Kurz-Skript zu „Differential- und Integralrechnung 1“

Thomas Schick*

Last compiled 13. Februar 2003; last edited 13. Februar 2003 or later

Inhaltsverzeichnis

*email: thomas.schick@uni-math.gwdg.de

Hinweis: dieses Skript ist wurde nicht korrekturgelesen. Es gibt mit Sicherheit eine Menge Fehler. Dank an Denise Nakiboglu, Mark Sakschewski und Isabelle Stock, dass einige davon verschwunden sind. Nicht alle Beweise werden vorgeführt, nicht alle behandelten Sätze und Beispiele sind hier notiert.

1 Mengen

Die Theorie der Mathematik muss zwangsläufig von gewissen Grundannahmen ausgehen, die nicht weiter hinterfragt werden können. Wie solche Grundannahmen aussehen können, wird in der mathematischen Logik untersucht. Zu diesen Grundlagen gehört die Mengenlehre. Wir werden den pragmatischen Standpunkt einnehmen, dass wir einige Grundtatsachen der Mengenlehre akzeptieren und benutzen, ohne ihre Beweise führen zu können.

1.1 Definition. Eine *Menge* ist eine Ansammlung wohlunterschiedener Objekte. Diese Objekte werden *Elemente* der Menge genannt. Ist x ein Objekt und M eine Menge, so schreiben wir $x \in M$, falls x zur Menge gehört, sonst $x \notin M$.

Beispiel: $\emptyset$ ist die leere Menge, die kein Element enthält.

1.2 Definition. Seien M_1 und M_2 zwei Mengen. Eine Abbildung $f\colon M_1 \to M_2$ ordnet jedem Element $x \in M_1$ ein Element $f(x) \in M_2$ zu.

Zu jeder Teilmenge $A \subset M_1$ definieren wir die *Bildmenge* $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subset M_2$.

Entsprechend definieren wir für eine Teilmenge $B \subset M_2$ die *Urbildmenge* $f^{-1}(B) := \{x \in M_1 \mid f(x) \subset B\} \subset M_1$. Beachte, dass es sich bei f^{-1} hier *nicht* um eine Abbildung von M_2 nach M_1 handelt.

1.3 Beispiel. Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$ ist eine Abbildung.

Für eine beliebige Menge M definieren wir die *identische Abbiludng* $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ mit $id_M(x) = x\ \forall x \in M$.

Wir wollen das Konzept der Menge und das Konzept der Abbildung ohne weiteres Infragestellen benutzen.

1.4 Definition. Seien $f\colon M_1 \to M_2$ und $g\colon N_1 \to N_2$. Falls $f(M_1) \subset N_1$, definieren wir die *Verknüpfung* oder *Komposition* $g \circ f\colon M_1 \to N_2$ mit $g \circ f(x) := g(f(x))$ für alle $x \in M_1$.

1.5 Definition. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt *injektiv*, falls für jedes $x, y \in M$ $f(x) = f(y)$ nur dann gilt, wenn $x = y$.

Sie heißt *surjektiv*, falls für jedes $y \in N$ ein $x \in M$ existiert mit $f(x) = y$.

f heißt *bijektiv* genau dann wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

1.6 Lemma. *Sei $f\colon M \to N$ eine bijektive Abbildung. Dann gibt es eine* Inverse Abbildung *$g\colon N \to M$, d.h. es gilt $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$.*

Proof. Sei $y \in N$. Dann ist $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, da f surjektiv ist, und enthält nicht mehr als ein Element, da f injektiv ist. Also enthält $f^{-1}(\{y\})$ genau ein Element $x_y \in M$ (welches natürlich von y abhängt). Wir setzen $g(y) := x_y$. Man berechnet $f(g(y)) = y\ \forall y \in N$ und $g(f(x)) = x\ \forall x \in M$. □

2 Komplexe Zahlen

Wir setzen als bekannt und gegeben voraus:

- Die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ der *natürlichen Zahlen*

- Die Menge $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ der *ganzen Zahlen*
- Die Menge $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ der *rationalen Zahlen*
- Die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen*
- Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Die Menge $\mathbb{R}$ ist charakterisiert durch folgende *Axiome* (d.h. Eigenschaften und Regeln):

Es gibt Verknüpfungen

(V+) $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$.

(V·) $\cdot \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy$.

Folgende Regeln gelten:

(K+,K·) Kommutativität: $x + y = y + x$ und $xy = yx$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

(N+,N·) Neutrales Element: es gibt $0 \in \mathbb{R}$ mit $0 + x = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$, es gibt $1 \in \mathbb{R}$ (und $1 \neq 0$) mit $x \cdot 1 = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

(I+,I·) Inverses Element: für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es $-x \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$, für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es $x^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$.

(A+,A·) Assoziativgesetze: $x + (y + z) = (x + y) + z$ und $(xy)z = x(yz)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(D) Distributivgesetz: $x(y + z) = xy + xz$ $\forall x, y, y \in \mathbb{R}$.

Jede Menge, die Regeln entsprechend den hier aufgelisteten erfüllt heißt Körper. Wir sehen: die rationalen Zahlen bilden einen Körper, ebenso die reellen Zahlen.

Auf der Menge $\mathbb{R}$ gibt es eine *Anordnung* $<$, d.h. für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

- genau eine der Relationen $x < y$, $y < x$, $x = y$ ist wahr.
- wen $x < y$ und $y < z$ dann auch $x < z/$
- wenn $x < y$ dann auch $x + z < y + z$.
- wenn $x < y$ und $z > 0$ dann auch $xy < yz$.

Diese Anordnung erfüllt das *Archimedische Prinzip*

(Ar) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

All diese Eigenschaften hat sowohl die Menge $\mathbb{R}$ als auch $\mathbb{Q}$. Das letzte Axiom für die reellen Zahlen ist das *Vollständigkeitsaxiom* (V). Dieses wird später genau erläutert werden. Hier wollen wir uns darauf beschränken zu erwähnen, dass es dieses eine weitere Axiom gibt, und dass dieses Axiom zum Beispiel impliziert, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ eine *Quadratwurzel* $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{x} > 0$ und $\sqrt{(x)}^2 = x$ existiert.

Insbesondere erfüllt $\mathbb{Q}$ das Vollständigkeitsaxiom nicht.

2.1 Satz. *Es gibt die reellen Zahlen. Die Axiome legen $\mathbb{R}$ bis auf Isomorphie eindeutig fest.*

2.2 Definition. $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wir wollen diese Menge $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen* zu einem Körper machen.

Setze dazu $\overline{1} := (1,0)$ und $i := (0,1)$. Man kann dann jedes Element (x,y) eindeutig schreiben als $\overline{1} \cdot x + i \cdot y$ ($\{\overline{1}, i\}$ ist Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

Wir definieren Verknüpfungen

$$+\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon (x,y) + (x',y') := (x+x', y+y')$$

$$\cdot\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon (x,y) \cdot (x',y') := (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Jeder komplexen Zahl $z = (x,y)$ ordnen wir außerdem ihren *Betrag* $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ zu, also die Länge des Vektors (x,y).

2.3 Satz. *Mit den oben definierten Verknüpfungen wird $\mathbb{C}$ ein Körper. Man identifiziert $\mathbb{R}$ mittels der Abbildung $x \mapsto \overline{1} \cdots x$ mit der entsprechenden Teilmenge der komplexen Zahlen (also $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) und schreibt entsprechend $x + iy$ für das Element (x,y).*

Die komplexen Zahlen kann man sich mittels der Gauss-Zahlenebene veranschaulichen. Die Addition ist die übliche Vektoraddition, die Multiplikation geht so vor, dass man die Längen der Vektoren multipliziert und die Winkel addiert.

2.4 Lemma. *Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.*

Außerdem gilt $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Letztere Formel heißt Dreiecksungleichung.

2.5 Definition. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definiere das *komplex konjugierte* $\overline{z} := x - iy$, sowie den Realteil $Re(z) := x$ und den *Imaginärteil* $Im(z) := y$.

Motivation für die Benutzung komplexer Zahlen:

- Wichtig zum Lösen von Gleichungen, z.B. $x^2 = -1$.
- Nützlich bei der Beschreibung von Phänomenen in den Naturwissenschaften (und darüber hinaus), insbesondere für alles, was schwingt.
- Quantenmechanik kommt ohne komplexe Zahlen gar nicht aus.

3 Grenzwerte

3.1 Definition. Eine *Folge* (komplexer Zahlen) ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{C}\colon n \mapsto a_n$. Man schreibt hierzu $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.2 Definition. $a \in \mathbb{C}$ heißt *Grenzwert* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls für jedes $\epsilon > 0$ eine Zahl $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a - a_n| < \epsilon$ ist für alle $n \geq N_\epsilon$.

Dann schreibt man $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.

Eine Folge (a_n) heißt *divergent*, falls kein solcher Grenzwert a existiert.

3.3 Satz. *Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.*

3.4 Definition. Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, falls für jedes $R > 0$ ein $N_R \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n > R$ für alle $n \geq N_R$ gilt.

3.5 Beispiel. Es gilt

(1) $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

(2) Für jedes $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $1/n^p \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(3) Für jedes $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $1/\sqrt[p]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(4) Fall $|q| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Falls $q = 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$, sonst divergiert die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proof. Für den Beweis der ersten drei Folgen muss man zu $\epsilon > 0$ geeignete $n \in \mathbb{N}$ finden, etwa $n > 1/\epsilon$, $n > 1/\sqrt[p]{\epsilon}$, $n > 1/\epsilon^p$. Der Beweis der letzten Aussage erfordert etwas mehr Mühe, wir benötigen dazu einige weitere Konzepte, die im folgenden eingeführt werden. □

3.6 Definition. Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Wir definieren (induktiv)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i = a_n + (a_{n-1} + (\cdots + a_1)\cdots),$$

wobei $\sum_{i=1}^{0} a_i := 0$ (und $\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$).

Entsprechend

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_n \cdot a_{n-1} \cdot \cdots \cdot a_1, \qquad \prod_{i=1}^{0} a_i := 1.$$

3.7 Definition. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere die *Fakultät*

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i.$$

Insbesondere gilt $0! = 1 = 1!$.

Für $n, k \in \mathbb{N}$, $k \le n$ definiere

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Falls $k > n$ setze $\binom{n}{k} := 0$.

3.8 Satz. *Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ gilt die* binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Proof. Induktion nach n. □

3.9 Satz. *Es gilt die* Bernoulli Ungleichung*: falls $x \in \mathbb{R}$ mit $x \ge 0$ gilt*

$$(1+x)^n \ge 1 + nx.$$

Proof. $(1+x)^n = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \ge 1 + nx$. □

Wir bestimmen nun den Grenzwert der Folge q^n. Da $q^n = 0$ für alle $n > 0$, falls $q = 0$, brauchen wir nur $q \neq 0$ betrachten. Setze dann $x := (1 - |q|)/|q|$, so dass $|q| = 1/(1+x)$. Falls $|q| < 1$ gilt $x > 0$. In diesem Fall gilt

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Sei nun $|q| \geq 1$ und $q \neq 1$. Setze $\epsilon := |q-1|/20 > 0$. Sei $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $|q^n - a| < \epsilon$. Dann gilt

$$\left|q^{n+1} - a\right| \geq \left|q^{n+1} - q^n\right| - |q^n - a| \geq |q-1| - |q-1|/20 = 19\epsilon.$$

Diese Zahl a kann also nicht Grenzwert der Folge sein. Da a beliebig war, hat die Folge keinen Grenzwert.

3.10 Satz. *Seien (a_n) und (b_n) Folgen komplexer Zahlen, $a, b \in \mathbb{C}$. Es gilt*

- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \iff |a_n - a| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$
- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ *und* $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \implies a_n + b_n \xrightarrow{n\to\infty} a + b.$
- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ *und* (b_n) *divergiert* $\implies (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergiert.*
- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ *und* $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \implies a_n b_n \xrightarrow{n\to\infty} ab.$
- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$
- *Seien* $a_n < b_n < c_n$ *Folgen reeller Zahlen mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} c_n$*. Dann konvergiert auch* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, mit Grenzwert* a*.*

Proof. Finde zu jedem ϵ die passenden n's. □

3.11 Korollar. *Sei $(z_n = x_n + iy_n)$ eine Folge komplexer Zahlen, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei $z = x + iy$. Es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \iff \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ und } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Proof. $|x_n - x| \leq |z_n - z|$, daher impliziert die Konvergenz von z_n gegen z auch die Konvergenz von x_n gegen x. Rest folgt aus Summen-Regel. □

3.1 Vollständigkeit

Alle bisher betrachteten Sätze über Grenzwerte setzen voraus, dass man den Grenzwert "erraten" kann, um dann mit ihm zu arbeiten. Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wie man, ohne den Grenzwert zu kennen, aussagen über Konvergenz machen kann.

3.12 Satz. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent (gegen a). Dann gilt:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ so dass } |a_n - a_m| < \epsilon\ \forall n > m > N. \tag{3.13}$$

Proof. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ wähle N so dass $|a_n - a| < \epsilon/2$ für $n > N$. Dann gilt $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \epsilon$ für $n, m > N$. □

3.14 Definition. Eine Folge (a_n) für die die Aussage (3.13) gilt heißt *Cauchy-folge.*

Wir kehren nun zurück zu den Eigenschaften von $\mathbb{R}$.
Das noch fehlende Vollständigkeitsaxiom lautet:

(V) **Vollständigkeitsaxiom** Jede Cauchyfolge reeller Zahlen konvergiert.

Beachte: dies gilt in $\mathbb{Q}$ *nicht*.

3.15 Beispiel. Wir konstruieren induktiv eine Cauchyfolge rationaler Zahlen a_n, deren Grenzwert $\sqrt{2}$ ist. Es ist aber bekannt, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist.

a_n wird folgendermaßen konstruiert: $a_1 := 1$, $a_n := p_n/10^n$, wobei p_n die größte natürliche Zahl ($\geq 10^{n-1}a_{n-1}$) mit $(p_n/10^n)^2 \leq 2$ ist. Klar: diese Folge ist *monoton wachsend* (d.h. $a_{n+1} \geq a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$). Falls $m > n$ gilt außerdem $a_n \leq a_m < a_n + 1/10^n$, woraus sofort folgt, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.

Wegen Vollständigkeit hat sie also einen Grenzwert a. Es gilt $a > 0$, und man zeigt $a^2 = 2$, also $a = \sqrt{2}$.

3.16 Satz. *Jede Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ konvergiert.*

Proof. Ist $(z_n = x_n + iy_n)$ eine Cauchyfolge, so auch die reellen Folgen (x_n) und (y_n). Da diese nach Vollständigkeitsaxiom konvergieren, konvergiert auch $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

3.17 Satz. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge reeller Zahlen. Die Folge sei monoton wachsend und* beschränkt *(d.h. es gibt $R \in \mathbb{R}$ mit $|x_n| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Dann ist (x_n) konvergent.*

Proof. Wir zeigen, dass die Folge eine Cauchyfolge ist. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es $\epsilon > 0$ so dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ zwei Zahlen $n_N > m_N > N$ existieren mit $|x_{n_N} - x_{m_N}| = x_{n_N} - x_{m_N} > \epsilon$.

Definiere induktiv $n_0 = m_0 := 0$ und $n_k > m_k > n_{k-1}$ mit $x_{n_k} - x_{m+k} > \epsilon$. Wähle $l > (M - x_0)/\epsilon$.

Dann gilt $x_{n_l} > \epsilon + x_{m_l} > \epsilon + x_{n_{l-1}} > \cdots > l\epsilon x_0 > M - x_0 + x_0 = M$. Hier verwenden wir, dass die Folge monoton wachsend ist, und bis zu x_{n_l} mindestens l-mal ein Spring um ϵ oder mehr zu verzeichnen ist. Wir erhalten einen Widerspruch zur Voraussetzung, dass M Schranke für x_n für alle n. □

3.18 Definition. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Sei $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion. Dann nennen wir die Folgen (y_n) mit $y_n = x_{\phi(n)}$ *Teilfolge* von (x_n).

3.19 Satz. *Sei (x_n) eine Folge und $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Sei $(x_{\phi(n)})$ Teilfolge. Dann gilt auch $x_{\phi(n)} \xrightarrow{n\to\infty} x$.*

Proof. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \epsilon$ für alle $n > N$. Da $\phi(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt also insbesondere $\left|x_{\phi(n)} - x\right| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. □

Der folgende Satz heißt *Satz von Bolzano-Weierstrass*.

3.20 Satz. *Jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{R}$ hat eine konvergente Teilfolge.*

Proof. Da die Folge beschränkt ist, gibt es $R \in \mathbb{R}$ so dass $-R \leq x_n \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir definieren nun induktive Teilmengen $N_k \subset \mathbb{N}$, Zahlen $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$|N_k| = \infty$, $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k < b_k \leq b_{k-1} \leq \cdots \leq b_0$, $b_k - a_k = 2^{1-k}R$, $\phi(k) := \min N_k$, $\phi(k-1) \notin N_k$.

