# Kurzbeschreibung des Zyklus „Algebraische Topologie“

Thomas Schick*

22. Juni 2012

## 1 Studienobjekte (beispielsweise)

(1) topologische Räume

(2) Mannigfaltigkeiten, z.B. Flächen

(3) Knoten in $\mathbb{R}^3$

(4) Beziehungen zwischen Geometrie und Topologie (Bsp: Satz von Gauss-Bonnet)

## 2 Berühmte Fragestellungen

(1) Poincaré Vermutung: die einzige 3-Mannigfaltigkeit, in welcher jede Schleife zusammenziehbar ist, ist die $S^3$ (Fields Medaille, Clay Millenium Prize)

(2) finde „berechenbare“ Invarianten, mit welchen jeder beliebige Knoten vom trivialen Knoten unterschieden werden kann.

(3) Liste aller zusammenhängenden kompakten Flächen

## 3 Grundbegriffe

**Mengentheoretische Topologie**:

(1) Begriff des topologischen Raums, Konvergenz, Stetigkeit

(2) Kompaktheit

(3) Trennungseigenschaften

(4) Konstruktionen topol. Räume

Wichtige Grundbegriffe in allen nicht komplett algebraischen mathematischen Disziplinen (Funktionalanalysis, Numerik, algebraische Geometrie, Differenzialgeometrie, Differenzialgleichungen, Stochastik,. . . ).

*e-mail: schick@uni-math.gwdg.de
www: http://www.uni-math.gwdg.de/schick

# 4 Echte (?) Anwendungen

(1) Robotik, motion-planning

(2) topologische Kriterien für Komplexitätsprobleme

(3) Tool für (un)lösbarkeit kombinatorischer Probleme

(4) Knotentheorie bei der Faltung von Polynomen

# 5 Innerwissenschaftliche Anwendungen

(1) Kontinuierliche Symmetrien (in der Quantenphysik)

(2) Phasenräume (in der klassichen Mechanik)

(3) Raumzeit —in der allgemeinen Relativitätstheorie, in Quanten(feld)theorie

(4) Satz von Gauß aus der Elektromechanik: hängt von topologischen Eigenschaften des einen Leiter umgebenden Raums ab! Elektrodynamik versteht man am besten als "topologische" Theorie.

# 6 Grundlegende Fragestellungen

## 6.1 Äquivalenzproblem

Eine ganz wichtige Aufgabe (von Mathematikern) ist es, die betrachteten Objekte unterscheiden zu können.

**6.1 Beispiel.** $K$-Vektorräume verschiedener Dimension sind nicht isomorph.

Es geht in der Regel darum, festzustellen, ob zwei Objekte äquivalent sind bezüglich einer natürlich gegebenen Äquivalenzrelation, z.B. Isomorphie.

In der Topologie werden (unter anderem) betrachtet: (differenzierbare) Räume, Zellkomplexe (wie Simplizialkomplexe), topologische Räume und die Relationen Homöomorphie, Diffeomorphie, Homotopie-Äquivalenz, ....

Mit anderen Worten: Topologen versuchen, topologische Räume und die Beziehungen zwischen ihnen zu verstehen.

All diese Eigenschaften sind invariant unter Homöomorphie, aber oft für alle Räume einer vorgegebenen Klasse gleichzeitig erfüllt. Wichtig sind daher *Invarianten.*

Ein Beispiel für eine Invariante (aus der linearen Algebra) ist die Dimension eines Vektorraums.

**6.2 Beispiel.** Euler Charakteristik endlicher Polyeder.

**6.3 Definition.** Sei $K$ endlicher Simplizialkomplex, $c_i$ die Anzahl der $i$-Simplizes von $K$.

$$\chi(K) := \sum_i (-1)^i c_i$$

heißt *Eulercharakteristik* von $K$, $\dim(K) := \max\{i \mid c_i > 0\}$.

**6.4 Satz.** *$\chi(X)$ und $\dim(X)$ sind Homöomorphie-Invarianten endlicher Polyeder.*

## 6.2 Problem der Realisierung von Invarianten

Gegeben sei eine Familie $F$ von topologischen Räumen (mit gewissen “schönen” Eigenschaften), für die eine Invariante $I$ definiert ist. Welche Werte $I(X)$ mit $X \in F$ werden realisiert? Hier hat man also eine Konstruktionsaufgabe: stelle $X \in F$ mit vorgegebenem $I(X)$ her.

**6.5 Beispiel.** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^n$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum.

*6.6 Frage.* Was sind die möglichen Eulercharakteristiken von zusammenhängenden kompakten 2-Mannigfaltigkeiten?

Diese Frage macht Sinn, denn

**6.7 Satz.** *Jede kompakte* 2*-Mannigfaltigkeit ist ein endliches Polyeder.*

*6.8 Aufgabe.* Zeige, dass die Euler-Charakteristik einer Fläche vom Geschlecht $g$ gerade $2 - 2g$ ist.

## 6.3 Klassifikationsproblem

Ausgehend von den Abschnitten 6.1 und 6.3 stellt sich als ultimative Frage die folgende.:

*6.9 Frage.* Gegeben eine Klasse $K$ von topologischen Räume, finde (eine oder mehrere) Invarianten $I$ so dass $I(X) = I(Y)$ genau dann, wenn $X$ und $Y$ äquivalent sind (unter der gerade betrachteten Äquivalenzreltation, z.B. Homöomorphie), und erstelle eine Liste aller möglichen Werte von $I$.

