$) eine offene Umgebung der im Definitionsbereich noch fehlenden Teilmenge $D^n - f^{-1}(U)$ ist).

Die glatte Abbildung $f'|_M$ hat einen regulären Wert $p \in U$. Aus Dimensionsgründen ist p nicht im Bild, ist sie also nicht surjektiv. Damit ist p auch nicht im Bild der ganzen Abbildung f' (da das Urbild von U gerade aus M besteht). Aber $Y - \{p\}$ kann man auf Y' zusammenziehen (d.h. es gibt eine Homotopieäquivalenz, wobei Y' fest bleibt). Komposition mit dieser Kontraktion liefert eine Homotopie von f' zu f'' mit $im(f'') \subset Y'$. Da $f(S^{n-1}) \subset Y'$, welches bei der Kontraktion fest bleibt, ist dies eine Homotopie relativ S^{n-1}.

Zusammensetzen liefert die gewünschte Homotopie von f zu f'' relativ S^{n-1}. $\square$

7.21 Lemma. *Sei (X, A) ein Paar von CW-Komplexen, mit Filtrierung X'_k von X. Dann ist X in kanonischer Weise ein CW-Komplex relativ A, mit $X_k := A \cup X'_k$.*

Beweis. Man erhält X_k aus X_{k-1} durch Ankleben der k-dimensionalen Zellen von X'_k, welche nicht bereits in A enthalten sind. Dies funktioniert, da A selbst eine Vereinigung von Zellen von X ist. $\square$

7.22 Lemma. *Sei X ein CW-Komplex mit Filtrierung $X^{(n)}$. Dann wird $X \times [0,1]$ ein CW-Komplex mit Filtrierung $(X \times [0,1])^{(n)} = X^{(n)} \times \{0,1\} \cup X^{(n-1)} \times [0,1]$. $X \times \{0,1\}$ ist ein Unterkomplex von $X \times [0,1]$.*

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

7.23 Korollar. *Seien $f, g\colon X \to Y$ zelluläre Abbildungen welche homotop sind. Dann gibt es eine zelluläre Homotopie $h\colon X \times [0,1] \to Y$ mit $h_0 = f$ und $h_1 = g$.*

7.24 Satz. *Sei h_* eine gewöhnliche Homologie mit $h_0(\{*\}) = \mathbb{Z}$. Sei $f\colon S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung. Es gibt kanonischen Isomorphismus $\tilde{h}^n(S^n) = \mathbb{Z}$, und wir definierten den Abbildungsgrad $\deg_h(f) \in \mathbb{Z}$ durch $h_n(f)(1) = \deg_h(f)$.*

Dann gilt $\deg_h(f) = \deg_{H^{sing}}(f)$, d.h. der Abbildungsgrad hängt nicht von der gewählten gewöhnlichen Homologietheorie ab.

Falls $f\colon S^n \to S^n$ glatt ist, kann man den Abbildungsgrad auf folgende Weise berechnen: wähle einen Punkt $x \in S^n$, so dass für jedes $y \in f^{-1}(x)$ gilt, dass $T_y f\colon T_y S^n \to T_x S^n$ Isomorphismus ist (solch ein x existiert nach dem Satz von Sard, falls f nicht surjektiv ist, kann man x im Komplement des Bildes wählen). Wähle für jedes $y \in f^{-1}(x)$ ein $A \in SO(n+1)$ mit $Ax = y$ und setze $\deg_y(f) := \mathrm{sgn}(\det(A \circ T_y f\colon T_y S^n \to T_y S^n)$.

Dann gilt

$$\deg_h(f) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} \deg_y(f). \tag{7.25}$$

Beweis. Wir beobachten zunächst, dass der Grad wegen Homotopieinvarianz von Homologie nur vom Homotopietyp von f abhängt. Nun gilt

7.26 Satz. *Seien M, N glatte Manngifaltigkeiten. Jede stetige Abbildung $f\colon M \to N$ ist homotop zu einer glatten Abbildung.*

Damit kann man f durch eine glatte Abbildung ersetzen. Da die rechte Seite von Gleichung (7.25) nicht von der Homologietheorie abhängt, tut es die linke Seite auch nicht. Es genügt also, Gleichung (7.25) zu beweisen.

Aus Zeitgründen geben wir nur eine Skizze des Beweises. Zunächst führen wir auf den Fall zurück, dass das Urbild von q nur aus einem Punkt besteht. Wähle eine genügend kleine Umgebung D um q, die diffeomorph zu einer (abgeschlossenen) Scheibe ist. Da q regulärer Wert ist, impliziert der Satz von der inversen Abbildung, dass das Urbild dieser Scheibe (wenn sie klein genug ist) aus einer disjunkten Vereinigung von Scheiben D_p um $p \in f^{-1}(q)$ besteht. Die Abbildung $g_D\colon S^n \to D/(\partial(D)\tilde{*}) \approx S^n$, die auf dem Inneren von D die Identität ist, und jeden Punkt ausserhalb auf den Punkt $*$ abbildet, ist homotop zur Identität (indem man die Scheibe D immer mehr vergrössert).

Wir können also f durch $g_D \circ f$ ersetzen, die auf kleinen Scheiben D_p um jeden Punkt $p \in f^{-1}(q)$ ein Diffeomorphismus auf Bild ist, und das Komplement auf einen Punkt abbildet. Solch eine Abbildung faktorisiert nun als

$$f\colon S^n \to S^n \vee \cdots \vee S^n \to S^n,$$

wobei die erste Abbildung jede offene Scheibe D_p° mittels der Einschränkung von f auf jeweils verschiedene Kopien von D und dann $D/\partial D = S^n$ abbildet, und das Komplement aller Scheiben auf den gemeinsamen Verklebepunkt. Die zweite Abbildung bildet jede einzelne Kopien von S^n identisch auf S^n ab (faltet also die 1-Punkt-Vereinigung zusammen).

Man sieht leicht, dass

$$\tilde{h}_n(S^n \vee \cdots \vee S^n) \cong \tilde{h}_n(S^n) \oplus \cdots \oplus \tilde{h}_n(S^n),$$

wobei die Abbildung durch Projektion von der Projektion auf die (bzw. in umgekehrter Richtung Inklusion der) einzelnen Summanden gegeben ist.

Es folgt, dass der Grad von f die Summe der Grade der einzelnen Abbildungen auf die einzelnen Summanden der 1-Punkt-Vereinigung ist, und für jene besteht das Urbild des q entsprechenden Punktes aus jeweils nur einem Punkt.

Mittels einer weiteren Homotopie (wobei wieder alles ausserhalb einer kleinen Umgebung von p auf einen (gegenüberliegenden) Punkt gedrückt wird), kann man erreichen, dass f "linear" wird. Damit ist die Berechnung des Grades dann direkt möglich. □

7.2 Zelluläre Homologie

7.27 Definition. Sei (X, A) ein Paar von CW-Komplexen und h_n eine gewöhnliche Homologietheorie. Fasse X auf als CW-Komplex relativ A, mit Filtrierung $X_{-1} = A, X_0, \dots,$ unter Verwendung von Lemma 7.21. Wir definieren den zellulären Kettenkomplex

$$C_n^{cell}(X, A) := h_n(X_n, X_{n-1}),$$

mit Differential gegeben durch die Komposition

$$c_n^{cell} \colon h_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{\delta_n} h_{n-1}(X_{n-1}) \xrightarrow{h_{n-1}(i)} h_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}).$$

Zum Beweis, dass $c_n \circ c_{n+1} = 0$ beachte, dass

$$c_n \circ c_{n+1} = h_{n-1}(i) \circ \delta_n \circ h_n(i) \circ \delta_{n+1}.$$

Nun ist aber $\delta_n \circ h_n(i)$ die Komposition von zwei aufeinanderfolgenden Homomorphismen der langen exakten Sequenz des Paares (X_n, X_{n-1}) und damit Null.

Die *zelluläre Homologie* $h_n^{cell}(X, A)$ ist die Homologie von $C_*^{cell}(X, A)$.

7.28 Lemma. *Jede zelluläre Abbildung $f \colon (X, A) \to (Y, B)$ zwischen zwei CW-Paaren induziert eine Kettenabbildung zwischen den zellulären Kettenkomplexen und damit eine Abbildung auf der zellulären Homologie.*

Beweis. Folgt sofort aus der Natürlichkeit der Paarsequenz. □

Wir könnten jetzt beweisen, dass zelluläre Homologie eine Homologietheorie auf der Kategorie der CW-Komplexe ist. Statt dessen werden wir sie direkt berechnen, und zeigen, dass sie mit der zugrundeliegenden Homologietheorie h_* übereinstimmt (es folgt natürlich insbesondere, dass es sich um eine Homologietheorie handelt). Man beachte, dass dieses Resultat eigentlich entgegengesetzt aufgefasst werden sollte: man berechnet h_* für CW-Komplexe!

7.29 Lemma. *Sei (X, A) ein Paar von CW-Komplexen mit Gerüsten des Komplexes relativ A gegeben durch $A = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots$. Wähle feste pushouts für den Übergang von X_{n-1} zu X_n $(n \geq 0)$. Dann gilt*

(1) $h_k(X_n, X_{n-1}) = 0$ falls $k \neq n$.

(2) Für jedes n existiert ein eindeutiger Isomorphismus

$$\alpha_n \colon \oplus_{i \in I_n} h_0(*) \xrightarrow{\cong} C_n^{cell}(X, A) = h_n(X_n, X_{n-1}).$$

(3) Wir haben folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{i \in I_n} h_0(*) & \xrightarrow{\alpha_n} & C_n^{cell}(X, A) \\ \big\downarrow{\scriptstyle (a_{ij})} & & \big\downarrow{\scriptstyle c_n} \\ \oplus_{j \in I_{n-1}} h_0(*) & \xrightarrow[\alpha_{n-1}]{} & C_{n-1}^{cell}(X, A). \end{array}$$

Es bleibt, die Matrix $(a_{i,j})$ zu beschreiben. Sei dazu $q_i^n \colon S^{n-1} \to X_{n-1}$ die anklebende Abbildung der n-Zelle e_i, und $Q_j^{n-1} \colon D^{n-1} \to X_{n-1}$ die charakteristische Abbildung der $n-1$-Zelle j. Wir haben dann einen Homöomorphismus $\tilde{Q}_j^{n-1} \colon D^{n-1}/S^{n-2} \to X_{n-1}/(X_{n-1} - (e_j^{n-1})^\circ)$. Andererseits gibt es einen kanonischen Homöomorphismus $D^{n-1}/S^{n-2} \approx S^{n-1}$. Insgesamt ergibt sich das Diagramm

$$\tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\tilde{h}(q_i^n)} \tilde{h}_{n-1}(X_{n-1}) \to h_{n-1}(X_{n-1}/X_{n-1} - (e_j^{n-1})^\circ)$$
$$\xrightarrow{h(\tilde{Q}_j^{n-1})^{-1}} \tilde{h}_{n-1}(D^{n-1}/S^{n-2}) \to \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}).g \qquad (7.30)$$

Hier benutzen wir die Konvention $D^0/S^{-1} = S^0$ (d.h. auch die leere Menge wird zu einem (zusätzlichen) Punkt zusammengeschlagen. Dieser zusätzliche Punkt wird in $X_0/(X_0-e_j^0)$ auf den Punkt $[X_0-e_j^0]$ abgebildet.)