Wir starten mit $N_0 := \mathbb{N}$, $a_0 := -R$, $b_0 := R$.

Seien $N_0, \ldots, N_k$, $a_0, \ldots, a_k$ und $b_0, \ldots, b_k$ mit den gewünschten Eigenschaften bereits definiert. Definiere $I_k^< := [a_k, (a_k + b_k)/2]$, $I_k^> := [(a_k + b_k)/2, b_k]$, d.h. wir teilen das Interval $[a_k, b_k]$ in zwei Hälften. Setze $X_k^< := \{n \in N_k \mid x_n \in I_k^<\}$ und $X_k^> := \{n \in N_k \mid x_n \in I_k^>\}$. Dann gilt $X_k^> \cup X_k^> = N_k$, mindestens eine der beiden Mengen enthält also unendlich viele Elemente.

Falls $|X_k^<| + \infty$ setze $N_{k+1} := X_k^< \setminus \{\phi(k)\}$, $a_{k+1} := a_k$, $b_{k+1} := (a_k + b_k)/2$. Sonst verfahre entsprechend mit der rechten Hälfte.

Insgesamt gilt: falls $m, n > N$ ist $x_{\phi(m)}, x_{\phi(n)} \in [a_N, b_N]$, also $\left|x_{\phi(m)} - x_{\phi(n)}\right| \leq 2^{1-N} \cdot R$. Nach dem Cauchy-Kriterium ist also $(x_{\phi(n)})$ eine konvergente Teilfolge. $\square$

4 Reihen

4.1 Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge komplexer Zahlen. Die Folge

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit } s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

heißt die von (a_n) gebildete *Reihe*, die Glieder s_n heißen *Partialsummen.*

Zur "Abkürzung" schreibt man $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Falls die Folge (s_n) konvergiert, benutzt man das Symbol $\sum_{n=0}^{\infty}$ auch für den Grenzwert der Reihe.

4.2 Satz. *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen komplexer Zahlen. Sei $c \in \mathbb{C}$. Falls beide konvergieren, mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$, so gilt*

(1) $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = a + b$

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} c a_k = ca$

(3) Falls $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ und $a_k \leq b_k$ für alle k, so gilt $a \leq b$.

4.3 Beispiel. Es gilt

(1)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \end{aligned}$$

(2) Sei $a_k \geq 0$ und es existiere $R \in \mathbb{R}$ so dass $\sum_{k=0}^{n} a_k \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, da die zugehörige Folge $(s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt ist.

(3)
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \begin{cases} = \frac{1}{1-q}; & \text{falls } |q| < 1 \\ \text{divergent}; & \text{falls } |q| \geq 1. \end{cases}$$

Per Induktion zeigt man für $q \neq 1$, dass $\sum_{k=0}^{n} q^k = (1-q^{n+1})/(1-q)$. Wir wissen bereits, dass $q^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ falls $|q| < 1$, und dass (q^{n+1}) divergent, falls $|q| \geq 1$ und $q \neq 1$.

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent. Dies sieht man durch folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \\ &= 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}) + \dots \\ &\geq 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Da $(1 + \frac{n}{2}) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, ist die Teilfolge $(s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} 1/k)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, also auchdie ganze Reihe.

4.4 Satz. *Sei die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. Dann gilt für die Folge der Glieder der Reihe: $a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$.*

Proof. Nach Voraussetzung ist die Folge $(s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Also erfüllt diese Folge die Cauchy-Bedingung. Insbesondere gilt $|a_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Beachte:dies ist eine spezielle Folgerung der Cauchy-Bedingung, die aber noch viel stärker ist und insbesondere auch Aussagen über $|s_m - s_n|$ macht, wenn der Abstand zwischen m und n größer als 1 ist! □

4.5 Definition. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, so sagen wir, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergiert.*

4.6 Bemerkung. Der Begriff der absoluten Konvergenz kann nicht so direkt auf Folgen zurückgeführt werden, wie dies bei den anderen Aussagen über Reihen der Fall war.

4.7 Lemma. *Da $|a_k| \geq 0$, ist die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=0}^{n} |a_k|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge nichtnegativer reeller Zahlen.*

Es gibt also nur zwei Alternativen: entweder ist diese Folge beschränkt, dann ist sie konvergent, oder sie ist unbeschränkt, dann geht die Folge gegen $+\infty$.

In anderen Worten: entweder $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$, dann liegt Konvergenz vor, oder $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = +\infty$, d.h. man hat bestimmte Divergenz gegen $+\infty$.

4.8 Satz. *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ gegen eine reelle Zahl konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.*

Kurz: aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz.

Proof. Der Beweis wird mittels des Cauchy-Kriteriums geführt. Sei also $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, sei $\Sigma_n := \sum_{k=0}^n |a_k|$. Wir wollen zeigen, dass die Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Cauchy-Kriterium erfüllt, und wissen, dass dies nach Voraussetzung für die Reihe $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt. Sei also $\epsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|\Sigma_n - \Sigma_m| < \epsilon \qquad \forall m \geq n \geq N.$$

Dann gilt aber auch für $m \geq n \geq N$

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = |\Sigma_m - \Sigma_n| < \epsilon.$$

Damit erfüllt (s_n) das Cauchy-Kriterium, ist also konvergent. □

4.1 Kriterien für Konvergenz und absolute Konvergenz

4.9 Definition. Sei für jede natürliche Zahl n eine Aussage A_n gegeben (z.B. ‚dass eine gewisse Ungleichung erfüllt ist). Wir sagen: die Aussage A_n ist *für fast alle* n richtig, wenn die Aussage richtig ist für alle bis auf endlich viele n (es kommt nur darauf an, dass die Ausnahmemenge endlich ist, nicht, wie groß sie ist).

Entsprechend, wenn für jedes Element einer anderen unendlichen Menge eine Aussage gegeben ist.

4.10 Satz. ***(Wurzelkriterium)***

(1) *Sei* $0 < c < 1$ *und* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge komplexer Zahlen mit* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$*. Dann ist* $\sum_{k=0}^\infty a_k$ *absolut konvergent.*

(2) *Falls hingegen* $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$*, so ist* $\sum_{k=0}^\infty a_k$ *divergent.*

Proof. Wir beweisen zunächst den Divergenzfall: Falls $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, so auch $|a_n| \geq 1$. Geschieht dies für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so ist $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, die zugehörige Reihe also auch nicht konvergent.

Ist umgekehrt $c < 1$ und $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c$, so gilt natürlich $|a_n| \leq c^n$. Somit $\sum_{k=n_0}^\infty |a_k| \leq \sum_{k=n_0}^\infty c^k \leq 1(1-c) < \infty$, wobei n_0 so gewählt wird, dass $\sqrt[k]{|a_k|} \leq c$ für alle $k \geq n_0$ (es gibt ja nur endlich viele k, so dass diese Ungleichung nicht erfüllt ist). □

4.11 Satz. ***(Quotientenkriterium)***
Sei $0 < c < 1$ *und sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge komplexer Zahlen mit* $a_n \neq 0$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

(1) *Falls es* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq c \qquad \forall n \geq N,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k$ *absolut konvergent.*

(2) Falls es $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 \qquad \forall n \geq N,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Hierbei wird in beiden Fällen vorausgesetzt, dass N genügend groß ist, dass der Nenner jeweils von Null verschieden ist.

Proof. Wir beweisen wieder zunächst den Fall der Divergenz. Dann gilt, dass $|a_n| \geq |a_N| > 0$ für alle $n \geq N$ (einfache Induktion). Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also keine Nullfolge, folglich die Reihe nicht konvergent.

Liegt jedoch die erste Voraussetzung vor, so gilt

$$|a_{N+n}| \geq c\,|a_{N+n-1}| \geq \cdots \geq c^n\,|a_N|\,,$$

wie man ebenfalls sofort durch Induktion einsieht. Also gilt

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} c^k\,|a_N| = |a_N|\,\frac{1}{1-c}.$$

Addition der *endlich vielen* fehlenden Glieder $\sum_{k=0}^{N-1} |a_k|$ ändert nichts an der absoluten Konvergenz. □

5 Potenzreihen

5.1 Definition. Seien für $k \in \mathbb{N}$ $a_k \in \mathbb{C}$ gegeben. Der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

heißt *Potenzreihe* (mit Koeffizienten a_k). Für alle $z \in \mathbb{C}$, für welche $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergiert, erhält man auf diese Weise eine Funktion $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Uns interessiert jetzt natürlich vor allem folgende Frage: gegeben eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die entsprechende Reihe komplexer Zahlen konvergent?

5.2 Satz. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe. Es gebe $c \in \mathbb{R}$ so dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, Dann gilt: falls $|z| < 1/c$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ absolut.*

Falls $\sqrt[n]{|a_n|} \geq c$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ und $|z| \geq 1/c$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ divergent.

Proof. Es gilt $\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|z|$, wende nun das Wurzelkriterium an. □

5.3 Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge. $m \in \mathbb{R}$ heißt *Infimum* von M, (schreibe $m = \inf M$), falls gilt:

(1) $m \leq x$ für alle $x \in M$

(2) Für jedes $v \in \mathbb{R}$ mit der gleichen Eigenschaft: $v \leq x \; \forall x \in M$ gilt:

$$v \leq m.$$

Wir sagen: m ist die *größte untere Schranke* von M.

Entsprechend definiert man die *kleine obere Schranke* (indem man in der Definition $\leq$ überall mit $\geq$ vertauscht). Diese wird *Supremum* $\sup M$ genannt.

5.4 Beispiel. (1) Falls M eine Minimum besitzt, so gilt $\inf M = \min M$.

(2) Falls $M = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, so $\inf M = a$.

(3) $\inf\{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\} = \sqrt{2}$.

5.5 Satz. *Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum. Dieses ist eindeutig.*

Proof. Konstruiere induktiv Folgen $a_n \in \mathbb{R}$, $x_n \in M$ mit folgende Eigenschaften:

(1) $a_n \leq x$ für alle $x \in M$ (also alle a_n sind untere Schranken)

(2) $x_n \in M$

(3) (a_n) ist monoton wachsend

(4) (x_n) ist monoton fallend

(5) $|x_n - a_n| \leq 2^{-n} |x_0 - a_0| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Für den Induktionsanfang wähle für a_0 irgendeine untere Schranke (diese existiert nach Voraussetzung) und irgendein $x_0 \in M$ (geht, da $M \neq \emptyset$).

Für den Induktionsschritt seien $a_0, \dots, a_{n-1}$ und $x_0, \dots, x_{n-1}$ mit den gewünschten Eigenschaften bereits gefunden. Setze $k_n := (x_{n-1} - a_{n-1})/2$. Falls k_n untere Schranke von M, setze $a_n := k_n$ und $x_n := x_{n-1}$, damit sind weiterhin alle Bedingungen erfüllt.

Falls k_n keine untere Schranke, gibt es $x_n \in M$ mit $x_n \leq k_n$. Setze dann $a_n := a_{n-1}$. Wieder sind alle Bedingungen erfüllt.

Die Folgen (a_n) und (x_n) konvergieren, da sie beide monoton und beschränkt sind.

Setze nun $m := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann gilt $m = \inf M$, da

(1) falls $x \in M$, so gilt $a_n \leq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $m = \lim_{n\to\infty} a_n$, also auch $m \leq x$. Also ist M untere Schranke.

(2) Sei $m' \in \mathbb{R}$ untere Schranke von M. Dann gilt $m' \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also auch $m' \leq m = \lim x_n$. Damit ist m kleinste untere Schranke.

$\square$

5.6 Definition. Wir führen jetzt die neuen Symbole $-\infty$ und $+\infty$ ein. Dies sind *keine* Zahlen, wir werden nicht mit ihnen rechnen. Wir werden sie allerdings als Limes bestimmt divergenter Folgen ($x_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$) zulassen. Außerdem lassen wir zu, diese mit Zahlen zu vergleichen. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$-\infty < x < +\infty.$$

Sei $M \subset \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Wir definieren nun ein verallgemeinertes Infimum, welches auch die Symbole $+\infty$ oder $-\infty$ annehmen kann.

(1) Falls M leer ist, setze $\inf M := +\infty$.

(2) Falls $M \neq \emptyset$ nach unten beschränkt ist, ist $\inf M \in \mathbb{R}$ definiert.

(3) Falls M nicht nach unten beschränkt ist, setze $\inf M := -\infty$.

Entsprechend definiert man $\sup M$. Es gilt $\sup M = -\inf\{-x \mid x \in M\}$.

5.7 Definition. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir definieren $\limsup_{k\to\infty} a_k := \sup\{r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid$ es gibt Teilfolge $(_{\phi(k)})$ von (a_k) welche gegen r konvergiert (falls $r \in \mathbb{R}$) oder bestimmt divergiert (falls $r \in \{-\infty, +\infty\}).\}$

Wir setzen $\liminf_{k\to\infty} a_k := -\limsup_{k\to\infty}(-a_k)$.

5.8 Satz. *Sei (a_k) eine Folge komplexer Zahlen. Setze*

$$R := \begin{cases} \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}. & \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \\ 0 & \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = +\infty \\ +\infty & \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0. \end{cases}$$

Wir nennen R den Konvergenzradius *der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Dann gilt*

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist konvergent für $|z| < R$.

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist divergent für $|z| > R$.

5.9 Bemerkung. Für die komplexen Zahlen z mit $|z| = R$ macht der Satz keine Aussage, Beispiele zeigen, dass hier sowohl Konvergenz als auch Divergenz auftreten kann.

5.10 Satz. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe. Falls $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, und falls $b := \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| / |a_n|$ existiert, so gilt:*

Der Konvergenzradius R der Potenzreihe erfüllt:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{falls } b > 0 \\ +\infty & \text{falls } b = 0. \end{cases}$$

6 Stetigkeit

6.1 Definition. Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f \colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Sei $a \in D$.

Die Funktion f heißt *stetig an a*, falls gilt:

für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Anschaulich: wenn man mit x nur nahe genug an a herankommt, so ist auch $f(x)$ sehr nahe bei $f(a)$.

Die Funktion f heißt *stetig*, falls sie an jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

6.2 Bemerkung. Für eine Funktion $f \colon I \to \mathbb{R}$ (wo $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist) kann man sich Stetigkeit veranschaulichen als: der Graph der Funktion f kann ohne absetzen durchgezeichnet werden. Dies ist nur eine Veranschaulichung, und es gibt "verrückte" Funktionen, die stetig sind, ohne dass man den Graphen wirklich zeichnen könnte.

Beachte, dass bei der Definition der Stetigkeit nur Punkte im Definitionsbereich betrachtet werden. Daher ist z.B. $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}; x \mapsto 1/x$ stetig. Der Punkt 0 wird nicht betrachtet, da er außerhalb des Definitionsbereichs liegt.

6.3 Lemma. *Sei $D \subset \mathbb{C}$, $a \in D$ und $f \colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Es gilt:*

f ist stetig an a genau dann, wenn für jede *Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Beachte, dass insbesondere für jede solche Folge die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren muss.

6.4 Beispiel. Sei $c \in \mathbb{C}$. Die konstante Funktion $f_c \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}; x \mapsto c$ ist stetig.

Die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}; x \mapsto x$ ist stetig.

6.5 Satz. *Seien $D, E \subset \mathbb{C}$, $f, g \colon D \to \mathbb{C}$ Funktionen, $h \colon E \to \mathbb{C}$ eine weitere Funktion. Außerdem sei $a \in D$, $f(D) \subset E$. Seien f und g stetig an a und h stetig an $f(a) \subset E$. Dann gilt*

(1) Die Funktion $f + g \colon D \to \mathbb{C}; x \mapsto f(x) + g(x)$ ist stetig an a.

(2) Die Funktion $f \cdot g \colon D \to \mathbb{C}; x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ ist stetig an a.

(3) Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, ist die Funktion $f/g \colon D \to \mathbb{C}; x \mapsto f(x)/g(x)$ stetig an a.

(4) Die Komposition $h \circ f \colon D \to \mathbb{C}; x \mapsto h(f(x))$ ist stetig an a.

6.6 Beispiel. Aus dem vorherigen folgt, dass jede Polynomfunktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}; f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ stetig auf ganz $\mathbb{C}$ ist, und jede ganzrationale Funktion

$$g \colon D \to \mathbb{C}; g(z) = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}{\sum_{j=0}^{m} b_j z^j}$$

stetig auf der Menge $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \sum_{j=0}^{m} b_j z^j \neq 0\}$.

6.7 Satz. *Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Man erhält also eine Funktion $f \colon \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Diese Funktion ist stetig.*

6.1 Grenzwerte von Funktionen

6.8 Definition. Sei $A \subset \mathbb{C}$. Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* von A, falls für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $\{x \in A \mid 0 < |x - z| < \epsilon\}$ unendlich viele Elemente enthält.

