Kurz-Skript zu „Topologie und Differentialgeometrie 1”

Thomas Schick*

Last compiled 26. Mai 2008; last edited 20.1. 2005 or later

Hinweis: dieses Skript ist wurde nicht korrekturgelesen. Es gibt mit Sicherheit eine Menge Fehler. FürHinweise auf Fehler schreiben Sie bitte eine email an schick@uni-math.gwdg.de. Das Skript stellt nur eine Approximation an die Vorlesung dar: Nicht alle Sätze und Beweise werden notwendigerweise vorgeführt, andererseits mögen nicht alle behandelten Sätze und Beispiele hier notiert sein.

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen **2**

I Einführung in Differentialgeometrie **3**

2 Glatte Mannigfaltigkeiten **3**

3 Riemannsche Geometrie -1 **9**

4 Abstrakter Tangentialraum **9**

5 Riemannsche Geometrie 0 **11**
5.1 Riemannsche Metriken 11
5.2 Isometrien und Beispiele 13

6 Vektorbündel und Tangentialraum **15**
6.1 Neue Vektorbündel aus alten 18

7 Riemannsche Geometrie 1 **21**

8 Drei Sätze über Mannigfaltigkeiten **21**
8.1 Urbildsatz 22
8.2 Satz von Sard über Existenz regulärer Werte 24
8.3 Teilung der Eins 24

9 Kurven und Flächen im Raum I **25**
9.1 Kurventheorie im Raum 25
9.2 Flächen im Raum I 28

*email: thomas.schick@uni-math.gwdg.de

10 Baby Lie Gruppen 0 **32**

11 Überlagerungen 0 **33**

12 Fundamentalgruppe 0 **35**

13 Tangentialvektoren als Derivationen **37**

14 Baby Liegruppen 1 **40**

15 Überlagerungen 1 **41**

16 Wiederholung zur (Multi)lineare Algebra **44**
16.1 Tensorprodukt . . . 44
16.2 Verjüngungen . . . 45

17 Kovariante Ableitung und Zusammenhang **46**
17.1 Kovariante Ableitung . . . 46
17.2 Paralleltransport . . . 51

18 Geodäten **53**
18.1 Differentialgleichung für Geodäten . . . 53
18.2 Geodäten und Metrik . . . 55
18.3 Der Satz von Hopf-Rinov . . . 57
18.4 Geodäten und Energie . . . 58

19 Krümmung **58**
19.1 Krümmung und Topologie . . . 61

20 Variation von Bogenlänge und Jakobifelder **62**
20.1 Variation von Bogenlänge und Energie . . . 62
20.2 Jakobifelder . . . 66
20.3 Cut Locus . . . 67
20.4 Myers Theorem . . . 68

21 Riemannsche Untermannigfaltigkeiten **69**

22 Riemannsche Submersionen **71**

23 Struktur von allgemeinen topologishcen Räumen und Mannigfaltigkeiten —ein Ausbilck **72**

1 Vorbemerkungen

Die Vorlesungsreihe Topologie und Differentialgeometrie soll eine Einführung sowohl in die algebraische Topologie als auch in die Differentialgeometrie, insbesondere die Riemannsche Geometrie, geben. Oft werden solche Vorlesungen unabhängig voneinander gehalten. Da es aber viele Zusammenhänge gibt, und jedes der beiden Gebiete das andere mittels interessanter Beispiele und Problemstellungen befruchtet, da außerdem die zugrundeliegenden Objekte in beiden Fällen hauptsächlich Mannigfaltigkeiten sind, wird hier ein integrierter Kurs angeboten.

Der Teil 1 wird zunächst, und für den größten Teil dieses Semesters, Differentialgeometrie behandeln. So sollte die Vorlesung auch für Hörer von Interesse sein, die bei Prof. tom Dieck in den letzten Jahren Vorlesungen über algebraische Topologie besucht haben.

Empfohlene und benutzte Literatur besteht insbesondere aus den Lehrbüchern, die im Literaturverzeichnis aufgeführt sind. Die Liste ist schon lang, könnte aber noch ergänzt werden.

Von besonderer Relevanz für die Vorbereitung waren [14], [5]. Eine Liste mit online verfügbarer Literatur kann man auf http://www.matematik.lu.se/matematiklu/personal/sigma/Geometry-on-web.html finden.

Teil I
Einführung in Differentialgeometrie

2 Glatte Mannigfaltigkeiten

In der Vorlesung wird eine gewisse Vertrautheit mit Mannigfaltigkeiten vorausgesetzt. Trotzdem sollen hier die wichtigsten Begriffe und einige Beispiele wiederholt werden. Da hin und wieder Mannigfaltigkeiten anders definiert werden (z.B. nur als Teilmengen des euklidischen Raums) kann hier sicherlich für den ein oder anderen auch neues zu lernen sein.

2.1 Definition. Ein topologischer Raum ist eine Menge X zusammen mit einer Teilmenge τ der Potenzmenge von X (die Elemente von τ sind also Teilmenge von X, diese werden die *offenen Mengen* genannt), so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.

(2) Falls $U, V \in \tau$, so auch $U \cap V \in \tau$.

(3) Sei I eine beliebige Indexmenge. Falls $U_i \in \tau$ für $i \in I$, so auch $\bigcup_{i \in I} U_i$.

2.2 Beispiel. $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Definition offener Mengen ist ein topologischer Raum, ebenso jeder metrische Raum.

2.3 Definition. Sei (X, τ) topologischer Raum und $A \subset X$. Auf A definiert man die *Teilraumtopologie* τ_A als $\tau_A := \{U \cap A \mid U \in \tau\}$.

2.4 Beispiel. So wird also jede Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ (oder eines metrischen Raums) wieder ein topologischer Raum.

Man kann natürlich auch die Metrik von $\mathbb{R}^n$ auf A einschränken, erhält so eine Metrik auf A, und dann die zugehörige Topologie betrachten. Dies ist genau die Teilraumtopologie (Übungsaufgabe).

2.5 Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig*, falls das Urbild jeder offenen Teilmenge von Y eine offene Teilmenge von X ist. f heißt *Homöomorphismus*, falls f bijektiv ist und sowohl f also auch seine Umkehrabbildung stetig sind.

2.6 Aufgabe. Gib eine Homöomorphieklassifikation der Großbuchstaben des lateinischen Alphabets. Versuche, Begründungen zu finden, warum Buchstaben nicht homöomorph sind.

2.7 Definition. Eine n-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit M ist ein topologischer Raum mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für jeden Punkte $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung U_x mit $x \in U_x$ und ein Homöomorphismus
$phi\colon U_x \to V_x$, wobei V_x eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist. Diese Abbildungen heißen *Karten* der Mannigfaltigkeit M.

(2) M ist ein Hausdorffraum. D.h. für je zwei Punkte $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gibt es offene Mengen U_x, U_y mit $x \in U_x$, $y \in U_y$ und so dass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

(3) M erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom (historische Notation!), d.h. es gibt eine abzählbare Teilmenge, welche dicht in M liegt.

Falls M eine Mannigfaltigkeit ist, so heißt ein Kollektion (=Menge) $\{\phi_i\colon U_i \to V_i \mid i \in I\}$ von Karten von M ein *Atlas*, falls $\bigcup_{i\in I} U_i = M$.

2.8 Beispiel. (1) $\mathbb{R}^n$ ist selbst eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit

(2) jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit

(3) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Als Karten kann man z.B. die orthogonalprojektionen auf die Koordinatenhyperflächen wählen.

(4) Definiere $\mathbb{C}P^n$: als Menge aller 1-dimensionalen komplexen Unterräume von $\mathbb{C}^{n+1}$, entsprechend $\mathbb{R}P^n$ als Menge der 1-dimensionalen reellen Unterräume von $\mathbb{R}^{n+1}$ (ein Punkt in der Menge ist also ein 1-dimensionaler Unterraum). beachte, dass es surjektive Abbildungen $p\colon \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}P^n$ und $p\colon \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}P^n$ gibt, die jeden Vektor auf den von ihm erzeugten 1-dimensionalen Unterraum abbildet (warum ist 0 aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen?).

Wir definieren eine Topologie auf $\mathbb{C}P^n$ und $\mathbb{R}P^n$, indem eine Menge als offen definiert wird, genau wenn ihr Urbild unter p offen ist. Für $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ sei $[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{C}P^n$ der von $(z_0, \dots, z_n)$ erzeugte Unterraum. Wir definieren Karten auf $\mathbb{C}P^n$ auf folgende Weise: sei $U_k := \{[z_0 : \dots : z_n] \mid z_k \neq 0\}$. Definiere $\phi_k\colon U_k \to \mathbb{C}^n; [z_0 : \dots : z_n] \mapsto (z_0/z_k, \dots, z_{k-1}/z_k, z_{k+1}/z_k, \dots, z_n/z_k)$. Dies sind Karten für $\mathbb{C}P^n$. Wir benutzen hier natürlich die Identifikation $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ (Aufgabe: beweise dass die Abbildung wohldefiniert ist und dass es sich um Homöomorphismen handelt).

(5) Die Gruppe $O(n)$ aller reellen orthogonalen $n \times n$-Matrizen (A orthogonal heißt $A^*A = 1$) bildet eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$. Die Topologie erhält sie als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$. Karten zu finden, ist etwas schwieriger.

(6) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ eine glatte Abbildung, so dass ihr Differential für jedes $x \in f^{-1}(0)$ eine surjektive lineare Abbildung $D_x f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ist. Dann ist $f^{-1}(0)$ eine $n-k$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Auch dies wird später bewiesen, Das Beispiel $O(n)$ ist ein Spezialfall, hier ist $U = \mathbb{R}^{n^2} = M(n \times n, \mathbb{R})$ und $f\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n(n+1)/2}; A \mapsto [A^*A - 1]$, wobei in diesem Fall mit $[A^*A - 1]$ die Koordinaten oberhalb und auf der Diagonalen zusammengefasst werden (man muss eine Anordnung wählen, dann erhält meinen einen Vektor in $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$).

2.9 Satz. *Sei X ein topologischer Raum und $p\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Dann definiert folgende Vorschrift eine Topologie auf Y, die sogenannte* Quotiententopologie*:*

$U \subset Y$ ist genau dann offen, wenn $p^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

Diese Topologie hat folgende (universelle) Eigenschaft: eine Abbildung $f\colon Y \to A$ (A topologischer Raum) ist genau dann stetig, wenn $f \circ p\colon X \to A$ stetig ist.

Beweis. Übungsaufgabe. □

2.10 Beispiel. Die von uns auf $\mathbb{C}P^n$ und $\mathbb{R}P^n$ definierte Topologie ist eine Quotiententopologie.

Definiere $p\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n; v \mapsto \frac{v}{|v|}$. Die übliche Topologie auf S^n ist genau die Quotiententopologie (Übungsaufgabe).

Sie X topologischer Raum und eine Äquivalenzrelation auf X. Bezeichne mit $X/$ die Menge der Äquivalentzklassen. Es gibt eine offensichtliche surjektive Abbildung $X \to X/$, die jeden Punkt auf seine Äquivalenzklasse abbildet. Wir werden bei solchen Beispielen immer die entsprechende Quotiententopologie auf $X/$ benutzen.

Eine interessante (aber bei weitem nicht einfache) Frage ist: ist die Dimension n einer Mannigfaltigkeit wohldefiniert. Dies werden wir in algebraischer Topologie (also viel später) beweisen. Wir beweisen dann folgenden Satz über Gebietsinvarianz:

2.11 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann ist auch $f(U)$ offen.*

2.12 Aufgabe. Beweise die Aussage aus Satz 2.11 unter der Zusatzvoraussetzung, dass f und seine Inverse $g\colon f(U) \to U$ differenzierbar sind.

2.13 Aufgabe. Es gibt noch wesentlich einfachere Eigenschaften als Aussage, dass die Dimension einer Mannigfaltigkeit wohldefiniert ist, dies sich daraus ergeben, dass sie lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussieht.

Hier ein Beispiel: zeige, dass jede zusammenhängende Mannigfaltigkeit auch wegzusammenhängend ist.

Zur Erinnerung:

2.14 Definition. Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, falls für jede Teilmenge $\emptyset \neq U \subset X$, welche sowohl offen als auch abgeschlossen ist gilt: $U = X$.

Ein topologischer Raum X heißt wegzusammenhängend, falls es für je zwei Punkte $p, q \in X$ einen Weg von p nach q gibt, d.h. eine stetige Abbildung $c\colon [a, b] \to X$ mit $c(a) = p$ und $c(b) = q$, wobei $\emptyset \neq [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres abgeschlossenes Intervall ist.

Der Vollständigkeit beweise zudem: jedes Intervall in $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend, *jeder* wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend, $\mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend, also zusammenhängend.

Finde einen topologischen Raum, welcher zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.

2.15 Bemerkung. Tipp für Aufgabe 2.13: Wenn man für jeden Punkt eines zusammenhängenden Raums eine gewisse Eigenschaft beweisen will, geht man wie folgt vor: man beweist, dass ein Punkt die Eigenschaft hat, dann beweist man, dass die Menge der Punkte, welche die Eigenschaft erfüllen, sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

In ganz anderer Richtung wird dies z.B. für globale Existenz von Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen benutzt. Das wird uns später noch begegnen.

Die Aufgabe zeigt, dass es häufig wünschenswert ist, auf unseren Mannigfaltigkeiten auch Differentialrechnung zu betreiben (das kommt auch in den Anwendungen sehr häufig vor). Ein Beispiel ist die Berechnung von Extrema unter Nebenbedingungen.

Die ist auch erfolgversprechend, da ja kleine Umgebungen jeden Punktes wie $\mathbb{R}^n$ aussehen, auf welchem wir Differentialrechnung kennen. Problem: das muss konsistent sein. Dazu muss man geeignete Karten auswählen, die gut zusammen passen. So soll z.B. ausgechlossen werden, dass eine Funktion bezüglich einer Karte an einer Stelle differenzierbar zu sein scheint, bezüglich einer anderen Karte aber nicht.

2.16 Definition. Eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M ist eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einem vorgegebenen Atlas (dem sogenannten glatten Atlas) $\{\phi_i \colon U_i \to V_i\}$ so dass folgende Kompatibilitätsbedingung erfüllt ist:

Immer wenn $\phi_i \colon U_i \to V_i$ und $\phi_j \colon U_j \to V_j$ zwei Karten des gegebenen Atlas sind, betrachte die Funktion

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}| \colon \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j).$$

Nach Voraussetzung ist $U_i \cap U_j$ eine offene Teilmenge von M (Könnte auch leer sein). Da ϕ_i und ϕ_j Homöomorphismen sind, sind dann $\phi_i(U_i \cap U_j)$ und $\phi_j(U_i \cap U_j)$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, und $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|$ wie oben ist ein Homöomorphismus. Wir nennen diese Abbildung die *Kartenwechselabbildung*.

Wir verlangen, dass diese Abbildung zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus ist (also bijektiv und glatt mit glatter Umkehrabbildung).

Hier gibt es offensichtliche Varianten, bei denen man statt glatt nur k-mal differenzierbar verlangt, man spricht dann von einer C^k-Mannigfaltigkeit.

2.17 Beispiel. Die Beispiele aus 2.8 sind alle glatte Mannigfaltigkeiten —dazu muss natürlich ein geeigneter Atlas angegeben werden, dies ist bei $\mathbb{C}P^n$ und $\mathbb{R}P^n$ schon geschehen; mehr oder weniger dieselbe Definition liefert den üblichen glatten Atlas für S^n. Für $\mathbb{R}^n$ besteht der Atlas einfach aus $\mathrm{id} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Der Beweis, dass $f^{-1}(0)$ unter den angegebenen Bedingungen eine Mannigfaltigkeit ist, liefert gleich einen glatten Atlas mit.

Alle in Diff 3 definierten glatten Mannigfaltigkeiten sind auch glatte Mannigfaltigkeiten im jetzigen Sinn.

2.18 Bemerkung. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit zugehörigem Atlas $\{\phi_i\colon U_i \to V_i\}$. Sei $\phi\colon U \to V$ eine weitere Karte von M, so dass alle Kartenwechselabbildungen mit den ϕ_i des glatten Atlas differenzierbar sind.

Dann können wir offensichtlich $\phi\colon U \to V$ zum glatten Atlas hinzunehmen, ohne die Bedingung aus Definition 2.16 zu verletzen. Den so erhaltenen Atlas betrachten wir als äquivalent zum ursprünglichen, die differenzierbaren Strukturen fassen wir als gleich auf.

Meist nimmt man zu einem gegebenen glatten Atlas einfach alle Karten hinzu, die die obige Kartenwechselbedingung erfüllen. Auf diese Weise kann man aus jedem differenzierbaren Atlas einen *maximalen differenzierbaren Atlas* machen (maximal, weil man ihn nach Konstruktion nicht mehr vergrößern kann). Im folgenden werden wir in der Regel annehmen, dass unser Atlas maximal ist. Natürlich wird man bei der Definition einer konkreten differenzierbaren Mannigfaltigkeit versuchen, ökonomisch einen möglichst kleinen Atlas anzugeben.

2.19 Definition. Seien M^m, N^n glatte dimensionale Mannigfaltigkeit mit $\dim(M^m) = m$, $\dim(N^n) = n$ mit glatten Atlanten , und alle Karten seinen im folgenden diesen glatten Atlanten entnommen. Eine stetige Abbildung $f\colon M \to N$ heißt glatt, falls für jede glatte Karte $\phi\colon U \to V$ von M und $\psi\colon U' \to V'$ von N die Komposition

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}\colon \phi(f^{-1}(U')) \to V'$$

von Abbildungen zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ selbst eine glatte Abbildung ist.

Eine bijektive Abbildung, die glatt ist und bei der die Inverse Abbildung glatt ist heißt *Diffeomorphismus*.

2.20 Bemerkung. In der Definition der Kartenwechsel und der glatten Abbildungen musste man immer auf lästige Weise den richtigen Definitionsbereich ermitteln. Dies wird leider auch im weiteren oft der Fall sein. Dies führt zwar zu unübersichtlicher Notation; das Prinzip ist aber immer ganz einfach: es wird der maximale Definitionsbereich benutzt, der noch Sinn macht. Manchmal wird man aus Notationsgründen die Definitionsbereiche daher gar nicht (oder falsch) angeben, mit dem Verständnis dass nur dort komponiert werden kann, wo die Komposition definiert ist.

2.21 Aufgabe. Zeige, dass $\mathbb{R}$ diffeomorph ist zu $(-1, 1)$.

Zeige, dass S^1 und $\mathbb{R}P^1$ diffeomorph zueinander sind. Gilt dasselbe auch für S^2 und $\mathbb{R}P^2$ (dies ist nicht einfach!)?

Zeige, dass S^2 und $\mathbb{C}P^2$ diffeomorph sind.

Fasse S^3 auf als Teilmenge von $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ auf die übliche Weise. Man erhält nun eine surjektive Abbildung $S^3 \to \mathbb{C}P^2 = S^2$ auf die übliche Weise. Zeige, dass das Urbild jedes Punktes homöomorph zu S^1 ist.

Zeige, dass $S^3 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ diffeomorph zu $\mathbb{R}^3$ ist. Wie sieht die erhaltene Zerlegung von $\mathbb{R}^3$ in Kreise (und eine Gerade) aus, die man aus der oben beschriebenen Zerlegung von S^3 in eine disjunkte Vereinigung von S^1-en erhält.