Wir wissen bereits, dass $\tilde h_{n-1}(S^{n-1}) \cong h_0(*)$ mit einem kanonischen Isomorphismus. Obige Verknüpfung ist genau die Abbildung $a_{i,j}\colon h_0(*) \to h_0(*)$ vom i-ten zum j-ten Summanden.

Beweis. Ausschneidung von (kleineren) offenen Zellen und Verdickung liefert Isomorphismus

$$h_k(\amalg_{i\in I_n}(Q_i,q_i))\colon h_k(\amalg_{i\in I_n}(D^n,S^{n-1})) \to h_k(X_n,X_{n-1}).$$

Das Summen-Axiom impliziert $\oplus_{i\in I_n} h_k(D^n,S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} h_k(\amalg_{i\in I_n}(D^n,S^{n-1}))$. Den kanonischen Isomorphismus $h_0(*) \to \tilde h_n(D^n,S^{n-1})$ haben wir bereits konstruiert, ausserdem haben wir gesehen, dass $\tilde h_k(D^n,S^{n-1}) = 0$ für $k \neq n$. Daraus folgen die ersten beiden Aussagen.

Für die dritte Aussage betrachte folgendes Diagramm ($n \geq 1$):

$$\begin{tikzcd}
h_0(*) \arrow[d, "\cong"] & & \\
\tilde h_n(D^n,S^{n-1}) \arrow[r, "h(Q_i^n,q_i^n)"'] \arrow[d, "\cong"] & \tilde h_n(X_n,X_{n-1}) \arrow[d] & = C_n^{cell}(X,A) \\
\tilde h_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "h(q_i^n)"'] & \tilde h_{n-1}(X_{n-1}) \arrow[d] & \\
\oplus_{j\in I_{n-1}} h_{n-1}(D^{n-1},S^{n-2}) \arrow[r, "\cong", "\oplus h(Q_j,q_j)"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_j"] & h_{n-1}(X_{n-1},X_{n-2}) \arrow[d] & = C_{n-1}^{cell}(X,A) \\
h_{n-1}(D^{n-1},S^{n-2}) \arrow[r, "h(Q_j,q_j)"'] \arrow[d, "\cong"] & h_{n-1}(X_{n-1},X_{n-1}-(e_j^{n-1})^\circ) \arrow[d] & \\
\tilde h_{n-1}(D^{n-1}/S^{n-2}) \arrow[r, "h(\tilde Q_j^{n-1})"'] \arrow[d, "\cong"] & \tilde h_{n-1}(X_{n-1}/(X_{n-1}-(e_j^{n-1})^\circ)) & \\
\tilde h_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[d, "\cong"] & & \\
h_0(*). & &
\end{tikzcd}$$

Die angegebene Abbildung $C_n^{cell}(X,A) \to C_{n-1}^{cell}(X,A)$ ist gerade die Randabbildung ist. Die Abbildung $\tilde h_n(Q_i,q_i)$ ist gerade die Inklusion der i-ten Komponente in der Zerlegung von C_n^{cell} als direkte Summe, entsprechend für $\tilde h_{n-1}(Q_j,q_j)$ und C_{n-1}^{cell}. Die gesuchte "Komponente" a_{ij} der Randabbildung ergibt sich also als langer Pfad durch das Diagramm von links oben über die Mitte rechts nach links unten (geeignete Isomorphismen sind zu invertieren). Wegen

Kommutativität ergibt sich, dass diese Abbildung mit der behaupteten Abbildung $h_{n-1}(S^{n-1}) \to h_{n-1}(S^{n-1})$ übereinstimmt. Damit folgt auch die letzte Aussage. □

7.31 Korollar. *Seien h_* und k_* gewöhnliche Homologietheorien und $\phi\colon h_0(*) \to k_0(*)$ ein Isomorphismus. Dann induziert ϕ einen natürlichen (bezüglich zellulärer Abbildungen) Isomorphismus der mittel h_* und k_* gebildeten zellulären Kettenkomplexe, und damit auch der zellulären Homologie.*

Beweis. Sei (X, A) ein CW-Paar. Nach Wahl von pushouts erhalten wir gemäss Lemma 7.29 folgende Isomorphismen von Kettenkomplexen:

$$C_n^h(X,A) \xleftarrow{\alpha_n^n} \oplus_{i\in I_n} h_0(*) \xrightarrow{\oplus\phi} \oplus_{i\in I_n} k_0(*) \xrightarrow{\alpha_n^k} C_n^k(X,A).$$

Beachte, dass es sich hierbei wirklich um Kettenabbildungen handelt, da die Differentiale durch Abbildungsgrade berechnet werden, und wegen Satz 7.24 der Abbildungsgrad unabhängig von der gewöhnlichen Homologietheorie ist.

Die Änderung der pushouts liefert neue Isomorphismen $\beta_n^h\colon C_n^h(X,A) \to \oplus_{i\in I_n} h_0(*)$. Allerdings gilt $\alpha_n^h = \beta_n^h \circ \Phi^h$, wobei $\Phi^h\colon \oplus_{i\in I_n} h_0(*) \to \oplus_{i\in I_n} h_0(*)$ durch eine Diagonalmatrix gegeben ist, auf deren Diagonale Abbildungsgrade von Homöomorphismen von Abbildung $S^n \to S^n$ stehen (dies folgt sofort aus dem Beweis von Lemma 7.29). Es folgt, dass $\Phi^h = \Phi^k = \Phi$. Da andererseits die Diagonalabbildung $\oplus_{i\in I}\phi$ mit Φ vertauscht, haben wir also das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C_n^h(X,A) \arrow[r, "\alpha_n^n"] \arrow[d, "="] & \oplus_{i\in I_n} h_0(*) \arrow[r, "\oplus\phi"] \arrow[d, "\Phi"] & \oplus_{i\in I_n} k_0(*) \arrow[r, "\alpha_n^k"] \arrow[d, "\Phi"] & C_n^k(X,A) \arrow[d, "="] \\
C_n^h(X,A) \arrow[r, "\alpha_n^n"] & \oplus_{i\in I_n} h_0(*) \arrow[r, "\oplus\phi"] & \oplus_{i\in I_n} k_0(*) \arrow[r, "\alpha_n^k"] & C_n^k(X,A),
\end{tikzcd}$$

d.h. der Isomorphismus hängt gar nicht von der Wahl der pushouts ab. Es folgt nun leicht, dass er natürlich ist. □

Im folgenden werden wir eine Verallgemeinerung der Paarsequenz auf geschachtelte Tripel von Räumen benötigen.

7.32 Satz. *Sei h_* eine Homologietheorie und $A \subset X \subset Z$. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz, die sogenannte Tripelsequenz*

$$\to h_{n+1}(Z,X) \xrightarrow{\delta_{n+1}} h_n(X,A) \to h_n(Z,A) \to h_n(Z,X) \xrightarrow{h}_{n-1} (X,A) \to .$$

Die Abbildungen sind durch die Inklusionene induziert, oder ergeben sich als Randabbildung $\delta_{n+1}\colon h_{n+1}(Z,X) \to h_n(X) \to h_n(X,A)$ als Verknüpfung der Randabbildung der Paarsequenz mit der von der Inklusion induzierten Abbildung.

Beweis. Man hat drei exakte Paarsequenzen zu den Paaren (X, A), (Z, A) und (Z, X). Diagrammjagt mit Hilfe dieser drei exakten Sequenzen liefert was wir wollen. □

7.33 Lemma. *Sei (X,A) ein CW-Paar und h_* eine gewöhnliche Homologietheorie. Dann gilt*

$$h_k(X_n,X_{n-1}) = 0 \qquad \text{für } k \neq n.$$
$$h_n(X_k,A) \to h_n(X,A) \qquad \text{ist ein Isomomrphismus für } k > n$$
$$h_k(X_n,A) = 0 \qquad \text{für } k > n.$$

Beweis. Die erste Aussage haben wir in Lemma 7.29 bereits gezeigt. Ansonsten betrachte die exakte Sequenz des Tripels $A \subset X_{n-1} \subset X_n$, um zu sehen, dass $h_k(X_{n-1},A) \to h_k(X_n,A)$ surjektiv ist, falls $h_k(X_n,X_{n-1}) = 0$, also für $k \neq n$, und um zu sehen dass $h_k(X_{n-1},A) \to h_k(X_n,A)$ injektiv ist falls $k+1 \neq n$. Es folgt, dass wir für $k < n$ und $l > 0$ einen Isomorphismus $h_k(X_n,A) \to h_k(X_{n+l},A)$ erhalten. Wenn X ein endlich-dimensionaler CW-Komplex ist, folgt die zweite Aussage sofort (da dann $X = X_{n+l}$ für genügend grosses l). Für unendlich-dimensionale X muss man noch ein kompliziertes Argument geben, welches das Summenaxiom benutzt.

Andererseits sieht man, dass $h_k(X_n,A) \cong h_k(X_{n-l},A)$ falls $k > n$ und $l \geq 0$. Mit $l = n+1$ erhält man $h_k(X_n,A) \cong h_k(A,A) = 0$ (letztere Aussage folgt sofort aus der exakten Paarsequenz des Paars (A,A)). $\square$

7.34 Satz. *Sei h_* eine gewöhnliche Homologietheorie. Dann gibt es für endliche CW-Paare einen natürlichen Isomorphismus*

$$\tau_n(X,A)\colon H_n(X,A) \xrightarrow{\cong} H_n^{cell}(X,A).$$

Beweis. Hierzu müssen wir ein wenig Diagrammjagd betreiben.

Wir haben folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& h_{n+1}(X_{n+1},X_n) \arrow[d, "\delta_{n+1}"] \arrow[dr, "c_{n+1}"] & & 0 = h_{n-1}(X_{n-2},A) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & h_n(X_n,A) \arrow[r, tail, "h_n(j)"] \arrow[d, two heads] & h_n(X_n,X_{n-1}) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[dr, "c_n"] & h_{n-1}(X_{n-1},A) \arrow[d, tail] \\
& h_N(X_{n+1},A) = h_n(X,A) \arrow[d] & & h_{n-1}(X_{n-1},X_{n-2}) \\
& 0 = h_n(X_{n+1},X_n) & &
\end{tikzcd}$$

Hierbei sind alle langen horizontalen und vertikalen Stücke von langen exakten Tripelsequenzen. Es folgt insbesondere dass $\ker(c_n) = \ker(\delta_n) = \operatorname{im}(h_n(j)) \cong h_n(X_n,A)$. Folglich erhalten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
h_n(X_n,A) \arrow[r, "h_n(j)", "\cong"'] \arrow[d, two heads] & \ker(c_n) \arrow[d, two heads] \\
h_n(X,A) \cong h_n(X_{n+1},A) \arrow[r, dotted, two heads, "\tau"] & \ker(c_n)/\operatorname{im}(c_{n+1}) = h_n^{cell}(X,A).
\end{tikzcd}$$

Da $\operatorname{im}(c_{n+1}) = h_n(j)(\operatorname{im}(\delta_{n+1}))$ und da $h_n(j)$ injektiv ist, liefert der Isomorphiesatz die Existenz von τ und impliziert, dass τ ein Isomorphismus ist. $\square$

7.35 Korollar. *Seien h_* und k_* gewöhnliche Homologietheorien mit $h_0(*) \cong k_0(*)$. Dann induziert der Isomorphismus $h_0(*) \xrightarrow{\cong} k_0(*)$ natürliche (bezüglich stetiger Abbildungen) Isomorphismen $h_n(X,A) \cong k_n(X,A)$ für jedes endliche CW-Paar (X,A).*

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 7.34 und Korollar 7.31. □

7.36 Beispiel. Wir berechnen die singuläre Homologie von $\mathbb{R}P^2$, indem wir seine zelluläre Homologie berechnen. Entsprechend der CW-Struktur von $\mathbb{C}P^n$ (vergleiche Aufgabe 7.8) können wir $\mathbb{R}P^n$ eine CW-Struktur mit $X_k = \mathbb{R}P^k$ geben, und so dass $\mathbb{R}P^n$ genau eine k-Zelle für jedes $0 \le k \le n$ besitzt. Die anheftende Abbildung $q^k\colon S^{k-1} \to X_{k-1} = \mathbb{R}P^{k-1}$ der k-Zelle ist die kanonische Projektion $S^{k-1} \to \mathbb{R}P^{k-1}$ (wir identifizieren gegenüberliegende Punkte von S^k und $\mathbb{R}P^k$ zu erhalten).