Sei $f \colon A \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $a \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von A. Wir sagen

$$\lim_{x\to z} f(x) = a,$$

falls die Funktion

$$f_a \colon A \to \mathbb{C};\ x \mapsto \begin{cases} f(x); & x \neq z \\ a; & x = z \end{cases}$$

stetig an a ist.

6.9 Lemma. *Eine Funktion $f \colon A \to \mathbb{C}$ ist an einem Häufungspunkt z von A genau dann stetig, wenn $\lim_{x\to z} f(x) = f(z)$ gilt.*

7 Differentiation

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Die einfachsten Funktionen haben die Gestalt $t \mapsto at$ (linear) oder allgemeiner $t \mapsto y_0 + a(t - t_0)$ (affin, der Graph ist ebenfalls eine Gerade) für geeignete a, y_0 und t_0. Wir wollen jetzt untersuchen, wie man allgemeine Funktionen durch solche einfachen Funktionen approximieren kann.

7.1 Definition. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ heißt *offen* (genauer: *offen in* $\mathbb{R}$), wenn für jeden Punkt $x \in U$ eine ganze ϵ-Umgebung in U enthalten ist, d.h. wenn $\epsilon > 0$ existiert, so dass für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \epsilon$ gilt: $y \in U$.

Entsprechend definiert man für Teilmengen der komplexen Zahlen, wann sie *offen in* $\mathbb{C}$ sind.

7.2 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen in $\mathbb{R}$ und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in U$. f heißt *differenzierbar* an x_0 (genauer: *reell differenzierbar an* x_0), falls $a \in \mathbb{C}$ existiert, so dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + \rho(h) \qquad \forall h \in \mathbb{R} \text{ mit } x_0 + h \in U,$$

und so dass

$$\frac{\rho(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Man schreibt: $f'(x_0) := a$.

7.3 Beispiel. Falls $f(x) = ax + b$, so gilt $f'(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da in diesem Fall $f(x + h) = ax + ah + b = f(x) + ah$, und $\rho(h) = 0$.

Außerdem $(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$ und $h^2/h \xrightarrow{h \to 0} 0$, so dass für $f(x) = x^2$ gilt $f'(x) = 2x$.

7.4 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $a \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann gilt: f ist reell diffbar an a genau dann wenn der Limes der* Differenzenquotienten

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

existiert. Dann gilt $f'(a) = \lim_{h \to 0}(f(a + h) - f(a))/h$.

Proof. Schreibe $f(a + h) = f(a) + ch + \rho_c(h)$. Für $h \neq 0$ ist dies äquivalent zu $(f(a + h) - f(a))/h = c + \rho_c(h)/h$. Falls f diffbar an a, also $\rho_c(h)/h \xrightarrow{h \to 0} 0$, so konvergiert der Differenzenquotient gegen die Ableitung c.

Ist umgekehrt der Differenzenquotient konvergent, so gilt $c + \rho_c(h)/h \xrightarrow{h \to 0} \lim_{h \to 0}(f(a+h) - f(a))/h$. Wählt man also c als diesen Limes, so gilt $\rho_c(h)/h \xrightarrow{h \to 0} 0$, so dass die Funktion an a diffbar ist mit Ableitung $c = \lim_{h \to 0}(f(a + h) - f(a))/h$. □

7.5 Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen in $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{C}$ gegeben. f heißt *komplex differenzierbar an z_0*), falls $a \in \mathbb{C}$ existiert, so dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + \rho(h) \qquad \forall h \in \mathbb{C} \text{ mit } x_0 + h \in U,$$

und so dass

$$\frac{\rho(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Man schreibt wieder: $f'(x_0) := a$.

7.6 Bemerkung. Komplexe Differenzierbarkeit ist eine viel stärkere Eigenschaft als reelle Differenzierbarkeit, da man alle “komplexen Richtungen” gleichzeitig kontrollieren muss. Mit komplex diffbaren Funktionen beschäftigt man sich in der “komplexen Analysis”, auch “Funktionentheorie” genannt.

7.7 Beispiel. Es gilt wieder: $f(z) = az + b$ hat komplexe Ableitung $f'(z) = a$. Die Funktion $z \mapsto \overline{z}$ ist aber nicht komplex differenzierbar.

7.8 Satz. *Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ (reell oder komplex) differenzierbar bei $x_0 \in U$. Dann ist f stetig bei x_0.*

Proof. $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0} f(x_0) + ah + \rho(h) = f(x_0)$. □

7.9 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}$ (oder $U \subset \mathbb{C}$) offen, $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ reell (oder komplex) diffbar an $x_0 \in U$. Dann gilt: $f+g$, fg, und falls $g(x_0) \neq 0$ auch $1/g$ sind diffbar bei x_0 mit*

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0)\\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\\ (1/g)'(x_0) &= -g(x_0)^{-1}g'(x_0)g(x_0)^{-1} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.\end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned}(f+g)(x_0+h) =& f(x_0+h) + g(x_0+h) = f(x_0) + g(x_0) + (f'(x_0) + g'(x_0))h + (\rho_f(h) + \rho_g(h)).\\ (fg)(x_0+h) =& f(x_0+h)g(x_0+h)\\ =& f(x_0)g(x_0) + \left(f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\right)h +\\ & \left(f(x_0)\rho_g(h) + \rho_f(h)g(x_0) + hf'(x_0)\rho_g(h) + \rho_f(h)g'(x_0)h\right).\\ g(x_0+h)^{-1} &= g(x_0)^{-1} + g(x_0)^{-1}(g(x_0) - g(x_0+h))g(x_0+h)^{-1}\\ &= g(x_0)^{-1} - g(x_0)^{-1}(g'(x_0)h + \rho(h))g(x_0+h)^{-1}\\ &= \frac{1}{g(x_0)} - \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}h + \left(\frac{-\rho(h)}{g(x_0+h)+g(x_0)} + \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}h\left(\frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x_0+h)}\right)\right)\end{aligned}$$

□

7.10 Beispiel. Sei $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein Polynom. Dann ist f überall differenzierbar mit $f'(z) = \sum_{k=1}^n a_k k z^{k-1}$.

Sie $g(z)\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $g(z) = 1/z$. Dann ist g überall im Definitionsbereich diffbar mit $g'(z) = -1/z^2$.

Proof. Wende induktiv Summen-, Produkt- und Quotientenregel an. □

7.11 Satz. *Wir haben die* Kettenregel*: Seinen U, V offen, $f\colon U \to \mathbb{C}$, $g\colon V \to \mathbb{C}$ gegeben, $f(U) \subset V$. Sei f (reell oder kmplex) diffbar an $x_0 \in U$, g (reell oder komplex) diffbar an $f(x_0) \in V$. Dann gilt: $g \circ f\colon U \to \mathbb{C}$ ist diffbar an x_0 mit*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Proof.

$$\begin{aligned}g \circ f(x_0+h) =& g(f(x_0+h)) = g(f(x_0) + [f'(x_0)h + \rho_f(h)])\\ =& g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\left(f'(x_0)h + \rho_f(h)\right) + \rho_g(f'(x_0)h + \rho_f(h))\\ =& g \circ f(x_0) + g'(f(x_0))f'(x_0)h + g'(f(x_0))\rho_f(h)\\ & + \rho_g(f'(x_0)h + \rho_f(h)).\end{aligned}$$

Nun gilt $\rho_f(h)/h \xrightarrow{h\to 0} 0$, also auch $g'(f(x))\rho_f(h)/h \xrightarrow{h\to 0} 0$. Es bleibt, zu zeigen, dass $\rho_g(f'(x_0)h+\rho_f(h))/h \xrightarrow{h\to 0} 0$. Falls $f'(x_0)h+\rho_f(h)=0$, so auch $\rho_g(f'(x_0)h+\rho_f(h))=\rho_g(0)=0$. Falls $f'(x_0)h+\rho_f(h)\neq 0$, kann man schreiben

$$\rho_g(f'(x_0)h+\rho_f(h)) = \frac{\rho_g(f'(x_0)h+\rho_f(h))}{f'(x_0)h+\rho_f(h)}\left(f'(x_0)h+\rho_f(h)\right).$$

Sei (h_n) eine beliebige Folge mit $h_n \neq 0$ und $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Dann gilt auch $f'(x_0)h_n+\rho_f(h_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Also, nach der Ableitbarkeitsbedingung für g gilt: in

$$\rho_g(f(x_0)h_n+\rho_f(h_n))/h_n = \frac{\rho_g(f'(x_0)h_n+\rho_f(h_n))}{f'(x_0)h_n+\rho_f(h)}\left(f'(x_0)+\frac{\rho_f(h_n)}{h_n}\right).$$

konvergiert der linke Faktor gegen Null, und der rechte gegen $f'(x_0)$, der Grenzwert ist also insgesamt 0. Da dies für jede Nullfolge (h_n) gilt, haben wir gezeigt, dass der zweite Summand des Fehlerterms ebenfalls gegen 0 konvergiert. □

7.12 Satz. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$. Die Funktion $f\colon \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<R\}$ ist komplex diffbar für alle $|z|<R$, und es gilt*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

f' ist durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R gegeben.

Proof. Übungsaufgabe. Wir werden später die Differenzierbarkeit von Limiten allgemeinerer Funktionenfolgen betrachten. Daraus wird auch dieser Satz als Spezialfall folgen. □

7.13 Korollar. *Die Funktionen* exp, sin, cos *sind komplex differenzierbar für jedes $z\in\mathbb{C}$. Es gilt*

$$\exp'(z)=\exp(z),\quad \sin'(z)=\cos(z),\quad \cos'(z)=-\sin(z).$$

Proof. Nach dem Satz ist $\exp'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}=\exp(z)$.

Weiter $\sin'(z)=\left(\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}\right)'=\frac{i\exp(iz)+i\exp(-iz)}{2i}=\cos(z)$, entsprechend für $\cos(z)$. □

7.14 Satz. *Sei $f\colon U\to V$ eine Funktion, $z_0\in U$. Entweder seien $U,V\subset\mathbb{R}$ offen in $\mathbb{R}$ und f reell diffbar an z_0, oder $U,V\in\mathbb{C}$ offen in $\mathbb{C}$ und f komplex diffbar an z_0. Es sei $f'(z_0)\neq 0$.*

Sei f bijektiv, $g\colon V\to U$ die Umkehrfunktion und g stetig an $f(z_0)$.

Dann ist g diffbar an $f(z_0)$ mit $g'(f(z_0))=f'(z_0)^{-1}$.

Proof. Betrachte $u(z):=\left(f(z+z_0)-f(z_0)\right)/f'(z_0)$. Dann ist $u\colon U'\to V'$ diffbar und bijektiv (mit $U'=\{x\in\mathbb{C}\mid x+z_0\in U\}$ und $V'=\{x\in\mathbb{C}\mid (f'(z_0)\cdot x+f(z_0))\in V\}$), es gilt $u(0)=0$ und $u'(0)=1$, und für die Inverse $v\colon V'\to U'$ gilt: $v(z)=-z_0+g(z\cdot f'(z_0)+f(z_0))$, also $g(z)=v(z/f'(z_0)-f(z_0))-z_0$. Es genügt also, zu zeigen, dass v an der Stelle 0 diffbar ist mit $v'(0)=0$, der Rest folgt mit unseren Regeln. Damit ersparen wir uns ein wenig Schreibarbeit.

Es gilt also $u(t) = t + \rho(t)$ mit $\rho(t)/t \xrightarrow{t\to 0} 0$. Wir schreiben $v(h) = h + \rho_v(h)$, und müssen $\rho_v(h)/h$ untersuchen. Nun gilt $h = u(v(h)) = v(h) + \rho(v(h))$, somit $\rho_v(h) = \rho(v(h))$.

$$\frac{\rho_v(h)}{h} = \frac{\rho(v(h))}{v(h) + \rho(v(h))} = \frac{\rho(v(h))}{v(h)} \frac{1}{1 + \rho(v(h))/v(h)} \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

da $v(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$ wegen der Stetigkeit von v an 0 (die aus der Stetigkeit von g and $f(z_0)$ folgt), und da $\rho(t)/t \xrightarrow{t\to 0} 0$. □

7.15 Korollar. *Sei $U \in \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, sei $f\colon U \to V \subset \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, bijektiv, stetig und (reell) diffbar an $x_0 \in U$. Dann gilt: die Umkehrfunktion $g\colon V \to U$ ist (reell) diffbar an $f(x_0)$.*

Proof. Wir wissen bereits, dass in diesem Fall die Umkehrfunktion g stetig ist. □

7.16 Beispiel. $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist (reell) differenzierbar. Es gilt $\log'(x) = 1/x$.

Proof. log ist die Umkehrfunktion der streng monoton wachsenden diffbaren Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$. Somit $\log'(exp(t)) = 1/\exp(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, oder $\log'(x) = 1/x$ (da für jedes $x \in (0,\infty)$ ein $t \in \mathbb{R}$ existiert mit $x = \exp(t)$). □

7.17 Bemerkung. Unter geeigneten Voraussetzungen werden wir später die Umkehrbarkeit von f aus $f'(z_0) \neq 0$ folgern.

7.1 Höhere Ableitungen

7.18 Definition. Sei U offen (in $\mathbb{R}/\mathbb{C}$). Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt (reell/komplex) differenzierbar in U, falls sie an jedem Punkt $x \in U$ (reell/komplex) differenzierbar ist.

Dann erhält man die *Funktion* $f'\colon U \to \mathbb{C};\ x \mapsto f'(x)$. Wir schreiben auch $f^{(1)}$ anstelle von f', und $f^{(0)}$ für f.

Induktiv definieren wir: eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt *n-mal differenzierbar*, falls sie $(n-1)$-mal differenzierbar ist, und die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}\colon U \to \mathbb{C}$ selbst diffbar ist. Setze dann $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$.

Falls f n-mal differenzierbar und $f^{(n)}$ stetig ist, nennen wir f *n-mal stetig differenzierbar*. Definiere

$$C^k(U;\mathbb{C}) := \{f\colon U \to \mathbb{C} \mid f \ k\text{-mal stetig differenzierbar}\}$$
$$C^k(U;\mathbb{R}) := \{f\colon U \to \mathbb{R} \mid f \ k\text{-mal stetig differenzierbar}\}.$$
$$C^\infty(U;\mathbb{C}) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U;\mathbb{C}), \qquad C^\infty(U;\mathbb{R}) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(Y;\mathbb{R}),$$

also $f \in C^\infty$ genau dann, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ existiert.

7.19 Beispiel. $f(x) = x^n$, dann $f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$ (falls $k \le n$, sonst $f^{(k)}(x) = 0$).

$f(x) = \exp(x) \implies f^{(n)}(x) = \exp(x)$. Allgemein sind Potenzreihen (mit Konvergenzradius R) C^∞-Funktionen (Elemente aus $C^\infty(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\};\mathbb{C})$).

7.2 Extrema

7.20 Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Menge, $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in U$. a heißt *globale Maximumstelle* falls $f(a) \geq f(x)$ $\forall x \in U$. Der Wert $f(a)$ heißt *globales Maximum* von f.

a heißt *lokale Maximumstelle* von f, falls $\epsilon > 0$ existiert, so dass $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in U$ mit $|x - a| < \epsilon$. Der Wert $f(a)$ heißt *lokales Maximum* von f.

Entsprechend definiert man lokale und globale Minima.

Jede Minimumstelle und jede Maximumstelle wird *Extremstelle* genannt.

7.21 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ diffbar und $a \in U$ lokale Extremstelle. Dann gilt $f'(a) = 0$.*

Proof. Es gilt $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \rho(h)$, und $\rho(h)/h \xrightarrow{h\to 0} 0$. Sei $f(a)$ Maximum (sonst betrachte $-f$ anstelle von f). Damit gilt $f(a + h) \leq f(a)$ für alle h, so dass $a + h \in U$. Da U offen, gibt es $\epsilon > 0$ so dass aus $-\epsilon < h < \epsilon$ folgt $a + h \in U$. Also $f'(a)h + \rho(h) \leq 0$ für $|h| < \epsilon$. Für $h > 0$ folgt daraus $f'(a) \leq -\rho(h)/h$. Bilden wir dann auf beiden Seiten den Limes $h \to 0$, erhalten wir $f'(a) \leq 0$. Wichtig ist, dass der Limes auch nach Einschränken auf die positiven h definiert ist, also 0 Häufungspunkt der Menge der positiven Stellen h ist, für die $\rho(h)$ definiert ist.

Andererseits folgt für $h < 0$ dass $f'(a) \geq \rho(h)/h$, also diesmal $f'(a) \geq 0$.