2.22 Aufgabe. Betrachte auf der topologischen Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}$ den Atlas $\{\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^3\}$. Ist dies ein glatter Atlas? Wenn ja, ist diese Mannigfaltigkeit diffeomorph zu $\mathbb{R}$ mit der Standard-glatten-Struktur? Ist die glatte Struktur sogar dieselbe wie beim Standardatlas?

2.23 Bemerkung. Einige sehr schwere Resultate aus der wilden weiten Welt der Mannigfaltigkeiten: Sei eine topologische Mannigfaltigkeit M gegeben, und zwei differenzierbare Strukturen s_1, $s_2$auf M.

(1) Falls $\dim(M) \leq 3$, so gibt es immer einen Diffeomorphismus $(M, s_1) \to (M, s_2)$ (allerdings kann man nicht immer die Identität benutzen, da diese nicht notwendigerweise differenzierbar ist!)

(2) Auf S^7 kann man zwei verschiedene Differenzierbare Strukturen finden, so dass es keinen Diffeomorphismus zwischen den beiden gibt (man spricht von exotischen differenzierbaren Strukturen).

(3) Auf $\mathbb{R}^n$, $n \neq 4$ gibt es bis auf Diffeomorphie immer genau eine differenzierbare Struktur. Auf $\mathbb{R}^4$ jedoch überabzählbar viele. Es gibt z.B. offene Teilmengen des $\mathbb{R}^4$, die homöomorph zu $\mathbb{R}^4$ sind, aber nicht diffeomorph.

2.24 Bemerkung. Nun ist uns zwar gelungen, Differenzierbarkeit zu definieren. Was noch fehlt, ist eine Definition der Ableitung. Hier soll ein Konzept gefunden werden, dass zwar die Karten benutzt, aber doch unabhängig von der Wahl spezieller Karten ist.

Idee: die Ableitung liefert eine lineare Approximation an die gegebene Abbildung. Hier muss man nun, bevor man dies tun kann, die Mannigfaltigkeit (welche ja einfach nur eine Menge ist) durch einen Vektorraum approximieren, dies geschieht mittels des Tangentialraums.

Bei in $\mathbb{R}^N$ eingebetteten Untermannigfaltigkeiten ist anschaulich (halbwegs) klar, was der Tangentialraum (an einem Punkt) sein soll, wir müssen jetzt aber eine ganz abstrakte Definition finden. Wir wollen das erste Konzept jedoch auch kurz wiederholen.

2.25 Definition. Eine glatte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit N einer glatten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine Untermenge, so dass für jeden Punkt $x \in N \subset M$ eine Karte $\phi\colon U \to V$ des (maximalen) glatten Atlas von M existiert, so dass

$$\phi(U \cap N) = V \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Entsprechend kann man natürlich auch topologische Untermannigfaltigkeiten von topologischen Mannigfaltigkeiten definieren.

2.26 Beispiel. Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist eine Untermannigfaltigkeit (derselben Dimension).

Die Mannigfaltigkeiten aus Diff 3 sind Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^N$.

2.27 Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine glatte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$. Sei $x \in M$. Wir definieren T_xM als Menge aller Vektoren $v \in \mathbb{R}^N$ so dass eine glatte Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ existiert mit $\operatorname{im}(c) \subset M$, $c(0) = x$ und $c'(0) = v$.

Definiere $TM := \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^N \mid v \in T_xM\}$.

2.28 Bemerkung. Tatsächlich ist T_xM für jedes $x \in M$ ein n-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^N$ und TM selbst eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

2.29 Beispiel. S^n ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ und für $x \in S^n$ gilt $T_xS^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v \perp x\}$.

3 Riemannsche Geometrie -1

3.1 Beispiel. Die Riemannsche Geometrie, für wir uns in dieser Vorlesung interesssieren, beschreibt nicht nur die topologischen, sondern die metrischen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten.

Was damit gemeint ist, sei am Beispiel der S^2 veranschaulicht: diese ist in unserer Vorstellung ja nicht nur ein topologischer Raum, sondern hat Geometrie: rund und perfekt. Insbesondere können wir Abstände auf S^2 messen. Dies macht man *nicht*, indem man den Abstand der zugehörigen Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bildet, sondern indem man Längen auf der Sphäre mißt.

Wenn z.B. $c\colon [a,b] \to S^2$ eine glatte Kurve ist, so ist die *'Länge* von c definiert als

$$l(c) := \int_a^b |c'(t)| \; dt. \tag{3.2}$$

Es gibt eine offensichtliche Verallgemeinerung für stetige und stückweise glatte Kurven, und zum Schluss definiert man den Abstand zwischen zwei Punkten durch

$$d(p,q) := \inf\{l(c) \mid c \text{ stückweise glatte Kurve von } p \text{ nach } q\}. \tag{3.3}$$

Es ist Alltagswissen, dass dieser Abstand durch Grosskreissegmente realisiert wird.

Es ist eine Übungsaufgabe, nachzuweisen dass auf die beschriebene Weise auf S^2 eine Metrik definiert wird, und dass die sich daraus ergebende Topologie genau die gewöhnliche Topologie von S^2 ist.

Ebenfalls bleibt es Übungsaufgabe, diese Konstruktion und Beobachtung auf beliebige in $\mathbb{R}^n$ eingebettete Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern.

4 Abstrakter Tangentialraum

Für eine abstrakt gegebene Mannigfaltigkeit, wie $\mathbb{C}P^n$, haben wir die Schwierigkeit, dass man sich keinen abstrakt gegebenen "Oberraum $\mathbb{R}^N$" vorstellen kann, in welchem die Tangentialvektoren liegen sollen.

Wir machen aus der Not eine Tugend, indem wir die Idee von Definition 2.27 abstrahieren: dort liefern Kurven die Tangentialvektoren, im abstrakten zwingen wir die Kurven dazu, dasselbe zu leisten.

4.1 Definition. Sei M glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $x \in M$. Wir definieren T_xM als Menge von Äquivalenzklassen von glatten Wegen $c\colon \mathbb{R} \to M$ mit $c(0) = x$. Hierbei definieren wir, dass zwei solche Wege c_1, c_2 äquivalent sind, wenn für eine (und damit alle) Karten $\phi\colon U \to V$ mit $x \in U$ gilt $(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$.

Wir definieren $TM := \bigcup_{x \in M} T_xM$ (dies ist eine disjunkte Vereinigung). Dann gibt es die offensichtliche Projektion $TM \to M; v \mapsto x$ falls $v \in T_xM$.

4.2 Bemerkung. Es gibt noch eine Reihe alternativer Definition des Tangentialraums, und alle sind wichtig. Wenn wir sie brauchen werden, werden wir darauf zurück kommen. Die gegebene Variante ist die geometrischste, passend zum Titel der Vorlesung. Einen großen Nachteil müssen wir sofort beheben: der Tangentialraum soll ja ein Vektorraum sein, aber es ist bei weitem nicht klar, wie man unsere Äquivalenzklassen von Wegen addieren oder skalar multiplizieren soll. Wichtig ist hier, dass die Äquivalenzklasse nur von der Geschwindigkeit am Ursprung abhängt, und solche sollten ja tatsächlich einen Vektorraum bilden.

Um dies zu erreichen, erinnern wir uns dass mit Hilfe der Karten eine kleine Umgebung jedes Punktes wie $\mathbb{R}^n$ aussieht, und dort sind die Tangentialvektoren einfach auch wieder Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Allerdings muss man sich natürlich merken, mit welcher Karte man arbeitete.

Die folgende Definition beinhaltet einen Trick, wie man den Tangentialraum mit allen Karten gleichzeitig beschrieben kann.

4.3 Definition. Sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit, $x \in M$. Wir definieren den Karten-Tangentialraum T_xM als Äquivalenzklassen von Tupeln $(x, \phi\colon U \to V, v)$ mit $\phi\colon U \to V$ eine glatte Karte von M so dass $x \in U$, und $v \in \mathbb{R}^n$.

Zwei solche Tupel $(x, \phi_1\colon U_1 \to V_1, v_1)$ und $(x, \phi_2\colon U_2 \to V_2, v_2)$ heißen äquivalent, falls $D(\phi_2\phi_1^{-1})(\phi(x))(v_1) = v_2$ (Differential an der Stelle $\phi(x)$, angewendet auf den Vektor v_1).

Wir erhalten eine Bijektion des Wege-Tangentialraums T_xM mit dem Karten-Tangentialraum (den wir schon mit dem gleichen Namen bezeichnet haben), indem wir $[c\colon \mathbb{R} \to M]$ abbilden auf $(\phi\colon U \to V, (\phi \circ c)'(0))$.

Wir definieren eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf T_xM durch $\lambda[\phi\colon U \to V, v_1] + \mu[\phi\colon U \to V, v_2] = [\phi\colon U \to V, \lambda v_1 + \mu v_2]$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\phi\colon U \to V$ Karte wie oben, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$).

Die Dimension von T_xM ist n.

4.4 Bemerkung. Wir müssen natürlich überprüfen, dass alles wie oben definiert funktioniert. Beachte zunächst dass für zwei Karten $\phi_k\colon U_k \to V_k$ $(k = 1, 2)$ wie in Definition 4.3 und $v_1 \in \mathbb{R}^n$ genau ein $v_2 \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass (ϕ_1, v_1) und (ϕ_2, v_2) äquivalent sind, nämlich $v_2 = D(\phi_2\phi_1^{-1})(\phi(x))(v_1)$.

Da die Abbildungen $D(\phi_2\phi_1^{-1})$ linear sind, ist die Vektorraumstruktur wohldefiniert. Jede Karte ϕ wie oben liefert einen Isomorphismus zu $\mathbb{R}^n$.

Wegen der Kettenregel ist die Abbildung zwischen dem Wege-Tangentialraum und dem Karten-Tangentialraum wohldefiniert. Nach Definition 4.1 der Äquivalenzrelation von Wegen ist die Abbildung injektiv. Sie ist auch surjektiv, weil wir in der offenen Teilmenge V zu jedem $v \in \mathbb{R}^n$ einen glatten Weg $c\colon \mathbb{R} \to V$ mit $c(0) = 0$ und $c'(0) = v$ definieren können (in einer Umgebung von 0 einfach linear abbilden), und dann mittels $\phi^{-1} \circ c$ den entsprechenden Weg in M erhalten.

4.5 Definition. Sei $f\colon M \to N$ glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Definiere $T_xf\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ durch $T_xf([c]) := [f \circ c]$, oder auch $T_xf([x, \phi, v]) := [x, \psi, (D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(v))]$.

Mittels Kettenregel rechnet man nach, dass beide Definitionen unter der in 4.3 beschriebenen Bijektion übereinstimmen. Man er'hält nun sofort die Kettenregel:

4.6 Satz. *Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to X$ glatte Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, $x \in M$. Dann gilt*

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_xf.$$

Beweis. Einfach eine Äquivalenzklasse von Wegen einsetzen. $\square$

4.7 Aufgabe. Wiese ist die Kettenregel für Mannigfaltigkeiten plötzlich scheinbar automatisch? Eigentlich sollte man doch erwarten, die Kettenregel für $\mathbb{R}^n$ benutzen zu müssen immerhin ist dies ja auch ein Spezialfall, da $\mathbb{R}^n$ selbst glatte Mannigfaltigkeit ist.

4.8 Definition. Sei $c\colon [a,b] \to M$ ein glatter Weg in einer glatten Mannigfaltigkeit. Für $t \in [a,b]$ definieren wir $c'(t) \in T_{c(t)}M$ durch $c'(t) = [c(\cdot - t)] = Dc(t)(1)$ (wende das Differential Dc an der Stelle t, also die lineare Abbildung $Dc(t)\colon T_t\mathbb{R} \to T_{c(t)}M$ an auf das Element $1 \in T_t\mathbb{R} = \mathbb{R}$).

5 Riemannsche Geometrie 0

Früher bereits angekündigt: Ziel der Riemannschen Geometrie ist es, geometrische Aspekte von Mannigfaltigkeiten zu untersuchen. Grundlegend dazu ist, Abstände und Winkel zu verstehen, also zunächst einmal definieren zu können. Wir können uns hier von Beispiel 3.1 leiten lassen. Da man auf beliebigen Mannigfaltigkeiten kaum von Geraden sprechen kann, machen Winkel wohl nur zwischen Richtungen Sinn. Richtungen sind aber gegeben durch Elemente des Tangentialraums, nur dass diese auch noch eine Länge haben. Mit solchen infinitesimalen Länge kann man dann wie in Gleichung (3.2) die Länge von stückweise glatten Kurven definieren, und zuletzt mittels Gleichung (3.3) den Abstand zwischen zwei Punkten (in derselben Wegzusammenhangskomponente).

5.1 Riemannsche Metriken

5.1 Definition. Eine Riemannsche Metrik g auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine „Funktion“, die jedem Punkt $x \in M$ eine positiv definites Skalarprodukt auf dem endlich dimensionalen Vektorraum T_xM zuordnet.

Diese Skalarprodukte sollen glatt vom Punkt x abhängen, was wie folgt definiert wird: für jede Karte $\phi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ liefert g Funktionen $g_{ij}\colon V \to \mathbb{R}$ auf folgende Weise:

$$g_{ij}(x) := g(\phi^{-1}(x))([x,\phi,e_i],[x,\phi,e_j]).$$

Diese Funktionen, oder die Funktionen $g_{ij} \circ \phi\colon U \to \mathbb{R}$ werden "Metrischer Tensor in lokalen Koordinaten“ genannt. Wir verlangen, dass diese Funktionen glatt sind.

5.2 Beispiel. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine eingebettete Untermanngifaltigkeit. Dann ist für jedes $x \in M$ T_xM nach der ursprünglichen Definition ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^N$, und erbt als solcher die Einschränkung des Standard-Skalarprodukts. Dies liefert eine Riemannsche Metrik auf M im Sinn von Definition 5.1. Insbesondere ist dies genau das, was wir im Beispiel 3.1 für die 2-dimensionale Sphäre benutzt haben.

5.3 Aufgabe. $\mathbb{R}^2$ mit dem euklidischen Skalarprodukt ist Riemannsche Mannigfaltigkeit. Berechne den metrischen Tensor in Polarkoordinaten $(r,\phi) \in (0,\infty) \times (0,2\pi)$ mit $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$.

5.4 Definition. Sei M glatte Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik g. Sei $c\colon [a,b] \to M$ ein glatter Weg. Wir definieren

$$l(c) := \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))}\, dt.$$

Falls $p, q \in M$ in derselben Wegzusammenhangskomponente liegen, definieren wir

$$d(p,q) := \inf\{l(c) \mid c \text{ stetiger stückweise glatter Weg von } p \text{ nach } q.\}$$

5.5 Aufgabe. Besonders einfache Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$ ergeben sich als Rotationsflächen. Sei dazu $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Abbildung mit $c_1(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Definiere dann

5.6 Definition. die *Rotationsfläche* $S := \{(c_1(t)\cos(\phi), c_1(t)\sin(\phi), c_2(t)) \mid t \in \mathbb{R}, \phi \in [0, 2\pi]\}$.

Zeichne S (in schematischen Beispielen). Zeige, dass S eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist, finde geeignete lokale Koordinaten. Damit erhält S eine induzierte Riemannsche Metrik. Berechne diese in lokalen Koordinaten. Berechne die Länge der Kurven $c_t\colon [0, 2\pi] \to S$; $\phi \mapsto (c_1(t)\cos(\phi), c_1(t)\sin(\phi), c_2(t))$ und $d_\phi\colon [a,b] \to S$; $t \mapsto (c_1(t)\cos(\phi), c_1(t)\sin(\phi), c_2(t))$.

5.7 Satz. *Durch die Definition 5.4 wird auf M eine Metrik definiert. Diese Metrik liefert die auf M gegebene Topologie.*

Beweis. Genau wie der Beweis von Aufgabe 3.1.

Wegen der "stückweisen" Definition erfüllt d die Dreiecksungleichung. Da man Wege rückwärts laufen kann, ist d symmetrisch. A priori ist nicht klar dass $d(x,y) = 0$ nur wenn $x = y$, aber auch ohne diese Bedingung definiert d in der üblichen Weise eine Topologie (dann nicht notwendig hausdorffsch).

5.8 Definition. Eine Funktion $d\colon X \times X \to [0, \infty)$, die alle Eigenschaften einer Metrik außer $d(x,y) = 0$ nur wenn $x = y$ erfüllt, heißt *Pseudometrik*.

Wir m"ussen noch zeigen, dass die Identität auf M bezüglich der ursprünglichen und der d-Topologie (in beiden Richtungen) stetig ist, dann sind die Topologien gleich.

Dies sind lokale Fragen, können also in lokalen Koordinaten behandelt werden. Entscheidend ist nun, dass für eine feste Karte $\phi\colon U \to V$ und für eine kompakte Teilmenge von V (z.B. ein abgeschlossener Ball) es $c > 0$ gibt, so dass $|v|/c \le \sqrt{g(v,v)} \le c\,|v|$ für jeden Tangentialvektor v (wobei $|v|$ die euklidische Länge) tangential an diese kompakte Teilmenge. Es folgt eine entsprechende Ungleichung für die euklidische und die g-Länge und die euklidische Länge von stückweise glatten Kurve innerhalb der kompakten Teilmenge. Die euklidische Länge solcher Kurven zwischen zwei Punkten wird aber durch die Verbindungsstrecke minimiert, und ist dort gleich dem euklidischen Abstand. Die Behauptung folgt jetzt ohne gar zu große Mühe.

Achtung: hier könnten noch ein paar Details zugefügt werden! $\square$

5.9 Aufgabe. Seien τ_1 und τ_2 zwei Topologien auf einer Menge X. Zeige, dass $\tau_1 = \tau_2$ genau dann, wenn $\mathrm{id}_X\colon (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ ein Homöomorphismus ist.

5.2 Isometrien und Beispiele

5.10 Definition. Sei $f\colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Riemannschen Mannigfaltigkeiten. f heißt *isometrische Einbettung*, falls $T_x f\colon T_x M \to T_{f(x)} N$ eine isometrische Injektion von Skalarprodukträumen für jedes $x \in M$ ist (also $g_N(T_x f(v), T_x f(w)) = g_M(v, w)\ \forall v, w \in T_x M$).

f heißt *(Riemannsche) Isometrie*, falls f zusätzlich ein Diffeomorphismus. f heißt *lokale Isometrie*, falls für jedes $x \in M$ eine offene Umgebung U existiert, so dass $f(U) \subset N$ offen und $f|_U\colon U \to f(U)$ Isometrie.

5.11 Aufgabe.

5.12 Definition. Der *Katenoid* ist die Rotationsfläche der Kurve $x_1 = \cosh(x_2) = (e^x + e^{-x})/2$ in $\mathbb{R}^3$.

Der *Helizoid* H ist die Vereinigung der Geraden $\overline{(0,0,t)\,(\cos(t), \sin(t), t)} \subset \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$.

Zeige, dass der Helizoid eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist (finde „natürliche" lokale Koordinaten). Zeige, dass Katenoid und Helizoid lokal isometrisch sind (z.B. indem der metrische Tensor in geeigneten lokalen Koordinaten berechnet wird).