Im Fall von $\mathbb{R}P^2$ erhalten wir also den zellulären Kettenkomplex

$$\begin{tikzcd} C_0(\mathbb{R}P^2) \arrow[d, equal] & C_1(\mathbb{R}P^2) \arrow[l, "c_1"'] \arrow[d, equal] & C_2(\mathbb{R}P^2) \arrow[l, "c_2"'] \arrow[d, equal] \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \arrow[l, "0"'] & \mathbb{Z}. \arrow[l, "2"'] \end{tikzcd}$$

Hier ist $C_k(\mathbb{R}P^2) \cong \oplus_{i\in I_k(\mathbb{R}P^2)}\mathbb{Z}$ die direkte Summe über soviele Kopien von $\mathbb{Z} = H_0(*)$, wie es k-Zellen gibt, in unserem Fall also jeweils genau $\mathbb{Z}$ (oder 0). Für die Differentiale muss man die anklebende Abbildung $S^{k-1} \to X_{k-1}$ mit der Projektion $X_{k-1} \to X_{k-1}/(X_{k-1} - e^j)$ verknüpfen, wobei bei der Projektion alle Punkte ausserhalb der (j-ten) offenen $(k-1)$-Zelle zu einem Punkt identifiziert werden (der Quotient ist dann automatisch homöomorph zu S^{k-1}). Bei uns ist für die anklebende Abbildung der 2-Zelle diese Projektion die Identität. Wir müssen also nur den Grad der anklebenden Abbildung $q^2\colon S^1 \to S^1 \colon z \mapsto z^2$ berechnen. Dieser ist aber 2. Also ist c_2 gegeben durch Multiplikation mit 2.

Für das Differential c_1 beachte, dass (nach Konvention) der zu betrachtende Quotient $X_0/\emptyset$ von $X_0 = \{pt\}$ gegeben ist als $X_0 \amalg \{*\} = S^0$. Die anheftende Abbildung bildet beide Punkte von S^0 ab auf den ursprünglich vorhandenen Punkt pt. Wir müssen also den Grad der Abbildung $S^0 \to S^0$ berechnen, die beide Punkte von S^0 auf denselben Punkt abbildet. Der Grad dieser Abbildung ist Null. Damit ergibt sich der zelluläre Kettenkomplex wie behauptet.

Die Homologie des zellulären Kettenkomplexes (und damit die Homologie von $\mathbb{R}P^2$) ergibt sich nun als

$$H_0(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2, \quad H_k(\mathbb{R}P^2) = 0 \quad \text{für } k \ge 2.$$

8 Euler-Charakteristik und Lefschetz-Zahl

8.1 Definition. Sei X ein topologischer Raum und h_* eine gewöhnliche Homologietheorie mit $h_0(*) = \mathbb{Z}$, so dass $\oplus_{n\in\mathbb{Z}} h_n(X)$ endlich erzeugte abelsche Gruppe ist.

Definiere die *Euler-Charakteristik* $\chi_h(X) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{tr}(h_k(X)) \in \mathbb{Z}$.

Falls $f\colon X \to X$ eine stetige Abbildung ist, definiere die *Lefschetz-Zahl*

$$L_h(f) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{tr}(\overline{h_k(f)}\colon h_k(X)/Tors(h_k(X)) \to h_k(X)/Tors(h_k(X))) \in \mathbb{Z}.$$

Hier benutzen wir, dass $h_k(X)$ als endlich erzeugte abelsche Gruppe isomorph ist zu $\mathbb{Z}^k \oplus Tors(h_k(X))$, wobei $Tors(A)$ die Untergruppe der Elemente endlicher Ordnung ist, und die Spur ist dann definiert als die Spur der Matrix, welche die von $h_k(f)$ induzierte Abbildung repräsentiert.

Alternativ kann man die Spur des Vektorraum-Endomorphismus $h_k(f) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}} \colon h_k(X) \otimes \mathbb{Q} \to h_k(X) \otimes \mathbb{Q}$ verwenden, welche mit oben definierter Spur übereinstimmt.

8.2 Bemerkung. Aus der Homotopieinvarianz folgt sofort, dass die Eulercharakteristik nur von Homotopietyp von X und die Lefschetzzahl nur von der Homotopieklasse von f abhängt.

Für CW-Komplexe hängen beide nach Satz 7.34 nicht von der gewählten Homologietheorie ab.

8.3 Satz. *Sei X ein endlicher CW-Komplex. Dann ist $\oplus_{k\in\mathbb{Z}} h_k(X)$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe.*

Es gilt $\chi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k(X)$, wobei $c_k(X)$ die Anzahl der k-Zellen in einer CW-Zerlegung von X ist.

Sei $f \colon X \to X$ eine zelluläre Abbildung. Sie induziert Abbildungen $C_k^{cell}(f) \colon C_k^{cell}(X) \to C_k^{cell}(X)$ zwischen endlich erzeugten frei abelschen Gruppen.

Dann gilt $L(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{rk}(C_k^{cell}(f))$.

Beweis. Beachte zunächst, dass für eine endlich erzeugte frei abelsche Gruppe A $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{tr}(\mathrm{id}_A)$ und somit insbesondere $\chi(X) = L(\mathrm{id}_X)$. Es genügt also, die Formel für die Lefschtzzahl zu beweisen.

Hierzu beweisen wir allgemein per Induktion nach n: ist $C_* := C_n \to \cdots \to C_0$ ein endlicher Kettenkomplex endlich erzeugter frei abelscher Gruppen und $f_* \colon C_* \to C_*$ eine Kettenabbildung, so gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \,\mathrm{tr}(f_k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \,\mathrm{tr}(H_k(f_*)).$$

Der Induktionsanfang $n = 0$ folgt, da dann $H_0(C_*) = C_0$.

Für $n > 0$ konstruiere den Kettenkomplex $C'_* := C_{n-1}/\operatorname{im}(c_n) \to C_{n-2} \to \cdots C_0$ mit induzierter Kettenabbildung $f'_* \colon C'_* \to C'_*$. Wir erhalten dann die folgenden Exakten Sequenzen abelscher Gruppen:

$$0 \to \ker(c_n) \to C_n \to \operatorname{im}(c_n) \to 0 \qquad 0 \to \operatorname{im}(c_n) \to C_{n-1} \to C_{n-1}/\operatorname{im}(c_n) \to 0$$

mit entsprechenden von f_* induzierten Kettenabbildungen.

Wir benötigen nun noch folgendes Lemma.

8.4 Lemma. *Sei $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von endlich erzeugten abelschen Gruppen und $g_* \colon M_* \to M_*$ eine Kettenabbildung. Dann gilt $\mathrm{tr}(f_1) + \mathrm{tr}(f_3) = \mathrm{tr}(f_2)$.*

Beweis. Durch Tensorprodukt mit $\mathbb{Q}$ erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von endlich dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorräumen. Jede solche Sequenz spaltet, wir können also $M_2 \otimes \mathbb{Q} = M_1 \otimes \mathbb{Q} \oplus M_3 \otimes \mathbb{Q}$ setzen, so dass die Inklusion $M_1 \otimes \mathbb{Q} \to M_2 \otimes \mathbb{Q}$ genau der Inklusion in den ersten Summanden entspricht, und der Projektion $M_2 \otimes \mathbb{Q} \to M_3 \otimes \mathbb{Q}$ die Projektion auf den zweiten Summanden. Damit ergibt sich dann $f_2 \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}} = \begin{pmatrix} f_1 \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}} & * \\ 0 & f_3 \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}, \end{pmatrix}$, so dass $\mathrm{tr}(f_2 \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{tr}(f_1 \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}) + \mathrm{tr}(f_3 \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}})$. □

Da $H_n(C_*) = \ker(c_n)$ ergibt sich aus Lemma 8.4 und obigen exakten Sequenzen

$$\operatorname{tr}(H_n(f_*)) = \operatorname{tr}(f_n) - \operatorname{tr}(f_{n-1}|_{\operatorname{im}(c_n)}), \quad \operatorname{tr}(f_{n-1}|_{im(c_n)}) = \operatorname{tr}(f_{n-1}) - \operatorname{tr}(f'_{n-1}).$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt außerdem $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \operatorname{tr}(f'_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{tr}(H_k(f'_*))$, wobei weiterhin für $k < n-1$ $f'_k = f_k$ und für alle k gilt $H_k(f'_*) = H_k(f_*)$.

Setzt man diese Gleichungen zusammen, ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \operatorname{tr}(f_k) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \operatorname{tr}(f'_k) + (-1)^n \operatorname{tr}(f_n) + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(f_{n-1}) - (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(f'_{n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \operatorname{tr}(H_k(f'_*)) + (-1)^n H_n(f_*) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \operatorname{tr}(H_k(f_*)).\end{aligned}$$

□

8.5 Satz. *Sei X ein endlicher CW-Komplex, $f\colon X \to X$ stetig. Falls $L(f) \neq 0$, dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es gibt $x \in X$ mit $f(x) = x$. Äquivalent, falls f keinen Fixpunkt hat, gilt $L(f) = 0$.*

8.6 Korollar. *Sei X ein endlicher CW-Komplex mit $H_k(X)/Tors(H_k(X) \cong H_k(*)$, also $H_0(X) = \mathbb{Z}$, $H_k(X)$ endlich für $k \neq 0$. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn X zusammenziehbar, also $X \simeq *$ ist.*

Sei $f\colon X \to X$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Da $H_0(X) = \mathbb{Z}$, ist X zusammenhängend. Jede stetige Abbildung induziert deshalb auf H_0 die Identität. In der homologischen Formel für Lefschetzzahl von f gibt es deshalb nur einen Summanden, und dieser ist $L(f) = \operatorname{Spur}(\operatorname{id}_{\mathbb{Q}}) = 1$. Wegen Satz 8.5 hat f mindestens einen Fixpunkt. □

8.7 Bemerkung. In Korollar 8.6 ist wichtig, dass X ein endlicher CW-Komplex (also kompakt) ist. Ansonsten betrachte man $X = \mathbb{R}$, sicher zusammenziehbar, und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Verschiebung, die natürlich keinen Fixpunkt hat.