Insgesamt $f'(a) = 0$. □

7.22 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ diffbar, $a \in U$ mit $f(a) = 0$ und $f'(a) > 0$. Dann gibt es $\epsilon > 0$, so dass $f(x) > 0$ für $x \in (a, a + \epsilon)$ und $f(x) < 0$ für $x \in (a - \epsilon, a)$.*

Proof. Nach Definition gilt $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \rho(h)$ mit $\rho(h)/h \xrightarrow{h\to 0} 0$, also hier $f(a + h) = f'(a)h + \rho(h)$. Da $\rho(h)/h \xrightarrow{h\to 0} 0$ und $f'(a) > 0$, gilt $f'(a) + \rho(h)/h > 0$ für $|h|$ genügend klein, also für $|h| < \epsilon$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$. Falls zusätzlich $h > 0$, folgt damit $f(a + h) = f'(a)h + \rho(h) > 0$, falls $|h| < \epsilon$ und $h < 0$ folgt $f(a + h) = f'(a)h + \rho(h) < 0$. □

7.23 Lemma. ***[Satz von Rolle]:***
Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, f differenzierbar auf (a, b) und sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$.

Proof. Wenn f konstant ist, gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Ist f nicht konstant, besitzt es ein globales Extremum im Inneren (Maximum und Minimum existieren, da f stetig und $[a, b]$ abgeschlossen und beschränkt, sie können nicht beide am Rand liegen, da dann die Funktion konstant ist).

Auf die Extremstelle $x \in (a, b)$ kann man den vorherigen Satz anwenden und erhält $f'(x) = 0$. □

7.24 Satz. ***[Mittelwertsatz]:***
Sei $a < b \in \mathbb{R}$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, f differenzierbar auf (a, b). Dann gibt es $x \in (a, b)$ mit

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proof. Betrachte $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$. Dann ist g stetig, differenzierbar auf (a,b) und es gilt $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es also $x \in (a,b)$ mit $g'(x) = 0$. Andererseits ist $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

7.25 Korollar. *Sei $l < r \in \mathbb{R}$ und $f\colon (l,r) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f konstant.*

Proof. Wende den Mittelwertsatz auf alle Teilintervalle $[a,b] \subset (l,r)$ an. □

7.26 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal diffbar, $a \in U$, $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$. Dann ist a strikte lokale Minimumstelle von f, d.h. es gibt $\epsilon > 0$ so dass $f(x) > f(a)$ für alle x mit $0 < |x - a| < \epsilon$.*

Falls $f''(a) > 0$, so ist a strikte lokale Maximumstelle.

Proof. Wähle $\epsilon > 0$ so, dass $[a - \epsilon, a + \epsilon] \subset U$. Nach Mittelwertsatz gibt es zu jedem $x \in [a - \epsilon, a)$ ein $\xi_x \in (x, a)$ so dass $f'(\xi) = (f(a) - f(x))/(a - x)$. Da $f'(a) = 0$ und $(f')'(a) > 0$ gilt (wenn $\epsilon > 0$ genügend klein gewählt wurde) $f'(\xi) > 0$ für $\xi > a$ und $|\xi - a| < \epsilon$, sowie $f'(\xi) < 0$ für $\xi < a$ und $|a - \xi| < \epsilon$.

Es folgt also, dass $(f(a) - f(x))/(a - x) < 0$ für $x < a$ und $|a - x| < \epsilon$, sowie $(f(a) - f(x))/(a - x) > 0$ für $x > a$ und $|x - a| < \epsilon$. Auflösen nach $f(x)$ liefert $f(x) > f(a)$ für $x < a$, $f(x) < f(a)$ für $x > a$ (jeweils $|x - a| < \epsilon$). □

8 Folgen von Funktionen

Wir haben jetzt mehrfach Funktionen durch andere Funktionen approximiert, z.B. bei der Ableitung durch lineare Funktionen.

Außerdem haben wir Potenzreihen angesehen, und diese kann man als Funktionen auffassen, die durch Polynome angenähert werden. Wir wollen diese Ideen in diesem Kapitel systematisieren.

Frage: gegeben eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$, wann sind andere Funktionen f_n "nahe" bei f, wann konvergiert eine Folge (f_n) gegen f?

8.1 Definition. Sei D eine Menge und $f_n\colon D \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen. Wir sagen, f_n konvergiert *punktweise* gegen $f\colon D \to \mathbb{C}$, falls $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ für alle $x \in D$.

8.2 Definition. Sei $g\colon D \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion. Setze $|g|_\infty := \sup\{|g(x)| \mid x \in D\}$. Wir nennen $|g|_\infty$ die *Supremums-Norm* von g. Falls g unbeschränkt ist, schreiben wir $|g|_\infty = +\infty$.

8.3 Definition. Sei D eine Menge und $(f_n\colon D \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen. Wir sagen, f_n konvergiert *gleichmäßig* gegen die beschränkte Funktion f, falls $|f_n - f|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

8.4 Lemma. *Sei $V := \{f\colon D \to \mathbb{C} \mid f \text{ beschränkt}\}$. $|\cdot|_\infty : V \to \mathbb{R}$ ist eine Norm auf V.*

Proof. Übungsaufgabe. □

8.5 Bemerkung. Der zweite Konvergenzbegriff ist stärker (konvergiert f_n gleichmäßig gegen f, so auch punktweise). Er ist auch deswegen angenehmer für Analysis, weil man die Genauigkeit der Approximation messen kann (durch die Zahl $|f_n - f|_\infty$).

Beachte, dass unser Ziel ist, gewisse Nachbarschaftsbeziehungen auf Mengen von Funktionen zu beschreiben (z.B. der Menge aller Funktionen, ggf. auch nur der Menge der stetigen Funktionen etc.). In der Regel werden diese Mengen Vektorräume sein. Wir werden uns später allgemeine Grundlagen solcher Nachbarschaftsbeziehungen erarbeiten, und hierzu Normen auf Vektorräumen, Metriken und Topologien einführen. Zunächst wollen wir ein paar Eigenschaften der punktweisen und insbesondere der gleichmäßigen Konvergenz kennen lernen.

8.1 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

8.6 Satz. *Sei $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Sei $r < R$. Setze $f_n := \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Dann gilt: die Einschränkung von f_n auf $B_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r\}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Einschränkung von f auf B_r.*

Proof. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le r$ gilt

$$|f(z) - f_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^\infty a_k z^k \right| \overset{|z|\le r}{\le} \sum_{k=n+1}^\infty |a_k| \, r^k \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Da $\sum k = n + 1^\infty |a_k| \, r^k$ unabhängig von z, gilt auch $\sup\{|f(z) - f_n(z)| \mid |z| \le r \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also ist die Konvergenz gleichmäßig. □

8.7 Satz. ***(Cauchykriterium für gleichmäßige Konvergenz)**: Sei $(f_n \colon D \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen. Dann gilt: diese Folge konvergiert gleichmäßig genau dann wenn das Cauchy-Kriterium für die Supremumsnormen erfüllt ist, d.h. wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|f_n - f_m|_\infty \le \epsilon$ für alle $n, m > N_\epsilon$.*

Proof. Ist f_n gleichmäßig konvergent gegen f, so gilt

$$|f_n - f_m|_\infty \le |f_n - f|_\infty + |f - f_m|_\infty .$$

Nach Voraussetzung kann man zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ N_ϵ finden, so dass beide Summanden rechts $< \epsilon/2$ sind, falls $n, m > N_\epsilon$.

Ist umgekehrt das Cauchy-Kriterium erfüllt, so folgt insbesondere: für jedes $x \in D$ ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge komplexer Zahlen (da $|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n - f_m|_\infty$) und hat somit einen Grenzwert $f(x)$. Auf diese Weise erhalten wir eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{C}$. Sei für $\epsilon > 0$ N_ϵ nach dem Kriterium gewählt. Dann gilt für jedes $x \in D$ und $n \ge N_\epsilon$

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \le \epsilon,$$

und somit auch $|f_n - f|_\infty = \sup\{f_n(x) - f(x) \mid x \in D\} \le \epsilon$. Also konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f. □

8.8 Satz. *Sei X eine Teilmenge und $f_n\colon X \to \mathbb{C}$ seien stetig. Die Folge f_n konvergiere gleichmäßig gegen $f\colon X \to \mathbb{C}$.*

Dann ist f stetig.

Proof. Sei $a \in X$. Sei $\epsilon > 0$. Wähle N_ϵ so dass $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$ für alle $n \geq N_\epsilon$ und für alle $x \in X$. Da N_ϵ stetig an a ist, wähle $\delta > 0$ so dass $|f_{N_\epsilon}(y) - f_{N_\epsilon}(a)| < \epsilon/3$ für alle $y \in X$ mit $d(a, y) < \delta$. Falls $d(y, a) < \delta$ gilt dann

$$|f(a) - f(y)| \leq |f(a) - f_{N_\epsilon}(a)| + |f_{N_\epsilon}(a) - f_{N_\epsilon}(y)| + |f_{N_\epsilon}(y) - f(y)| < 3 \cdot \epsilon/3.$$

Also ist f stetig an a. □

8.9 Bemerkung. Wir erkennen damit nochmals, dass jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit Konvergenzradius R an jedem Punkt z mit $|z| < R$ stetig ist, da die Polynome $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ stetig sind, und z im Inneren von B_r liegt, solange $|z| < r < R$.

9 Integration

Ein Ziel: Flächen unter Kurven berechnen.

9.1 Definition. Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt Treppenfunktion, falls es eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ gibt, so dass $f_{(x_{i-1}, x_i)}$ konstant ist mit Wert $c_i \in \mathbb{C}$ für $i = 1, \ldots, n$ (an den Stellen x_i ist der Wert von f irrelevant). Sei $T([a, b])$ die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$.

9.2 Satz. *Die Menge $T([a, b])$ ist ein Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen auf $[a, b]$.*

Proof. Es gilt $0 \in T([a, b])$, wobei 0 die konstante Funktion mit Wert Null bezeichnet. Falls $f \in T([a, b])$, konstant auf (x_{i-1}, x_i) und $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist λf ebenfalls konstant auf (x_{i-1}, x_i), also auch Treppenfunktion. Ist zusätzlich $g \in T([a, b])$ konstant auf (y_{i-1}, y_i) so definiere neue Unterteilung von $[a, b]$ auf folgende Weise: ordne die x_i und y_j gemeinsam der Größe nach an. Dies liefert Zahlen $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_m = b$, mit $z_k \in \{x_i, u_j\}$, und sowohl f als auch g sind für jedes k konstant auf (z_{k-1}, z_k). Dann gilt dies auch für ihre Summe $f + g$. □

9.3 Definition. Sei $f \in T([a, b])$ eine Treppenfunktion, konstant auf (x_{i-1}, x_i) mit Wert c_i. Wir definieren das *Integral*

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\, dx := \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (x_i - x_{i-1}). \tag{9.4}$$

Wenn $c_i \geq 0$, ist dies der Flächeninhalt unter der Graphen der Funktion f.

9.5 Satz. *$\int_a^b f$ ist wohldefiniert. Die Abbildung ist eine lineare Abbildung*

$$\int_a^b \colon T([a, b]) \to \mathbb{C}.$$

Proof. Wir müssen zeigen, dass für zwei Zerlegungen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b$ für welche f auf den Intervallen (x_{i-1}, x_i) sowie (y_{j-1}, y_j) konstant ist (mit Werten c_i und d_j), die Summe in (9.4) denselben Wert hat. Sei dazu $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_r = b$ die gemeinsame Unterteilung, die man aus den x_i und y_i erhält, indem man sie gemeinsam anordnet.

Sei etwa $x_i = z_k < z_{k+1} < \cdots < z_r = x_{i+1}$. Dann gilt: da f auf (x_i, x_{i+1}) den konstant Wert c_i hat, hat f diesen Wert auch auf (z_k, z_{k+1}), (z_{k+1}, z_{k+1}), $\dots$, (z_{r-1}, z_r), und $(x_{i+1} - x_i)c_i = (z_{k+1} - z_k)c_i + \cdots + (z_r - z_{r-1})c_i$.

Es folgt, dass die Summe aus (9.4) für die Unterteilung mittels (x_i) und mittels der feineren Unterteilung (z_k) übereinstimmt. Genauso stimmt die Unterteilung für (y_j) und (z_k) überein, also auch

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^{m} d_j (y_j - y_{j-1}).$$

Falls $f, g \in T([a,b])$, wähle gemeinsame Unterteilung $a = z_0 < \cdots < z_m = b$, so dass f auf allen (z_{i-1}, z_i) konstant ist mit Wert c_i, und g dort konstant ist mit Wert d_i. Dann ist $f + g$ dort konstant mit Wert $c_i + d_i$, somit

$$\int_a^b (f+g) = \sum_{i=1}^{m} (c_i+d_i)(z_i - z_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} c_i (z_i - z_{i-1}) + \sum_{i=1}^{m} d_i (z_i - z_{i-1}) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Entsprechend beweist man $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. □

9.6 Satz. *Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f \in T([a,b])$. Dann gilt*

$$\left| \int_a^b f \right| \le (b-a) \cdot |f|_\infty .$$

Proof. Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und $f|_{(x_{k-1}, x_k)}$ konstant mit wert c_k (also insbesondere $|c_k| \le |f|_\infty$). Dann gilt

$$\left| \int_a^b f \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) c_k \right| \le \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \, |c_k| \le \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \, |f|_\infty = (b-a) \, |f|_\infty .$$

□

Nun wollen wir die Klasse von Funktionen einführen, für die wir ein Integral definieren können, und dann die Eigenschaften des Integrals für diese größere Klasse von Funktionen untersuchen.

9.7 Definition. Sei $a < b \in \mathbb{R}$. Die Menge der *Regelfunktionen* auf $[a,b]$ wird definiert als die Menge

$R([a,b]) := \{ f \colon [a,b] \to \mathbb{C} \mid \exists f_n \in T([a,b])$ s.d. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert$\}$.

Für $f \in R([a,b])$ setze

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x) \, dx := \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n,$$

wobei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen sein soll, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

9.8 Beispiel. Berechnung von $\int_0^1 x\,dx$ direkt aus der Definition. Dies ist sehr mühsam und wird fast nie angewendet werden (außer für theoretische Überlegungen).

9.9 Satz. *Sei $a < b \in \mathbb{R}$. Es gilt:*

(1) $T([a,b])$ ist ein Vektorraum.

(2) Sei $f \in R([a,b])$. Dann ist $\int_a^b f$ wohldefiniert, d.h. für jede Folge $f_n \in R([a,b])$ die gleichmäßig gegen f konvergiert, ist die Folge $(\int_a^b f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und der Grenzwert hängt nicht von der speziellen Folge ab.

(3) $\int : R([a,b]) \to \mathbb{C}$ ist linear.

(4) Für jedes $f \in R([a,b])$ gilt $\left|\int_a^b f\right| \leq (b-a)\,|f|_\infty$.

(5) Seien $f, g \in R([a,b])$ reellwertig mit $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(6) Sei $f \in R([a,b])$. Dann ist auch $|f| \in R([a,b])$ und es gilt

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

(7) Seien $a < c < b \in \mathbb{R}$. Durch Einschränken erhält man Abbildungen $R([a,b]) \to R([a,c]); f \mapsto f|_{[a,c]}$ und $R([a,b]) \to R([b,c]);\ f \mapsto f|_[b,c]$. Für jedes $f \in R([a,b])$ gilt

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Proof. (1) Seien $f, g \in R([a,b])$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Seien $f_n, g_n \in T([a,b])$ so dass f gleichmäßiger Limes der Funktionenfolge (f_n) und g gleichmäßiger Limes der Funktionenfolge (g_n) ist. Dann gilt $|\lambda f - \lambda f_n|_\infty = |\lambda|\,|f - f_n|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also ist λf gleichmäßiger Limes der Folge von Treppenfunktionen $(\lambda f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und somit $\lambda f \in R([a,b])$.

Weiterhin gilt $|(f+g) - (f_n + g_n)|_\infty \leq |f - f_n|_\infty + |g - g_n|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$, und somit $f + g \in R([a,b])$. Somit ist $R([a,b])$ ein Vektorraum.

(2) Sei $f \in R([a,b])$ und $f_n \in T([a,b])$ mit $|f - f_n|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dann ist insbesondere $|f_n|_\infty$ eine Cauchyfolge (da $|f_n - f_m|_\infty \leq |f_n - f|_\infty + |f - f_m|_\infty$). Da $\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f_m\right| = \left|\int_a^b (f_n - f_m)\right| \leq (b-a)\,|f_n - f_m|_\infty$, ist auch $(\int_a^b f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, also konvergent.