Lösung: Lokale Koordinaten für das Helizoid: es handelt sich um eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit, die wir durch die Höhe t und den „signierten" Abstand zur x_3-Achse parametrisieren:

$$\phi^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to H;\ (r, t) \mapsto (r\cos(t), r\sin(t), t).$$

Es handelt sich wirklich um eine glatte Untermannigfaltigkeit; dafür müssen wir eine Karte von $\mathbb{R}^3$ finden, so dass H als Untermannigfaltigkeit gegeben ist. Hierzu verwenden wir eine dritte Koordinate senkrecht zu der Geraden durch $(0, 0, t)$ und $(\cos(t), \sin(t), t)$, also

$$\Phi^{-1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ (r, t, x) \mapsto r(\cos(t), \sin(t), 0) + x(\sin(t), -\cos(t), 0) + (0, 0, t).$$

Beachte, dass hier die Quelle der Abbildung Φ^{-1} die Teilmenge V des $\mathbb{R}^3$ ist (zufällig gerade $\mathbb{R}^3$), und das Ziel die Teilmenge U der Mannigfaltigkeit (hier ist sowohl die Mannigfaltigkeit als auch U gleich $\mathbb{R}^3$ —man sieht dass die „einfachen" Situationen oft die kompliziertesten sind, weil man die verschiedenen Objekte nicht auseinanderhalten kann).

Um die Riemannsche Metrik in diesen Koordinaten zu berechnen, müssen wir nur die „Standard-Tangentialvektoren" des $\mathbb{R}^2$ (als Ziel der Koordinaten) $e_1 =: \partial_r$ und $e_2 =: \partial_t$ in die „umgebende" Mannigfaltigkeit (den Tangentialraum von $\mathbb{R}^3$) abbilden, und dann die Skalarprodukte (dort gibt es ja eine Riemannsche Metrik, nämlich hier die übliche euklidische) bilden.

Nun gilt $D\phi^{-1}(\partial_r) = \partial\phi^{-1}/\partial r = (\cos(t), \sin(t), 0)$ und $D\phi^{-1}(\partial_t) = \partial\phi\partial t = (-r\sin(t), r\cos(t), 1)$. Somit ergibt sich (indem man die entsprechenden Skalarprodukte bildet) für die Riemannsche Metrik in den durch ϕ gegebenen Koordinaten

$$g_{tt} = \langle D\phi^{-1}(\partial_t), D\phi^{-1}(\partial_t)\rangle = r^2 + 1; \quad g_{rr} = 1; \quad g_{tr} = g_{rt} = 0.$$

Entsprechend muss man für den Katenoid vorgehen (die Standard-Koordinaten ergeben sich aus der Darstellung als Rotationsfläche). □

5.13 Definition. Der *hyperbolische Raum* der Dimension n wird definiert als $\mathbb{H}^n := (D^n)^\circ$ mit Riemannscher Metrik $g_{\mathbb{H}}(x) := 4\frac{g_{Eukl}}{(1-|x|^2_{Eukl})^2}$. Dies ist das *Scheibenmodell des hyperbolischen Raums.*

5.14 Aufgabe. Berechne die Länge von Strecken durch den Ursprung im Scheibenmodell des hyperbolischen Raums.

5.15 Definition. Das *obere Halbraummodell des hyperbolischen Raums* ist die Mannigfaltigkeit $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}$, der obere Halbraum, mit Riemannscher Metrik $g(x_1, \dots, x_n) := \frac{g_{Eukl}}{x_1^2}$.

5.16 Aufgabe. Setze $P := (-1, 0, \dots, 0)$. Zeige, dass $x \mapsto P + \frac{2(x-P)}{|x-P|^2}$ eine Isometrie zwischen dem Scheibenmodell und dem obere Halbraummodell des hyperbolischen Raums liefert.

5.17 Definition. Die Standard-Bilinearform auf $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Signatur $(-1, n)$ ist definiert durch $\langle (x_0, \dots, x_n), (y_n, \dots, y_n) \rangle_{(-1,n)} := -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots x_n y_n$.

Das natürliche Modell des Hyperbolischen Raums ist $\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_{(-1,n)} = -1, x_0 > 0\}$ (die Bedingung $x_0 > 0$ wählt eine der beiden Schalen=Zusammenhangskomponenten des entsprechenden Hyperboloiden aus). Dies ist eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension n von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(-1,n)}$ schränkt sich zu einem positiv definiten Skalarprodukt auf jedem Tangentialraum von $\mathbb{H}^n$ ein. Insgesamt erhält man so eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{H}^n$.

5.18 Bemerkung. Natürlich dürfte man eigentlich nicht dieselbe Notation $\mathbb{H}^n$ für die verschiedenen Modelle benutzen; aber da sie isometrisch sind (siehe Aufgabe 5.19) nimmt man es wie so oft auch hier nicht so genau.

5.19 Aufgabe. Beweise die Behauptung aus Definition 5.17, also dass $\mathbb{H}$ Untermannigfaltigkeit ist, und dass man tatsächlich eine Riemannsche Metrik erhält.

Sei $P = (-1, 0, \dots, 0)$. Zeige, dass die Abbildung

$$x \mapsto P - \frac{2(x-P)}{\langle x-P, x-P \rangle_{(-1,n)}}$$

eine Isometrie zwischen dem natürlichen Modell und dem Scheibenmodell des hyperbolischen Raums definiert (wobei die Scheibe mit der Scheibe in der ($x_0 = 0$)-Ebene identifiziert wird).

5.20 Aufgabe. Definiere und klassifiziere flache Tori.

Wir beenden das Kapitel mit ein paar weiteren Konstruktionen.

5.21 Definition. Seien X, Y topologische Räume. Die Produkttopologie auf $X \times Y$ ist die Topologie, deren offene Mengen von Mengen der Form $U \times V$ erzeugt wird ($U \subset X$ offen, $V \subset Y$ offen). Erzeugt heißt: eine Teilmenge von $X \times Y$ ist genau dann offen, wenn es eine Vereinigung (beliebig vieler) Mengen ist, welche selbst wieder endliche Schnitte von Menge der Form $U \times V$ wie oben sind.

Seien M und N topologische oder glatte Mannigfaltigkeiten. Dann wird auch $M \times N$ eine solche, indem man einfach Kreuzprodukte von Karten benutzt.

5.22 Aufgabe. Überprüfe, dass die Produkttopologie wieder eine Topologie ist. Überprüfe, dass beim „Erzeugen“ in Definition 5.21 immer eine Topologie entsteht, egal von welcher Kollektion von Mengen man ausgeht.

Zeige, dass $M \times N$ tatsächlich eine (glatte) Mannigfaltigkeit wird, und dass die Projektion $M \times N \to M; (x, y) \mapsto x$ eine stetige (bzw. glatte) Abbildung ist.

5.23 Definition. Der n-Torus T^n ist das Produkt von n-Kopien von S^1: $T^n = (S^1)^n$.

5.24 Aufgabe. Finde eine Einbettung von T^n als glatte Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^N$ (das ist einfach mit $N = 2n$, versuche, $N = n+1$ zu erreichen, zumindest für $n = 2$).

Definiere auf $\mathbb{R}^n$ die Äquivalenzrelation $v \quad v + z$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und alle $z \in \mathbb{Z}^n$. Zeige, dass T^n homöomorph zu $\mathbb{R}^n/$ ist. Für die Menge der Äquivalenzklassen schreibt man in der Regel $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

5.25 Beispiel. In Aufgabe 5.24 sieht man, dass T^n eine abelsche Gruppe wird (Faktorgruppe der additiven Gruppe von $\mathbb{R}^n$ modulo der Untergruppe $\mathbb{Z}^n$). Die Addition und Inversion sind sogar glatte Abbildungen.

5.26 Aufgabe. Zeige, dass $T^n \times T^n \to T^n; (x, y) \mapsto x + y$ und $T^n \to T^n; x \mapsto -x$ glatte Abbildungen sind.

5.27 Satz. *Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Dann gibt es kanonische Vektorraumisomorphismen $T_{(p,q)}M \times N \to T_qM \oplus T_qN$; $[c\colon \mathbb{R} \to M \times N] \mapsto ([\mathrm{pr}_M \circ c], [\mathrm{pr}_N \circ c])$.*

Sind g_M und g_N Riemannsche Metriken auf M und N, so liefert unter diesem Iso die direkte Summe eine Riemannsche Metrik auf $M \times N$, die Produktmetrik $g_M \times g_N$ (oft auch $g_M \oplus g_N$ oder $g_M + g_N$ geschrieben).

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Abbildung linear und ein Iso ist. Sei dazu $\phi\colon U \to V$ Karte von M um $p \in M$ und $\psi\colon U_2 \to V_2$ Karte von N um q. Dann ist $\phi \times \psi$ Karte von $M \times N$. Die beschriebene Abbildung ist dann gegeben durch

$$[(p, q), \phi \times \psi, (v_1, v_2)] \mapsto ([p, \phi, v_1], [q, \psi, v_2]),$$

offensichtlich der gewünschte Isomorphismus.

Die direkte Summe zweier positiv definiter Skalarprodukte ist wieder ein positiv definites Skalarprodukt, wegen der Produkt-Kartenstruktur folgt auch sofort, dass die Produktmetrik glatt ist. Ist etwa $g_{ij}(x)$ der metrische Tensor in lokalen Koordinaten ϕ von M ($i, j = 1, \dots, m$), und $h_{ij}(y)$ der metrische Tensor in Koordinaten ψ von N, so ist $k_{ij}(x, y) := g_{ij}(x)$ für $i, j = 1, \dots, m$ $k_{ij}(x, y) := h_{i-m,j-m}(y)$ für $i, j = m + 1, \dots m + n$ und $k_{ij}(x, y) = 0$ sonst der metrische Tensor von $M \times N$ in lokalen Koordinaten $\phi \times \psi$. $\square$

6 Vektorbündel und Tangentialraum

Wir haben in Diff 3 schon gesehen, dass die Vereinigung aller Tangentialräume (für eine eingebettete Untermannigfaltigkeit M) selbst eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Dazu hat man die spezielle Struktur, dass man für jeden Punkt in M einen *Vektorraum* erhält, und dass diese Vektorräume ‘glatt vom Punkt in M abhängen“.

Dies wollen wir nun mathematisch präzisieren und axiomatisieren, zum *Vektorraumbündel*. Die entscheidende Überlegung hierbei ist, dass es zunächst ein besonders naheliegendes Modell für das oben beschriebene gibt, nämlich das Produkt $M \times \mathbb{R}^n$ —hier ist insbesondere auch klar, was das “glatt vom Punkt abhängen“ bedeutet. Dies muss aber ja nur *lokal* gelten, und wie bei Mannigfaltigkeiten wollen wir Karten benutzen, um mit dem lokalen Modell zu vergleichen.

6.1 Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein *(glattes) Vektorraumbündel* über M ist eine glatte Mannigfaltigkeit E zusammen mit einer glatten surjektiven Abbildung $p\colon E \to M$, der Struktur eines $\mathbb{R}$-Vektorraums auf jeder *Faser* $E_b := p^{-1}(b)$ $(b \in M)$, und einem glatten Vektorbündelatlas, bestehend aus Vektorbündelkarten (d.h. Diffeomorphismen)

$$\phi\colon U \to V \times \mathbb{R}^n,$$

wobei $U \subset E$ offen, $V \subset M$ offen, und so dass $\mathrm{pr}_V \circ \phi = p$, und so dass die Einschränkungen $\phi|_{E_b}\colon E_b \to \{b\} \times \mathbb{R}^n$ linear sind.

Atlas heißt natürlich wieder, dass die Vereinigung aller Kartendefinitionsbereiche U ganz E ist. Man kann (und wird im allgemeinen) jeden Atlas zu einem maximalen Atlas mit den entsprechenden Eigenschaften ergänzen.

6.2 Lemma. *Sei $E \to M$ ein Vektorbündel und*

$$\psi \circ \phi^{-1} V_1 \cap V_2 \times \mathbb{R}^n \to U_1 \cap U_2 \to V_1 \cap V_2 \times \mathbb{R}^n$$

ein Vektorbündelkartenwechsel. Dann gibt es eine glatte Abbildung $\theta_{1,2}\colon V_1 \cap V_2 \to Gl(n, \mathbb{R})$, so dass

$$\psi \circ \phi^{-1}(x, v) = (x, \theta_{1,2}(x) \cdot v).$$

Glatt heißt hier, dass jede Komponente der Matrix glatt von x abhängt.

Beweis. Da ϕ und ψ faserweise linear und bijektiv sind, gilt dies auch für die Verknüpfung $\psi \circ \phi^{-1}$; mit anderen Worten: die Abbildung ist faserweise gegeben durch Multiplikation mit einer Matrix. Außerdem ist $\psi \circ \phi^{-1}$ glatt, also ist insbesondere $x \mapsto \psi \circ \phi^{-1}(x, e_k)$ glatt für die Einheitsvektoren e_k. Dies liefert aber gerade die k-te Spalte der Matrix $\theta_{1,2}(x)$. $\square$

6.3 Bemerkung. Mann kann natürlich auch die Differenzierbarkeitsbedingung in Definition 6.1 durch Homöomorphie ersetzen, und erhält so den Begriff des topologischen Vektorbündels. Dann kann der Basisraum ein beliebiger topologischer Raum sein.

6.4 Beispiel. Das Tangentialbündel von S^1 (Teilmenge von $S^1 \times \mathbb{R}^2$) ist ein Vektorraumbündel, sogar Unterbündel.

6.5 Beispiel. Klebefunktionen $\phi_{i,j}$ welche die Kozykelbedingung erfüllen, ergeben ein Vektorbündel. **(Kommentar: Mehr Details!)**

6.6 Definition. Seien $p\colon E \to M$ und $q\colon E' \to N$ glatte Vektorbündel über glatten Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Eine glatte

Abbildung $F\colon E \to E'$ heißt Vektorbündelabbildung über f, falls $q \circ F = f \circ p$, man also das kommutative Diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

hat, und falls F faserweise linear ist, also $F|_{E_b}\colon E_b \to E'_{f(b)}$ linear ist.

Ein *Vektorbündelisomorphismus* ist eine Vektorbündelabbildung über id, welche Faserweise ein Isomorphismus ist.

6.7 Beispiel. Das *trivialisierte Bündel der Dimension* n $M \times \mathbb{R}^n$ ist offensichtlich ein glattes Vektorbündel.

Das Tangentialbündel einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist ebenfalls ein Vektorbündel (die Vektorbündelkarten gewinnt man mittels der Karten der Mannigfaltigkeit, siehe unten).

Das nächste Ziel ist es nun, die Tangentialräume für eine abstrakte Mannigfaltigkeit zu einem Vektorbündel zusammen zu bauen.

6.8 Definition. Sei M glatte Mannigfaltigkeit. Als Menge setzen wir $TM := \bigcup_{x\in M} T_xM$. Wir brauchen nun noch eine Topologie und die Vektorbündelkarten. Wir beginnen zunächst mit den Karten:

Sei $\phi\colon V \to W \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von M. Dann erhält man eine Abbildung

$$\Phi\colon U := \bigcup_{x\in V} T_xM \to U \times \mathbb{R}^n; [x, \phi, v] \mapsto (x, v).$$

Hier repräsentieren wir einen Tangentialvektor in T_xM durch die Karte ϕ und den Spaltenvektor $v \in \mathbb{R}^n$.

Es ist nach Definition klar, dass Φ auf jeder Faser T_xM ein Vektorraumisomorphismus ist.

Wir definieren nun die Topologie auf TM dadurch, dass sie von den Urbildern unter Φ der offener Mengen in $V \times \mathbb{R}^n$ erzeugt wird (wobei alle möglichen Φ wie oben benutzt werden sollen).

Dies wird kanonisch eine glatte Mannigfaltigkeit, mit Karten

$$\tilde{\Phi} := (\phi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \Phi\colon U \to V' \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

6.9 Aufgabe. Man muss in Definition 6.8 natürlich noch eine ganze Menge von Dingen nachrechnen: erhält man wirklich eine glatte Mannigfaltigkeit TM, werden die Abbildungen Φ glatt, ... Dies bleibt Übungsaufgabe.

6.10 Satz. *Sei $f\colon M \to N$ glatt. Dann ist $Tf\colon TM \to TN$ glatte Vektorbündelabbildung über f.*

Beweis. Nach Konstruktion erhalten wir eine Abbildung über f die faserweise linear ist. Es bleibt nur nachzuprüfen, dass Tf glatt ist.

Wieder nach Definition kann man dies in Karten ("in lokalen Koordinaten") tun. Seien dazu $\phi\colon V \to W$ und $\psi\colon V' \to W'$ Karten von M und von N, sein $x \in V$ und $f(x) \in V'$.

Dann erhält man Karten $\tilde\Phi$ und $\tilde\Psi$ von TM und TN, und es gilt nach Definition

$$\tilde\Psi \circ Tf \circ \tilde\Phi^{-1}(p,v) = (\psi\circ f\circ\phi^{-1}(p), D(\psi\circ f\circ\phi^{-1})(v)).$$

Da $\psi\circ f\circ\phi^{-1}$ glatt ist, gilt dies nach Resultaten aus Diff 2 auch für diese daraus gebildete Abbildung.

6.11 Aufgabe. Wieso gilt das? Gib mehr Details.

□

6.12 Bemerkung. Hier sieht man ein typisches Beweisprinzip, welches wir schon vorher benutzt haben, und auch später noch oft benutzen werden: viele topologische Aussagen sind lokal (Stetigkeit, Differenzierbarkeit), und werden daher lokal bewiesen. Der lokale Fall kann dann mit Hilfe geeigneter Hilfsmittel (Karten) auf ein einfacheres, im Optimum bereits bekanntes Problem zurückgeführt werden.

6.13 Definition. Ein n-dimensionales Vektorbündel $E \to M$ ist trivial, wenn es isomorph zum Bündel $M \times \mathbb{R}^n$ ist

6.14 Aufgabe. Zeige, dass das Tangentialbündel von S^1 trivial ist. Zeige, dass das Tangentialbündel von S^3 trivial ist (Tipp: benutze die Quaternionen).

6.1 Neue Vektorbündel aus alten

Es gibt viele Methoden, wie man aus gegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräumen neue Vektorräume bilden kann.

6.15 Beispiel. (1) Direkte Summe $V \oplus W$

(2) Tensorprodukt $V \otimes W$.

(3) Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$.

(4) Homomorphismenraum $\mathrm{Hom}(V, W)$.

(5) symmetrische Bilinearformen $Sym^2(V)$.

Die entsprechenden Operationen wollen wir nun statt mit Vektorr"'aumen mit Vektorbündeln über einer festen Mannigfaltigkeit M durchführen, indem wir die Operation faserweise anwenden.

Dies ist natürlich möglich, liefert aber zunächst einmal nur, wie beim Tangentialbündel, eine Menge, welche als disjunkte Vereinigung von Vektorräumen gegeben ist.

Wie beim Tangentialbündel bleibt dann noch, diese Menge mit einer Topologie zu versehen und die Vektorbündel- und Mannigfaltigkeitskarten zu erklären.