Beweisidee zu Satz 8.5. Sei zunächst X ein endiches Polyeder. Zur Erinnerung: das heisst, dass $X \subset \mathbb{R}^N$, und X ist die Vereinigung von endlich vielen geometrischen Simplizes (also konvexen affinen Linearkombinationen von Ecken des Simplex).

Wir nehmen nun an, dass f keinen Fixpunkt hat, also $f(x) \neq x$ für alle $x \in X$. Da X kompakt ist, existiert $\epsilon > 0$ so dass $d(f(x), x) > \epsilon$ für alle $x \in X$.

Durch Unterteilen der Simplizes des Polyeders X kann man nun erreichen, dass $d(f(\sigma), \sigma) > \epsilon' > 0$ für jedes der (neuen, kleineren) Simplizes von X. Nun findet man, nachdem man ggf. X weiter in kleinere Simplizes unterteilt hat, eine zu f homotope und zelluläre Abbildung, die zudem (in der sup-Norm), sehr nahe an f liegt. Dies kann man so einrichten, dass für die zelluläre Abbildung, die wir der Einfachheit halber wieder f nennen wollen, weiterhin gilt $d(f(\sigma), \sigma) > \epsilon'' > 0$. Wir behaupten nun, dass für eine solche zelluläre Abbildung notwendigerweise $L(f) = 0$ ist. Dies folgt aus Lemma 7.29, wenn man den Effekt der von f auf dem zellulären Kettenkomplex induzierte Abbildung genau verfolgt. Nach Wahl von pushouts ist diese gegeben durch eine Matrix (a_{ij}), und im Beweis von Satz 8.3 haben wir beobachtet, dass in die Lefschetzzahl genau die Diagonalelemente a_{ii} eingehen, die ja nach Lemma 7.29 in unserer Situation alle Null sind, also auch $L(f) = 0$.

Für einen allgemeinen endlichen CW-Komplex kann man das "Unterteilen" kaum präzise machen. Stattdessen verwenden wir (ohne es hier zu beweisen), dass jeder CW-Komplex von einem Polyeder "dominiert" wird:

8.8 Satz. *Sei X ein endlicher CW-Komplex. Dann gibt es ein endliches Polyeder K und eine Inklusion $i\colon X \hookrightarrow K$, sowie eine Retraktion (stetige Abbildung) $r\colon K \twoheadrightarrow X$, so dass $r \circ i = \mathrm{id}_X$.*

Für die Berechnung der Lefschetzzahl betrachte nun die Selbstabbildung $ifr\colon K \to K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L(ifr) &= \sum (-1)^k \operatorname{Spur}(H_k(ifr)) = \sum (-1)^k \operatorname{Spur}(H_k(i) \circ H_k(f) \circ H_k(r)) \\ &= \sum (-1)^k \operatorname{Spur}(H_k(f) \circ H_k(r) \circ H_k(i)) = \sum (-1)^k \operatorname{Spur}(H_k(f)) = L(f). \end{aligned}$$

Hier verwenden wir die Spureigenschaft $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$ sowie Funktorialität von Homologie. Nach Voraussetzung ist $L(f) \neq 0$. Nach der Konstruktion für Polyeder hat also ifr einen Fixpunkt $x \in K$. Dann gilt für $fx \in X$:

$$f(rx) = (ri) \circ fr(x) = r \circ ifr(x) = rx,$$

also ist rx ein Fixpunkt von f. $\square$

8.1 Produkte von CW-Komplexen

8.9 Satz. *Seien X und Y CW-Komplexe mit Gerüsten X_n und Y_n. Mindestens einer der beiden CW-Komplexe sei endlich, habe also insgesamt nur endlich viele Zellen.*

Dann ist $X \times Y$ ein CW-Komplex mit Gerüsten

$$(X \times Y)_n = \bigcup_{k=0}^{n} X_k \times Y_{n-k}.$$

Die Produkte der k-Zellen von X und q-Zellen von Y ergeben die $(k+q)$-Zellen von $X \times Y$.

Hierbei verwenden wir, dass $D^n \approx [0,1]^n = [0,1]^k \times [0,1]^{n-k} \approx D^k \times D^{n-k}$. Entsprechend erhält man für den Rand eine Zerlegung $S^{n-1} \approx S^{k-1} \times D^{n-k} \cup D^k \times S^{n-k-1}$.

Die anklebenden Abbildungen ergeben sich wie folgt; wir haben push-outs

$$\begin{array}{ccc} \amalg_{k=0}^n \amalg_{(i,j)\in I_k(X)\times I_{n-k}(Y)} S^{k-1} \times D^{n-k} \cup D^k \times S^{n-k-1} & \xrightarrow{\amalg q_i^k(X)\times Q_j^{n-k}(Y) \cup Q_i(X)\times q_j(Y)} & (X\times Y)_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \amalg_{k=0}^n \amalg_{(i,j)\in I_k(X)\times I_{n-k}(Y)} D^k \times D^{n-k} & \xrightarrow{\amalg Q_i^k(X)\times Q_j^{n-k}(Y)} & (X\times Y)_n. \end{array}$$

Hier ist $q_i^k(X)\colon S^{k-1} \to X_{k-1}$ die anheftende Abbildung der i-ten k-Zelle von X, und $Q_i^k(X)\colon D^k \to X_k$ die charakteristische Abbildung der i-ten k-Zelle von X (und entsprechend für Y).

Beweis. Man sieht sofort, dass das push-out tatsächlich die Punktmenge $(X \times Y)_n$ definiert. Ausserdem kann man direkt überprüfen, dass die push-out Topologie mit der Produkttopologie übereinstimmt, falls einer der beiden CW-Komplexe endlich ist. In diesem Fall checked man ausserdem, dass die Produkttopologie auf $X \times Y$ mit der Kolimestopologie der $(X \times Y)_n$ übereinstimmt. $\square$

8.10 Bemerkung. Falls sowohl X als auch Y unendliche CW-Komplexe sind, ist die in Satz 8.9 beschriebene CW-Topologie auf $X \times Y$ nicht notwendigerweise gleich der Produkttopologie. Die Identität ist allerdings eine stetige Abbildung $(X \times Y)^{CW} \to X \times Y$. Diese Abbildung induziert einen Isomorphismus in singulärer Homologie.

8.11 Beispiel. Der 2-Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ wird ein CW-Komplex mit einer Null-Zell (entspricht dem Produkt der beiden Null-Zellen in den beiden Faktoren), zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle. Man erhält $X_1 = S^1 \vee S^1$ und Randabbilung $\partial[0,1] \times [0,1] \to S^1 \vee S^1$.

8.12 Definition. Seien A, B abelsche Gruppen (also Moduln über dem kommutativen Ring $\mathbb{Z}$). Das *Tensorprodukt* $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ ist eine abelsche Gruppe $A \otimes B$ zusammen mit einer $\mathbb{Z}$-bilinearen Abbildung $\phi\colon A \times B \to A \otimes B$ welche folgende universelle Eigenschaft hat:

Für jede bilineare Abbildung $\gamma\colon A \times B \to Z$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\Gamma\colon A \otimes B \to Z$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \\ A \otimes_{\mathbb{Z}} B. \arrow[ur, "\Gamma"] & \end{tikzcd}$$

Wir bezeichnen $\phi(a, b) = a \otimes b$ für $a \in A$, $b \in B$.

Falls $f\colon A \to A'$ und $g\colon B \to B'$ Homomorphismen sind, definiere $f \otimes g\colon A \otimes B \to A' \otimes B'$ mittels der universellen Eigenschaft für folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f \times g} & A' \times B' \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi' \\ A \otimes_{\mathbb{Z}} B & \xrightarrow{f \otimes g} & A' \otimes_{\mathbb{Z}} B'. \end{array}$$

8.13 Satz. *Tensorprodukte existieren und sind eindeutig bis auf Isomorphie.*

8.14 Beispiel. $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong A$, $(A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$, $A \otimes_{\mathbb{Z}} B \cong B \otimes_{\mathbb{Z}} A$, für $p, q \in \mathbb{Z}$ prim gilt $\mathbb{Z}/p^k \otimes \mathbb{Z}/q^l \cong \begin{cases} 0, & p \neq q \\ \mathbb{Z}/p^{min(k,l)}, & p = q. \end{cases}$.

8.15 Definition. Seinen (C_*, c_*) und (D_*, d_*) Kettenkomplexe. Wir definieren das Tensorprodukt dieser Kettenkomplexe $(C \otimes D)$ als den Kettenkomplex mit

$$(C \otimes D)_n := \oplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k \otimes D_{n-k}.$$

Das Differential ist gegeben als Summe der Abbildungen

$$(c \otimes d)_n|_{C_k \otimes D_{n-k}} := c_k \otimes \mathrm{id}_{D_{n-k}} + (-1)^k \mathrm{id}_{C_k} \otimes d_{n-k}.$$

8.16 Lemma. *Mit Definition 8.15 ergibt sich* $(c \otimes d)_{n-1} \circ (c \otimes d)_n = 0$, *wir haben also tatsächlich einen Kettenkomplex definiert.*

Beweis. Man muss die Aussage nur für die Einschränkungen auf $C_k \otimes D_{n-k}$ nachprüfen. Hierfür gilt

$$
\begin{aligned}
&(c \otimes d)_{n-1} \circ (c \otimes d)_n|_{C_k \otimes D_{n-k}} \\
&= (c \otimes d)_{n-1} \circ (c_k \otimes \mathrm{id}_{D_{n-k}} + (-1)^k \mathrm{id}_{C_k} \otimes d_{n-k}) \\
&= (c_{k-1} \otimes \mathrm{id}_{D_{n-k}} + (-1)^{k-1} \mathrm{id}_{C_{k-1}} \otimes d_{n-k}) \circ c_k \otimes \mathrm{id}_{D_{n-k}} \\
&\quad + (-1)^k (c_k \otimes \mathrm{id}_{D_{n-k-1}} + (-1)^k \mathrm{id}_{C_k} \otimes d_{n-k-1}) \circ \mathrm{id}_{C_k} \otimes d_{n-k} \\
&= (c_{k-1} \circ c_k) \otimes \mathrm{id} + (-1)^{k-1} c_k \otimes d_{n-k} + (-1)^k c_k \otimes d_{n-k} + \mathrm{id} \otimes (d_{n-k-1} \circ d_{n-k}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

8.17 Satz. *Seinen* X, Y *endliche CW-Komplexe. Dann gilt für den zellulären Kettenkomplex (berechnet mittels singulärer Homologie)*

$$C_*^{cell}(X \times Y) \cong C_*^{cell}(X) \otimes C_*^{cell}(Y).$$

Beweis. Wir wissen, dass $C_p^{cell}(X) \cong \oplus_{i \in I_p(X)} \mathbb{Z}$, und $C_q^{cell}(Y) \cong \oplus_{j \in I_q(Y)} \mathbb{Z}$, wobei $I_p(X)$ die Menge der p-Zellen von X indiziert, $I_q(Y)$ die Menge der q-Zellen von Y.