Wenn $g_n \in T([a,b])$ eine zweite Folge ist, so dass ebenfalls $|f - g_n|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$, so gilt auch für die "Reißverschlussfolge" $(h_n : [a,b] \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $h_{2n} := f_n$ und $h_{2n+1} := g_n$, dass $|f - h_n|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Also konvergiert die Folge komplexer Zahlen $(\int_a^b h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach "Konstruktion" von (h_n)

ist sowohl $(\int_a^b f_n)$ als auch $(\int_a^b g_n)$ eine Teilfolge von $(\int_a^b h_n)$. Somit konvergiert beide Folgen (das wußten wir schon) und die Grenzwerte stimmen überein (das war noch zu zeigen). Insgesamt sehen wir, dass $\int_a^b f$ wohldefiniert ist.

(3) Falls $f, g \in R([a,b])$, $\lambda \in \mathbb{C}$, so wähle $f_n, g_n \in T([a,b])$ mit $|f - f_n|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $|g - g_n|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f_g &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\lambda f_n + g_n) = \lim_{n\to\infty} (\lambda \int_a^b f_n + \int_a^b g_n)\\ &= \lambda \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n + \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n\\ &= \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.\end{aligned}$$

(4) Sei $f \in R([a,b])$, $f_n \in T([a,b])$ mit $|f_n - f|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dann gilt

$$\left|\int_a^b f\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\int_a^b f_n\right| \le \lim_{n\to\infty} (b-a)\,|f_n|_\infty = (b-a)\,|f|_\infty .$$

Beachte hierzu, dass

$$|f|_\infty \le |f - f_n|_\infty + |f_n|_\infty \le |f - f_n|_\infty + |f_n - f|_\infty + |f|_\infty .$$

Außerdem haben wir gesehen, dass $|f_n|_\infty$ eine Cauchyfolge ist, also konvergiert. Zusammen mit $\lim_{n\to\infty} |f_n - f|_\infty = 0$ implizieren die Ungleichungen, dass $|f|_\infty = \lim_{n\to\infty} |f_n|_\infty$.

(5) Sei $f \in R([a,b])$ und $f_n \in T([a,b])$ mit $|f_n - f|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dann gilt $|f_n| \in T([a,b])$ und $||f_n(x)| - |f(x)|| \le |f_n(x) - f(x)|$ nach der umgedrehten Dreiecksungleichung, also auch $||f_n| - |f||_\infty \le |f_n - f|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$, somit $|f| \in R([a,b])$. Außerdem gilt $\left|\int_a^b f_n\right| \le \int_a^b |f_n|$. Damit erhält man auch für die Grenzwerte $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

(6) Da $\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g - f)$ müssen wir nur zeigen: Falls $h(x) \ge 0$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt $\int_a^b h \ge 0$. Ist h Treppenfunktion, so folgt dies direkt aus der Definition. Ein beliebiges $h \in R([a,b])$ mit $h(x) \ge 0$ für alle $x \in [a,b]$ ist gleichmäßiger Limes von *positiven* Treppenfunktion. Damit folgt die Aussage. Um zu sehen, dass h wirklich gleichmäßiger Limes *positiver* Treppenfunktionen ist, seinen zunächst $h_n \in T([a,b])$ beliebig mit $|h_n - h|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Definiere dann $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $f(n(x) = Re(h_n(x))$ falls $Re(h_n(x)) \ge 0$, $f_n(x) := 0$ sonst. Dies ist wieder eine Treppenfunktion. Da $h(x) \ge 0$, gilt $|f_n(x) - h(x)| \le |h_n(x) - h(x)|$ für alle $x \in [a,b]$, und somit auch $|f_n - h|_\infty \le |h_n - h|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(7) Sei $u \in T([a,b])$ eine Treppenfunktion. Einschränken auf $[a,c]$ und auf $[c,b]$ liefert Treppenfunktionen, und es gilt $\int_a^c u = \int_a^b u + \int_b^c u$ (dies sieht

man, indem man als einen Trennungspunkt der Zerlegung von $[a, b]$ den Punkt c wählt).

Durch Grenzwertbildung folgt die Behauptung für beliebige Regelfunktionen.

□

9.10 Definition. Sei $a < b$ und $f \in R([a, b])$. Dann definieren wir $\int_b^a f := -\int_a^b f$. Mit dieser Definition gilt $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$ auch, wenn nicht $a < c < b$ gilt (solange f Regelfunktion auf dem größten vorkommenden Interval ist).

9.11 Satz. *Falls $f, g \in R([a, b])$, so auch das Produkt fg. Beachte aber, dass im allgemeinen nicht gilt, dass das Integral des Produkts das Produkt der Integrale ist.*

Proof. Übungsaufgabe. □

9.12 Satz. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt $f \in R([a, b])$. Insbesondere ist $\int_a^b f(x)\,dx$ definiert.*

Für den Beweis benutzen wir das Konzept der "gleichmäßigen Stetigkeit".

9.13 Definition. Sei $D \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Punkte $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

9.14 Bemerkung. Der Unterschied zwischen *gleichmäisger* Stetigkeit und "normaler" Stetigkeit besteht darin, dass man im ersten Fall zu vorgegebenem ϵ ein und dasselbe δ für alle Punkte x verwenden kann.

Die Funktion $(0, \infty) \to (0, \infty);\ x \mapsto 1/x$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

9.15 Satz. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist f sogar (automatisch) gleichmäßig stetig.*

Proof. Wir geben einen Widerspruchsbeweis. Wäre f nicht gleichmäßig stetig, so gäbe es $\epsilon > 0$ so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, y_n \in D$ mit $|x_n - y_n| < 1/n$ existieren, so dass trotzdem $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$. Da D beschränkt ist, hat (x_n) eine konvergent Teilfolge (x_{n_k}). Die Folge (y_{n_k}) hat entsprechende eine konvergent Teilfolge $y_{n_{k_l}}$. Da D abgeschlossen, liegt der Grenzwert x dieser Teilfolge (x_{n_k}) in D. Da $\left|x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, ist x auch der Grenzwert der (Teil)folge $(y_{n_{k_l}})$. Da f stetig ist, gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) = \lim_{l\to\infty} f(y_{n_{k_l}})$. Andererseits gilt nach Wahl von x_n und y_n immer $\left|f(x_{n_{k_l}}) - f(y_{n_{k_l}})\right| > \epsilon$. Dies ist der gewünschte Widerspruch. □

Proof. **(von Satz 9.12)**
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. Da $[a, b]$ abgeschlossen und beschränkt, ist f sogar gleichmäßig stetig. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Wähle dann $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < 1/n$ für alle x, y mit $|x - y| < \delta$.

Definiere nun die Treppenfunktion f_n folgendermaßen: für $x \in [a, b]$ mit $x \in [a + k\delta, a + (k+1)\delta)$ setze $f_n(x) := f_n(a + k\delta)$. Dies ist eine Treppenfunktion, konstant auf allen Intervallen $[a + k\delta, a + (k + 1)\delta)$ (wir müssen natürlich mit

$[a,b]$ schneiden, um im Definitionsbereich von f zu bleiben). Außerdem gilt für jedes $x \in [a,b]$, dass $|f(x) - f_n(x)| < 1/n$, da $f_n(x) = f(y)$ für $y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$ (y ist der linke Rand des Teilintervals $[a+k\delta, a+(k+1)\delta)$ in welche x liegt). Somit gilt $|f - f_n|_\infty \le 1/n \xrightarrow{n\to\infty 0}$, d.h. $f \in R([a,b])$. □

9.16 Satz. *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *monoton. Dann gilt* $f \in R([a,b])$. *Insbesondere ist* $\int_a^b f$ *definiert.*

Proof. Wir können annehmen, dass f monoton wachsend ist (ansonsten betrachte $-f$ und benutze, dass $R([a,b])$ ein Vektorraum ist).

Sein $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $k > 0$ betrachte die Menge $I_k := \{x \in [a,b] \mid f(a) + (n-1)k \le f(x) < f(a) + nk\}$. Da f monoton wachsend ist, ist dies ein Interval, und $[a,b]$ wird in die Intervalle I_k zerlegt. Wähle l so dass $f(a)+nl \ge f(b)$. Dann benötigen wir nur die endlich vielen Intervalle $I_1, \dots, I_l$. Definiere f_n dadurch, dass $f_n(x) := f(a) + nk$ falls $x \in I_k$. Also ist $f_n \in T([a,b])$. Außerdem gilt $|f - f_n|_\infty < 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, somit $f \in R([a,b])$. □

9.17 Bemerkung. Mann kann beweisen, dass jede Regelfunktion Summe einer stetigen und einer monotonen Funktion ist. Somit sind die Regelfunktionen eindeutig charakterisiert.

10 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

10.1 Satz. *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *stetig. Definiere* $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *durch* $F(x) := \int_a^x f$. *Dann ist* F *differenzierbar, und es gilt* $F'(x) = f(x)$.

Proof. Sei $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f - \int_a^x f}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f}{h}$$
$$= f(x) + \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)h}{h} = f(x) + \frac{\int_x^{x+h} f(t) - f(x)dt}{h}.$$

Da f stetig an x ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass $|f(t) - f(x)| < \epsilon$ falls $t \in [x-h, x+h]$, insbesondere $\left|f_{[x-h,x+h]} - f(x)\right|_\infty < \epsilon$, so dass für $|h| < \delta$

$$\left|\frac{\int_x^{x+h}(f(t) - f(x))\,dt}{h}\right| \le \left|\frac{h\epsilon}{h}\right|,$$

somit konvergiert dieser Term gegen Null mit $h \to 0$, und die Behauptung folgt. □

10.2 Bemerkung. Genaugenommen wollen wir Differenzierbarkeit ja immer nur für Funktionen betrachten, die auf offenen Intervallen definiert sind. Hier kann man f stetig auf das größeres Intervall $[a-1, b+1]$ fortsetzen (links durch $f(a)$, rechts durch $f(b)$. F ist dann auf $[a-1, b+1]$ definiert und im Inneren diffbar, insbesondere auch an a und an b.

Jede Funktion F mit $F' = f$ heißt *Stammfunktion* von f. Wie wir gesehen haben, unterscheiden sich auf einem Interval zwei Stammfunktionen derselben Funktion um eine Konstante.

Mit dem Hauptsatz können nun viele Integrale berechnet werden. Wir benutzen: sind $F, G\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ diffbar mit $F' = G'$, so ist $F - G$ eine konstant Funktion (da $(F-G)' = 0$).

10.3 Korollar. *Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Folgende Formeln gelten:*

$$\int_a^b x^n = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \qquad \textit{für } n \neq -1$$
$$\int_a^b \sin = (-\cos(b)) - (-\cos(a))$$
$$\int_a^b \cos = \sin(b) - \sin(a)$$
$$\int_a^b \exp = \exp(b) - \exp(a)$$
$$\int_a^b 1/x = \log(b) - \log(a) \qquad \textit{falls } 0 < a$$
$$\int_a^b 1/x = \log(-b) - \log(-a) \qquad \textit{falls } b < 0$$

Proof. Man leite jeweils die Funktion auf der rechten Seite ab. □

Der Hauptsatz kann auch benutzt werden, um Rechenregeln für die Integration aus Rechenregeln der Differentiation herzuleiten.

10.4 Satz. ***(Produktregel, partielle Integration)***
Sei $a' < a < b < b' \in \mathbb{R}$. Seien $f, g\colon (a', b') \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f' \cdot g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f \cdot g'.$$

Proof. $f \cdot g$ ist (stetig) diffbar mit $(fg)' = f'g + fg'$. Durch Integration erhalten wir

$$\int_a^b f' \cdot g + \int_a^b f \cdot g' = \int_a^b (fg)' = (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a).$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. □

10.5 Satz. ***(Kettenregel, Substitutionsregel)***
Sei $\phi\colon [\alpha, \beta] \to [a,b]$ diffbar, $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\int_\phi (\alpha)^\phi(\beta) f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\, dt.$$

Proof. Wähle $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $F'(x) = f(x)$.

Es gilt $(F \circ \phi)' = (F' \circ \phi) \cdot \phi'$. Durch Integration

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta (F \circ \phi)' = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\, dx$$

□

10.6 Bemerkung. Merkregel: Falls $x = \phi(t)$ so gilt $\int f(x)\ dx = \int f(\phi(t))d\phi(t))$, und man "erweitert" $d\phi(t) = d\phi(t)/dt \cdot dt$. Wichtig: die Grenzen im ersten Fall sind x-Grenzen, im zweiten Fall t-Grenzen. Diese muss man ineinander umrechnen.

10.7 Satz. ***(Mittelwertsatz der Integralrechnung)***
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit $\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)f(\xi)$.

Proof. Sei $F(x) := \int_a^x f(t)\ dt$. Da F diffbar, gibt es $\xi \in (a,b)$ mit $F'(\xi)(b-a) = F(b) - F(a)$. Aber es gilt $\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$, und $F'(\xi) = f(\xi)$, so dass die Behauptung folgt. □

11 Grenzwerte und Integrale

11.1 Satz. *Seien $f_n \in R([a,b])$. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $|f_n - f|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dann gilt $f \in R([a,b])$ und $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.*

Merkregel: Bei gleichmäßiger Konvergenz kann man Integration und Grenzwert vertauschen.

Proof. Zu $k \in \mathbb{N}$ wähle $n_k \in \mathbb{N}$ mit $|f - f_{n_k}|_\infty < 1/2k$. Wähle dann $g_k \in T([a,b])$ mit $|f_{n_k} - g_k|_\infty < 1/2k$. Insgesamt gilt $|f - g_k|_\infty \leq |f - f_{n_k}|_\infty + |f_{n_k} - g_k|_\infty < 1/k \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also $f \in R([a,b])$. Außerdem gilt $\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq (b-a)\,|f_n - f|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

11.2 Korollar. *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Sei $-R < a < b < R$. Dann gilt $f|_{[a,b]} \in R([a,b])$ und*

$$\int_a^b f = \sum_{n=0}^\infty a_n \int_a^b x^n.$$

Proof. $f_n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f, also $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^n a_k x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^k = \sum_{k=0}^\infty a_k \int_a^b x^k$. Hierbei benutzen wir die Linearität von $\int_a^b$, welche auf *endliche* Summen anwendbar ist. □

11.3 Satz. *Sei $a' < b' \in \mathbb{R}$ und seien $f_n\colon (a',b') \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbare Funktionen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere punktweise gegen f. Die Ableitungen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ seien gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$. Dann gilt, dass f differenzierbar ist und $f' = g$.*

Merkregel: sind die Ableitungen gleichmäßig konvergent, kann man Limes und Ableitung vertauschen.

Proof. Da f_n' stetig und gleichmäßig konvergent gegen g, ist g stetig und hat somit eine differenzierbare Stammfunktion $G(x) := \int_a^x g$ (für $a, x \in (a',b')$). Somit gilt

$$f(x) - f(a) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n' = \int_a^x g = G(x).$$

$G(x)$ ist diffbar mit $G'(x) = g(x)$, also (da $f(a)$ eine Konstante ist) f diffbar mit $f'(x) = G'(x) = g(x)$. □

12 Uneigentliche Integrale

12.1 Definition. Sei $a < b$, wobei auch $a = -\infty$ und/oder $b = +\infty$ zugelassen sein. Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ gegeben, so dass für jedes $a < a' < b' < b$ gilt: $f|_{[a',b']} \in R([a',b'])$. Wähle $c \in (a,b)$. Falls sowohl

$$\lim_{b' \to b} \int_c^{b'} f(x)\, dx$$

als auch

$$\lim_{a' \to a} \int_{a'}^{c} f(x)\, dx$$

existiert, so definiere

$$\int_a^b := \int_a^b f(x)\, dx := \lim_{a' \to a} \int_{a'}^{c} f + \lim_{b' \to b} \int_c^{b'} f.$$

Wir sagen dann, $\int_a^b f$ *konvergiert.*

12.2 Beispiel.

$$\int_0^\infty \exp(-x)\, dx = \lim_{a \to \infty} \int_0^a \exp(-x)\, dx = \lim_{a \to \infty} \exp(-0) - \exp(-a) = 1.$$

$$\int_0^1 1/x\, dx : \qquad \int_\delta^1 1/x\, dx = \ln(1) - \ln(\delta) \xrightarrow{\delta \to 0} +\infty.$$

$$\int_1^\infty 1/x\, dx : \qquad \int_1^b 1/x\, dx = \ln(b) - \ln(1) \xrightarrow{b \to \infty} +\infty.$$

$$\int_1^\infty 1/x^\alpha\, dx, \alpha \neq 1 : \quad \int_1^b 1/x^\alpha\, dx = b^{\alpha+1}/(\alpha+1) - 1/(\alpha_+1) \xrightarrow{b \to \infty} \begin{cases} +\infty; & \alpha > -1 \\ 1/(\alpha+1); & \alpha < -1. \end{cases}$$

12.3 Satz. ***(Cauchykriterium für Grenzwerte von Funktionen)***
Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ gegeben und $a \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt von D. Dann gilt:

$\lim_{z \to a} f(z)$ *existiert genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$|f(z) - f(x)| < \epsilon \text{ für alle } z, w \in D \setminus \{a\} \text{ mit } |z-a| < \delta,\ |w-a| < \delta.$$

Sei $D = (a, \infty) \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$. Dann gilt:

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ *existiert genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $R > 0$ existiert, so dass für alle $x, y > R$ gilt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Proof. Ist das beschriebene Cauchykriterium erfüllt, so folgt, dass für jede Folge (z_n) mit $z_n \in D \setminus \{a\}$ und $\lim_{n \to \infty} z_n = a$ die Folge $f(z_n)$ eine Cauchyfolge ist. Also sind alle diese Folgen konvergent. Wenn dies der Fall ist, haben sie auch alle den gleichen Grenzwert (Übungsaufgabe, Reißverschlussfolge). Nach Definition ist dieser gemeinsame Grenzwert gerade $\lim_{z \to a} f(z)$.