Dies wollen wir am Beispiel der direkten Summe betrachten:

Falls $\Phi\colon U \to V \times \mathbb{R}^n$ Vektorbündelkarte von E und $\Psi\colon U' \to V \times \mathbb{R}^m$ Vektorbündelkarte von E' (durch Bildung von Schnittmengen können wir erreichen dass V in beiden Karten dieselbe Menge ist), so definieren wir

$$\Phi\oplus\Psi\colon \bigcup_{x\in V} E_x\oplus E'_x \to V\times\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^m; (v,v') \mapsto (x, \Phi(v), \Phi'(v')); \qquad \text{falls } (v,v') \in E_x\oplus E'_x.$$

Die Topologie auf $E \oplus E' := \bigcup_{x\in M} E_x \oplus E'_x$ wird dann wieder von Urbildern offener Mengen unter den Abbildungen $\Phi \oplus \Phi'$ erzeugt.

Entsprechend geht man in den anderen Fällen vor. Es bleibt natürlich, die Axiome eines glatten Vektorbündels nachzuprüfen. Dies wollen wir nicht im Einzelnen tun. Es soll nur aufgezeigt werden, welche Eigenschaften man benutzt, um dies durchzuführen.

Um dies bequem durchführen zu können, benutzen wir den Begriff der Kategorie und des Funktors:

6.16 Definition. Eine Kategorie K besteht

(1) aus einer Klasse von Objekten $Ob(K)$

(2) Für je zwei Objekte $X, Y \in Ob(K)$ gibt es eine Menge von Morphismen $Mor(X, Y)$ (kann auch leer sein)

mit folgenden Eigenschaften.

(1) Fur jedes Objekt X gibt es ein ausgezeichnetes Element $\mathrm{id}_X \in Mor(X, X)$.

(2) Falls $X, Y, Z \in Ob(K)$, so gibt es eine Verknüpfung

$$\circ\colon Mor(Y, Z) \times Mor(X, Y) \to Mor(X, Z),$$

so dass $f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f = f$ für alle $f \in Mor(X, Y)$ und $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ immer wenn dies Sinn macht.

6.17 Beispiel. Die $\mathbb{R}$-Vektorräume bilden eine Kategorie, mit Morphismen den linearen Abbildungen. Ebenso die Gruppen, mit Morphismen die Gruppenhomomorphismen, die Mengen (Morphismen einfach alle Abbildungen), die topologischen Räume (Morphismen die stetigen Abbildungen), die glatten Mannigfaltigkeiten (Morphismen die glatten Abbildungen)

6.18 Beispiel. Sei C eine Kategorie. Dann definiert man die *umgekehrte Kategorie* C^{op} auf folgende Weise: $Ob(C^{op}) := Ob(C)$; $Mor_{C^{op}}(A, B) := Mor_C(B, A)$. Mit anderen Worten: alle Pfeile werden *formal* umgedreht. Die Komposition ergibt sich aus der Komposition in C.

6.19 Beispiel. Seien K_1 und K_2 Kategorien. Dann definiert man die Produktkategorie $K_1 \times K_2$, wobei die Objekte Tupel (A, B) mit $A \in Ob(K_1)$, $B \in Ob(K_2)$ und $Mor_{K_1\times K_2}((A_1, B_1), (A_2, B_2)) := Mor_{K_1}(A_1, A_2) \times Mor_{K_2}(B_1, B_2)$.

6.20 Definition. Ein (kovarianter) Funktor F zwischen zwei Kategorien K_1 und K_2 ordnet jedem Objekt $X \in Ob(K_1)$ ein Objekt $F(X) \in Ob(K_2)$ zu, und jedem Morphismus $f \in Mor(X, Y)$ $(X, Y \in Ob(K_1))$ einen Morphismus $F(f) \in Mor(f(X), f(Y))$.

Dabei wird gefordert, dass immer $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ und $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ gilt.

Ein kontravarianter Funktor wird entsprechend definiert, mit dem Unterschied, dass $F(f) \in Mor(F(Y), F(X))$ falls $f \in Mor(X, Y)$, und dann auch $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ (alle Pfeile werden umgedreht). Äquivalent: ein Kontravarianter Funktor von K_1 nach K_2 ist ein kovarianter Funktor von K_1^{op} nach K_2.

6.21 Beispiel. Bilden des Dualraums ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der Vektorräume in die Kategorie der Vektorräume, wobei einer Abbildung die duale Abbildung zugeordnet wird.

Vergessen der Topologie ist ein Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Mengen.

Definiere die Kategorie der Paare von $\mathbb{R}$-Vektorräumen und Paare von Vektorraumhomomorphismen.

Die direkte Summe ist ein Funktor von der Kategorie der Paare von Vektorräumen in die Kategorie von Vektorräumen.

Um aus gegebenen Vektorraumbundeln neue konstruieren zu können, brauchen wir folgende Daten:

(1) Eine Funktor F von der Kategorie der n-Tupel von Vektorräumen zu Kategorie der Vektorräume, z.B. direkte Summe.

    (In der Kategorie der n-Tupel von Vektorräumen sind die Morphismen natürlich n-Tupel von Morphismen. Bei der Komposition wollen wir zulassen, dass in manchen Komponenten die formal umgekehrte Komposition gilt (also $Vect^{op}$ benutzt wird). Formal: es handelt sich um ein n-faches Produkt von Kategorien wie in Beispiel 6.19, wobei die Faktoren entweder die Kategorie der Vektorräume oder deren umgekehrte Kategorie (vergleiche Beispiel 6.18) ist.)

(2) Dieser Funktor muss $F(\mathbb{R}^{n_1}, \dots) = \mathbb{R}^{F(n_1, \dots)}$ erfüllen (wie die direkte Summe).

    Durch faserweise Anwenden des Funktors auf die Vektorbündelkarten erhalten wir so Kandidaten für die Vektorbündelkarten des zu konstruierenden Bündels.

(3) Um eine vernünftige Topologie und damit tatsächlich ein glattes Vektorbündel zu lieferen, muss der Funktor F noch die Topologie respektieren. Dazu fordern wir:

    Falls M glatte Mannigfaltigkeit und $\theta\colon M \to Gl(n_1, \mathbb{R}) \times \cdots$ eine glatte Abbildung ist, so muss auch die Abbildung $F \circ \theta\colon M \to Gl(F(n_1, \dots), \mathbb{R})$ eine glatte Abbildung sein.

Wenn ein F diese Eigenschaften hat, nennen wir ihn *glatten Funktor.*

6.22 Satz. *Erfüllt ein Funktor F diese Regeln, dann kann man diesen Funktor faserweise auf Vektorbündel anwenden und erhält auf diese Weise aus n Vektorbündeln $E_1, \dots, E_n$ über M in kanonischer Weise ein neues glattes Vektorbündel $F(E_1, \dots, E_n)$, so dass für jede Faser gilt $F(E_1, \dots, E_n)_p = F((E_1)_p, \dots, (E_n)_p)$ für alle $p \in M$.*

Beweis. Als Menge setzt man natürlich $F(E_1, \dots, E_n) := \amalg_{p \in M} F((E_1)_p, \dots, (E_n)_p)$. Die Topologie definiert man mit Hilfe der lokalen Trivialisierungen, und letztere baut man aus den lokalen Trivialisierungen der Bündel $E_1, \dots, E_n$ zusammen, wobei man die Eigenschaften des Funktors F, insbesondere seine Stetigkeit/Glattheit (3) benutzt. □

6.23 Bemerkung. Bei der Definition der Vektorbündel kann man überall auch $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen. Zur Unterscheidung spricht man dann von reellen bzw. komplexen Vektorbündeln. Für uns ist die erste Variante momentan wichtiger, weil das Tangentialbündel ein $\mathbb{R}$-Vektorbündel ist.

7 Riemannsche Geometrie 1

Wir wollen nun zurückkommen zu den Riemannschen Metriken und sie mit der neuen Notation beschreiben.

7.1 Definition. Sei $p\colon E \to M$ ein glattes Vektorbündel. Ein *glatter Schnitt von* E ist eine glatte Abbildung $s\colon M \to E$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_M$. Es wird also jedem Punkt von M ein Element des zu diesem Punkt gehörenden Vektorraums zugeordnet.

Die Menge der glatten Schnitte bezeichnen wir mit $\Gamma(E)$.

Entsprechend definiert man stetige Schnitte.

Die Schnitte des Tangentialbündels erhalten noch einen eigenen Namen, man nennt sie *Vektorfelder*. Die Schnitte von des dualen Bündels T^*M des Tangentialbündels heißen 1-Formen, man schreibt auch $\Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$.

Wendet man den Funktor „alternierende p-Formen“ auf das Tangentialbündel an, erhält man das Bündel $\mathrm{Alt}^p(TM)$ (beachte: $\mathrm{Alt}^1(TM) = T^*M$), die Schnitte sind die *p-Formen* $\Gamma(\mathrm{Alt}^p\, TM) =: \Omega^p(M)$.

7.2 Bemerkung. Mit den p-Formen werden wir uns momentan nicht beschäftigen, vielen sollten sich aus Diff 3 an sie erinnern, wo wir dieselbe Definition, allerdings vielleicht nur für Untermannigfaltigkeiten, benutzt haben.

7.3 Beispiel. Die glatten Schnitte des trivialisierten Bündels sind gerade die Funktionen:

$$\Gamma(M \times \mathbb{R}^n) = C^\infty(M; \mathbb{R}^n).$$

7.4 Satz. *Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit g auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist genau ein Schnitt g des Vektorbündels der symmetrischen Bilinearformen auf TM, so dass $g(x)$ für jedes $x \in M$ positiv definit ist.*

Beweis. Eine Riemannsche Metrik ordnet jedem $x \in M$ ein positiv definites Skalarprodukt von T_xM zu, also ein entsprechendes Element in $Sym^2(T_xM)$.

Es bleibt zu zeigen, dass die Definition von glatt in 5.1 und für glatte Schnitte von $Sym^2(TM)$ dieselbe ist. Dies ist per Definition der Fall. (Auch hier könnten mehr Details nicht schaden.) $\square$

8 Drei Sätze über Mannigfaltigkeiten

Hier soll nun das Versprechen eingelöst werden, zu zeigen, dass $O(n)$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

Dazu eine Definition und ein paar Sätze.

8.1 Definition. Sei $f\colon M \to N$ glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Ein Punkt $x \in M$ heißt regulär, falls $T_xf\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ surjektiv ist.

$y \in N$ heißt regulärer Wert, falls jeder Punkt in $f^{-1}(y)$ regulär ist. Beachte: falls $f^{-1}(x) = \emptyset$, dann ist diese Bedingung erfüllt.

f heißt *Immersion*, falls $T_x f$ für jedes $x \in M$ injektiv ist, und f heißt *Submersion*, falls $T_x f$ für jedes $x \in M$ surjektiv ist.

8.2 Definition. Eine *Riemannsche Immersion* ist eine glatte Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g^M) und (N, g^N) so dass $T_x f\colon T_x M \to T_{f(x)} N$ eine isometrische Einbettung von Vektorräume mit Skalarprodukt ist.

Ist umgekehrt $f\colon M \to N$ eine Immersion und g^N eine Riemannsche Metrik auf N, so definiert $f^* g^N$ mit $f^* g^N(v, w) := g^N(Tf(v), Tf(w))$ eine Riemannsche Metrik auf M ,so dass f eine Riemannsche Submersion wird.

8.3 Beispiel. Die Inklusion $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ ist eine Riemannsche Immersion (sogar eine isometrische Einbettung), die Projektion $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ eine Riemannsche Submersion.

8.4 Aufgabe. Mache Dir klar, dass jede Riemannsche Submersion eine Submersion ist.

Mache Dir klar, dass es für Submersionen nicht so einfach ist, aus einer Riemannschen Metrik auf M eine Riemannsche Metrik auf N zu gewinnen, die f zu einer Riemannschen Submersion macht.

8.1 Urbildsatz

8.5 Satz. *Sei $f\colon M^m \to N^n$ glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Sei $y \in N$ regulärer Wert von f. Dann ist $f^{-1}(y)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von M, mit $\dim(f^{-1}(y)) = \dim(M) - \dim(N) = m - n$.*

Beweis. Dieser Satz ist eine globale Version des Satzes über implizite Funktionen und wird auf letzteren zurückgeführt.

Nach Definition des Begriffs Untermannigfaltigkeit müssen wir für jedes $x \in M$ mit $f(x) = y$ eine Karte $\phi\colon U \to V\mathbb{R}^m$ finden, so dass $\phi(U \cap f^{-1}(y)) = V \cap \mathbb{R}^{n-m} \times \{0\}$.

Wähle zunächst irgendeine Karte $\phi\colon U \to V$ von M mit $\phi(x) = 0$, und eine Karte $\psi\colon U' \to V'$ von N mit $\psi(y) = 0$. Durch Komposition erhalten wir dann eine glatte Abbildung $g := \psi \circ f \circ \phi^{-1}\colon V \to V'$ zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ und des $\mathbb{R}^n$, und es gilt dass $Dg(0) = D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(0)$ surjektiv ist.

Hier kann man nun den Satz über implizite Funktionen anwenden. Dieser sagt (nachdem man eventuell V durch eine kleinere offene Menge ersetzt hat und eventuell die Koordinaten anders angeordnet hat) dass es eine glatte Abbildung $\alpha\colon V \cap \mathbb{R}^{m-n} \times \{0\} \to \mathbb{R}^{n-m}$ so dass $g(u, v) = 0$ für $(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \cap V$ genau dann, wenn $v = \alpha(u)$.

Wir modifizieren nun die ursprüngliche Karte ϕ (auf einer entsprechend verkleinerten offenen Menge) indem wir Verknüpfen mit der Abbildung $(v, w) \mapsto (v, w - \alpha(v))$. Da $g(v, w - \alpha(v)) = 0$ genau dann, wenn $(v, w - \alpha(v)) = 0$, entsprechen unter der neuen Karte die y-Stellen von f genau den Punkten $(v, 0)$ (da die y-Stellen von f genau den Nullstellen von g entsprechen). $\square$

8.6 Korollar. *$O(n)$ ist Untermannigaltigkeit von $Gl(n)$.*

Beweis. Da $Gl(n)$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ ist, ist $Gl(n)$ glatte Mannigfaltigkeit. Wir wollen Satz 8.5 anwenden, und zwar auf die Abbildung $f\colon A \mapsto A^*A$. Nach Definition ist $O(n) = \{A \in Gl(n) \mid A^*A = 1\}$. Es muss also nur noch gezeigt werden, dass 1 regulärer Wert ist. Das kann aber so nicht sein. Da jede Matrix der Form A^*A symmetrisch ist, muss man die Komponenten unterhalb der Diagonalen vergessen, und die Abbildung als Abbildung nach $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ auffassen. Es gilt $D_Af(H) = A^*H + H^*A$ (als lineare Approximation an die Abbildung f). Sei X symmetrische Matrix. Mit $H := (A^*)^{-1}X/2$ gilt dann $A^*H = X/2 = H^*A$ (da X symmetrisch), also $D_Af(H) = X$. Somit ist Df an jeder Stelle $A \in Gl(n)$ surjektiv. $\square$

Der Urbildsatz hat eine nützliche Verallgemeinerung, die wir hier zunächst ohne Beweis angeben wollen.

8.7 Definition. Sei $p\colon E \to M$ glattes Vektorbündel, $N \subset M$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Setze $E|_N := p^{-1}(N)$. Dies ist ein glattes Vektorbündel über N (die Karten erhält man einfach durch Einschränken der Karten von E).

Sei allgemeiner $f\colon N \to M$ eine glatte Abbildung. Dann definiert man $f^*E := \{(x,v) \in N \times E \mid f(x) = p(v)\}$. Dann hat man die offensichtliche Projektion $q\colon f^*E \to N$. f^*E wird glattes Vektorbündel über N. f^*E heißt *pullback-Bündel* oder zurückgezogenes Bündel oder Faserprodukt. Es handelt sich hier um eine überaus nützliche und häufig verwendete Konstruktion.

Dazu beachte zunächst, dass $N \times E$ ein glattes Vektorbündel über $N \times M$ ist (die Bündelkarten ergeben sich als Produkte mit id_N). Wir fassen N als Untermannigfaltigkeit von $N \times M$ auf, mittels Einbettung $x \mapsto (x, f(x))$. Dann ist f^*E genau die Einschränkung von $N \times E$ auf diese Untermannigfaltigkeit N.

Umgekehrt ist $E|_N = i^*E$, falls im ersten Beispiel $i\colon N \to M$ die Inklusionsabbildung ist.

8.8 Aufgabe. Zeige, dass in Definition 8.7 die Abbildung $N \to N \times M; x \mapsto (x, f(x))$ wirklich eine glatte Einbettung liefert.

8.9 Definition. Sei N eine glatte Untermannigfaltigkeit der glatten Mannigfaltigkeit M. Das *Normalenbündel* $\nu(N)$ ist der Quotient $TM|_N/TN$.

8.10 Satz. *Sei $f\colon X \to M$ glatte Abbildung und $N \subset M$ glatte Untermannigfaltigkeit. Die Abbildung f heißt* transversal *zu N, falls für jedes $x \in X$ mit $f(x) \in N$ gilt, dass die (nicht notwendig direkte) Summe von Untervektorräumen*

$$T_xf(TX) + T_xN = T_xM.$$

Falls f transversal zu N, so ist $f^{-1}(N)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von X, und das Normalenbündel $\nu(f^{-1}(N))$ ist isomorph zu $f^*\nu(N)$.

Insbesondere gilt $\dim(X) - \dim(f^{-1}(N)) = \dim(M) - \dim(N)$.

Beweis. Auch dieser Satz folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, wobei man natürlich noch etwas genauer hinsehen muss. $\square$

8.11 Aufgabe. Zeige, dass der Urbildsatz 8.5 ein Spezialfall von Satz 8.10 ist. Wie sieht das Normalenbündel des Urbilds eines regulären Wertes aus.

Beweise die Dimensionsformel am Ende von Satz 8.10 aus den restlichen Aussagen.

8.2 Satz von Sard über Existenz regulärer Werte

8.12 Satz. ***(Satz von Sard):*** *Sei $f\colon M \to N$ glatte Abbildung. Dann ist das Komplement der Menge der regulären Werte eine Nullmenge, insbesondere ist die Menge der regulären Werte dicht in N, insbesondere nicht leer.*

Beweis. Für den Beweis wird auf die Literatur verwiesen. (Man könnte hier natürlich auch den, leider nicht wirklich kurzen, Beweis angeben oder wenigstens skizzieren.) □

8.3 Teilung der Eins

In der Theorie glatter Mannigfaltigkeiten gewinnt man große Flexibilität dadurch, dass nicht nur viele Beweise lokal geführt werden können (das haben wir schon gesehen), sondern auch viele Konstruktionen lokal durchgeführt werden können. Das haben wir bei den Bündeln schon im Ansatz kennen gelernt. Seine ganze Bedeutung gewinnt dieses Prinzip aber erst, wenn man lokale Konstruktionen „Zusammenkleben“ kann. Dafür wird die Teilung der Eins benutzt.

8.13 Satz. *Sei M glatte Mannigfaltigkeit. Seien V_j $(j \in J)$ offene Teilmengen von M welche M überdecken. Dann gibt es eine lokal-endliche Verfeinerung U_i $(i \in I)$ der offenen Überdeckung, d.h.*

(1) Es gibt Abbildung $\alpha\colon I \to J$, und $U_i \subset V_{\alpha(i)}$ für alle $i \in I$.

(2) Für jedes $x \in M$ gibt es eine offene Menge U_x so dass $U_x \cap U_i = \emptyset$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$.