Insbesondere

$$(C^{cell}(X) \otimes C^{cell}(Y))_n \cong \oplus_{k=0}^n \Big(\bigoplus_{I_k(X)} \mathbb{Z} \Big) \otimes \Big(\bigoplus_{I_{n-k}(Y)} \mathbb{Z} \Big).$$

Weiter gilt $C_n^{cell}(X \times Y) \cong \bigoplus_{I_n(X \times Y)} \mathbb{Z} = \bigoplus_{k=0}^n \bigoplus_{I_k(X) \times I_{n-k}(Y)} \mathbb{Z}$. Dies stimmt mit obigem Ausdruck überein, da $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, und da das Tensorprodukt distributiv gegenüber direkten Summen ist.

Zur Berechnung der Differentiale muss man nun noch die sich aus den anklebenden Abbildungen der Produktzellen ergebenden Abbildungsgrade überprüfen. □

8.18 Beispiel. Sei $X = S^1$, $Y = S^2$. Wähle CW-Struktur auf S^n mit genau einer Null-und einer n-Zelle und keinen weiteren Zellen (wie gewöhnlich). Dann sehen die zellulären Kettenkomplexe wie folgt aus:

$$
\begin{aligned}
C_*(S^1): &\qquad \mathbb{Z} = C_1 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} = C_0 \\
C_*(S^2): &\qquad \mathbb{Z} = C_2 \to 0 = C_1 \to \mathbb{Z} = C_0.
\end{aligned}
$$

Das Differential für S^1 muss Null sein, da $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Folglich erhält man als Tensorprodukt der Kettenkomplexe:

$$C_*(S^1 \times S^2): \qquad \mathbb{Z} = C_3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} = C_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} = C_1 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} = C_0.$$

Hier sind alle Differentiale Null, da auch alle Differentiale in den Faktor Kettenkomplexen Null sind. Für die Homologie erhält man also:

$$H_k(S^1 \times S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & 0 \le k \le 3 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

8.19 Beispiel. $X = Y = \mathbb{R}P^2$. Wir benutzen die CW-Struktur mit genau einer Zelle in Dimensionen 0, 1 und 2 und keinen weiteren Zellen. Man erhält also nach Beispiel 7.36 den zellulären Kettenkomplex

$$C_2 = \mathbb{Z} \xrightarrow{2} C_1 = \mathbb{Z} \xrightarrow{0} C_0 = \mathbb{Z}.$$

Für das Tensorprodukt erhält man folglich

$$C_0 = \mathbb{Z} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$
$$\xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}.$$

Hieraus berechnet sich nun direkt die Homologie als

$$H_k(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } k = 0 \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, & \text{falls } k = 1 \\ \mathbb{Z}/2, & \text{falls } k = 2, 3 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

8.20 Bemerkung. Beachte insbesondere, dass im allgemeinen nicht gilt:

$$H_n(X \times Y) \cong \bigoplus_{k=0}^{n} H_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{n-k}(Y).$$

9 Künneth Theorem (Produktformel für Homologie)

Wir wollen den Defekt aus Bemerkung 8.20 nun reparieren. Offensichtlich braucht man zu der „erwarteten“ Antwort einen Korrekturterm. Dieser ist tatsächlich auf rein algebraische Weise gegeben.

Dazu brauchen wir zunächst eine Reihe von Vorbereitungen aus der (homologischen) Algebra.

9.1 Definition. Ein *Ring* R ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ (Addition und Multiplikation), wobei R bezüglich $+$ eine abelsche Gruppe ist (mit neutralem Element 0). Die Multiplikation soll assoziativ sein und die Distributivgesetze erfüllen.

Falls die Multiplikation kommutativ ist, sprechen wir von einem *kommutativen Ring*. Falls $1 \in R$ existiert mit $1 \cdot a = a = a \cdot 1$ für alle a, so heisst R ein *Ring mit* 1. Beispiele: $\mathbb{Z}$ und Körper. Wir werden im folgenden immer voraussetzen, dass jeder Ring eine 1 hat.

Ein *Links-Modul* über R ist eine abelsche Gruppe M mit einer Multiplikation $R \times M \to M$, die alle Vektorraumaxiome erfüllt, d.h. distributiv und assoziativ ist und (falls R eine 1 hat) mit $1 \cdot v = v$ für alle $v \in M$. Assoziativ heisst $(rs)v = r(sv)$ für $r, s \in R$, $v \in M$.

Bei eine *Rechts-R-Modul* hat man eine Multiplikation $M \times R \to R$ mit $v(rs) = (vr)s$. Beachte, dass dies für einen nicht-kommutativen Ring nicht dasselbe ist wie ein Linksmodul, wohl aber für kommutative Ringe.

Das Tensorprodukt über R eines Rechts-R-Moduls M mit einem Links-R-modul N ist eine abelsche Gruppe $M \otimes_R N$ mit einer bilinearen Abbildung $\phi\colon M \times N \to M \otimes_R N$, welche $\phi(mr, n) = \phi(m, rn)$ erfüllt, und die folgende universelle Eigenschaft hat:

für jede bilineare Abbildung $f\colon M \times N \to X$, welche zusätzlich $f(mr, n) = f(m, rn)$ für alle $m \in M$, $r \in R$ und $n \in N$ erfüllt, existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $F\colon M \otimes_R N \to X$, so dass $f = F \circ \phi$.

Für zwei Links-R-Moduln M, N ist die Gruppe $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ definiert als die Gruppe aller R-Modulhomomorphismen, d.h. aller Homomorphismen, welche mit der R-Multiplikation verträglich sind. Entsprechend für R-Rechtsmoduln.

9.2 Bemerkung. Wir werden im folgenden einige Aussagen für allgemeine Ringe und Moduln machen. Wir werden alles aber in der Regel nur für $R = \mathbb{Z}$ oder für R einen Körper brauchen. Dann sind die Moduln genau die abelschen Gruppen (im Fall $R = \mathbb{Z}$), oder die R-Vektorräume.

9.3 Lemma. *Sei $A \xrightarrow{f} B \to C \xrightarrow{p} 0$ eine exakte Sequenz von R-Rechtsmoduln. Sei M ein R-Linksmodul. Dann ist die Sequenz*

$$A \otimes_R M \xrightarrow{f\otimes 1} B \otimes_R M \xrightarrow{p\otimes 1} C \otimes_R M \to 0 \tag{9.4}$$

exakt. Sei N ein Rechts-R-Modul. Dann ist

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, N) \to \mathrm{Hom}_R(B, N) \to \mathrm{Hom}_R(A, N) \tag{9.5}$$

exakt.

Beweis. Der Modul $C \otimes_R M$ ist erzeugt von Elementen $c \otimes m$. Da p surjektiv ist, also auch $p \otimes 1$.

Weiter ist $(p \otimes 1) \circ (f \otimes 1) = (pf \otimes 1) = 0 \otimes 1) = 0$. Sei $K := \mathrm{im}(f \otimes 1)$. Wir haben die induzierte Abbildung $\overline{p \otimes 1}\colon B \otimes_R M/K \to C \otimes_R M$. Nach Homomorphiesatz ist $K = \ker(p \otimes 1)$ (was nur noch zu zeigen bleibt), genau wenn $\overline{p \otimes 1}$ ein Iso ist. Wir definieren eine Umkehrabbildung indem wir zunächst die bilineare Abbildung $C \times M \to B \otimes M/K$ durch $(p(b), m) \mapsto (b \otimes m) \cdot K$. Falls $p(b) = p(b')$ existiert wegen Exaktheit $a \in A$ mit $f(a) = b - b'$. Demzufolge ist $b \otimes m - b' \otimes m = f(a) \otimes m \in K$, und somit ist die Abbildung wohldefiniert. Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts liefert uns $C \otimes M \to B \otimes M/K$, und man sieht auf den reinen Tensoren (als Erzuegern), dass sie ionvers zu $\overline{p \otimes 1}$ ist.

Die Rechnungen für (9.5) sind ähnlich, nur leichter. $\square$

Auch wenn $A \to B$ injektiv ist, kann man diese exakten Sequenzen nicht durch die fehlende Null ergänzen kann (auch für $R = \mathbb{Z}$). Dies zeigt das Beispiel $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0$. Nach tensorieren mit $\mathbb{Z}/2$ ist der linke Pfeil $\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/2$ nicht länger injektiv (Multiplikation mit 2 ist die Nullabbildung). Genauso ist die rechts stehende Abbildung $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{2} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2)$ nicht surjektiv (es gilt $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$, und die Abbildung ist wieder die Nullabbildung).

Man beachte, dass wir uns die Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ als Kettenkomplex vorstellen könnnen, dessen Homologie (wegen Exaktheit) trivial ist. Nach Anwenden des Tensorprodukts bzw. Hom-Funktors ist die (Ko)homologie plötzlich nicht mehr Null. Dies ist der Prototyp eines solchen Phänomens, wenn wir die Beziehung zwischen Homologie vor und nach Tensorieren verstehen wollen (bzw. vor und nach Anwenden von Hom).

Die offensichtlich Frage ist: was (anstelle von Null) muss man ergänzen, damit die Sequenzen (9.4) und (9.5) wieder exakt werden. Hierzu benötigen wir einige weitere Vorbereitungen:

9.6 Definition. Ein Rechts-R-Modul P heisst *frei*, falls $P \cong \oplus_{i\in I} R$ für irgendeine (möglicherweise unendliche) Indexmenge I.

P heisst *projektiv*, falls für jeden Rechts-R-Modul Homomorphismus $\phi\colon P \to M$ und Surjektion $q\colon N \to M$ ein *Lift* $\Phi\colon P \to N$ existiert, d.h. $q \circ \Phi = \phi$.

Es wird nicht verlangt, dass Φ eindeutig ist (dies wird in der Regel auch nicht der Fall sein).

9.7 Lemma. *Jeder freie R-Modul ist projektiv.*

Beweis. Sei $e_i = (\cdots, 0, 0, 1, 0, 0, \cdots) \in \oplus_{i\in I} R$ mit 1 an der Position i. Zu $\phi(e_i) \in M$ wähle ein Urbild $n_i \in N$ (mit $q(n_i) = \phi(e_i)$). Dies geht, da q surjektiv ist.

Dann definiere Φ durch $\Phi(e_i) := n_i$. Dies definiert (wie üblich) eindeutig einen Homomorphismus vom freien Modul nach N, der die gewünschte Eigenschaft hat. $\square$

Diese Aussage stimmt im allgemeinen nicht, falls R keine 1 hat.

Der Begriff des projektiven Moduls ist gerade so gemacht, dass er die für uns entscheidende Eigenschaft von freien Moduln erhält.

9.8 Beispiel. Sei R ein Körper. Dann besitzt jeder Modul (als Vektorraum) eine Basis, ist also frei und insbesondere projektiv.

Falls $R = \mathbb{Z}$, ist ein Modul (eine abelsche Gruppe) genau dann projektiv, wenn es sich um eine freie abelsche Gruppe handelt. Insbesondere kann man z.B. die Identität $\mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n$ nicht liften zur Projektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n$.

9.9 Definition. Sei M ein Rechts-R-Modul. Eine *projektive Auflösung* von M ist eine exakte Sequenz von Rechts-R-Moduln

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

(nach Links möglicherweise unendlich fortgesetzt), so dass P_k projektiv ist für jedes $k \in \mathbb{N}$. Entsprechend definiert man *freie Auflösung*.