Umgekehrt folgt aus der ϵ-δ-Beschreibung von Konvergenz gegen einen Grenzwert μ, dass zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ (bzw. für den Limes $x \to \infty$ ein $R > 0$ existiert), so dass $|f(z) - \mu| < \epsilon/2$ falls $|z - a| < \delta$ (bzw. falls $z > R$). Mit der Dreiecksungleichung folgt, dass das Cauchykriterium erfüllt ist. $\square$

12.4 Satz. ***(Majorandenkriterium)***
Seien $a < b$ ($a = -\infty$, $b = +\infty$ zugelassen). Seinen $f, g \in R([a', b'])$ für alle $a < a' < b' < b$, und sei $g(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Sei $\int_a^b g$ konvergent, und $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist $\int_a^b f$ konvergent, und es gilt

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b g.$$

Proof. Sei $c \in [a, b]$. Da wir den Grenzwert nicht raten können, müssen wir beweisen, dass die Funktion $z \mapsto \int_c^z f$ die Cauchybedingung erfüllt (für $z \to a$). Nun gilt

$$\left| \int_c^{z_1} f - \int_c^{z_2} \right| = \left| \int_{z_1}^{z_2} f \right| \leq \int_{z_1}^{z_2} |f| \leq \int_{z_1}^{z_2} g.$$

Da $\int_c^b g$ konvergent ist, folgt das Cauchykriterum für g: zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ (bzw. $R > 0$ falls $b = +\infty$) so dass $\int_{z_1}^{z_2} g < \epsilon$ falls $b - \delta < z_1, z_2 < b$ (bzw. falls $z_1, z_2 > R$). Damit ist die Cauchybedingung auch für f erfüllt, und $\int_a^b f$ konvergiert. □

12.5 Satz. ***(Integralkriterium für Reihen)***
Sei $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend und $f \in R([0, b])$ für alle $b > a$. Dann gilt:

$$\int_0^\infty f \text{ konvergiert} \quad \iff \quad \sum_{n=0}^\infty f(n) \text{ konvergiert.}$$

In diesem Fall gilt

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \leq \int_0^\infty f \leq \sum_{n=0}^\infty f(n) \tag{12.6}$$

Proof. Es gilt $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ für alle $x \in [k, k+1]$, somit $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k)$. Also

$$\sum_{k=0}^n f(k+1) \leq \int_0^{n+1} f \leq \sum_{k=0}^n f(k) \tag{12.7}$$

(die äußeren Ausdrücke kann man als Integrale von Treppenfunktionen auffassen, und dann die Monotonie des Integrals benutzen).

Da die Funktion nur Werte ≥ 0 annehmen, konvergiert $\int 0^\infty f$ genau dann, wenn $\int_0^n f \leq R$ für eine Schranke R welche nicht von n abhängt (entweder man hat Divergenz gegen $+\infty$ oder echte Konvergenz).

Entsprechend gilt für die Reihe, da alle Glieder ≥ 0 sind, dass sie genau dann konvergiert, wenn $\sum_{k=0}^n f(k) \leq r$ für eine Schranke r welche nicht von n abhängt.

Damit folgt sofort aus der Ungleichung (12.7), dass die Konvergenz der Reihe die Konvergenz der uneigentlichen Integrals impliziert, und umgekehrt die Konvergenz des Integrals die Konvergenz der Reihe. Außerdem folgt für die Grenzwerte die Ungleichung (12.6), wobei man noch benutzen muss, dass

$$\sum_{k=0}^\infty f(k+1) = \sum_{k=1}^\infty f(k).$$

□

12.8 Beispiel. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} n^{\alpha}$ konvergiert für $\alpha < -1$, und divergiert für $\alpha \geq -1$, da $\int_1^{\infty} x^{\alpha}$ das gleiche Verhalten zeigt, und die Funktion x^{α} auf dem Interval $[1, \infty)$ monoton ist (fallend für $\alpha \leq 0$). Für die monoton wachsenden Funktionen/Reihen für $\alpha \geq 0$ ist die Divergenz sowieso klar.

13 Taylorreihen und Satz von l'Hospital

Eine der wichtigsten Funktionenklassen, die wir bisher betrachtet haben, sind die Potenzreihen. Für diese können wir (im Prinzip) alles berechnen, was uns bisher interessieren könnte, wie z.B. Ableitung, Integral, ...

Andererseits haben wir die differenzierbaren Funktionen betrachtet, die zumindest ein klein wenig wie Potenzreihen aussehen: hier gilt (bei Null) $f(z) = f(0) + f'(0)z + \rho(z)$, mit einem "kleinen" Fehler $\rho(z)$.

Diese beiden Konzepte wollen wir nun "verbinden". Dies führt auf den Begriff der Taylorreihe einer Funktion.

13.1 Lemma. *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Also ist f eine Funktion definiert auf der offenen Menge $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < R\}$. Dann ist f beliebig oft differenzierbar auf seinem Definitionsbereich, und es gilt*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)a_k x^{k-n}. \qquad (13.2)$$

Damit folgt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Proof. Wir haben uns schon einmal über die Differenzierbarkeit von Potenzreihen unterhalten. Jetzt können wir alternativ den Satz über die Vertauschbarkeit von Differenzieren und Limesbildung benutzen. Sei nämlich $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$. Dann gibt es $r < R$ so dass $|x| < r$. Auf der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < r\}$ konvergiert die Funktionenfolge $(T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k)_{n \in \mathbb{N}}$ jedoch gleichmäßig gegen f, genauso wissen wir, dass die Funktionenfolge $(T_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ konvergiert (der Konvergenzradius bleibt ja R). Da die Folge der Ableitungen *gleichmäßig* konvergiert, ist die ursprüngliche Limesfunktion $f(x)$ differenzierbar, mit Ableitung $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ an der vorgegebenen Stelle x.

Nun war x beliebig (obwohl r in Abhängigkeit von x gewählt werden muss). Außerdem kann man durch Induktion auch die höheren Ableitungen berechnen, und erhält Gleichung (13.2). An dieser Formel kann man nun auch $f^{(n)}(0)$ ablesen, es ist ja gerade der Koeffizient von x^0, also $f^{(n)}(0) = n \cdot (n-1) \dots 1 a_n = n! \cdot a_n$. □

13.3 Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Interval, $f \colon I \to \mathbb{C}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in I$.

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

heißt *n-tes Taylorpolynom* zu f mit Entwicklungspunkt a. Ist f beliebig oft differenzierar, so heißt

$$T_\infty(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die *Taylorreihe* zu f mit Entwicklungspunkt a.

13.4 Bemerkung. Um Schreibarbeit zu sparen, werden wir (wie schon bei Potenzreihen üblich) ab jetzt nur den Entwicklunsgspunkt $a = 0$ anschauen. Alle Aussagen übertragen sich direkt auf den allgemeineren Fall, wobei immer $f^{(k)}(0)$ durch $f^{(k)}(a)$ und x durch $(x-a)$ ersetzt werden muss.

Wir müssen nun folgende Fragen beantworten.

- In welcher Beziehung stehen die Taylorpolynome zur Funktion?
- Wann konvergiert die Taylorreihe?
- Falls die Taylorreihe konvergiert, was ist der Grenzwert? Insbesondere, wann ist der Grenzwert die gegebene Funktion f?

Die Antwort zu Frage 13 ist durch unsere allgemeinen Untersuchungen zu Potenzreihen bereits erschöpfend gegeben —hier werden wir jedenfalls keine neuen Beobachtungen machen.

13.5 Lemma. *Falls $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R, so hat die Taylorreihe zu f Konvergenzradius R und konvergiert dort gegen f, da die Taylorreihe mit der Potenzreihe übereinstimmt.*

Proof. Wir haben ja gerade berechnet, dass $a_k = f^{(k)}(0)/k!$. □

13.6 Satz. *Sei $f: I \to \mathbb{C}$ $(n+1)$-mal stetig diffbar. Dann gilt*

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \; dt.$$

Falls f reellwertig ist, gibt ξ im Interval zwischen 0 und x so dass man auch schreiben kann

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Die erste Formel wird Taylorsche Formel *genannt, die zweite die* Lagrangesche Darstellung des Restglieds.

Proof. Wir beweisen den Satz mittels Induktion nach n. Für $n = 0$ müssen wir zeigen, dass

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) \; dt.$$

Dies ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung richtig.

Für den Induktionsschritt $(n-1)$ nach n gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$R_{n-1}(x) = \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \; dt.$$

Hierauf wenden wir partielle Integration an, da die Ableitung von $-(x-t)^n/n!$ genau $(x-t)^{n-1}/(n-1)!$ ist, und erhalten (da $n \geq 1$)

$$R_{n-1}(x) = 0 + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt$$

Da $R_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = R_n(x)$, folgt die erste Behauptung. Nach der verallgemeinerten Form des Mittelwertsatzes der Integralrechnung folgt aus der Taylorschen Formel die zweite Formel auf folgende Weise: es gibt ξ zwischen o und x, so dass

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt = f^{(n+1)}(\xi) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

□

13.7 Korollar. *Die Taylorreihe einer Funktion konvergiert genau dann gegen die Funktion, wenn die Folge der Restglieder gegen Null konvergiert.*

Als Anwendung des Taylorschen Satzes kann man weitere Kriterien für die Existenz von Extrema aufstellen:

13.8 Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und $a \in I$. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig diffbar. Es gelte $f'(a) = 0 = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a)$, aber $f^{(n)}(a) \neq 0$. Dann gilt:*

(1) Falls n ungerade ist, hat f bei a kein *lokales Extremum.*

(2) Falls n gerade ist, und $f^{(n)}(a) < 0$, so hat f an a ein lokales Maximum. Falls n gerade und $f^{(n)}(a) > 0$, so hat f an a ein lokales Minimum.

Proof. Nach der Taylorschen Formel gilt

$$f(a+h) = f(a) + R_{n-1}(h) = f(a) + f^{(n)}(\xi_h)\frac{h^n}{n!},$$

wobei ξ_h eine Zwischenstelle zwischen a und $a+h$. Wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}$ gilt für h genügend klein, dass $f^{(n)}(\xi_h)$ dasselbe Vorzeichen hat wie $f^{(n)}(a) \neq 0$. Wenn n gerade ist, gilt außerdem $h^n > 0$ für alle $h \neq 0$. Dann hat also $f(a+h) - f(a)$ das gleiche Vorzeichen wie $f^{(n)}(a)$ für alle genügend kleinen h. Insbesondere ist $f(a+h) > f(a)$ für alle genügend kleinen h, falls $f^{(n)}(a) > 0$, also ist in diesem Fall a lokale Minimustelle von f. Entsprechend ist a lokale Maximumstelle, falls $f^{(n)}(a) < 0$.

Falls n ungerade, gilt $h^n > 0$ für $h > 0$ und $h^n < 0$ für $h < 0$. Unabhängig vom Vorzeichen von $f^{(n)}(a)$ wechselt also $f(a+h) - f(a)$ sein Vorzeichen, je nachdem ob $h < 0$ oder $h > 0$. Insbesondere ist a definitiv *keine* lokale Extremstelle. □

13.9 Beispiel. Taylorreihe des Logarithmus. Für $-1 < x < 1$ gilt

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$

Proof. Es gilt, da $\ln(1) = 0$

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} t^k\,dt$$

Da der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} t^k$ gleich 1 ist, konvergiert die Reihe von dem Interval zwischen 0 und x *gleichmäßig*, also dürfen wir Integral und Grenzwert vertauschen und erhalten

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)}.$$

Wir wissen bereits, dass für eine konvergente Potenzreihe die Taylorreihe gleich der Potenzreihe ist. Dieser Fall liegt, wie wir gesehen haben, hier vor, also ist die Taylorreihe von $\ln(1-x)$ die Reihe $-\sum_{k=1}^{\infty} t^k/k$, und konvergiert auf $(-1,1)$ gegen $\ln(1-x)$. □

13.10 Beispiel. Binomische Reihe. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $-1 < x < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

wobei $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\ldots\alpha-k+1}{k!}$. Wenn α nicht ganzzahlig ist, ist dieser Ausdruck also für alle $k \in \mathbb{N}$ von Null verschieden (und kann auch negativ werden).

Proof. Wir kennen die Ableitungen von $f(x) = (1+x)^\alpha$, nämlich $f^{(n)}(x) = n!\binom{\alpha}{n}(1+x)^{\alpha-n}$, und erhalten so als Taylorreihe $T_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$. Wir müssen noch zeigen, dass diese Reihe für $-1 < x < 1$ konvergiert, und zwar gegen $(1+x)^\alpha$.

Es gilt $\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| \xrightarrow{k\to\infty} 1$. Also ist der Konvergenzradius der Taylorreihe 1.

In der Lagrangeschen Form des Restglieds gilt für $x > 0$ und ξ_n zwischen 0 und x

$$R_{n-1}(x) = \binom{\alpha}{n}(1+\xi_n)^{\alpha-n}x^n.$$

Da $0 < \xi < x$ gilt $|(1+\xi_n)^{\alpha-n}| < \max\{1,(1+x)^\alpha\}$, eine von n unabhängige Konstante. Da die Taylorreihe Konvergenzradius 1 hat, also für $-1 < x < 1$ konvergiert, ist außerdem $\binom{\alpha}{n}x^n$ eine Nullfolge, so dass in diesem Fall $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Der folgende Teil des Beweises wurde in der Vorlesung nicht vorgerechnet:

Falls $x < 0$, müssen wir die (genauere) Taylorsche Formel für das Restglied benutzen:

$$R_n(x) = \int_0^x (n+1)\binom{\alpha}{n+1}(x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}\,dt = (n+1)\binom{\alpha}{n+1}\int_0^x \left(\frac{(x-t)}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}$$

Die Funktion $(x-t)/(1+t)$ ist auf dem Interval $[x,0]$ $(-1 < x < 0!)$ monoton (ableiten!) und ihr Betrag ist maximal für $t = 0$. Damit erhalten wir

$$|R_n(x)| \le \binom{\alpha}{n+1}|x|^n\,(n+1)\left|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\right|.$$

Bis auf eine Konstante, die nicht von n abhängt, erhalten wir also wieder die Glieder der Taylorreihe. Da diese für $|x| < 1$ konvergiert, bilden die Glieder eine Nullfolge, also auch jetzt $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

13.11 Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ n-mal stetig differenzierbar. Sei $a \in I$ und $f(a) = g(a) = 0 = \cdots = f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(a)$. Sei $g^{(n)}(a) \neq 0$. Dann gilt*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Proof. Es gilt nach Satz von Taylor für $h \neq 0$ $f(a+h) = f^{(n)}(\xi_h)h^n/n!$ und $g(a+h) = g^{(n)}(\zeta_h)h^n/n!$ mit ξ_h und ζ_h zwischen a und $a+h$. Da $g^{(n)}(a) \neq 0$ und $g^{(n)}$ stetig, ist somit $g(a+h) \neq 0$ für h genügend klein, und es gilt

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f^{(n)}(\xi_h)}{g^{(n)}(\zeta_h)} \xrightarrow{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}$ und $g^{(n)}$ (da $\xi_h \xrightarrow{h\to 0} a$ und $\zeta_h \xrightarrow{h\to 0} a$). □

13.12 Satz. ***Satz von l'Hospital***
Sei $I = (b, a) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Hierbei ist $a = -\infty$ oder $b = +\infty$ zugelassen.

Seien $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Es gelte entweder

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x),$$

oder

$$f(x) \xrightarrow{x\to a} +\infty; \qquad g(x) \xrightarrow{x\to a} +\infty,$$

sowie $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Dann gilt:

Falls $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

Entsprechende Aussagen gelten auch für $\lim_{x\to b}$.

Proof. Der Beweis verwendet auf geschickte Weise eine allgemeinere Version des Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Details in Lehrbüchern, z.B.: Barner-Flohr, S. 274.

Skizze: Sei zunächst der Limes 0 und $a < \infty$. Es gilt $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ für eine Zwischenstelle $\xi_x \in [x, a]$.