Dann gibt es glatte Abbildungen $'\phi_i\colon U_i \to [0,1]$ (genannt Abschneidefunktionen) mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für jedes $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung U_x, so dass auf U_x nur endlich viele der ϕ_i von Null verschieden sind.

(2) $\sum_{i\in I} \phi_i(x) = 1$ $\forall x \in M$ (wegen Punkt (1) ist dies tatsächlich für jedes x eine endliche Summe).

Die ϕ_i heißen glatte Teilung der Eins*, der Überdeckung U_i untergeordnet.*

Beweis. Siehe Literatur (der Beweis wird einfach zu oft vorgemacht). Die Existenz der lokal-endliche Verfeinerung verallgemeinert die definierende Eigenschaft von Kompaktheit.

8.14 Definition. Ein Raum, für den es solche loakl-endlichen Verfeinerungen für jede offene Überdeckung gibt, heißt *parakompakt.*

Hier geht es also darum, zu zeigen dass M parakompakt ist. Dafür benutzt man die abzählbare dichte Teilmenge.

Es wäre natürlich nicht schlecht, den Beweis hier komplett zu geben. □

8.15 Aufgabe. Sei M kompakte glatte m-Mannigfaltigkeit. Zeige, dass es für genügend großes N eine Einbettung $i\colon M \to \mathbb{R}^N$ gibt.

Tipp: benutze Karten, um kleine Teilstücke in $\mathbb{R}^n$ “einzubetten”. Für die verschiedenen Karten, benutze verschiedene Komponenten in einem großen $\mathbb{R}^N$.

Benutze eine Teilung der Eins, um daraus tatsächlich überall definierte glatte Abbildungen zu machen.

Benutze den Satz von Sard und geeignete Projektionen, um aus solch einer Einbettung eine Einbettung in $\mathbb{R}^{2m+1}$ zu machen. (Diese Aufgabe ist recht anspruchsvoll, kann in der Literatur vielfach nachgesehen werden.)

9 Kurven und Flächen im Raum I

Die „klassische“ Differentialgeometrie beschäftigt sich insbesondere mit den Eigenschaften von eingebetteten Kurven und Flächen im Raum.

9.1 Definition. Eine *eingebettete Kurve im Raum* ist eine 1-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Es gibt also insbesondere folgende Typen:

Einbettungen von (offenen) Intervallen, und Einbettungen von S^1. Letztere Kurven werden *geschlossene Kurven* genannt.

Eine *eingebettete Fläche im Raum* ist eine 2-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

Wir haben bereits gesehen, dass jede solche Mannigfaltigkeit auf kanonische Weise eine Riemannsche Metrik enthält.

9.2 Bemerkung. Bei der Untersuchung von Kurven und Flächen sind zwei verschiedene Fragestellungen miteinander verquickt:

(1) Was ist die intrinsische metrische Struktur der Untermannigfaltigkeit? Insbesondere bei Kurven ist das sehr langweilig: alle zusammenhängenden sind isometrisch entweder zu einem Interval oder zu einem Kreis (wobei es nur noch auf die Länge ankommt). Flächen sind da schon etwas interessanter.

(2) Wie ist die Kurve oder Fläche in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet —also extrinsische Eigenschaften. Im $\mathbb{R}^3$ sollte es ja durchaus einen Unterschied zwischen Geraden und echten Kurven geben.

9.1 Kurventheorie im Raum

Wir wollen uns hier zunächst nur mit *lokalen* Eigenschaften der eingebetteten Kurven beschäftigen.

9.3 Definition. Eine parametrisierte Kurve ist eine glatte Abbildung $f\colon I \to \mathbb{R}^3$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f'(t) \neq 0\ \forall t \in I$.

Eine *Umparametrisierung* ist die Komposition mit einem Diffeomorphismus $\phi\colon I' \to I$, also $c = f \circ \phi$.

Die *Krümmung* einer parametrisierten Kurve $f\colon I \to \mathbb{R}^3$ ist definiert als

$$\kappa\colon I \to \mathbb{R}_{\geq 0}; t \mapsto |f''(t)|\,.$$

Ist $\kappa(t_0) \neq 0$, so definiert man den *Normalenvektor* $n(t_0); = c''(t_0)/\,|c''(t_0)|$, und den *Binormalenvektor* $b(t_0) := c'(t_0) \times n(t_0)$, wobei $\times$ das Vektorkreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet., mit $(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$. Die Orthonormalbasis $(c'(t_0), n(t_0), b(t_0))$ heißt dann *begleitendes Dreibein*.

9.4 Aufgabe. Zeige, dass es für jede parametrisierte Kurve f eine Umparametrisierung c gibt, so dass $|c'(t)| = 1\ \forall t \in I'$. Eine solche Kurve heißt *nach Bogenlänge parametrisiert*. Zeige, dass die Parametrisierung nach Bogenlänge bis auf eine konstante Verschiebung im Argument eindeutig ist.

9.5 Aufgabe. Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine glatte Kurve mit $|c'(t)| = 1\ \forall t \in I$. Zeige, dass f genau dann eine affin lineare Abbildung ist, wenn $\tau(t) = 0\ \forall t \in I$.

Die Krümmung zeigt also, wie stark die Kurve davon abweicht, eine Gerade zu parametrisieren (beachte aber auch, dass dazu die Kurve nach Bogenlänge parametrisiert sein muss).

9.6 Definition. Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisiert und $\kappa(t_0) \neq 0$. Dann heißt $\tau(t_0) := \langle n'(t_0), b(t_0)\rangle$ die *Windung* oder *Torsion* von c in t_0.

9.7 Beispiel. Der Kreis $c(t) := r(\cos(t/r), \sin(t/r), 0)$ ist nach Bogenlänge parametrisiert und hat $\kappa(t) = 1/r$, $\tau(t) = 0$.

(Die Krümmung beschreibt den Kreis welchen Radius sich am besten an die Kurve anschmiegt.)

Die *Schraubenlinie* $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $c(t) = (\cos(t/\sqrt{2}), \sin(t/\sqrt{2}), t/\sqrt{2})$ ist nach Bogenlänge parametrisiert. Elementare Rechnungen ergeben $\kappa(t) = 1/2$ und $\tau(t) = 1/2$.

(Die Torsion sagt, wie stark sich die Kurve aus der Ebene des Anschmiegkreises herausdreht.)

9.8 Aufgabe. Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine sogenannte *orientierungserhaltende Euklidische Bewegung (oder orientierungserhaltende affine Isometrie)*, d.h. es gibt eine lineare Abbildung $A \in SO(3)$, also eine Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ mit $A^*A = 1$ und $\det(A) > 0$ und einen Vektor $v_0 \in \mathbb{R}^3$ so dass $\Phi(v) = v_0 + Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$.

Zeige, dass dann auch $\tilde{c} := \Phi c \circ c$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, und dass Krümmung und Windung von $\tilde{c}$ und von c übereinstimmen.

Was passiert, wenn $\det(A) < 0$, also wenn die Orientierung umgekehrt wird?

9.9 Satz. ***(Hauptsatz der Raumkurventheorie)***
Sie $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval und $\kappa, \tau\colon I \to \mathbb{R}$ glatte Kurven mit $\kappa(t) > 0$ für alle $t \in I$.

Dann gibt es eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ mit Krümmung κ und Windung τ. Diese Raumkurve ist bis auf Komposition mit orientierungserhaltenden euklidischen Bewegungen eindeutig.

Beweis. Krümmung und Torsion werden ja durch gewisse Ableitungen der Kurve definiert; bei der Aufgabe handelt es sich also versteckt um eine Differentialgleichung. Dies kann man etwas expliziter machen: wir stellen eine Gleichung auf, die nicht nur die Kurve, sondern gleichzeitig die Vektoren des begleitenden Dreibeins beschreibt. Betrachte das lineare gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}(c, v, n, b) = (c, v, n, b) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\kappa & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \tag{9.10}$$

für die Funktionen $c, v, n, b\colon I \to \mathbb{R}^3$. Dies sind die sogenannten *Frenet-Gleichungen*. Einfache Berechnung von Skalarprodukten (wir werden gleich ein paar Beispiele sehen) zeigen, dass jede Kurve $c(t)$ mit begleitendem Dreibein $(v(t), n(t), b(t))$ diese Dgls erfüllt. Nun sagt der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen, dass es genau eine Lösung mit Anfangsbedingungen $c(t_0) = 0$, $v(t_0) = e_1$, $n(t_0) = e - 2$, $b(t_0) = e_3$ gibt. Da die Dgl linear ist, existiert die eindeutige Lösung sogar für alle $t \in I$.

Mit den Anfangsbedingungen legen wir den Anfangspunkt $c(t_0) = 0$ und das anfängliche begleitende Dreibein (die Standardbasis) fest.

Indem man die Skalarprodukte $\langle v, v\rangle$, $\langle v, n\rangle$ etc. ableitet, und die Identitäten aus der definierenden DGl (9.10) benutzt, erhält man dann ein lineares System von Dgls für diese 6 Skalarprodukte, z.B.

$$\frac{d}{dt}\langle v, v\rangle = 2\langle v', v\rangle = 2\kappa\langle n, v\rangle; \langle v, n\rangle' = \langle v', n\rangle + \langle v, n'\rangle = -\kappa\langle v, v\rangle + \tau\langle b, v\rangle + \kappa\langle n, n\rangle.$$

Wenn man alles ausschreibt, erkennt man sofort, dass dieses Gleichungssystem die Lösung $\langle v, v\rangle = \langle n, n\rangle = \langle b, b\rangle = 1$, $\langle v, n\rangle = \langle v, b\rangle - \langle n, b\rangle = 0$. hat. Wegen der Eindeutigkeit folgt, dass unsere Vektoren tatsächlich für alle $t \in I$ ein Orthonormalsystem bilden. Dieses ist immer positiv orientiert (wegen der Stetigkeit: es kann nicht plötzlich ein Vektor umklappen).

Da $c' = v$ und $|v| = 1$, ist die sich ergebende Kurve c nach Bogenlänge parametrisiert. Da $c'' = v' = \kappa n$, $\kappa > 0$ und $|n| = 1$, ist die Krümmung korrekt.

Weiter bilden v und n somit die ersten beiden Vektoren des begleitenden Dreibeins, und somit, als passender dritter Orthonormalvektor, b den zugehörigen dritten Vektor. Damit erhält man zuletzt auch $\langle n', b\rangle = -\kappa\langle v, b\rangle + \tau\langle b, b\rangle = \tau$, also hat auch die Torsion den richtigen Wert.

Eine beliebige zweite Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ mit $\kappa(t_0) > 0$ (insbesondere eine mit derselben Krümmung und Torsion) kann man zunächst mittels einer orientierungserhaltenden euklidischen Bewegung so verschieben und verdrehen, dass (ich benutze dasselbe γ für die verdrehte verschobene Kurve) $\gamma(t_0) = 0$ und so dass das begleitende Dreibein bei t_0 gerade (e_1, e_2, e_3) ist. Krümmung und Torsion ändern sich nicht. Man erhält also eine zweite Lösung der Differentialgleichung (9.10). Wegen der Eindeutigkeit stimmt sie mit der ersten überein. □

9.11 Bemerkung. Interessanter als die Existenz ist für mich der Eindeutigkeitssatz. Dieser sagt, dass eine gekrümmte Kurve mit vorgegebener Torsion ihre Form behält. Dies kennen wir auch aus dem Alltag, und Designer haben es sich zunutze gemacht: die stark verdrehte Telefonschnur behält ihre Form, wenn man nicht Kräfte auf sie ausübt. Eine Gerade dagegen (nicht gekrümmt) kann man relativ leicht in verschiedene andere Formen bringen.

9.12 Definition. Sei c nun eine *geschlossene* Kurve. Dies können wir so beschreiben: $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist eine (nach Bogenlänge parametrisierte) Kurve, welche L-periodisch ist für ein $L > 0$, also $c(t + L) = c(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Äquivalent ist c gegeben als Abbildung $S^1 \to \mathbb{R}^3$, wobei man $S^1 \subset \mathbb{C}$ auffasst und die „Aufwicklung“ $\mathbb{R} \to S^1; t \mapsto \exp(2\pi t/L)$ benutzt.

Die Totalkrümmung ist definiert als

$$\kappa(c) := \int_0^L \kappa(t)\, dt.$$

Definiere außerdem für jeden Einheitsvektor $e \in S^2$

$$\mu(c, e) := |\{\text{lokale Maxima in } [0, L) \text{ von c}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}|\,.$$

Grob gesagt mißt iese Zahl, wie oft die Kurve die Richtung bezüglich e wechselt.

Der Satz von Sard impliziert, dass für fast alle e diese Zahl endlich ist.

9.13 Satz. *Sei c eine geschlossene Raumkurve. Dann gilt*

$$2 \cdot \int_{S^2} \mu(c,e) = \kappa(c)$$

Da S^2 kompakt ist, hat die definierende Funktion von $\mu(c,e)$ für jedes $e \in S^2$ mindestens ein Maximum, also folgt $\kappa(c) \geq 2\pi$.

Milnor bewies (als undergrad) sogar: Falls c "verknotet" ist, gilt $\kappa(c) \geq 4\pi$.

Beweis. Vergleiche [1, Kapitel 2.3]/ □

9.14 Definition. Seien $f, g\colon M \to N$ zwei glatte Einbettungen.

Eine *Isotopie* von N ist eine glatte Abbildung $\Phi\colon [0,1] \times N \to N$, so dass $\Phi|_{t \times N}$ eine Diffeomorphismus ist für jedes $t \in [0,1]$.

Eine *ambiente Isotopie* zwischen f und g ist eine Isotopie $\Phi\colon [0,1] \times N \to N$, so dass $\Phi_0 = \mathrm{id}_N$ und so dass $\Phi_1 \circ f = g$.

Zwei Schleifen $c_1\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ heißt verknotet, falls sie nicht ambient isotop ist zur Standardschleife, die zur Einbettung $S^1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ ist. Beispiel: Kleeblattschlinge.

9.2 Flächen im Raum I

9.15 Definition. Eine Fläche im Raum ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit $F \subset \mathbb{R}^3$. Beachte, dass diese als Untermannigfaltigkeit automatisch eine Riemannsche Metrik erhält.

Im Gegensatz zu Kurven ist nun auch die Metrik, welche die Fläche erhält, interessant, und nicht nur der Weg, wie die Fläche im $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist.

Wir wollen aber zunächst ein paar Größen betrachten, die entscheidend von der Einbettung abhängen.

9.16 Definition. Sei F eine eingebettete Fläche. Dann erhält man für jedes $x \in F$ eine Einbettung $T_xF \subset \mathbb{R}^3$ (das Bild des Differentials der Inklusion $i\colon F \hookrightarrow \mathbb{R}^3$).

Eine glatte Abbildung $N\colon F \to S^2$ so dass $N(x) \perp T_xF$ für jedes $x \in F$ heißt *Einheitsnormalenfeld* oder Gaußabbildung. Die Fläche F ist *orientierbar* genau dann, wenn es eine solche Abbildung gibt. Die Fläche zusammen mit dieser Abbildung heißt dann *orientierte Fläche*.

Lokal existiert eine solche Gauß-Abbildung immer (man kann sie aber durch ihr negatives ersetzen, sie ist also nicht eindeutig), wir werden hin und wieder die lokale Variante benutzen.

9.17 Definition. $F \subset \mathbb{R}^3$ eingebettete orientierte Fläche mit Gauß-Abbildung $N\colon F \to S^2$.

Das (negative) Differential $-T_pN\colon T_pF \to T_{N(p)}S^2$ kann für $p \in F$ aufgefaßt werden als Abbildung

$$W_p := -T_xN\colon T_pF \to T_pF,$$

da $T_{N(p)}S^2 = N(p)^\perp = T_pF \subset \mathbb{R}^3$. Als solche wird die Abbildung die *Weingarten-Abbildung* genannt.

Die zur Weingarten-Abbildung gehörende Bilinearform

$$II_p(v,w) := \langle W_p(v), w\rangle_{\mathbb{R}^3}; \qquad v,w \in T_pF$$

wird *zweite Fundamentalform* der Fläche F genannt.

9.18 Lemma. *Die Weingarten-Abbildung ist selbstadjungiert (symmetrisch), daher ist auch die zweite Fundamentalform symmetrisch.*

Beweis. Um dies klassisch zu beweisen, muss kann man alles mittels lokaler Koordinaten darstellen.Die Rechnung führt dann letztendlich auf den Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit von Differentiationen. Vergleiche [1].

Einen in viel allgemeinerem Kontext gültigen Beweis (eines entsprechend allgemeineren Theorems) werden wir (hoffentlich) später sehen. Er beruht auf der Frobenious-Eigenschaft des Tangentialraums von Untermannigfaltigkeiten. $\square$

Die zweite Fundamentalform beschreibt, wie eine eingebettete Fläche im Raum gekrümmt ist. Wir machen folgende Definition:

9.19 Definition. Sei $S \in \mathbb{R}^3$ eine orientierte reguläre Fläche (mit Einheitsnormalenfeld N). Sei $p \in S$ und $v \in T_pS$. Dann heißt

$$\kappa_{nor}(v) := II_p(v,v)$$

die *Normalkrümmung* von S im Punkt p in Richtung v.

9.20 Lemma. *Die Normalkrümmung von S im Punkt p in Richtung v ($|v| = 1$) kann folgendermaßen berechnet werden: Sei $c\colon \mathbb{R} \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$. Dann gilt*

$$\kappa_{nor}(v) = \langle c''(0), N(p)\rangle_{T_p\mathbb{R}^3}.$$

Beweis. Da c in S verläuft, ist seine Ableitung immer tangential an S, also $\langle c'(t), N(c(t))\rangle = 0$ für alle t. Differenzieren ergibt

$$\begin{aligned} 0 = \langle c'(t), N(c(t))\rangle' &= \langle c''(t), N(c(t))\rangle + \langle (N(c(t)))', c'(t)\rangle \\ &= \kappa_{nor} + \langle T_pN(c'(t)), c'(t)\rangle = -II_p(c'(t), c'(t)) + \kappa_{nor}. \end{aligned}$$

$\square$

9.21 Definition. Sei $S \in \mathbb{R}^3$ orientierte parametrisierte Fläche, $p \in S$ und $W_p\colon T_pS \to T_pS$ die Weingarten-Abbildung. Da diese selbstadjungiert ist, läßt sie sich diagonalisieren. Ihre Eigenwerte $\kappa_1 \le \kappa_2$ heißen die *Hauptkrümmungen* von S in p, zugehörige Eigenvektoren die *Hauptkrümmungsvektoren.*

$K(p) := \det(W_p) = \kappa_1\kappa_2$ heißt *Gaußkrümmung*, $H(p) := \operatorname{tr}(W_p) = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$ die *mittlere Krümmung* von S in p.

9.22 Beispiel. (1) In der Ebene ist $II_p = 0$ für jedes p, also sind alle Normalkrümmungen Null, somit auch die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung. Jede Richtung ist Hauptkrümmungsrichtung.

(2) Für die Sphäre S^2 gilt, dass alle Normalkrümmungen 1 sind, entsprechendes gilt für die Gauß- und die mittlere Krümmung.

(3) Der Zylinder $S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ hat verschiedene Normalkrümmungen: in Richtung des Kreises 1, in Richtung der Geraden 0. Die Gauß'krümmung ist also 0, die mittlere Krümmung an jedem Punkt 1/2.