Damit hat man dann die Elemente von $K$ vollständig (bis auf Äquivalenz) verstanden).

Jeder von uns kennt mindestens eine solche Klassifikation (aus der linearen Algebra):

**6.10 Satz.** *Zwei Vektorräume über einem Körper $k$ sind genau dann isomorph, wenn ihre Dimension übereinstimmt.*

*Außerdem gibt es für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\{0\}}$ einen Vektorraum mit Dimension $n$ (und zwar den $k^n$).*

Auf ähnliche Weise gibt es auch Klassifikationsresultate für topologische R"aume.

**6.11 Beispiel.** Jede zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand ist homöomorph entweder zu $\mathbb{R}$ oder zu $S^1$, je nachdem, ob sie kompakt ist oder nicht.

Die Klassifikation liefert hier also eine Liste mit nur zwei Elementen (und das Beispiel passt nicht ganz, da man hier kaum von einer Invariante sprechen kann, welche die beiden unterscheidet).

**6.12 Beispiel.** Zwei zusammenhängende kompakte orientierbare 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind genau dann homöomorph, wenn ihre Eulercharakteristik übereinstimmt. Die Eulercharakteristik nimmt die Werte $\{2, 0, -2, \cdots\}$ an.

Hier liefert die Euler-Charakteristik also eine Bijektion zwischen der Menge $K$ den Homöomorphieklassen von kompakten zusammenhängenden orientierbaren 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ohne Rand und der Menge $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 2\}$.

Die Fläche vom Geschlecht $g$ (also mit $g$ "Löchern") hat Euler-Charakteristik $2 - 2g$, wobei $g(S^2) = 0$, $g(T^2) =, \dots$.

**6.13 Beispiel.** Ein berühmtes Beispiel für ein Klassifikationsproblem ist die *(verallgemeinerte) Poincaré Vermutung.* Sie sagt: jede kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand welche homotopieäquivalent zu $S^n$ ist, ist auch homöoomorph zu $S^n$.

Dies ist richtig für $n = 1, 2$ (und folgt aus obigen Klassfikationen), auch für $n \geq 5$ (1961 von Smale bewiesen) und für $n = 4$ (1982 von Friedmann bewiesen). Der Fall $n = 3$ ist eines der Clay-Millenium problems, für seine Lösung ist ein Preis von 1 Mio Dollar ausgesetzt. M. Perelman behauptet in aktuellen Arbeiten, diese Vermutung bewiesen zu haben, der Beweis ist aber noch nicht entgültig geprüft worden.

## 6.4 Einbettungsproblem

**6.14 Definition.** Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt (topologische) Einbettung, wenn $f\colon X \to f(X)$ ein Homöomorphismus ist.

In der Regel versucht man, Einbettungen in "schöne"Räume, z.B. $\mathbb{R}^n$, zu finden. Analog wird für Gruppen die Darstellungstheorie entwickelt, wo man z.B. versucht, Homomorphismen nach $GL(n, \mathbb{R})$ zu verstehen.

**6.15 Beispiel.**

- Jede glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n$ läßt sich in $\mathbb{R}^{2n}$ einbetten.
- die Kleinsche Flasche läßt sich (entsprechend) in $\mathbb{R}^4$ einbetten. $\mathbb{R}P^2$ läßt sich aber nicht in $\mathbb{R}^3$ einbetten.
- Schönfließ-Theorem: jede Einbettung $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ lässt sich zu einer Einbettung $D^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ fortsetzen.

  Für $n \geq 3$ ist die analoge Aussage falsch.
- jeder metrisierbare Raum lässt sich in einen Banachraum einbetten (Kuratowski-Einbettung).

## 6.5 Problem der Existenz von Zusatzstrukturen

Wir haben bereits gesehen, dass es für topologische Räume nützlich sein kann, Zusatzstrukturen (z.B. eine Triangulierung) zu betrachten. Die Frage ist dann oft: gibt es solche Zusatzstrukturen, und wenn ja, wie viele (bis auf Äquivalenz).

**6.16 Beispiel.**

(1) Ist ein Raum $X$ metrisierbar?

(2) welche Topologischen Mannigfaltigkeiten erlauben eine glatte Struktur (nicht alle, und diese ist in der Regel nicht eindeutig).

(3) Hat jede Mannigfaltigkeit der Dimension $n$ eine Triangulierung (Hauptvermutung sagt: Ja).

  Antworten: richtig für $n = 2, 3$, aber falsch für $n \geq 5$ und für $n = 4$.

  Für glatte Mannigfaltigkeiten ist die Aussage wiederum richtig.

# 7 Methoden der algebraischen Topologie

(1) Fundamentalgruppe

(2) homologische Algebra

(3) Gruppentheorie (wird benutzt, aber es wird auch viel für Gruppentheorie bereitgestellt)

(4) Kategorien und Funktoren

(5) globale (meist lineare) Analysis

(6) Funktionalanalysis

(7) mathematische Logik (Unlösbarkeitsaussagen)

(8) Darstellungstheorie