Diese allgemeinere Version des Zwischenwertsatzes (der bekannte Zwischenwertsatz ergibt sich wenn $g(x) = x$) folgt durch Anwendung des Satzes von Rolle auf die Hilfsfunktion $h(t) = (f(x)-f(a))(g(t)-g(a)) - (f(t)-f(a))(g(x)-g(a))$.

Wenn die Grenzwert $+\infty$ sind, ist die Begründung etwas mühsamer. Dann schreibt man

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} \frac{f(x)}{f(x)-f(c)} \frac{g(x)-g(c)}{g(x)}$$

für c nahe bei a und $c < x < a$. Nach dem verallgemeinerten Zwischenwertsatz ist dann $\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ mit $\xi \in (c, x)$, insbesondere ist der erste Nenner von Null verschieden. Der Limes des ersten Bruchs für $c, x \to a$ ist $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Da

$\frac{f(x)}{f(x)-f(c)} = \frac{1}{1-f(c)/f(x)}$ und $\lim_{x\to a} 1/f(x) = 0$, konvergiert der zweite Bruch gegen 1, genauso der dritte Bruch. Insgesamt folgt die Behauptung.

Der Fall $a = +\infty$ läßt sich durch Untersuchung von $F(x) := f(1/x)$ und $G(x) := g(1/x)$ auf den Fall $a = 0$ zurückführen. Beachte, dass

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{-f'(1/x)/x^2}{-g'(1/x)/x^2} = \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)},$$

somit

$$\lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

□

14 Differentialgleichungen

14.1 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

Dann nennen wir

$$y' = f(x, y)$$

eine gewöhnliche *Differentialgleichung* erster Ordnung.

Ist $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so heißt

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

eine Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Eine n-mal ableitbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{C}$ definiert auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt *Lösung der Differentialgleichung*, falls gilt

(1) Für jedes $x \in I$ gilt $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in G$.

(2) $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ für alle $x \in I$.

Beachte, dass die erste Bedingung erfüllt sein muss, damit der zweite Ausdruck definiert ist.

Also: eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, bei der nicht Zahlen, sondern ganze Funktionen Lösungen sind.

14.2 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ und $f_1, \dots, f_n\colon G \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\cdot \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Eine *Lösung* dieses Systems von Differentialgleichungen ist gegeben durch ein Tupel $(y_1, \dots, y_n)$ von differenzierbaren Funktionen $y_k\colon I \to \mathbb{C}$ definiert auf einem offenen Interval $I \subset \mathbb{R}$, so dass

(1) $(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \in G$ für jedes $x \in I$

(2)

$$y_k'(x) = f_k(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \qquad \forall x \in I.$$

Entsprechend kann man Systeme von Differentialgleichungen n-ter Ordnung und ihre Lösungen definieren.

14.3 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ und $f\colon G \to \mathbb{C}$. Sei $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ eine Differentialgleichung n-ter Ordnung. Betrachte das System von Differentialgleichungen 1. Ordnung*

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\ldots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}). \end{aligned}$$

Dann gilt: die Funktionen $y_1, \ldots, y_n\colon I \to \mathbb{C}$ bilden genau dann eine Lösung dieses Systems von Differentialgleichungen n-ter Ordnung, wenn $y_1\colon I \to \mathbb{C}$ eine Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung ist.

Proof. Ist $y_1, \ldots, y_n\colon I \to \mathbb{C}$ eine Lösung des Systems, so folgt induktiv, dass $y_k(x) = y_1^{(k-1)}(x)$ für $k = 1, \ldots, n-1$. Insbesondere ist y_1 n-mal ableitbar (da ja y_{n-1} noch ableitbar ist). Die letzte Gleichung impliziert dann $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$, indem man einsetzt.

Für die Umkehrung sei $y\colon I \to \mathbb{C}$ eine Lösung der Differentialgleichung n-ter Ordnung. Dann ist $y_1 := y$, $y_2 := y'$,..., $y_{n-1} := y^{(n-1)}$ eine Lösung des Systems, wie man sofort durch einsetzen nachprüfen kann. $\square$

14.4 Beispiel. (1) Sei $y' = y$. Jede Funktion der Form $y'(x) = a\exp(x)$ erfüllt diese Differentialgleichung. Legt man den *Anfangswert* fest, d.h. verlangt dass die Lösung an der Stelle Null den Wert c hat, so gibt es unter den angegebenen Funktionen genau eine Lösung, nämlich $y'(x) = c\exp(x)$.

(2) Seien $m, D > 0$. Die Differentialgleichung $my'' = -Dy$ hat die Lösungen $y(x) = a\cos(\sqrt{D/mx}) + b\sin(\sqrt{D/mx})$. Legt man $y(0)$ und $y'(0)$ fest, so gibt es unter den genannten Funktionen genau eine Lösung, nämlich $y(x) = y(0)\cos(\sqrt{D/mx}) + y'(0)\sin(\sqrt{D/mx})$. Allgemeiner erwartet man, dass man bei einer Differentialgleichung n-ter Ordnung Anfangswerte

$$y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$$

festlegen kann.

14.5 Beispiel. $y' = y^{2/3}$ hat Lösung $y(x) = 0$, aber auch die Lösung $y(x) = x^3/27$. Beide Lösungen nehmen für $x = 0$ den Wert 0 an.

Unser Ziel ist nun, festzustellen, wann Lösungen für Differentialgleichungen existieren, und zu welchem Grad diese eindeutig sind. Wegen des Reduktionssatzes genügt es, Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung zu betrachten.

Dies kann nicht für alle Differentialgleichungen (d.h. alle f) funktionieren, wie das Beispiel 14.5 zeigt. Bevor wir diese allgemeinen Fragen beantworten, wozu noch etwas zusätzliche Theorie eingeführt werden soll, betrachten wir einige spezielle Lösungsverfahren.

14.1 Einschub: Topologie in $\mathbb{R}^n$

Oben wurde schon der Begriff der stetigen Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ benutzt. Diesen wollen wir hier erklären.

14.6 Definition. (1) Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Vektoren $v_n = (v_n^1, \dots, v_n^N) \in \mathbb{R}^N$. Wir definieren: $\lim_{n\to\infty} v_n = v = (v^1, \dots, v^N) \in \mathbb{R}^N$ genau dann, wenn für jede *Komponentenfolge* gilt $v_n^k \xrightarrow{n\to\infty} v^k$ (für $k = 1, \dots, N$).

(2) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^N$ heißt abgeschlossen, wenn für jede (in $\mathbb{R}^N$) konvergente Folge $(v_n \in A)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\lim_{n\to\infty} v_n \in A$.

(3) Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^N$ heißt *offen*, falls ihr Komplement $\mathbb{R}^N \setminus U$ abgeschlossen ist.

(4) Für $v = v^1, \dots, v^N) \in \mathbb{R}^N$ definiere $|v|_1 := \sum_{k=1}^n |v^k|$ und $|v|_\infty := \max\{|v^k| \mid k = 1, \dots, N\}$. Definiere die *euklidische Norm* $|v|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^N |v^k|^2}$. Beachte:

$$|v|_\infty \le |v|_1 \le N\,|v|_\infty\,. \tag{14.7}$$

Eine ähnliche Ungleichung gilt auch für $|\cdot|_2$, ist aber nicht ganz so offensichtlich.

(5) $A \subset \mathbb{R}^N$ heißt *beschränkt*, falls es $R > 0$ gibt, so dass $|v|_1 < R$ für jedes $v \in A$.

(6) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^M$ eine Funktion. f heißt *stetig* an $a \in U$, falls für jede Folge $(v_n \in U)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $lim_{n\to\infty} v_n = a$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(v_n) = f(a)$.

Äquivalent ist folgende ϵ-δ-Definition: für jedes $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so dass für alle $v \in U$ mit $|v-a|_1 < \delta$ gilt: $|f(v) - f(a)|_1 < \epsilon$. Wegen (14.7) kann man hier an einigen oder allen Stellen $|\cdot|_1$ durch $|\cdot|_\infty$ ersetzen.

Entsprechende Definitionen ergeben sich, wenn $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt werden, da man ja immer $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ auffassen kann.

Eine Reihe von Eigenschaften übertragen sich jetzt sofort von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^N$.

14.8 Satz. *(1) Sei $f\colon \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$ und $g\colon \mathbb{R}^{N_2} \to \mathbb{R}^{N_3}$ stetig. Dann ist auch $g \circ f\colon \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_3}$ stetig.*

(2) Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen und beschränkt und $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f auf A beschränkt, d.h. es gibt $M \in \mathbb{R}$, so dass $|f(v)| < M$ für alle $v \in K$.

14.2 Trennung der Variablen

14.9 Satz. *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon J \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetige Funktionen.*

Setze $G := I \times J \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Wir betrachten nun die Differentialgleichung $y' = f(x)g(y)$.

Wähle $x_0 \in I$, $y_0 \in J$. Definiere

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\,dt, \qquad G(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt.$$

Es gelte $F(I) \subset G(J)$ (dies kann durch Verkleinern von I immer erreicht werden). Dann existiert genau eine Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x) = f(x)g(y(x))$ für alle $x \in I$. Diese erfüllt

$$G(y(x)) = F(x) \qquad \forall x \in I. \tag{14.10}$$

Proof. Sei $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung mit $\phi(x_0) = y_0$. Durch Integrieren erhält man aus $\phi'(x) = f(x)g(\phi(x))$ nach Division durch $g(\phi(x)) \neq 0$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\phi'(t)}{g(\phi(t))} = \int_{x_0}^{x} f(t); dt.$$

Links kann man nun substituieren $u\phi(x)$, und erhält

$$\int_{y_0}^{\phi(x)} \frac{1}{g(u)}\, du = \int_{x_0}^{x} f(t),$$

also nach Definition gerade $G(\phi(x)) = F(x)$.

Nach Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $G'(y) = 1/g(y) \neq 0$. Somit ist G streng monoton und stetig diffbar, hat also eine ebensolche Umkehrfunktion

$$H\colon G(J) \to J.$$

Setze nun $y(x) := H(F(x))$. Da H und F (als Stammfunktionen stetiger Funktionen) stetig diffbar sind, gilt dies auch für ihre Verkettung y, und es gilt

$$y'(x) = H'(F(x))F'(x) = \frac{1}{G'(H(F(x)))} f(x) = g'(y(x))f(x).$$

Außerdem gilt $y(x_0) = H(F(x_0)) = H(0) = y_0$ (da $G(y_0) = 0$). Also ist y Lösung unserer Differentialgleichung.

Wegen Gleichung (14.10) hat jede Lösung die Gestalt $y(x) = H(F(x))$, damit gilt die Eindeutigkeit. □

14.11 Bemerkung. In Kurzschreibweise: $dy/dx = f(x)g(y)$, also $dy/g(y) = f(x)dx$. Dann muss man nur noch integrieren und nach y auflösen. Der Satz ist die mathematisch präzise Formulierung dieses Rezepts.

14.12 Beispiel. Betrachte die Differentialgleichung $y' = \exp(y)\sin(x)$. Trennung der Variablen liefert

$$\int_{y_0}^{y} \exp(-t)dt = \int_{x_0}^{x} \sin(s)ds,$$

also

$$-\exp(-y) + \exp(-y_0) = -\cos(x) + \cos(x_0),$$

also

$$y(x) = -\ln(\cos(x) - \cos(x_0) + \exp(-y_0)).$$

Beachte, dass diese Lösungen in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen völlig verschiedenes Verhalten zeigen: Wähle $x_0 = 0$, also $\cos(x_0) = 1$ Falls $\exp(-y_0) > 2$, so ist $y(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und eine beschränkte Funktion. Sie ist periodisch mit Periode 2π. Für $\exp(-y_0) = 2$ ist das Definitionsinterval nur noch $(-\pi, \pi)$, und y divergiert an beiden Endpunkten gegen $+\infty$. Wird $\exp(-y_0)$ noch kleiner, wird auch das Definitionsinterval entsprechend kleiner (die Funktion $y(x)$ divergiert weiter an den Endpunkten gegen $+\infty$).

14.3 Lineare Differentialgleichungen

14.13 Beispiel. Betrachte die Differentialgleichung zweiter Ordnung $my'' = -Dy$, mit $m, D > 0$ Konstanten.

Das zugehörige Differentialgleichungssystem erster Ordnung sieht folgendermaßen aus:

$$y' = y_2 \qquad y_2' = -\frac{D}{m}y.$$

Die Umformung in solche Systeme hat (mindestens) 2 Gründe:

(1) Systeme von Differentialgleichungen tauchen bei den Anwendungen auf ganz natürliche Weise auf: immer dann, wenn nicht nur genau eine Größe beobachtet wird, sondern mehrere, und diese sich gegenseitig beeinflussen. Beispiel: Räuber und Beute in Ökosystemen, gekoppelte Pendel in Maschinen. Systeme von Differentialgleichungen müssen also sowieso behandelt werden. Man spart sich so Arbeit, wenn man die Differentialgleichungen höherer Ordnung als einen Spezialfall der Systeme versteht.

(2) Obwohl eine explizite Lösung nur in wenigen Fällen durch die Reduktion auf ein System erster Ordnung leichter gefunden werden können, sieht dies für theoretische Fragestellungen doch schon viel besser aus. Dies werden wir später noch sehen.

Die Gleichung aus dem Beispiel ist eine weitere von besonderem Typ, eine sogenannte lineare Differentialgleichung. Diese wollen wir jetzt besonders betrachten.

14.14 Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A, b \colon I \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen.

Die Differentialgleichung $y' - A(x)y = 0$ heißt *homogene lineare Differentialgleichung* 1. Ordnung, die Differentialgleichung $y' - A(x)y = b(x)$ heißt *inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.*

Sei allgemeiner $A \colon I \to \mathbb{C}^{n \cdot n}$ eine stetige matrixwertige Funktion (d.h. wir identifizieren $\mathbb{C}^{n \times n}$ mit den $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$, $A(x)$ hat also Komponenten $(A_{i,j}(x))_{i,j=1,\dots,n}$). Sei $b \colon I \to \mathbb{C}^n$ eine stetige vektorwertige Funktion. Definiere $f \colon I \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ durch

$$f(x, y_1, \dots, y_n) := (\sum_{i=1}^{n} A_{1i}(x)y_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} A_{ni}y_i),$$

also in Matrixschreibweise $f(x, y) = A(x)y$.

Das Differentialgleichungssystem

$$y' = f(x, y) = A(x)y$$

heißt *homogenes lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung*, das Differentialgleichungssytem

$$y' = f(x, y) + b(x) = A(x)y + b(x)$$

heißt *inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung.*

Falls alle $A_{ij}(x)$ konstant sind, also $A(x) = A$ eine konstante Matrix, so heißt die Differentialgleichung eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Bemerkung: Vektor- und Matrizenrechnung geht mit komplexen Einträgen ganz genauso wie mit reellen Einträgen.

Die homogene Gleichung $y' = A(x)y$ mit $A\colon I \to \mathbb{C}$ ist ein spezieller Fall der Trennung der Variablen, welche vorher behandelt wurde. Man erhält als Lösung mit Anfangswert $y(x_0) = y_0$

$$y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt\right)$$

14.15 Satz. *Die Menge aller Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$ bildet ein Vektorraum. D.h., falls $\phi_1, \phi_2\colon I \to \mathbb{C}^n$ Lösungen sind, und $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist auch $\lambda\phi_1 + \phi_2\colon I \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung.*

Sei $\psi\colon I \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y + b(x)$. Sei ϕ_1 wie oben. Dann ist auch $\psi + \phi_1\colon I \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems.

Proof. Es gilt $(\lambda\phi_1 + \phi_2)'(x) = \lambda\phi_1'(x) + \phi_2'(x)$. Für die rechte Seite ergibt sich, da Matrizenmultiplikation linear ist

$$A(x)(\lambda\phi_1(x) + \phi_2(x)) = \lambda A(x)\phi_1(x) + A(x)\phi_2(x).$$

Falls also $\phi_1'(x) = A(x)\phi_1(x)$ und $\phi_2'(x) = A(x)\phi_2(x)$, so auch $(\lambda\phi_1 + \phi_2)'(x) = A(x)(\lambda\phi_1(x) + \phi_2(x))$.