(4) Die Sattelfläche $S := \{(x, y, z) \mid z = y^2 - x^2\}$ ist reguläre Fläche. Am Punkt 0 kann man als Normalenvektor den Einheitsvektor $N = (0, 0, 1)$ wählen.

9.23 Aufgabe. Beweise, dass S wirklich reguläre Fläche (also eingebettete Untermannigfaltigkeit) ist, und berechne T_0S, besser T_xS für jedes $x \in S$.

Die Kurve $c_1(t) := (\alpha(t), 0, -\alpha(t)^2)$ erfüllt $c(0) = 0$ und $|c_1'(t)|^2 = \alpha'(t)^2 + 4\alpha(t)^2\alpha'(t)^2 = \alpha'(t)^2(1 + 4\alpha(t)^2) = 1$, falls α geeignet als Lösung dieser Differentialgleichung gewählt wird (insbesondere $\alpha(0) = 0$ und $\alpha'(0) = 1$). Dann gilt

$$\langle c_1''(0), N\rangle = -2\alpha(0)\alpha''(0) - 2\alpha'(0)^2 = -2.$$

Also ist die Normalkrümmung in Richtung $(1, 0, 0)$ gleich -2. Entsprechend erhält man für die Normalkrümmung in Richtung $(0, 1, 0)$ den Wert 2. Am Punkt Null ist also die mittlere Krümmung 0, die Gaußkrümmung hat den Wert -4.

9.24 Bemerkung. Zur Definition der Normalkrümmungen und damit von mittlerer und Gaußkrümmung haben wir ein Einheitsnormalenvektorfeld N, also eine Orientierung, benötigt. Lokal existiert ein solches immer, global aber ja nicht. Wenn man das Einheitsnormalenvektorfeld ändert (also durch sein negatives ersetzt), muss man auch die Vorzeichen der Normalkrümmungen ändern. Das Vorzeichen der Gaußkrümmung bleibt jedoch erhalten. Letztere ist also auch für nicht-orientierte Flächen wohldefiniert.

Die mittlere Krümmung ändert jedoch ihr Vorzeichen. Reparieren kann man dies, indem man anstelle der Funktion $H(p)$ das mittlere Krümmungs(-Normalenvektor)feld $\mathcal{H}(p) := H(p)N(p)$ betrachtet. Dies ist ein Schnitt der Einschränkung des Tangentialbündels $T\mathbb{R}^3$ auf S.

9.25 Satz. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte nicht-leere reguläre Fläche. Dann gibt es $p \in S$ mit $K(p) > 0$.*

Beweis. Sei $p \in S$ eine Maximalstelle des Abstands zum Ursprung, und R_0 der entsprechende Abstand (für die Existenz wird die Kompaktheit gebraucht!).

Dann gilt nach Lemma 9.26 $T_pS = T_pS^2_{R_0}$, wobei $S^2_{R_0}$ die Sphäre vom Radius R_0 um den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ ist (da beide Vektorräume die gleich Dimension, nämlich 2, haben).

Wähle nun $N = p \in \mathbb{R}^3$ orthogonal zu T_pS und für eine Richtung $v \in T_pS$ mit $|v| = 1$ die Ebene $E =< v, N >$ sowie eine Kurven c_1 auf $S \cap E$ mit $c_1(0) = p$ und $c_1'(0) = v$ und eine Kurve c_2 auf $S^2_{R_0} \cap E$ mit $c_2(0) = p$ und $c_2'(0) = v$.

Wir haben jetzt also in folgendes ebenes Problem übersetzt: eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c_1 \colon I \to \mathbb{R}^2$ verläuft im Inneren des Kreises c_2 vom Radius R_0, und für $t = 0$ berührt c_1 den Rand des Kreises. Dann gilt $\kappa_{c_1}(0) \geq 1/R_0$. Dies zu beweisen ist **Übungsaufgabe**.

$\square$

9.26 Lemma. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Untermannigfaltigkeit N. Sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass $c := \max\{f(x) \mid x \in N\}$ existiert und regulärer Wert von $f\colon M \to \mathbb{R}$ ist.*

Dann ist ja $L := f^{-1}(c)$ Untermannigfaltigkeit von M. Für jedes $x \in N \cap L$ gilt dann:

$$T_xN \subset T_xL \subset T_xM.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

9.27 Definition. Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche. F heißt *Minimalfläche*, falls für die mittlere Krümmung gilt $H(x) = 0$ für jedes $x \in M$.

9.28 Bemerkung. Zur Definition von H muss man zwar lokal eines von zwei möglichen Einheitsnormalenfeldern wählen. $H = 0$ hängt aber nicht von der Wahl ab, kann also auch für nicht-orientierbare Flächen definiert werden.

9.29 Lemma. *Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche. Dann gilt $K(x) \le H(x)^2$ für alle $x \in F$. Beachte, dass diese Aussage sogar Sinn macht, wenn F nicht orientierbar ist, da H^2 nicht von der (lokalen) Orientierung abhängt.*

Beweis. Seien κ_1, κ_2 Hauptkrümmungen bei x (mit beliebig gewähltem lokalen Einheitsnormalenfeld). Dann gilt $K(x) = \kappa_1\kappa_2$ und $H(x) = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$. Somit

$$4(H^2 - K) = (\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 4\kappa_1^2\kappa_2^2 = (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \ge 0.$$

□

9.30 Definition. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik g, $f\colon M \to \mathbb{R}$ stetige Funktion mit kompaktem Träger.

Definiere $\int_M f d\mu_g$ auf folgende Weise: wähle Atlas $\kappa_i\colon U_i \to V_i$ von M mit untergeordneter glatter Partition der 1 $\phi_i\colon U_i \to \mathbb{R}$.

Definiere dann

$$\int_M f d\mu_g := \sum_{i\in I} \int_{V_i} f \circ \kappa_i^{-1} \cdot \sqrt{|\det g_{ij}|}.$$

Definiere $\operatorname{vol}(M, g) := \int_M 1\, d\mu_g$.

9.31 Aufgabe. Zeige, dass Definition 9.30 nicht von den Wahlen (Atlas, Teilung der 1,…) abhängt.

9.32 Satz. *Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche mit kompaktem Abschluss $\overline{F}$. Für jede andere Fläche F_2, so dass $\overline{F} \setminus F = \overline{F_2} \setminus F_2$ (die also den gleichen Rand wie F hat) gelte* $\operatorname{vol}(F) \le \operatorname{vol}(F_2)$.

Dann ist F Minimalfläche, also gilt $H \equiv 0$.

Beweis. Angenommen, $H(x) \ne 0$ für ein $x \in F$. Wähle ein lokales Normalenfeld N so, dass $H(x) > 0$. Betrachte eine Funktion $f\colon F \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in einer Kartenumgebung von x, mit $f(x) = 1$ und $f(y) \ge 0$ für alle $y \in F$. Wähle den Träger von f so klein, dass $H(y) > 0$ für alle y mit $f(y) \ne 0$.

Definiere $F_\epsilon := \{y + f(y)N(y) \mid y \in F\}$.

9.33 Aufgabe. F_ϵ ist für kleine ϵ eine reguläre Fläche.

9.34 Aufgabe. Es gilt $\partial \operatorname{vol}(F_\epsilon)/\partial\epsilon|_{\epsilon=0} = -2\int_F f(y)H(y)\,d\mu_F$.

In unserem Beispiel ist diese Ableitung echt negativ, also gibt es (nach Diff 1) $\epsilon > 0$, so dass $\operatorname{vol}(F_\epsilon) < \operatorname{vol}(F)$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme über die Minimalität des Volumens von F. □

9.35 Korollar. *Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ kompakte reguläre Fläche (ohne Rand). Dann ist F keine Minimalfläche, insbesondere kann man F deformieren und dabei die Fläche verkleinern.*

Beweis. Da F kompakt, gibt es nach Satz 9.25 ein $x \in F$ mit $K(x) > 0$. Nach Lemma 9.29 ist $H(x) \neq 0$, also F keine Minimalfläche.' □

9.36 Bemerkung. In der Flächentheorie könnten/sollten jetzt noch folgende Themen besprochen werden, auf die wir zurückkommen werden, wobei einiges etwas allgemeiner behandelt werden wird.

(1) Einführung des Krümmungstensors als innere metrische (nur von der Metrik, nicht irgendwelchen Einbettungen) abhängenden Größe).

(2) Beschreibung des Krümmungstensors in Koordinaten, dazu auch Einführung der Christoffel-Symbole.

(3) Theorema Egregium: die Gaußkrümmung kann mittels des Krümmungstensors berechnet werden, ist also bei Isometrien invariant.

(4) Satz von Gauß-Bonnet: für eine kompakte Fläche F mit Riemannscher Metrik g gilt $\int_F K(x)d\mu_g = 2\pi\chi(F)$.

Für die *Eulercharakteristik* gilt dabei: $\chi(F) = e - k + f$, wobei e, k, f die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen einer Triangulierung von F ist; alternativ gilt $\chi(F) = 2 - 2g$, wobei g das *Geschlecht* der Fläche ist, also die Anzahl der „Löcher" (eine Sphäre hat 0 davon, ein Torus 1,...). Die letzte Formel gilt nur für orientierbare Flächen.

10 Baby Lie Gruppen 0

10.1 Definition. Eine *Lie Gruppe* ist eine Gruppe G, so dass G eine glatte Mannigfaltigkeit ist, und so dass die Abbildung $G \times G \to G; (g,h) \mapsto gh^{-1}$ glatt ist.

10.2 Beispiel. (1) $\mathbb{R}^n$ mit der Addition ist Liegruppe.

(2) $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ mit Addition ist Liegruppe.

(3) $Gl(n,\mathbb{R})$ und $Gl(n,\mathbb{C})$ sind Liegruppen.

(4) $O(n)$ ist Liegruppe.

(5) S^3, aufgefasst als Menge der Quaternionen von Länge 1, mit der Quaternionenmultiplikation ist eine Liegruppe.

10.3 Aufgabe. Sie G Liegruppe. Zeige, dass das Tangentialbündel von G trivial ist.

11 Überlagerungen 0

11.1 Definition. Seien $\overline{X}, X$ topologische Räume. Eine Abbildung $p\colon \overline{X} \to X$ heißt *Überlagerungsabbildung*, wenn für jedes $x \in X$ eine Umgebung U und eine diskrete Menge Γ existiert, so dass man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[\approx]{f} & U \times \Gamma \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_U} \\ U & = & U. \end{array}$$

Lokal sieht also $\overline{X}$ wie $X \times \Gamma$ aus. Die Kardinalzahl $|\Gamma|$ wird *Blätterzahl* der Überlagerung genannt. Für $p \in X$ ist die Menge $p^{-1}(x)$ (die Faser von p an x) homöomorph zur diskreten Menge Γ.

11.2 Beispiel. (1) Die Abbildung $\exp\colon \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C};\ t \mapsto \exp(2\pi i t)$ ist eine Überlagerung. Für einen Punkt $q \in S^1$ kann man $U := S^1 \setminus \{-q\}$ wählen. Dann ist ja $S^1 \setminus \{-q\} \approx (0,1)$. Umgekehrt ist z.B.'$p^{-1}(0) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \approx (0,1) \times \mathbb{Z}$, und die Hom"'oomorphismen kann man auch mit den Projektionen verträglich wählen.

(2) Die Projektion $p\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ (Einschränkung der kanonische Projektion $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}P^n$) ist eine Überlagerung. Als Mengen U können die Kartenumgebungen aus Beispiel 2.8 gewählt werden, $p^{-1}(U)$ besteht dann jeweils aus der Vereinigung von 2 Halbschalen, z.B. $\{x \in S^n \mid x_k = 0\}$.

11.3 Aufgabe. Sei $p\colon \overline{X} \to X$ eine Überlagerung, X zusammenhängend. Zeige, dass dann $\left|p^{-1}(x)\right| = \left|p^{-1}(y)\right|$ für alle $x, y \in X$. Die Blätterzahl ist also wohldefiniert.

Zeige, dass p ein lokaler Homöomorphismus ist, dass es also für jedes $\overline{x} \in \overline{X}$ offene Umgebungen $\overline{U}$ von $\overline{x}$ und U von x gibt, so dass $p|\colon \overline{U} \to U$ ein Homöomorphismus ist. Finde ein Beispiel für einen lokalen Homöomorphismus, welche keine Überlagerung ist.

11.4 Lemma. *Sei $p\colon \overline{M} \to M$ eine Überlagerung mit abzählbarer Blätterzahl und M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann hat $\overline{M}$ auf eindeutige Weise eine glatte Mannigfaltigkeit, so dass p ein lokaler Diffeomorphismus ist.*

Gibt es dann noch auf M eine Riemannsche Metrik g, so kann man eine eindeutige Riemannsche Metrik $\overline{g}$ auf $\overline{M}$ finden, die geliftete Metrik*, so dass p eine lokale Isometrie ist.*

Beweis. Die Karten für $\overline{M}$ erhält man einfach, indem man den lokalen Homöomorphismus p auf genügend kleine Mengen einschränkt und dann mit den Karten von M verknüpft.

Für jeden lokalen Diffeomorphismus $f\colon N \to M$ kann man die zurückgezogene Metrik f^*g durch $f^*g(v,w) := g(Tf(v), Tf(w))$ definieren, damit wird offensichtlich f eine lokale Isometrie. □

11.5 Definition. Sei G eine (diskrete) Gruppe, X ein topologischer Raum. Eine stetige (Links)-Operation von G auf X ist ein Gruppenhomomorphismus $\phi\colon G \to Homeo(X)$; man schreibt dies oft als "Multiplikation" $G \times X \to$

$X; (g,x) \mapsto gx := \phi(g)(x)$. Dann gilt $1 \cdot x = x$ und $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ für alle $x \in X$, $g, h \in G$.

Falls X glatte Mannigfaltigkeit, dann heißt eine solche Operation *glatt*, wenn man Homöomorphismen durch Diffeomorphismen ersetzt.

Eine Operation ϕ heißt

(1) effektiv, falls $\ker(\phi) = 1$.

(2) *frei*, falls $g \cdot x = x$ impliziert, dass $g = 1$ (jedes nicht-triviale Element von G bewegt jeden Punkt von x)

(3) *diskret*, falls für alle $x, y \in X$ offene Umgebungen $U_x \ni x$, $U_y \ni y$ existieren, so dass $g \cdot U_x \cap U_y \neq \emptyset$ nur für endlich viele $g \in G$.

Jede Operation definiert eine Äquivalenzrelation auf X, mit $x \sim gx$ für alle $x \in X$, $g \in G$. Für den Quotientenraum schreibt man $\Gamma \backslash X$, er heißt auch der *Bahnenraum.*

11.6 Beispiel. Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $(z,t) \mapsto z + t$ ist eine glatte freie Operation von $\mathbb{Z}$ auf der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}$.

Die *triviale Operation* ist definiert durch $gx := x$ für jedes $g \in G$, $x \in X$. Sie ist das Gegenteil von effektiv.

11.7 Satz. *Sei $\overline{M}$ eine glatte Mannigfaltigkeit mit freier diskreter glatter Operation der Gruppe Γ. Dann gibt es für jedes $x \in \overline{M}$ eine Umgebung $U_x \ni x$, so dass $gU_x \cap gU_x \neq \emptyset$ für höchstens ein $g \in \Gamma$.*

Außerdem kann man $M := \Gamma \backslash \overline{M}$ in kanonischer Weise die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit geben, so dass die Projektion $p \colon \overline{M} \to M$ eine glatte Überlagerungsabbildung ist.

Beweis. Wähle zunächst U_x, so dass $U_x \cap gU_x \neq \emptyset$ nur für endlich viele $g \in \Gamma$. Da Γ frei operiert, ist $gx \neq x$ für $g \neq 1$. Da $\overline{M}$ hausdorffsch ist, können wir U_x verkleinern und offene Umgebungen U_g von gx finden, so dass $U_x \cap U_g = \emptyset$. Ersetze dann U_x durch den Schnitt von U_x mit den endlich vielen offenen Mengen $g^{-1}U_g$. Dann gilt $gU_x \subset U_g$, und somit $U_x \cap gU_x = \emptyset$ für $g \neq 1$.

Wähle eine Überdeckung von $\overline{M}$ durch Kartenumgebungen U_x ($x \in \overline{M}$) mit Karten $\phi_x \colon U_x \to V_x \subset \mathbb{R}^n$, so dass $gU_x \cap U_x = \emptyset$ für $g \neq 1$. Dann ist $p(U_x)$ eine offene Teilmenge von M, da $p^{-1}(p(U_x)) = \cup_{g \in \Gamma} gU_x$ offen. Außerdem ist $p \colon U_x \to p(U_x)$ ein Homöomorphismus (dafür braucht man, dass $gU_x \cap U_x = \emptyset$ für $g \neq 1$) mit Inverse $q_x \colon p(U_x) \to U_x$.

Wir definieren nun den Atlas von M mit Karten $\phi_x \circ q_x \colon p(U_x) \to V_x$. Die Kartenwechselabbildungen sind dann interessant, wenn $p(U_x) \cap p(U_y) \neq \emptyset$, also wenn es $g \in \Gamma$ gibt, so dass $U_x \cap gU_y \neq \emptyset$. Die Kartenwechselabbildungen sind dann (lokal) gegeben durch $\phi_y \circ l_g \circ \phi_x^{-1}$, wobei l_g der durch Multiplikation mit g (von links) gegebene Diffeomorphismus ist; dies sind also alle glatte Abbildungen.

Wir müssen noch überprüfen, dass M hausdorffsch ist und eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Die letztere erhält man als Bild (unter p) einer solchen Teilmenge von $\overline{M}$.

Für die Hausdorffsch-Eigenschaft wähle zu $x, y \in \overline{M}$ Umgebungen U_x, U_y, so dass $gU_x \cap U_y = \emptyset$ für alle bis auf endlich viele $g \in \Gamma$. Es sei $p(x) \neq p(y)$, also $gx \neq y$ für alle $g \in \Gamma$.Da $\overline{M}$ hausdorffsch, können wir (U_y verkleinern!) für die endlich vielen g mit $gU_x \cap U_y \neq \emptyset$ offene Umgebungen U_g von gx und U_y von y finden, so dass $U_g \cap U_y = \emptyset$. Ersetze dann U_x durch $U_x \cap g^{-1}U_g$, und danach gilt $gU_x \cap U_y = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma$, also auch $p(U_x) \cap p(U_y) = \emptyset$. Dies sind aber zwei offene Umgebungen der (beliebig gewählten) Punkte $p(x), p(y) \in M$.

Nach Konstruktion sehen wir, dass wir für die gewählten Umgebungen einen mit p verträglichen Diffeomorphismus $p^{-1}(p(U_x)) \to U_x \times \Gamma$ erhalten.

Auch hier gibt es Kartenwechsel für die Überlagerungskarten; diese sind hier gegeben durch Multiplikation mit einem $g_0 \in \Gamma$.

11.8 Aufgabe. Mache die letzte Aussage präzise und beweise sie.

□

11.9 Definition. Eine Abbildung $p\colon M \to N$ heißt *lokaler Diffeomorphismus*, falls es für jedes $x \in M$ offene Umgebungen U_x von x und U_y von $y = p(x)$ gibt, so dass $p|\colon U_x \to U_y$ ein Diffeomorphismus ist.