Wir werden nun die gesuchten Korrekturterme für die Sequenzen (9.4) und (9.5) definieren (und später zeigen, dass es sich wirklich um die gewünschten Korrekturterme handelt).

9.10 Definition. Sei M ein R-Rechtsmodul und N ein R-Linksmodul. Sei $\to P_1 \to P_0 \to M$ eine projektive Auflösung von M (beachte, dass es sich insbesondere um einen Kettenkomplex handelt). Tensoriere diesen Kettenkomplex über R mit N, und ersetze den Term $M \otimes_R N$ durch 0. Wir erhalten einen Kettenkomplex

$$\to P_2 \otimes_R M \to P_1 \otimes_R M \to P_0 \otimes_R M \to 0.$$

Definiere $\mathrm{Tor}_n^R(M,N) := H_n(P_* \otimes_R N)$. Sei O ein weiterer Links-R-Modul. Mittels des Hom-Funktors erhalten wir einen weiteren Kettenkomplex

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P_0, O) \to \mathrm{Hom}_R(P_1, O) \to \dots$$

Definiere $\mathrm{Ext}_R^n(M,N) := H^n(\mathrm{Hom}_R(P_*, N))$.

Wir müssen natürlich noch zeigen, dass diese Definitionen nicht von der projektiven Auflösung abhängen (und das so eine wirklich existiert). Dies leistet der folgende Hauptsatz der homologischen Algebra.

9.11 Satz. *(1) Jeder R-Modul besitzt eine projektive Auflösung P_*.*

(2) Zwei projektive Auflösungen desselben R-Moduls sind homotopieäquivalent.

(3) Allgemeiner: sei N ein weiterer R-Modul. Sei P_* eine projektive Auflösung von M, Q_* eine projektive Auflösung von N. Zu jedem R-Modulhomomorphismus $f\colon M \to N$ existiert eine Kettenabbildung $f_*\colon P_* \to Q_*$ so dass $f_{-1} = f$. Zwei solche Kettenabbildungen f_* und g_* sind kettenhomotop.

Beweis. Wir konstruieren P_* induktiv. Zunächst brauchen wir einen projektiven Modul P_0 mit einer Surjektion $P_0 \to M$. Wähle $P_0 := \oplus_{m\in M} R$, und die Abbildung sende das m entsprechende Basiselement im freien Modul P_0 auf m.

Induktiv sei bereits $P_k \to P_{k-1} \to \cdots \to P_0 \to M$ konstruiert, so dass die Sequenz überall ausser an P_k exakt ist. D.h. die Abbildung $P_k \to P_{k-1}$ ist nicht notwendig injektiv. Konstruiere (wie vorher) einen freien Modul P_{k+1}, der surjektiv auf den Kern abbildet.

Aussage (2) folgt aus Aussage (3): wende (3) an auf $\mathrm{id}\colon M \to M$, wobei auf der einen Seite die projektive Auflösung P_* und auf der anderen Seite Q_* benutzt wird. Wir erhalten Kettenabbildung $f_*\colon P_* \to Q_*$ und (die Rollen vertauschend) $g_*\colon Q_* \to P_*$. Dann ist $f_* \circ g_*\colon Q_* \to Q_*$ eine Kettenabbildung, deren (-1)-Term id_M ist. Natürlich hat $\mathrm{id}_*\colon Q_* \to Q_*$ die gleiche Eigenschaft. Wider nach (3) sind also $f_* \circ g_*$ und id_* kettenhomotop. Entsprechend für $g_* \circ f_*$, so dass g_* und f_* tatsächlich zueinander inverse Kettenhomotopieäquivalenzen sind.

Es bleibt noch, (3) zu zeigen. Seien $p_k\colon P_k \to P_{k-1}$ und $q_k\colon Q_k \to Q_{k-1}$ die Differentiale. Setze $P_{-1} := M$, $P_{-k} := 0$ für $k > 1$.

Wir werden per Induktion die Kettenhomotopie zwischen f_* und g_* konstruieren. Die Konstruktion von f_* selber geht analog. Zur Erinnerung: solch eine Kettenhomotopie ist eine Folge von Homomorphismen $h_k\colon P^k \to Q_{k+1}$, so dass $f_k - g_k = q_{k+1}h_k + h_{k-1}q_k$. Setze als Induktionsanfang $h_{-k} := 0$ für $k > 0$. Dann ist in negativen Graden alles o.K. Wenn h_j bereits für $j < k$ definiert ist, müssen wir also zu $\alpha = f_k - g_k - h_{k-1}q_k\colon P_k \to Q_k$ einen Lift $h_k\colon P_k \to Q_{k+1}$ konstruieren (bzgl. der Abbildung $q_{k+1}\colon Q_{k+1} \to Q_k$). Das ist genau die Eigenschaft von Projektivität, falls das Bild von α im Bild von q_{k+1} liegt. Da Q_* exakt ist, ist $\mathrm{im}(q_{k+1}) = \ker(q_k)$. Wir müssen also nur zeigen dass $q_k \circ \alpha = 0$. Nun gilt

$$\begin{aligned} q_k \circ \alpha &= (f_{k-1} - g_{k-1}) \circ p_k - q_k h_{k-1} p_k \\ &= h_{k-2} p_{k-1} p_k = 0. \end{aligned}$$

Der Lift h_k existiert wegen der Projektivität von P_k. □

Die Kettenhomotopieäquivalenzen induzieren Kettenhomotopieäquivalenzen auf den Kettenkomplexen, die man nach anwenden von $\otimes$ oder Hom erhält (wegen Funktorialität). Folglich sind Tor und Ext wohldefiniert. Wir sehen ausserdem, dass es sich bei Tor und Ext selbst um Funktoren handelt (jede Abbildung $f\colon A \to B$ induziert eine Abbildung zwischen den projektiven Auflösungen, diese ist eindeutig bis auf Homotopie, liefert also eine eindeutige Abbildung auf der Homologie (auch nach Anwendung von $\otimes$ oder Hom)).

9.12 Bemerkung. Wir haben im Beweis nicht benutzt, dass Q_k projektiv ist, sondern nur, dass Q_* exakt ist. Man kann die Aussage also entsprechend abschwächen.

9.13 Lemma. *Seien M, N R-Moduln. Dann gilt*

$$\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N, \qquad \mathrm{Ext}_R^0(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M, N).$$

Beweis. Die exakte Sequenz $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ einer projektiven Auflösung liefert nach Lemma 9.3 eine exakte Sequenz

$$P_1 \otimes_R N \to P_0 \otimes_R N \to M \otimes_R N \to 0$$

Wenn wir den rechten Term weglassen, bleibt als Null-te Homologie also gerade $M \otimes_R N$ übrig.

Entsprechend beweist man die zweite Identität. □

9.14 Lemma. *Sei P projektiv. Dann gibt es eine Auslösung $0 \to P \to P \to 0$. Folglich ist $\mathrm{Tor}_k^R(P, N) = 0 = \mathrm{Ext}_R^k(P, N)$ für $k > 0$.*

Dies gilt insbesondere für jeden Modul (also Vektorraum) über einem Körper, und für jede freie abelsche Gruppe (falls $R = \mathbb{Z}$).

9.15 Lemma. *Seien A, B abelsche Gruppen (also $\mathbb{Z}$-Moduln). Dann gilt*

(1) $\mathrm{Tor}_k(A, B) = 0 = \mathrm{Ext}^k(A, B)$ *für* $k > 1$.

(2) $\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/n, A) = \{a \in A \mid na = 0\}$

(3) $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n, A) = A/nA$.

(4) Insbesondere $\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m) = \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m) = \mathbb{Z}/n \otimes \mathbb{Z}/m = \mathbb{Z}/d$, *wobei* $d = ggT(m, n)$.

Beweis. Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist frei. Folglich hat A eine freie Auflösung $0 \to F_1 \to F_0 \to p \to A$, wobei $F_1 = \ker(p)$.

Für $\mathbb{Z}/n$ erhält man die Auflösung $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n \to 0$. Nach Tensorieren oder Anwenden des Hom-Funktors erhält man genau die behauptete Homologie. □

9.16 Satz. *Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ exakte Sequenz von R-Moduln, M weiterer R-Modul. Dann hat man lange exakte Sequenzen*

$$\to \mathrm{Tor}_2^R(C, M) \to \mathrm{Tor}_1^R(A, M) \to \mathrm{Tor}_1^R(B, M) \to \\ \mathrm{Tor}_1^R(C, M) \to A \otimes M \to B \otimes M \to C \otimes M \to 0$$

$$\to \mathrm{Tor}_2^R(M, C) \to \mathrm{Tor}_1^R(M, A) \to \mathrm{Tor}_1^R(M, B) \to \\ \mathrm{Tor}_1^R(M, C) \to M \otimes A \to M \otimes B \to M \otimes C \to 0$$

$$\leftarrow \mathrm{Ext}_2^R(C, M) \leftarrow \mathrm{Ext}_1^R(A, M) \leftarrow \mathrm{Ext}_1^R(B, M) \leftarrow \\ \mathrm{Ext}_1^R(C, M) \leftarrow \mathrm{Hom}(A, M) \leftarrow \mathrm{Hom}(B, M) \leftarrow \mathrm{Hom}(C, M) \leftarrow 0$$

$$\to \mathrm{Ext}_2^R(M, C) \to \mathrm{Ext}_1^R(M, A) \to \mathrm{Ext}_1^R(M, B) \to \\ \mathrm{Ext}_1^R(M, C) \to \mathrm{Hom}(M, A) \to \mathrm{Hom}(M, B) \to \mathrm{Hom}(M, C) \to 0$$

Beweis. Konstruiere zunächst induktiv eine exakte Sequenz von freien Auflösungen $0 \to F_* \to G_* \to H_* \to 0$, mit $F_{-1} = A$, usw., und mit $G_k = F_k \oplus H_k$, ähnlich, wie wir vorher die freie Auflösung konstruiert hatten. Da $G_k = F_k \oplus H_k$, bleiben diese Sequenzen nach tensorieren mit M, sowie nach Anwenden des Hom-Funktors exakt. Wir erhalten also, wenn wir (Ko)homologie nehmen, die erste und die dritte lange exakte Sequenz unserer Liste. Ansosnten wähle eine freie Auflösung F_* von M. Da alle F_k frei sind, erhält man nach Tensorieren eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen $0 \to F_* \otimes A \to F_* \otimes B \to F_* \otimes C \to 0$ (und entsprechend für Hom). Die zugehörigen langen exakten Sequenzen sind die fehlenden in unserer Liste. □

9.17 Theorem. *Seien (C_*, c_*) und (D_*, d_*) Kettenkomplexe von freien abelschen Gruppen, mit $C_k = 0$ und $D_k = 0$ für $k < 0$.*

Dann gibt es natürliche (in C_* und D_*) exakte Sequenzen

$$0 \to \bigoplus_{k=0}^{n} H_k(C_*) \otimes H_{n-k}(D_*) \xrightarrow{\alpha} H_n(C_* \otimes D_*) \to \bigoplus_{k=0}^{n-1} Tor(H_k(C_*), H_{n-k-1}(D_*)) \to 0$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Diese Sequenz spaltet, allerdings ist der Spalt nicht natürlich.