Gilt außerdem $\psi'(x) = A(x)\psi(x) + b(x)$, so ergibt sich mit der gleichen Rechnung

$$(\psi+\phi_1)'(x) = \psi'(x)+\phi_1'(x) = A(x)\psi(x)+b(x)+A(x)\phi_1(x) = A(x)(\psi(x)+\phi_1(x))+b(x),$$

also ist auch $\psi + \phi$ Lösung der inhomogenen Gleichung. □

14.16 Satz. *Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine $n \times n$-Matrix komplexer Zahlen. Sei $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ (d.h. für jeder Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ gibt es eindeutige $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ so dass $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$).*

Jeder der Vektoren v_k sei Eigenvektor *der Matrix A zu einem Eigenwert $\mu_k \in \mathbb{C}$, d.h. $Av_k = \mu_k v_k$.*

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt: die Funktionen $\phi_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mit

$$\phi_k(x) = v_k \exp(\mu_k(x - x_0) = (v_k^1 \exp(\mu_k(x - x_0)), \dots, v_k^n \exp(\mu_k(x - x_0))$$

(wo $v_k = (v_k^1, \dots, v_k^n)$ die Komponenten des Vektors v sind) sind Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = Ay.$$

Zu vorgegebenen Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0 := (y_0^1, \dots, y_0^n)$ gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ so dass

$$y_0 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Es gilt: die Funktion $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mit

$$\phi(x) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_k(x)$$

löst die Differentialgleichung $y' = Ay$ und erfüllt $\phi(x_0) = y_0$.

Proof. Die Funktionen ϕ_k und ϕ sind alle (beliebig oft) ableitbar, und es gilt $\phi_k'(x) = \mu_k v_k \exp(\mu_k x) = \mu_k \phi_k(x)$. Andererseits gilt $A\phi_k(x) = Av_k \exp(\mu_k x) = \mu_k v_k \exp(\mu_k x) = \mu_k \phi_k(x)$. Also tatsächlich $\phi_k'(x) = A\phi_k(x)$.

Wegen der Linearität ist dann auch $\phi(x)$ Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$. Weiter berechnet man

$$\phi(x_0) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \phi_k(x_0) = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \exp(\mu_k(x_0 - x_0)) = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = y_0.$$

□

14.17 Bemerkung. Zum Lösen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten muss man also Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen können!

14.18 Beispiel. In unserem Beispiel $y'' = -(D/m)y$ erhielten wir die Matrix $\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -D/m & 0 \end{smallmatrix}$. Aus der linearen Algebra hat Eigenwerte $\mu_1 = \sqrt{-D/m} = i\sqrt{D/m}$ und $\mu_2 = -\sqrt{-D/m} = -i\sqrt{D/m}$ mit Eigenvektoren $w_1 := (1, i\sqrt{D/m})$ und $w_2 := (1, -i\sqrt{D/m})$ (beachte, dass die Eigenvektoren und Eigenwerte nicht reell sind!).

Damit erhält man Lösungen

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= v_1 \exp(i\sqrt{D/m}(t - t_0)), \\ \phi_2(t) &= v_2 \exp(-i\sqrt{D/m}(t - t_0)). \end{aligned}$$

Seinen nun Anfangsbedingungen $y(t_0) = y_0$ und $y_2(t_0) = y'(t_0) = v_0$ vorgegeben.

Wir müssen also $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ so bestimmen, dass $\lambda_1 + \lambda_2 = y_0$ und $i\sqrt{D/m}(\lambda_1 - \lambda_2) = v_0$.

Es ist günstig, Realteil und Imaginärteil getrennt zu betrachten. Aus der ersten Gleichung sieht man, dass $Im(\lambda_1) = -Im(\lambda_2)$ (da y_0 reell). Aus der zweiten Gleichung ergibt sich $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2)$ (wieder, da v_0 reell, also v_0/i rein imaginär). Setzt man dies jeweis in die andere Gleichung ein, sieht man $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = y_0/2$, und $Im(\lambda_1) = -Im(\lambda_2) = -v_0\sqrt{m/D}/2$.

Eingesetzt erhält man als Lösung für unser Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y(t) = \phi(t)^1 =& y_0 \frac{\exp(i\sqrt{D/m}(t - t_0)) + \exp(-i\sqrt{D/m}(t - t_0))}{2} \\ &+ v_0 \sqrt{\frac{m}{D}} \frac{\exp(i\sqrt{D/m}(t - t_0)) - \exp(-i\sqrt{D/m}(t - t_0))}{2i} \\ =& y_0 \cos(\sqrt{\frac{D}{m}}(t - t_0)) + v_0 \sqrt{\frac{m}{D}} \sin(\sqrt{\frac{D}{m}}(t - t_0)). \end{aligned}$$

Durch Linearkombination kann man die erste Kombination reell machen: sin und cos. Dies liefert die übelichen Lösungen!

14.4 Variation der Konstanten

Dieser Abschnitt wurde nicht in der Vorlesung behandelt.

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung für normale (nicht vektorwertige) Funktionen machen wir folgenden Ansatz: Ist y die Lösung der homogenen Gleichung mit Anfangswert $y(x_0) = y_0 \neq 0$, so gilt $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, also gilt für jede Lösung ϕ der inhomogenen Gleichung

$$\phi(x) = y(x) \cdot u(x)$$

für eine geeignete Funktion u. Wir wollen nun u so bestimmen, dass $y(x)u(x)$ wirklich die inhomogene Gleichung löst.

Dann muss für u insbesondere gelten

$$y'u + yu' - yua = b.$$

Da $y' = ya$, also

$$yau + yu' - yua = yu' = b.$$

Definiere also $u(x) := c + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{y(t)} dt$. Dann ist u stetig diffbar und $\phi(x)u(x)$ erfüllt die inhomogene Differentialgleichung mit Anfangswert $\phi(x_0)u(x_0) = y_0 c$.

Da die Lösung $y(x)$ der homogenen Gleichung eindeutig ist, zeigt unsere Herleitung außerdem dass diese Lösung eindeutig ist.

15 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen

15.1 Definition. Sei $f\colon I \to \mathbb{C}^n$ eine vektorwertige Funktion, also $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Falls jede Komponente ableitbar ist, definieren wir $f'(x) := (f_1'(x), \dots, f_n'(x))$. Falls jede Komponente eine Regelfunktion ist, nennen wir f eine Regelfunktion und definieren

$$\int_a^b f(t)\, dt := (\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n).$$

15.2 Lemma. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}^n$ eine Regelfunktion. Es gilt* $\left|\int_a^b f\right|_1 \leq \int_a^b |f|_1$.

Proof. Es gilt $\left|\int_a^b f_k\right| \leq \int_a^b |f_k|$ für jede Komponentenfunktion f_k. Das Lemma folgt durch Addition dieser Ungleichungen. □

15.3 Bemerkung. Entsprechende Ungleichungen gelten auch für $|\cdot|_\infty$ und für die euklidische Norm, sind dann jedoch etwas schwerer zu beweisen.

15.4 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$. Wir sagen, dass eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}^n$ in G eine *Lipschitz Bedingung* erfüllt, falls es $L > 0$ gibt, so dass

$$|f(x,z) - f(x,z')|_1 \leq L \cdot |z - z'|_1 \quad \text{für alle} \quad (x,z), (x',z') \in G.$$

Hierbei war $|y_1, \dots, y_n| = |y_1| + \dots + |y_n|$. Wir sagen, f erfüllt *lokal eine Lipschitzbedingung*, wenn jeder Punkt $(x,z) \in G$ eine offene Umgebung U besitzt, so dass $f|_{G \cap U}$ eine Lipschitz Bedingung erfüllt.

15.5 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{R}\times\mathbb{C}^n$ und $f\colon G \to \mathbb{C}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz Bedingung genügt. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $u, v\colon I \to \mathbb{C}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung, d.h. $u'(x) = f(x, u(x))$ und $v'(x) = f(x, v(x))$. Außerdem gebe es einen Punkt $a \in I$ mit $u(a) = v(a)$.*

Dann gilt $u(x) = v(x)$ für alle $x \in I$.

Merkregel: ***Wenn die Lipschitz-Bedingung erfüllt ist, sind die Lösungen der Differentialgleichung mit vorgegebenen Anfangswert eindeutig.***

Proof. Sei $b \in I$ und $u(b) = v(b)$. Wir wollen zunächst zeigen, dass es dann $\epsilon > 0$ gibt, so dass $u(x) = v(x)$ für alle $x \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$. Durch Integration erhalten wir für jede Komponente ($k = 1, \dots, n$)

$$u_k(x) - u_k(b) = \int_b^x f_k(t, u(t)); dt; \qquad v_k(x) - v_k(b) - \int_b^x f_k(t, v(t))\, dt.$$

Also, da $u_k(b) = v_k(b)$

$$u(x) - v(x) = \int_b^x (f(t, u(t)) - f(t, v(t))); dt.$$

Da f_k eine lokale Lipschitz Bedingung erfüllt, und u und v stetig sind, gibt es $\epsilon > 0$ so, dass $|f(t, u(t)) - f(t, v(t))|_1 \le L\, |u(t) - v(t)|_1$ für alle $t \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$. Insbesondere gilt für $x \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$

$$|u(x) - v(x)|_1 \le L \int_b^x |u(t) - v(t)|_1$$

Wähle nun $\delta := \min\{\epsilon, 1/2L\}$. Für $x \in (b - \delta, b + \delta)$ gilt dann $L \int_b^x |u(t) - v(t)|_1 \le 1/2S$, wobei $S := \sup\{|u(t) - v(t)|_1 \mid |t - b| < \delta\}$. Wähle t_0 mit $|t_0 - b|$ so dass $|u(t_0) - v(t_0)|_1 \ge 3/4S$. Für dieses t_0 gilt dann

$$|u(t_0) - v(t_0)|_1 \le L \int_b^{t_0} |u(t) - v(t)|_1 \le L\, |t_0 - b|\, S \le 1/2 \cdot S.$$

Da gleichzeitig nach Wahl von t_0 $|u(t_0) - v(t_0)|_1 \ge 3/4S$, gilt $S = 0$, somit $u(t) = v(t)$ auf dem Intervall $(b - \delta, b + \delta)$.

Als nächstes zeigen wir, dass $u(x) = v(x)$ für alle $x \in I$ mit $x \ge a$. Sei nämlich $x_0 = \sup\{x \in I \mid x \ge a, u(x) = v(x)\}$. Wir müssen zeigen, dass x_0 die rechte Grenze von I ist ($= +\infty$, falls I rechts unbeschränkt). Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Da u und v stetig sind, gilt $u(x_0) = v(x_0)$. Nach dem bisher gezeigten gibt es dann aber ein $\delta > 0$, so dass $u(x) = v(x)$ auch noch für alle x mit $x < x_0 + \delta$. Dies ist im Widerspruch zur Vorausseztung, dass x_0 die größte solche Stelle ist.

Genauso zeigt man dass $u(x) = v(x)$ für alle $x \le a$. □

15.6 Satz. ***Existenz von Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung (Satz von Picard-Lindelöff).***

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ offen und $f\colon G \to \mathbb{C}^n$ sei stetig und erfülle eine lokale Lipschitz Bedingung.

Sei $(x_0, y_0) \in G$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Funktion $y\colon (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \to \mathbb{C}^n$ mit $\phi(x_0) = y_0$ so dass $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.

Nach Satz 15.5 ist die Lösung eindeutig.

Merkregel: ***Wenn die Lipschitz-Bedingung erfüllt ist, gibt es lokal eine (sogar eindeutige) Lösung der Differentialgleichung mit vorgegebenem Anfangswert.***

Proof. Um die Lösung zu finden, wollen wir ein Iterationsverfahren anwenden.

Wir definieren einen "Operator" T, der Funktionen auf Funktionen abbilden, und so dass $T\phi = \phi$ impliziert, dass ϕ die Differentialgleichung erfüllt. Dann setzen wir $\phi_0(x) := y_0$, also die konstante (vektorwertige) Funktion, und definieren induktiv $\phi_{n+1} = T\phi_n$. Wir müssen dann zeigen, dass die Folge (ϕ_n) konvergiert, und dass die Grenzfunktion ϕ wirklich $T\phi = \phi$ impliziert.

Wir definieren für eine stetige Funktion $u\colon (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \to \mathbb{C}^n$, falls $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

$$(Tu)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt.$$

Diese Funktion ist definiert, solange $(t, u(t)) \in G$ für alle t mit $|t - x_0| < \epsilon$, da der Integrand als Verkettung stetiger Funktionen stetig ist. Nach dem Hauptsatz ist Tu dann sogar ableitbar und es gilt $(Tu)'(x) = f(x, u(x))$, sowie $Tu(x_0) = y_0$.

Es geht also zunächst darum, zu garantieren dass in unserem Iterationsprozess immer $(t, \phi_n(t)) \in G$. Dazu wählen wir $\epsilon > 0$ genügend klein.

Beachte zunächst dass es, da G offen ist, ein $r > 0$ gibt, so dass die Menge $V := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \mid |x - x_0| \le r,\ |y - y_0|_1 < r\}$ in G enthalten ist und so dass f auf V einer Lipschitz Bedingung mit Konstante L genügt (also $|f(x, y) - f(x, y')|_1 \le |y - y'|_1$ f"ur alle $(x, y), (x, y') \in V$). Da die Menge abgeschlossen und kompakt und f stetig ist, gibt es $M > 0$ so dass $|f(x, y)|_1 < M$ für alle $(x, y) \in V$.

Wähle nun $\epsilon := \min\{r/M, r, 1/2L\}$ und schreibe $I := [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$.

Definiere $\phi_k\colon I \to \mathbb{C}^n$ induktiv mit $\phi_0(x) = y_0$ und $\phi_k := T\phi_{k-1}$ für $k > 0$. Wie oben erläutert, ist dies dann wohldefiniert, wenn $|\phi_{k-1}(x) - y_0|_1 \le r$ für jedes $x \in I$. Für $k = 0$ ist dies klar. Allgemein gilt: falls $u\colon I \to \mathbb{C}$ erfüllt, dass $|u(x) - y_0|_1 \le r$ für alle $x \in I$, so gilt auch $|Tu(x) - y_0|_1 \le r$ für alle $x \in I$, da

$$|Tu(x) - y_0|_1 \le \int_{x_0}^{x} |f(x, u(x))|_1 \le |x - x_0|\, M \le r/M \cdot M.$$

Damit ergibt sich die entsprechende Aussage für die ϕ_k per Induktion.

Seien $u, v\colon I \to \mathbb{C}$ nun zwei Funktionen mit $|u(x)|_1 \le r$ und $|v(x)|_1 \le r$ für alle $x \in I$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|Tu(x) - Tv(x)|_1 &\le \int_{x_0}^{x} |f(t, u(t)) - f(t, v(t))|_1\, dt \\
&\le |x - x_0|\, L \sup\{|u(t) - v(t)|_1 \mid t \in I\} \\
&\le \frac{1}{2} \sup\{|u(t) - v(t)|_1 \mid t \in I\}.
\end{aligned} \tag{15.7}$$

Setze $C := \sup\{|\phi_1(t) - y_0|_1 \mid t \in I\}$. Per Induktion ergibt sich daraus und aus Ungleichung (15.7)

$$|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)|_1 \le \frac{1}{2^k} C,$$

und damit durch aufsummieren

$$|\phi_{m+k}(x) - \phi_m(x)|_1 \leq \frac{1}{2^m} C,$$

da $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k = 1$.

Dies gilt somit auch für die Supremumsnorm jeder der Komponentenfunktionen ϕ_m^j:

$$\left|\phi_{m+k}^j - \phi_m^j\right|_0 \leq \frac{1}{2^m} C.$$

Nach dem Cauchykriterium konvergieren all diese Komponentenfunktionen daher gleichmäßig gegen stetige Limesfunktionen ϕ_j. Setze $\phi := (\phi^1, \dots, \phi^n)$.

Zuletzt beachte, dass

$$\begin{aligned} |\phi(x) - T\phi(x)|_1 &\leq |\phi(x) - \phi_{m+1}(x)|_1 + |T\phi_m(x) - T\phi(x)| \\ &\leq |\phi(x) - \phi_{m+1}(x)|_1 + \frac{1}{2} \sup\{|\phi_m(t) - \phi(t)|_1 \mid t \in I\}. \end{aligned}$$

Gleichmäßige Konvergenz bedeutet, dass die rechte Seite für $m \to \infty$ gegen Null konvergiert, also gilt $\phi = T\phi$.

Damit erfüllt ϕ die Differentialgleichung. Außerdem gilt $\phi_m(x_0) = y_0$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also auch $\phi(x_0) = y_0$. □

Wir wollen dieses Resultat nun übersetzen in die Frage von Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen höherer Ordnung.

15.8 Korollar. *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ offen und $f\colon G \to \mathbb{C}$ sei stetig und erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung. Sei $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$. Dann existiert $\epsilon > 0$, so dass auf $I := (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ genau eine Funktion $\phi\colon I \to \mathbb{C}$ existiert, welche n-mal differenzierbar ist, und so dass*

$$\phi^{(n)}(x) = f(x, \phi(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x))$$

und

$$\phi(x_0) = y_0, \dots, \phi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

d.h. ϕ ist (eindeutige) lokale Lösung des Anfangswertproblems.

Proof. Wegen Satz 14.3 folgt dies sofort aus den Sätzen 15 und 15.5. □