11.10 Bemerkung. Wegen des Satzes von der lokalen Umkehrfunktion ist $p\colon M \to N$ genau dann ein lokaler Diffeomorphismus, wenn T_xp ein Isomorphismus ist für jedes $x \in M$.

Jede Überlagerungsprojektion ist ein lokaler Diffeomorphismus.

11.11 Definition. Sei $p\colon M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus und g_N eine Riemannsche Mannigfaltigkeit auf N. Dann definiert $g_M := p^*g_N$ mit $g_M(v,w) := g_N(Tp(v), Tp(w))$ eine Riemannsche Metrik auf M, die zurückgezogene Metrik.

Wendet man diese Konstruktion auf eine Überlagerung $p\colon \overline{M} \to M$ an, so erhält man eine *Überlagerungsmetrik* und spricht von einer Riemannschen Überlagerung.

Ist umgekehrt eine freie diskrete glatte Gruppenoperation $\Gamma \times \overline{M} \to \overline{M}$ isometrisch (d.h. Multiplikation mit g ist für jedes $g \in \Gamma$ eine Isometrie), so gibt es eine eindeutige Riemannsche Metrik auf $M := \Gamma\backslash\overline{M}$, welche die Projektion zur Riemannschen Überlagerung macht. Man benutzt einfach den lokalen Diffeomorphismus, um die Metrik nach vorne zu drücken. Da Γ isometrisch operiert, ist dies wohldefiniert.

11.12 Beispiel. Die Operation von $\mathbb{Z}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ ist isometrisch, also erhält man eine eindeutige Metrik auf $T^n = \mathbb{Z}^n\backslash\mathbb{R}^n$.

Wählt man andere Gitter in $\mathbb{R}^n$, erhält man als Quotienten andere Riemannsche Mannigfaltigkeiten, welche aber diffeomorph zum Torus sind.

11.13 Aufgabe. Ein Gitter ist eine Untergruppe Γ von $\mathbb{R}^2$ welche diskret (also ohne Häufungspunkte) in $\mathbb{R}^2$ enthalten ist, und so dass Γ als $\mathbb{R}$-Vektorraum ganz $\mathbb{R}^2$ erzeugt.

Zeige, dass jede solche Untergruppe isomorph zu $\mathbb{Z}^2$ ist. Bestimme bis auf Isometrie alle möglichen Quotienten $\Gamma\backslash\mathbb{R}^2$.

12 Fundamentalgruppe 0

12.1 Definition. Seien X, Y topologische Räume. Zwei Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ heißen *homotop*, falls es eine *Homotopie* $H\colon X \times [0,1] \to Y$ zwischen ihnen gibt, also eine stetige Abbildung, so das $H \circ i_0 = f$ und $H \circ i_1 = g$, wobei $i_t\colon X \to X \times [0,1]; x \mapsto (x,t)$.

Sei $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Wir schreiben $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$, falls $f\colon X \to Y$ stetige Abbildung mit $f(x_0) = y_0$. Man spricht dann von *punktierten* Abbildungen.

Eine Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to Y$ heißt *punktiert*, falls $H(x_0,t) = y_0$ für alle $t \in [0,1]$.

Wir schreiben $[X,Y]$ für die Menge aller Homotopieklassen von Abbildungen von X nach Y, und $[(X,x_0),(Y,y_0)]$ für die Menge der punktierten Homotopieklassen.

12.2 Aufgabe. Zeige, dass Homotopie tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist: man kann Homotopien umdrehen und verketten.

12.3 Lemma. *Seien $f,g\colon X \to Y$ homotop (mit Homotopie H, und seien $h\colon Y \to Z$ und $u\colon U \to X$ stetig. Dann sind auch $h \circ f \circ u$ und $h \circ g \circ u$ homotop (mit Homotopie $h \circ H \circ u \times \mathrm{id}_{[0,1]}$*

Beweis. Übungsaufgabe. □

12.4 Definition. Sei $x_0 \in X$. Wir definieren $\pi_1(X,x_0) := [(S^1,1),(X,x_0)]$. Hierbei ist $S^1 \subset \mathbb{C}$, mit $1 \in \mathbb{C}$.

12.5 Definition. $\pi_1(X,x_0)$ wird eine (in der Regel nicht abelsche) Gruppe, mit Verknüpfung $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2]$ gegeben durch Hintereinanderausführen der beiden Schleifen. Das neutrale Element ist repräsentiert durch die Konstante Schleife, das Inverse durch die umgekehrte Schleife.

12.6 Aufgabe. Beweise, dass die Verknüpfung in $\pi_1(X,x_0)$ wohldefiniert ist, und dass sich wie angegeben eine Gruppe ergibt.

12.7 Lemma. *Sei $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ stetig. Dann induziert f einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f)\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0); [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$.*

Beweis. Die Abbildung ist wohldefiniert nach Lemma 12.3, die Definition ergibt, dass es sich um einen Gruppenhomomorphismus handelt. □

12.8 Satz. *Sei M glatte zusammenhängende Mannigfaltigkeit, $x_0 \in M$. Zu jeder Untergruppe $H \subset \pi_1(M,x_0)$ gibt es eine zusammenhängende Überlagerung $p_H\colon M_H \to M$ und $x_H \in M_H$, so dass $\mathrm{im}(\pi_1(p_H)) = H$.*

Ist $p'_H\colon M'_H \to M$, mit $x'_H \in M'_H$ eine zweite solche Überlagerung, so gibt es einen (eindeutigen) Homöomorphismus $f\colon M_H \to M'_H$ mit $p'_H \circ f = p_H$, $f(x_H) = x'_H$.

Für jede zusammenhängende Überlagerung $p\colon \overline{M} \to M$ ist $\pi_1(p)$ injektiv.

Dieser Satz ist der Hauptsatz der Überlagerungstheorie, er gilt in noch viel größerer Allgemeinheit, nämlich für jeden wegzusammenhängenden und semilokal-einfachzusammenhängenden Raum. Den Beweis werden wir später durchführen.

12.9 Definition. Sei M glatte zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Jede zusammenhängede Überlagerung $p\colon \tilde{M} \to M$ mit $\pi_1(tildeM,x_1) = \{1\}$ heißt universelle Überlagerung. Sie ist bis auf Überlagerungsisomorphismus eindeutig.

13 Tangentialvektoren als Derivationen

Im euklidischen Raum kann man zu jedem v die Richtungsableitung in Richtung von v betrachten. Damit erhält man für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $v \in T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ eine Abbildung $C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$; $f \mapsto \partial_v f(x)$. Man beachte, dass man v (und x), also die Elemente aus T_xM aus dieser Abbildung wiedergewinnen kann. Man erinnere sich insbesondere an das konkret berechnete Beispiel des Helizoiden aus Aufgabe 5.11, in dem wir die Tangentialvektoren schon mit ∂_t und ∂_r bezeichnet haben.

Für die Richtungsableitungen gilt die Leibnitzregel (=Produktregel). Dies machen wir zu einer Definition.

13.1 Definition. Sei M glatte Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $D\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ heißt *Derivation* an $x \in M$, falls

$$D(f \cdot g) = D(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot D(g) \qquad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

13.2 Lemma. *Die Menge der Derivationen an x aus Definition ist ein r-Vektorraum.*

13.3 Bemerkung. Seien abstrakt A und B Algebren über einem Ring R, und $\Psi\colon A \to B$ ein Algebrenhomomorphismus. Eine R-lineare Abbildung $D\colon A \to B$ heißt *Derivation* über Ψ, falls

$$D(ab) = D(a) \cdot \Psi(b) + \Psi(a) \cdot D(b) \qquad \forall a, b \in A.$$

Derivationen spielen in Algebra und höherer Analysis eine wichtige Rolle.

In unserem Fall ist $A = C^\infty(M)$, $B = \mathbb{R} = R$ und $\Psi(f) = f(x)$.

13.4 Aufgabe. Beweise, dass jede Derivation D von $C^\infty(M)$ über x lokal bei x ist, d.h. dass $D(f) = D(g)$, falls es eine offene Umgebung U von x gibt, so dass $f|_U = g|_U$.

Tipp: benutze Abschneidefunktionen.

13.5 Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $x \in M$. Wir definieren auf der Menge $\{f\colon U \to \mathbb{R} \mid U \text{ offene Umgebung von } x,\ f \text{ glatt}\}$ eine Äquivalenzrelation, mit $f\ g$ genau dann, wenn es eine (genügend kleine) offene Umgebung V von x gibt, so dass $f|_V = g|_V$. Die Äquivalenzklassen heißen *(glatte) Funktionskeime bei x*, wir nennen die Menge der Äquivalenzklassen $C_x^\infty(M)$.

13.6 Bemerkung. Für glatte Funktionen können wir in jeden Funktionskeim eine auf *ganz M* definierte Funktion finden; dazu benutzt man einfach eine Abschneidefunktion, um dann außerhalb deren Träger mit Null fortzusetzen.

Beachte, dass man dies nicht für holomorphe oder analytische (durch konvergierende Potenzreihen) Funktionen machen kann: nach dem Identitätssatz kann es so etwas wie Teilungen der 1 nicht geben. Tatsächlich sagt ja der Satz von Liouville, dass jede beschränkte auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktion konstant ist, lokal gibt es aber natürlich ganz viele holomorphe Funktionen.

13.7 Lemma. *Sei M glatte n-Mannigfaltigkeit, $x \in M$. Eine neue Definition von T_xM ist gegeben als Vektorraum aller Derivationen des Raums der Keime $C_x^\infty(M)$.*

Der Isomorphismus ist gegeben durch $[x, \phi, v] \mapsto \big(f \mapsto \partial_v(f \circ \phi^{-1})(\phi(x))\big)$, *d.h. wir transportieren mittels* ϕ *die Funktion* f *auf* $\mathbb{R}^n$ *(lokal), und bilden dann die Richtungsableitung in Richtung* $v \in \mathbb{R}^n$.

Wenn man lokal ein Vektorfeld $X\colon x \mapsto [x, \phi\colon U \to V, v(x)]$ *gegeben hat, ordnet man diesem eine* glatte *„Familie von Derivationen“ (die also an jedem Punkt* $x \in U$ *ableitet) auf entsprechende Weise zu:*

$$f \mapsto L_X(f) := \big(\partial_{v(x)}(f \circ \phi^{-1})\big) \circ \phi = Tf(X).$$

Beachte, dass $X(f)$ *glatte Funktion von* x *ist, falls dasselbe für* f *und* v *(also* X*) gilt.*

Auf diese Weise ist jedes glatte Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ *ein Derivation* $L_X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M); f \mapsto X(f) = Tf(X)$.

(Wir nutzen hier aus, dass Derivationen lokal sind.)

13.8 Beispiel. Schauen wir uns dies nochmal auf $\mathbb{R}^n$ (also, wenn man es so auffassen möchte, in lokalen Koordinaten) an. Es gilt (kanonisch) $T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, also $\Gamma(T\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Sei $e_1 =: \partial_1, \dots, e_n =: \partial_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Dann ist jedes Vektorfeld X auf eindeutige Weise eine Linearkombination $X(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)\partial_i$, mit glatten Funktionen $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Der entsprechende Differentialoperator liefert $g \mapsto L_X(g) = \sum_{i=1}^n f_i \partial g/\partial x_i = \sum f_i \partial_i g$.

13.9 Lemma. *Sei* M *glatte Mannigfaltigkeit. Die Beschreibung aus Definition 13.7 definiert einen Isomorphismus zwischen den glatten Vektorfelder* $\Gamma(TM)$ *und den Derivationen* $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.

Beweis. Wir konstruieren eine Umkehrabbildung zur Abbildung $X \mapsto L_X$. Jede Derivation $D\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definiert auch Derivationen auf der Menge der Keime $D_x\colon C_x^\infty(M) \to \mathbb{R}$; hierzu benutzen wir, dass man glatte Funktionskeime nach Bemerkung 13.6 auf ganz M ausdehnen kann, und dass Derivationen lokal sind (13.4). Jede Derivation D_x liefert einen Tangentialvektor $X(x) \in T_xM$ nach Lemma 13.7. Sind $(x_1, \dots, x_n)$ lokale Koordinaten (also Verknüpfung einer Karte ϕ mit der Projektion auf die erste, …, n-te Koordinate), so gilt nach der Taylorformel für jede Funktion f in der Nähe des Punktes $p \in M$ mit den Koordinaten $(0, \dots, 0)$

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n x_i h_i(x)$$

mit $h_i(p) = \partial_i f(p)$, somit wegen der Produktregel $D(f)(p) = \sum_{i=1}^n D(x_i)(p) \cdot (\partial_i f)(p)$.

Da sowohl Derivationen (nach Aufgabe 13.4) als auch Vektorfelder lokal sind, reicht es, dies auf $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ nachzuweisen. ☐

13.10 Aufgabe. Beweise, dass es für jede glatte Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen $h_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt, so dass

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i h_i(x),$$

mit $h_i(0) = \partial_i f(0)$.

Beweis. Idee: $h_i(x) = \int_0^1 \partial f/\partial x_i(tx)\,dt$. □

13.11 Lemma. *Sei M glatte Mannigfaltigkeit. In der Interpretation von Definition 13.7 kann man zwei Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TM)$ komponieren, und erhält so eine weitere Abbildung*

$$X \circ Y \colon C^\infty(TM) \to C^\infty(TM).$$

Dies ist kein Vektorfeld, sondern ein Differentialoperator zweiter Ordnung. Allerdings gilt: der Kommutator

$$[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$$

ist wieder ein glattes Vektorfeld. Man nennt $[X, Y]$ auch die (Lie)-Klammer *von X und Y.*

Beweis. Der Kommutator zweier Derivationen ist nach Aufgabe 13.12 wieder eine Derivation, und dann kann man Lemma 13.9 benutzen. □

13.12 Aufgabe. Zeige, dass der Kommutator zweier Derivationen wieder eine Derivation ist (dies ist eine ganz allgemeine algebraische Tatsache).

13.13 Satz. *Die Abbildung $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ erfüllt folgende Eigenschaften:*

(1) bilinear

(2) antisymmetrisch: $[X, Y] = -[Y, X]$ $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$.

(3) Jakobi-Identität $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$ $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. *Mit anderen Worten: betrachtet man die Lieklammer als ein Produkt (nicht assoziativ!), so ist die Operation „nimm Lie-Klammer mit X“ eine Derivation bezüglich dieses Produkts.*

(4) Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$, $f, g \in C^\infty(M)$. Dann gilt

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

13.14 Aufgabe. Beweise Satz 13.13. Beachte, dass die Behauptungen (2), (3) und (4) sich ganz abstrakt aus der Derivationseigenschaft ergeben.

13.15 Definition. Ein Vektorraum V zusammen mit einer Klammer $V \times V \to V; (X, Y) \mapsto [X, Y]$ welches die Eigenschaften aus Satz 13.13 erfüllt, heißt *Lie-Algebra*.

13.16 Beispiel.
- Wir haben gerade gesehen, dass $\Gamma(TM)$ eine Lie-Algebra bildet (unendlich-dimensional).
- Endlich-dimensionaler Prototyp sind die Matrizen $M(n \times n)$, wobei wieder die Klammer durch den Kommutator gegeben ist.

13.17 Lemma. *Sei U eine Untermannigfaltigkeit von M. Dann ist $\Gamma(TU)$ eine Unter-Liealgebra von $\Gamma(TM)$, d.h. genauer, falls $X, Y \in \Gamma(TM)$ mit $X_p, Y_p \in T_xU$ für jedes $x \in U$, so gilt auch $[X, Y]|_U = [X|_U, Y|_U] \in \Gamma(TU)$ für alle $x \in U$.*

Insbesondere ist die Lieklammer von Vektorfeldern verträglich mit Diffeomorphismen.

Beweis. Die Aussage kann lokal geprüft werden, und ist diffeomorphieinvariant. Es genügt also, sie für die Untermannigfaltigkeit $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ zu beweisen. Weiter ist $\Gamma(T\mathbb{R}^n)$ ein freier $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-Modul mit Basis $\partial_1, \dots, \partial_n$, und $f_1\partial_1 + \cdots f_n\partial_n \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$ ist tangential zu $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ genau dann, wenn $f_{k+1}|_{\mathbb{R}^k\times\{0\}} \equiv 0 \equiv \cdots f_n|_{\mathbb{R}^k\times\{0\}}$.

Seien nun $X = f_i\partial_i$ und $Y = g_j\partial_j$ tangential zu $\mathbb{R}^k$. Dann gilt mit Satz 13.13

$$[f_i\partial_i, g_j\partial_j]|_{\mathbb{R}^k} = f_i|_{\mathbb{R}^k}\partial_i(g_j)|_{\mathbb{R}^k}\partial_j - g_j|_{\mathbb{R}^k}\partial_j(f_i)|_{\mathbb{R}^k}\partial_i + f_i g_j[\partial_i, \partial_j]. \tag{13.18}$$

Wegen des Satzes von Schwarz verschwindet $[\partial_i, \partial_j]$. Falls $i > k$, ist $X|_U = 0$ ($\iff f_i|_{\mathbb{R}^k} = 0$), somit auch $[X|_U, Y|_U] = 0$. Entweder ist auch $j > k$, dann verschwindet auch $g_j|_{\mathbb{R}^k}$, also der gesamte Ausdruck (13.18). Oder $j \le k$, dann aber $\partial_j(f_i) = \partial_j(0) = 0$. Falls $j > k$ ergibt sich wegen Antisymmetrie die entsprechende Aussage. Sind $i \le k$ und $j \le k$, so führt die Berechnung von $[X|_U, Y|_U]$ zum identischen Ausdruck (13.18). Beachte, dass nur in diesem Fall ∂_i und ∂_j als Elemente von $\Gamma(T\mathbb{R}^k \times \{0\})$ aufgefaßt werden können und somit Satz 13.13 angewendet werden kann. □

13.19 Korollar. *Sei M glatte Mannigfaltigkeit mit Karte $\phi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$. Diese Karte induziert eine lokale Basis von Vektorfeldern aus $\Gamma(TM|_U)$ durch $\partial_i := D\phi^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i})$.*

Es gilt $[\partial_i, \partial_k] = 0$ für alle i, k.

Beweis. Es reicht, zu beobachten dass $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}] = \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \circ \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$ im $\mathbb{R}^n$ wegen des Satzes von Schwarz über die Vertauschbarkeit von höheren partiellen Ableitungen. □

14 Baby Liegruppen 1

14.1 Definition. Sei G eine Liegruppe und $v \in T_1G$. Dann definiert X_v mit $X_v(g) := T_1 l_g(v) \in T_gG$ ein glattes Vektorfeld, wobei $l_g\colon G \to G; h \mapsto gh$ die Linksmultiplikation mit $g \in G$ ist (insbesondere ist $l_g(1) = g$, somit $T_1 l_g\colon T_1G \to T_gG$). Nach Konstruktion ist dieses Vektorfeld Linksinvariant, d.h. $T_gX_v(h) = X_v(gh)$ (wegen der Kettenregel), und jedes Linksinvariante Vektorfeld entsteht auf diese Weise.

Man hat also eine injektive lineare Abbildung $T_1G \to \Gamma(TG); v \mapsto X_v$, deren Bild gerade die Linksinvarianten Vektorfelder sind.