Beweis. Zunächst überlegt man, dass es tatsächlich eine natürliche Abbildung $\alpha\colon \bigoplus_{k=0}^{n} H_k(C_*) \otimes H_{n-k}(D_*) \to H_n(C_* \otimes D_*)$ gibt. Diese ordnet einfach einem $[x] \otimes [y] \in H_k(C_*) \otimes H_{n-k}(D_*)$ mit $x \in \ker(c_k)$ und $y \in \ker(d_{n-k})$ die Klasse $[x \otimes y] \in H_k(C_* \otimes D_*)$ zu. Es folgt direkt aus der Definition, dass $x \otimes y$ im Kern des Differentials liegt, und dass diese Abbildung wohldefiniert und bilinear ist (also tatsächlich wegen der universellen Eigenschaft auf dem Tensorprodukt definiert ist). Die konstruktion zeigt ausserdem, dass diese Abbildung natürlich für Kettenabbildungen ist.

Da Untergruppen von freien Gruppen wieder frei sind, erhalten wir die kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen freier abelscher Gruppen

$$0 \to \ker(c_*) \xrightarrow{i} C_* \xrightarrow{c_*} \operatorname{im}(c_*) \to 0, \tag{9.18}$$

wobei die Differentiale links und rechts jeweils die Nullabbildung sein sollen (was auch gerade die Einschränkung von c_* auf die Untergruppen ist).

Da die Gruppen alle frei sind folgt, dass diese Sequenz auch nach Tensorieren mit D_* exakt bleibt. Für die resultierende kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen (mit interessanteren Differentialen, da auch noch diejenigen von D_* eine Rolle spielen) erhalten wir eine lange exakte Homologiesequenz, und daraus insbesondere die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} H_{n+1}(\operatorname{im}(c_*) \otimes D_*) \to H_n(\ker(c_*) \otimes D_*) &\xrightarrow{(i \otimes \mathrm{id})_*} H_k(C_* \otimes D_*) \\ &\xrightarrow{(c_* \otimes \mathrm{id})_*} H_k(\operatorname{im}(c_*) \otimes D_*) \to H_{k-1}(\ker(c_*) \otimes D_*). \end{aligned} \tag{9.19}$$

Man kann nun überprüfen, dass die Differentiale gerade durch $(j \otimes \mathrm{id}_D)$ gegeben sind, wobei $j\colon \operatorname{im}(c_*) \to \ker(c_{*-1})$ die Inklusion ist (dies tut man zunächst, wenn man D_* durch $\mathbb{Z}$ ersetzt, und benutzt dann Natürlichkeit).

Wir können nun auch das Tensorprodukt der Sequenz (9.18) mit $H_*(D)$ bilden (aufgefasst als Kettenkomplex wobei alle Differentiale Null sind). Beachte, dass dann das Differential in $ker(c_*) \otimes H_*(D)$ und in $\operatorname{im}(c_*) \otimes H_*(D)$ komplett

Null ist, also die Homologie gleich den Gruppen selbst ist. Trotzdem erhält man eine lange exakte Homologiesequenz, und mit Natürlichkeit von α passen die entsprechenden Gruppen in das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_k(C_*\otimes D_*) \arrow[r] & H_k(\mathrm{im}(c_*)\otimes D_*) \arrow[r] & H_{k-1}(\ker(c_*)\otimes D_*) \\
 & (\mathrm{im}(c_*)\otimes H_*(D))_k \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[r, "i\otimes \mathrm{id}"] & (\ker(c_*)\otimes H_*(D))_{k-1} \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd} \tag{9.20}$$

Da $\ker(c_*)$ und $\mathrm{im}(c_*)$ aus freien abelschen Gruppen besteht, und die Differentiale Null sind, ist α in diesem Fall ein Isomorphismus: dies ist klar, wenn der Gesamtrang der freien abelschen Gruppe 1 ist, und ergibt sich, da der allgemeine Fall einfach eine direkte Summe von Instanzen des Spezialfalls ist (hier wird benötigt, dass alle Differentiale Null sind)

Ausserdem ist $0 \to \mathrm{im}(c_{k+1}) \xrightarrow{i} \ker(c_k) \to H_k(C_*)$ eine freie Auflösung von $H_k(C_*)$. Somit gilt nach Definition von Tor, dass $\ker(i\otimes \mathrm{id})$ in (9.20) gerade $\oplus_{j=0}^{k-1} Tor(H_j(C), H_{k-1-j}(D))$ ist, während andererseits

$$(\ker(c_*)\otimes H_*(D))_{k-1}/\,\mathrm{im}(i\otimes \mathrm{id}) \cong (H_*(C)\otimes H_*(D))_{k-1}.$$

Man kann aus der langen exakten Sequenz (9.19) kurze exakte Sequenzen machen, indem man $H_n(\mathrm{im}(c_*)\otimes D_*)$ durch den Kern der Randabbildung, und $H_n(\ker(c_*)\otimes D_*)$ durch den Kokern der Randabbildung ersetzt.

Da in (9.20) α jeweils Isomorphismus ist, kann man diese durch den Kern und Kokern von $i\otimes \mathrm{id}$ unten ersetzen. Diese haben wir gerade berechnet, um so die gewünschte natürliche kurze exakte Sequenz zu erhalten.

Um zu sehen, dass die Sequenz spaltet, konstruiere Kettenabbildungen $C_* \to H_*(C)$, $D_* \to H_*(D)$ welche auf Homologie die Identität induzieren (wobei wir in Homologie wieder die Nullabbildung als Randabbildung benutzen). Dies geht, da C_* und D_* aus freien Kettenkomplexen besteht.

Wegen Natürlichkeit von α erhalten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus_{k=0}^{n} H_k(C_*)\otimes H_{n-k}(D_*) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & H_n(C_*\otimes D_*) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \bigoplus_{k=0}^{n-1} Tor(H_k(C_*), H_{n-k-1}(D_*)) \arrow[r] & {} \\
 & \bigoplus_{k=0}^{n} H_k(C_*)\otimes H_{n-k}(D_*) \arrow[r, "\alpha", "\cong"'] & H_n(H_*(C)\otimes H_*(D)) & &
\end{tikzcd} \tag{9.21}$$

$\alpha^{-1}\circ f$ liefert einen Spalt der Sequenz, der von der Wahl der Kettenabbildungen $C_* \to H_*(C)$ $D_* \to H_*(D)$ abhängt.. □

9.22 Bemerkung. Das Künneth-Theorem gilt unverändert auch für singuläre Homologie, und nicht nur für CW-Komplexe sondern für beliebige Topologische Räume.

Hauptproblem im Beweis ist, dass hier *nicht* gilt, dass $C_*^{sing}(X\times Y) \cong C_*^{sing}(X)\otimes C_*^{sing}(Y)$.

Statt dessen kann man natürliche (in X und Y) Kettenabbildungen zwischen den beiden Kettenkomplexen konstruieren, welche Kettenhomotopieäquivalenzen sind (das Eilenberg-Zilber Theorem).

Der Beweis geht danach ganz genauso wie für CW-Komplexe.

Der Satz verallgemeinert sich noch weiter auf Raumpaare; hier ersetzt man X, Y und $X\times Y$ durch (X, A), (Y, B) und $(X\times Y, X\times B\cup A\times Y)$. Hier muss man noch die Voraussetzung machen (eine Art Ausschneidungsvoraussetzung), dass die Inklusion einen Isomorphismus $H_*(A\times Y, A\times B) \to H_*(A\times Y\cup X\times B, X\times B)$ induziert. Aus Ausschneidung folgt, dass dies immer gilt, falls (X, A) und (Y, B) CW-Paare sind.

10 Homologie und Kohomologie mit Koeffizienten

10.1 Definition. Sei (C_*, c_*) ein Kettenkomplex von abelschen Gruppen. Sei A eine weitere abelsche Gruppe.

Definiere dann die Kettenkomplexe $C_* \otimes_{\mathbb{Z}} A, c_* \otimes \mathrm{id}_A)$ und

$$\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_k, A) \xrightarrow{ck+1^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{k+1}, A) \to$$

Beachte, dass $\cdot \otimes A$ ein kovarianter Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe zu sich selbst ist, $\mathrm{Hom}(\cdot, A)$ ein Kontravarianter Funktor.

Wir definieren die *Homologie von C_* mit Koeffizienten in A*

$$H_k(C_*; A) := H_k((C_* \otimes A, c_* \otimes \mathrm{id}_A)),$$

und die *Kohomologie von C_* mit Koeffizienten in A* $H^k(C_*; A) := H_k(\mathrm{Hom}(C_*, A), \mathrm{Hom}(c_*, \mathrm{id}_A))$.

Homologie mit Koeffizienten in A liefert dann kovariante Funktoren von der kategorie der Kettenkomplexe zur Kategorie der abelschen Gruppen, Kohomologie liefert kontravariante Funktoren.

Wir definieren die singuläre Homologie und die singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in A, indem man die obigen Konstruktionen auf den singulären Kettenkomplex anwendet; entsprechend für die zelluläre Homologie und Kohomologie.

So erhält man z.B. für ein Paar von CW-Komplexen (X, Y)

$$H^k_{cell}(X, Y; A) := H_k(\mathrm{Hom}(C^{cell}_*(X, Y), A))$$

10.2 Definition. Eine (verallgemeinerte) Kohomologietheorie besteht aus *kontravarianten* Funktorenh^k von der kategorie der Raumpaare zur Kategorie der abelschen Gruppen, mit natürlichen Randabbildungen

$$h^k(A) \to h^{k+1}(X, A)$$

welche Axiome entsprechend denen einer Homologie erfüllen, wobei aber alle Abbildungspfeile umgedreht werden. Außerdem wird aus dem Summenaxiom das Produktaxiom:

$$H^*(\amalg_{i\in I} X_i) \cong \prod_{i\in I} H^*(X_i),$$

wobei der Isomorphismus wieder durch die Inklusionsabbildungen induziert ist.

Sie heißt gewöhnlich, wenn $h^k(pt) = 0$ für $k \neq 0$.

10.3 Lemma. *Singuläre und zelluläre Homologie und Kohomologie mit Koeffizienten in A sind gewöhnliche Homologie bzw. Kohomologietheorien (auf der Kategorie der topologischen Raumpaare bzw. der CW-Paare. Dabei gilt $h_0(*; A) \cong A$ und $h^0(*; A) \cong A$.*

Beweis. Dies geht genauso wie im ursprünglichen Fall. Da wir die Aussage dort auf Aussagen über Kettenkomplexe zurückgeführt haben □

10.4 Beispiel. Wir kennen den zellulären Kettenkomplex von $\mathbb{R}P^2$:

$$0 \to Z \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0.$$

2 Durch Tensorieren mit $\mathbb{Z}/2$ erhält man hieraus (da $2 = 0 \in \mathbb{Z}/2$)

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \to 0,$$

somit $H_k(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$ für $k = 0, 1, 2$, und $H_k(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2) = 0$ sonst (singuläre oder zelluläre Homologie mit Koeffizienten $\mathbb{Z}/2$).

Genauso, wenn man den Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Z}/2)$ anwendet, erhält man

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}/2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2 \leftarrow 0,$$

so dass sich auch $H^k(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$ für $k = 0, 1, 2, = 0$ sonst, ergibt.

10.5 Bemerkung. Es ist oft deshalb von Vorteil, Homologie mit verschiedenen Koeffizienten zu untersuchen, da man dabei verschiedene Aspekte der Homologie besonders herausstellen kann: ist z.B. $A = \mathbb{Q}$, erhält man als Homologiegruppen $\mathbb{Q}$-Vektorräume. Es stellt sich heraus, dass deren Dimension gerade der Rang der singulären Homologiegruppen (mit Koeffizienten $\mathbb{Z}$) ist.

Benutzt man $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, konzentriert man sich auf die p-Torsion in Homologie (obwohl man als Homologie nicht genau diese erhält, vergleiche Abschnitt 11.

Kohomologie ist deshalb besonders wichtig, weil sie zusätzliche Struktur besitzt: ein Produkt. Dies wird in Definition 10.6 erläutert.

10.6 Definition. Ist R ein kommutativer Ring und X ein CW-Komplex, so definiert man auf $H^*(X; R)$ auf folgende Weise eine Ringstruktur:

$$\cup\colon H^k(X;R) \times H^q(X;R) \to H^k(X;R) \otimes H^q(X;R) \xrightarrow{\alpha} H^{k+q}(X \times X; R) \xrightarrow{\mathrm{diag}^*} H^{k+q}(X;R).$$

10.7 Lemma. *Mit Definition 10.6 wird $H^k(X; R)$ ein assoziativer Ring mit $1 \in H^0(X; R)$ repräsentiert durch den pullback von $1 \in H^0(*; R)$ nach X.*

Der Ring ist graduiert kommutativ *im Sinne dass $\alpha \cup \beta = (-1)kq\beta \cup \alpha$ für $\alpha \in H^k(X; R)$ und $\beta \in H^q(X; R)$.*

Eine stetige Abbildung $f\colon Y \to X$ von Räumen induziert einen Ringhomomorphismus in Kohomologie.

11 Universelle Koeffizienten

Wir wollen nun die in Abschnitt 9 entwickelten Werkzeuge aus der homologischen Algebra benutzen, um Kohomologie und Homologie mit Koeffizienten R aus der Homologie mit Koeffizienten $\mathbb{Z}$ zu berechnen.

Dies tun wir zunächst ganz algebraisch:

11.1 Satz. ***Algebraische universelles Koeffiziententheorem.***
Sei G eine abelsche Gruppe und C_* ein Kettenkomplex von abelschen Gruppen, und sei C_k eine freie abelsche Gruppe für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Es gibt (in C_* und G natürliche) exakte Sequenzen

$$0 \to H_n(C_*) \otimes G \to H_n(C_* \otimes G) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_*), G) \to 0.$$

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_*), G) \to H^n(\mathrm{Hom}(C_*, G)) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}(H_n(C_*), G) \to 0.$$

All diese Sequenzen spalten, d.h. der mittlere Term ist isomorph zur direkten Summe der äusseren Terme. Diese Spaltung sind allerdings nicht natürlich.

Die Abbildung β ist gegeben durch die Kronecker Paarung: $\beta([f])([a]) = \beta(a)$. Hier repräsentiere $f \in \mathrm{Hom}(C_n, G)$ eine Kohomologieklasse, und $a \in C_n$ eine Homologieklasse.

Weiter gilt $\alpha([a] \otimes g) = [a \otimes g]$ mit $g \in G$ und $a \in C_n$ einem Repräsentanten der Homologieklasse $[a] \in H_n(C_*)$.

11.2 Bemerkung. Die Abbildung α ist ein Spezialfall des algebraischen Kreuzprodukts $H_k(C_*) \otimes H_l(D_*) \to H_{k+l}(C_* \otimes D_*)$. Wir müssen dazu G auffassen als Kettenkomplex D_* mit $D_0 = G$ und $D_k = 0$ für $k \neq 0$. Beachte, dass dann $H_0(D_*) = G$ und $H_k(D_*) = 0$ für $k \neq 0$. Wir werden den Satz bald auch auf solche Kreuzprodukte verallgemeinern.

Bevor wir den Satz beweisen, wollen wir die offensichtlichen Korollare für die Topologie ziehen.

11.3 Korollar. *Sei (X, A) ein paar von Räumen, G eine abelsche Gruppe. Dann erhält man für singuläre (Ko)homologie folgende natürlichen exakten Sequenzen:*

$$0 \to H_n(X, A) \otimes G \to H_n(X, A; G) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X, A), G) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X, A), G) \to H^n(X, A; G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X, A), G) \to 0.$$

All diese Sequenzen spalten, d.h. der mittlere Term ist isomorph zur direkten Summe der äusseren Terme. Diese Spaltung sind allerdings nicht natürlich.

Beweis. Dies folgt aus Satz 11.1, da der singuläre Kettenkomplex frei ist, und aus der Definition von Homologie und Kohomologie mit Koeffizienten. □

11.4 Beispiel.

(1) Für jeden topologischen Raum X gilt

$$H^1(X; G) \cong \mathrm{Hom}(H_1(X), G),$$

da $H_0(X)$ immer frei abelsch ist.

(2) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, so dass $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist. Dann folgt wegen Natürlichkeit und dem 5-er Lemma, dass

$$f_*\colon H_p(X; G) \to H_p(Y; G); \qquad f^*\colon H^p(Y; G) \to H^p(X; G)$$

für jedes G Isomorphismen sind.

Sei $\mathbb{R}P^2 = D^2/\ $, wobei gegenüberliegende Punkte auf dem Rand von D^2 identifiziert werden. Sei $f\colon \mathbb{R}P^2 \to D^2/S^1 \approx S^2$ dadurch gegeben, dass der Rand auf einen Punkt kollabiert wird. Z.B. das universelle Koeffiziententheorem liefert uns $H_k(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ für $k = 0,1,2$ (und 0 sonst), und $H_k(S^2; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ für $k = 0,2$ (und 0 sonst). Für die zellulären Kettenkomplexe haben wir $C_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2 = C_2(S^2; \mathbb{Z}/2)$ (sie stimmen also mit der Homologie überein). f induziert hier die Identität (per Konstruktion ist die auf den zugehörigen Quotientensphären zu betrachtende Abbildung, deren Grad wir betrachten müssen, die Identität). Da hier offenbar $C_2 = H_2$, ist $H_2(f; \mathbb{Z}/2)$ die Identität. Aber es ist sowohl $H_1(f; \mathbb{Z}) = 0$ als auch $H_2(f; \mathbb{Z}) = 0$ (da $H_1(S^2) = 0$ und $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$). Es folgt, dass die Spaltung im universellen Koeffiziententheorem nicht natürlich sein kann.

Beweis von Satz 11.1:. Sei $B_p := \mathrm{im}(c_{p+q}) \subset C_p$ und $Z_p := \ker(c_p) \subset C_p$. (Zur Erinnerung: dass C_* ein Kettenkomplex ist, heisst $B_p \subset Z_p$, und man definiert $H_p(C_*) := Z_p/B_p$).

Zunächst betrachte folgende exakte Sequenz:

$$0 \to Z_p \to C_p \xrightarrow{c_p} B_{p-1} \to 0.$$

Wir wollen jetzt die Tatsache benutzen, dass C_* ein *freier* Kettenkomplex ist. Es gilt, dass jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe wieder frei abelsch ist, insbesondere also auch Z_p und B_{p-1}. Dies bedeutet, dass man einen Spalt $s\colon B_{p-1} \to C_p$ konstruieren kann, also so, dass $c_p \circ s = \mathrm{id}_{B_{p-1}}$ (man gibt einfach s auf Basiselementen vor, dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung). Dies liefert einen Isomorphismus $C_p \cong Z_p \oplus B_{p-1}$, man erhält also einen weiteren Spalt $t\colon C_p \to Z_p$. Beachte, dass eine spaltende kurze exakte Sequenz nach Anwenden des Hom- oder des Ext-Funktors in eine kurze exakte Sequenz übergeht (Tensorprodukt und Hom respektieren direkte Summen). Dies ist die einzige Stelle, wo die Voraussetzung eingeht, dass der Kettenkomplex aus freien abelschen Gruppen besteht.

Wie eben erwähnt, haben wir ausserdem die kurze exakte Sequenz $0 \to B_p \to Z_p \to H_p \to 0$, wobei H_p allerdings im allgemeinen nicht frei ist.

Betrachte nun folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(B_p, C) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C_{p+1}, G) & \mathrm{Ext}(H_{p-1}, G) \arrow[u] & \\
0 & \mathrm{Hom}(Z_p, G) \arrow[l] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(C_p, G) \arrow[l] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(B_{p-1}, G) \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \\
 & \mathrm{Hom}(H_p, G) \arrow[u] & \mathrm{Hom}(C_{p-1}, G) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Z_{p-1}, G) \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

Ausser der mittleren vertikalen (hiervon wollen wir ja gerade die Homologie berechnen) sind alle horizontalen und vertikalen Sequenzen exakt (beachte, dass ein paar Pfeile fehlen), die mittlere und untere horizontale wegen des Spaltes s, die anderen wegen Lemma 9.3 und Satz 9.16.

Diagrammjagd impliziert, dass die Ext-Sequenz existiert und exakt ist. Natürlichkeit folgt, da Hom und Ext natürlich sind.

Die gewünschte Spaltung wird induziert von

$$\mathrm{Hom}(t,1)\colon \mathrm{Hom}(Z_p,G) \to \mathrm{Hom}(C_p,G)$$

(dies ist ein Spalt der mittleren horizontalen Sequenz), der Beweis ist wieder eine Diagrammjagd. Beachte, dass wir s willkürlich gewählt haben, hier ist also a priori die Natürlichkeit verletzt. Beispiele zeigen, dass man es auch nicht besser machen kann.

Für die Tor-Sequenz betrachte statt dessen das Diagram

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 & B_p \otimes G \arrow[l] \arrow[d] & C_{p+1} \otimes G \arrow[l] \arrow[d] & \mathrm{Tor}(H_{p-1},G) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z_p \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & C_p \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & B_{p-1} \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & H_p \otimes G \arrow[d] & C_{p-1} \otimes G & Z_{p-1} \otimes G \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Nach Rotieren um π geht dieses Diagramm in das vorher betrachtete über (nach Umbenennen). Insbesondere liefert die vorher durchgeführte Diagrammjagd genauso auch die exakte Sequenz mit Tor. $\square$

12 Höhere Homotopiegruppen

13 Faserungen

14 Faserhomotopiesequenz

Literatur

[1] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.

[2] James F. Davis and Paul Kirk. *Lecture notes in algebraic topology*, volume 35 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[3] Albrecht Dold. *Lectures on algebraic topology.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1972 edition.

[4] Wolfgang Lck. *Algebraic topology. Homology and manifolds. (Algebraische Topologie. Homologie und Mannigfaltigkeiten).* Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. Wiesbaden: Vieweg. ix, 266 p. EUR 29.90 , 2005.

[5] James R. Munkres. *Topology: a first course.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[6] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology.* Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[7] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology.* Springer-Verlag, New York, 1981. Corrected reprint.

[8] Robert M. Switzer. *Algebraic topology—homotopy and homology.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[9] Tammo tom Dieck. *Topologie.* de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1991.

[10] George W. Whitehead. *Elements of homotopy theory*, volume 61 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1978.