Da l_g ein Diffeomorphismus ist und die Lie-Klammer von Vektorfeldern diffeomorphieinvariant ist, gilt $Tl_g[X_v, X_w] = [Tl_gX_v, Tl_gX_w] = [X_v, X_w]$, also ist X_v, X_w wieder linksinvariant. Die Linksinvarianten Vektorfelder bilden also eine Unter-Liealgebra von $\Gamma(TG)$, die Lie-Algebra $Lie(G)$ von G.

Oft versteht man unter $Lie(G)$ auch den Vektorraum T_1G, mit Lie-Klammer induziert über den Isomorphismus $v \mapsto X_v$ mit den linksinvarianten Vektorfeldern.

14.2 Beispiel. Die Lie-Algebra der Liegruppe $\mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}^n$ mit der trivialen Lieklammer $[v, w] = 0\ \forall v, w \in \mathbb{R}^n$.

Hier sind die Linksinvarianten (also translationsinvarianten) Vektorfelder gerade die $\mathbb{R}$-lineare Hülle der ∂_k, $k = 1, \dots, n$, und nach Satz von Schwarz kommutieren je zwei von diesen.

Sei $G = Gl(n, \mathbb{R})$. Da $Gl(n, \mathbb{R})$ eine offene Teilmenge von $M(n \times n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ ist, kann man für jedes $g \in G$ T_gG, insbesondere auch T_1G mit $M(n \times n, \mathbb{R})$ identifizieren. Die lineare Abbildung $l_g \colon M(n\times n, \mathbb{R}) \to M(n\times n, \mathbb{R})$ hat als Differential wiederum (unter dieser Identifikation) die lineare Abbildung $l_g \colon M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R})$.

Ein Vektorfeld $X\colon Gl(n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R})$ ist also linksinvariant genau dann, wenn $X(g) = gX(1)$ für jedes $g \in Gl(n, \mathbb{R})$. Schreiben wir g für die Inklusionsabbildung $Gl(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow M(n \times n, \mathbb{R})$, dann gilt $[X_A, X_B] = [gA, gB] = gA(g)B - gB(g)A + g^2[A, B]$. Nun sind A und B konstante Vektorfelder auf $M(n \times n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$, also $[A, B] = 0$. Andererseits gilt $A(g) = T\,\mathrm{id}(A) = A$ (da g eine offene Inklusion ist, ist ihr Differential das der Identität), somit $[X_A, X_B] = g[A, B] = X_{[A,B]}$. Die Lieklammer ist also gerade gegeben durch den Kommutator der Matrizen.

Sei $H \subset Gl(n, \mathbb{R})$ eine Lie-Untergruppe. Dann ist $Lie(H) = T_1H$ ein Unterraum von $M(n\times n, \mathbb{R})$. Wegen Lemma 13.17 ist die Lie-Klammer von $Lie(H)$ weiterhin durch den Kommutator der Matrizen gegeben, insbesondere ist $Lie(H)$ abgeschlossen unter Bildung von Kommutatoren.

14.3 Definition. Sei G eine Liegruppe, M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Operation $G\times M \to M$ von G auf M heißt *glatt*, falls die Abbildung $G\times M \to M$ eine glatte Abbildung ist. Sie heißt *proper*, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset M$ die Menge $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ kompakten Abschluss in G hat (dies ist immer erfüllt, wenn G kompakt ist).

Die Operation ist *frei*, falls es ein $x \in M$ mit $gx = x$ nur für $g = 1$ gibt.

14.4 Satz. *Die Liegruppe G operiere glatt, frei und proper auf M. Dann wird auf $G\backslash M$ auf kanonische Weise die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit definiert, so dass die Projektion $M \mapsto G\backslash M$ eine Submersion ist.*

Beweis. Schwere Übungsaufgabe. Zu $x \in M$ betrachte die Abbildung $G \to M; g \mapsto gx$ (mit $1 \cdot x = x$). Dies liefert eine Inklusion $T_1G \hookrightarrow T_xM$. □

15 Überlagerungen 1

15.1 Satz. *Sei X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfachzusammenhängend. Die zweite Eigenschaft heißt, für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U_x, so dass jede Schleife $\gamma\colon S^1 \to U_x$ in X zu einer konstanten Schleife homotop ist; präziser: in Inklusion induziert auf $\pi_1(U_x, b) \to \pi_1(X, b)$ für jedes $b \in U$ die triviale Abbildung.*

Dann gibt es eine Bijektion zwischen den Untergruppen U von $\pi_1(X, x_0)$ und Isomorphieklassen von zusammenhängenden Überlagerungen $p_U\colon (X_U, x_U) \to (X, x_0)$.

Eine Isomorphie ist dabei ein Homöomorphismus $f\colon (X_U, x_U) \to (X'_U, x'_U)$ mit $p'_H \circ f = p_H$.

Der Beweis benötigt einige vorbereitende Aussagen.

15.2 Lemma. *Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\gamma\colon I \to X$ stetig, $t_0 \in I$ und $\tilde\gamma(t_0) \in Y$ ein Lift von $\gamma(t_0)$ (also $p(\tilde\gamma(t_0)) = \gamma(t_0)$).*

Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $\tilde\gamma\colon I \to Y$ mit $\tilde\gamma(t_0)$ wie vorgegeben, und so dass $p \circ \tilde\gamma = \gamma$.

Man spricht von der eindeutigen Wegeliftungseigenschaft *von überlagerungen.*

Beweis. Da p lokaler Homöomorphismus ist, existiert lokal ein Lift. Seien $\tilde{\gamma}_1\colon I_1 \to Y$ und $\tilde{\gamma}_2\colon I_2 \to Y$ zwei Lifts, die auf zwei Teilintervallen von I definiert sind (mit $t_0 \in I_1 \cap I_2$). Sei $t_1 := \sup\{t \in I_1 \cap I_2 \mid \tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)\}$. Falls $t_1 \in I$, wähle Umgebung U von $\gamma(t_1)$ mit Überlagerungskarte $f\colon p^{-1}(U) \to U \times Z$ mit diskreter Menge Z. Für $t < t_1$ genügend nahe bei t_1 ist $\gamma(t) \in U$ und die Lifts $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)$ existieren. Wegen der lokalen Homöomorphie gälte dann auch $\tilde{\gamma}_1(t_0) = \tilde{\gamma}_2(t_0) = \lim_{t\to t_0} \tilde{\gamma}_1(t)$. Es ist also entweder $t_1 \notin I_1$ oder $t_1 \notin I_2$, auf dem gemeinsamen Definitionsbereich stimmen $\tilde{\gamma}_1$ und $\tilde{\gamma}_2$ jedenfalls überein (dasselbe geht natürlich auch links von t_0).

Sei nun $I_1 \subset I$ das maximale Definitionsintervall, auf welchem der (eindeutige) Lift $\tilde{\gamma}$ von γ definiert werden kann. Die obige Überlegung mit den lokalen Diffeomorphismen zeigt, dass I_1 sowohl offenes als auch abgeschlossenes Teilintervall von I ist. Da I zusammenhängend, also $I_1 = I$. □

15.3 Lemma. *Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung und $H\colon [0,1]\times[0,1] \to X$ eine stetige Abbildung, mit Lift $\tilde{H}(0) \in Y$ von $H(0)$.*

Dann gibt es einen eindeutigen Lift $\tilde{H}\colon [0,1]\times[0,1] \to Y$ mit vorgegebenem Wert $\tilde{H}(0)$.

Beweis. Da jeder Punkt in $[0,1]\times[0,1]$ mit $(0,0)$ durch einen Pfad verbunden werden kann, und da die Lifts von Pfaden eindeutig sind, kann es höchstens einen stetigen Lift von H geben.

Sei $r := \sup\{t \in [0,1] \mid \tilde{H}|_{[0,t]\times[0,1]}$ stetig$\}$. Wegen der lokalen Homöomorphie gibt es für jedes $(r,s) \in [0,1]\times[0,1]$ eine offene Umgebung, so dass der auf $[0,r)\times[0,1]$ stetige Abbildung $\tilde{H}$ von H (eindeutig) stetig fortgesetzt werden kann. Wäre $r < 1$, könnte wegen der Kompaktheit von $[0,1]$ dann der Lift $\tilde{H}$ sogar stetig auf ein $[0, r+\epsilon]\times[0,1]$ fortgesetzt werden, mit geeignetem $\epsilon > 0$. Das widerspricht aber der Definition von r, also gilt $r = 1$, und der stetige Lift $\tilde{H}$ ist auf $[0,1]\times[0,1]$ definiert. □

15.4 Korollar. *Sei $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung. Dann ist $p_*\colon \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ injektiv.*

Beweis. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \tilde{X}$ eine "Schleife" bei x_0, also $\gamma(0) = \gamma(1) = \tilde{x}_0$, so dass $p \circ \gamma$ homotop zur konstanten Schleife ist. Sei $H\colon [0,1]\times[0,1] toX$ eine solche Homotopie, also $H(0,t) = H(1,t) = H(s,1) = x_0$.

Dann hat H eindeutige Liftung zu $\tilde{H}$ mit (wegen der Eindeutigkeit gelifteter Wege) $\tilde{H}(0,t) = \tilde{H}(1,t) = \tilde{H}(s,1) = \tilde{x}_0$ für alle $s,t \in [0,1]$. Damit ist $\tilde{H}$ eine Homotopie zwischen γ und der konstanten Schleife, insbesondere ist jedes Element im Kern von p_* selbst schon trivial. □

15.5 Satz. *Sei $p\colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f\colon Y \to X$ stetig. Sei $y_0 \in Y$ und ein Lift $\tilde{f}(y_0) \in \tilde{X}$ von $f(y_0)$ vorgegeben und sei Y wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend (d.h. für jedes $y \in Y$ und jede offene Menge $U \subset Y$ mit $y \in U$ gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ von y, so dass V wegzusammenhängend).*

Falls $\pi_1(f)(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{f}(y_0))) \subset \pi_1(X, f(y_0))$, dann gibt es einen eindeutigen stetigen Lift $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ von f mit vorgegebenem $\tilde{f}(y_0)$.

Beweis. Zu $y \in Y$ wähle Weg $c\colon [0,1] \to Y$ von y_0 nach y, mit eindeutigem Lift $\widetilde{(f \circ c)}\colon [0,1] \to \tilde{X}$ zum Anfangspunkt $\tilde{f}(y_0)$. Sei $c_2\colon [0,1] \to Y$ ein zweiter Weg von y_0 nach y. Dann ist die Hintereinanderausführung $\gamma\colon [0,1] \to Y$ von c und dem Inversen von c_2 ein Weg mit Anfangs- und Endpunkt y_0 (also eine Schleife), also $f \circ \gamma\colon [0,1] \to X$ ein Schleife in X mit Anfangs- und Endpunkt x_0. Nach Voraussetzung über die Beziehung der Fundamentalgruppen von $X, Y, \tilde{X}$ gibt es eine Schleife $\beta\colon [0,1] \to \tilde{X}$ und eine punktierte Homotopie $H\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ zwischen $f \circ \gamma$ und $p \circ \beta$, wobei $H(t,0) = H(t,1) = x_0$ für alle $t \in [0,1]$ (hier wird benutzt, dass der Kreis S^1 zum Intervall $[0,1]$ aufgeschnitten wird, aber natürlich weiterhin der Basispunkt von S^1 konstant nach x_0 abgebildet wird).

Die Homotopie H hat nun nach Lemma 15.3 einen eindeutigen Lift $\tilde{H}\colon [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$, wobei insbesondere $\tilde{H}(0,t) = \tilde{H}(1,t) = \tilde{f}(y_0)$ für jedes $t \in [0,1]$. Beachte, dass wegen der Eindeutigkeit des Lifts insbesondere der Lift von $f \circ c$ und von $f \circ c_2$ zum Anfangspunkt $\tilde{f}(y_0)$ identisch, nämlich gleich $\tilde{H}(1,1/2)$ ist.

Wir definieren $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ durch $\tilde{f}(y) := \widetilde{(f \circ c)}(1)$ für einen Weg von y_0 nach y.

Wir müssen noch beweisen, dass diese Abbildung stetig ist. Sei dazu $y \in Y$ und $W \subset X$ offene Umgebung von $f(y)$, so dass lokal $p^{-1}(W) \cong W \times Z$ mit diskretem Z.

Wähle wegzusammenhängende Umgebung $U \subset f^{-1}(W) \subset Y$ von y. Man erhält dann einen Weg c_z von y_0 zu $z \in U$, indem man einen festen Weg c_0 nach y_0 mit einem in U verlaufenden Weg e_z von y zu z verkettet. Der (eindeutige) Lift von $f \circ c_z$ ist dann die Verkettung des Lifts von $f \circ c_0$ mit $f \circ e_z$. Letzterer verläuft aber ganz in einem der Blätter von $p^{-1}(W)$. Die Abbildung $\tilde{f}|_U$ erhält man also, indem man f mit dem inversen des lokalen Homöomorphismus p (eingesschränkt auf das richtige Blatt) verknüpft: als verknüpftung zweier stetiger Abbildungen ist sie stetig. $\square$

15.6 Korollar. *Seien $p_1\colon (X_1, x_1) \to (X, x_0)$ und $p_2\colon (X_2, x_2) \to (X, x_0)$ zwei wegzusammenhängende Überlagerungen eines lokal wegzusammenhängenden und wegzusammenhängenden Raums X. Es sei $\operatorname{im}((p_1)_*) = \operatorname{im}((p_2)_*) \subset \pi_1(X, x_0)$. Dann gibt es einen eindeutigen Homöomorphismus $f\colon (X_1, x_1) \to (X_2, x_2)$ mit $p_2 \circ f = p_1$.*

Beweis. Da X lokal wegzusammenhängend, und da dies eine lokale Eigenschaft ist, sind auch die (lokal zu X homöomorphen) Räume X_1 und X_2 lokal wegzusammenhängend. Man kann also auf das Paar von Abbildung (p_1, p_2) zweimal den Satz 15.5 anwenden, und erhält (eindeutige) Lifts $f\colon (X_1, x_1) \to (X_2, x_2)$, $g\colon (X_2, x_2) \to (X_1, x_1)$. Wegen der Eindeutigkeit der Lifts gilt insbesondere $g \circ f = \mathrm{id}_{X_1}$ (also Lift von $p_1\colon X_1 \to X$) und $f \circ g = \mathrm{id}_{X_2}$, somit erhält man die gewünschten Homöomorphismen, wir haben bereits gezeigt, dass diese eindeutig sind. $\square$

Zum Beweis des Hauptsatzes fehlt jetzt nur noch eine Konstruktion:

15.7 Satz. *Sei X wegzusammenhängend und semilokal einfachzusammenhängend mit Basispunkt x_0. Sei H Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$. Dann gibt es eine zusammenhängend Überlagerung $p\colon \tilde{X} \to X$ mit $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = H$.*

Beweis. Wir definieren $\tilde{X} := \{\gamma\colon [0,1] \to X \mid \gamma(0) = x_0\}/\sim$ wobei $\gamma_1 \sim \gamma_2$ genau dann, wenn die Verkettung von γ_1 und γ_2^{-1} ein Element aus H repräsentiert.

Nach Definition der Verknüpfung in $\pi_1(X, x_0)$ ist dies eine Äquivalenzrelation, da H Untergruppe.

Man hat eine offensichtiche Projektion $p\colon \tilde{X} \to X; [\gamma] \mapsto \gamma(1)$. Sei $[\gamma] \in \tilde{X}$ mit $\gamma(1) = x$. Wähle semilokal-einfachzusammehängende Umgebung $U \subset X$ von x. Setze $U_{[\gamma]}$ als Menge aller (Klassen von) Wegen, die sich als Komposition von γ mit einem Weg in U ergeben. Da U semilokal-einfachzusammenhängend ist $p\colon U_{[\gamma]} \to U$ eine Bijektion. Wir definieren nun einfach, dass die Mengen $U_{[\gamma]}$ eine Basis der Topologie von $\tilde{X}$ bilden sollen. Beachte, dass jede Teilmenge einer Menge U_x wie aus der Definition von lokalem einfachzusammenhang selbst wieder dieselben Eigenschaften hat, daher ist der Schnitt zweier Mengen $U_{[\gamma]}$ und $V_{[c]}$ selbst wieder einer dieser Mengen aus der Basis der Topologie von $\tilde{X}$, so dass die Topologie von $\tilde{X}$ selbst nur aus Vereinigungen solcher Mengen besteht, und so dass insbesondere die Abbildungen $p|_{U_{[\gamma]}}\colon U_{[\gamma]} \to U$ Homöomorphismen sind.

Fixiere nun $y \in X$, und betrachte $Z := p^{-1}(y) \subset \tilde{X}$ mit Umgebungen $U_{[\gamma]}$ für $[\gamma] \in Z$. Sei $[c] \in U_{[\gamma_1]} \cap U_{[\gamma_2]}$, d.h. die Verkettung von γ_1 mit einem in U verlaufenden Weg c_1 und von γ_2 mit einem in U verlaufenden Weg γ_2 ist homotop (relativ Endpunkt). Nach Voraussetzung an U kann man (durch geeignete Homotopie) annehmen dass $c_1 = c_2$ und weiterhin die Verkettung von γ_1 und γ_2 mit c_1 homotop relativ Endpunkt sind. Dann sind aber auch γ_1 und γ_2 homotop relativ Endpunkten. Somit ist $p_{-1}(U)$ homöomorph zu $U \times Z$, also ist p eine Überlagerung.

Es bleibt noch, die Fundamentalgruppe von $\tilde{X}$ zu bestimmen. Sei $c\colon [0,1] \to X$ Repräsentant einer Schleife in H. Definiere Lift $\tilde{c}\colon [0,1] \to \tilde{X}$ durch $\tilde{c}(t) := [c|_{[0,t]}]$. Nach Definition der Topologie auf $\tilde{X}$ ist diese Abbildung stetig. Es ist eine Schleife, da $\tilde{c}(1) = [c] \in H$, also c äquivalent zur konstanten Schleife, also zu $\tilde{c}(0)$. Die gleiche Konstruktion zeigt aber auch, dass eine Schleife, die nicht in H liegt, nicht zu einer Schleife in $\tilde{X}$ geliftet werden kann (Lift von Wegen ist eindeutig). Folglich gilt $\operatorname{im}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$, wie behauptet. □

16 Wiederholung zur (Multi)lineare Algebra

Einige Funnktoren.

Sei V ein (endlichdimensionaler) $\mathbb{R}$-Vektorraum. Der Dualraum ist $V^* := \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R})$.

16.1 Tensorprodukt

16.1 Definition. und Aufgabe
Zu zwei Vektorräumen V, W ist ein *Tensorprodukt* ein Vektorraum $V \otimes W$ mit einer bilinearen Abbildung $i\colon V \times W \to V \otimes W$, welcher durch folgende universlle Eigenschaft charakterisiert ist:

für jeden Vektorraum X und jede bilineare Abbildung $\alpha\colon V \times W \to X$ gibt es genau eine *lineare* Abbildung $\beta\colon V \otimes W \to X$ mit $\beta \circ j = \alpha$.

Die Vektoren $j(v, w) \in V \otimes W$ schreibt man als $v \otimes w := j(v, w)$.

Sei $(v_i)_{i \in I}$ Basis von V und $(w_j)_{j \in J}$ Basis von W. Dann ist $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$ Basis von $V \otimes W$.

Ein Tensorprodukt $V \otimes W$ existiert (wähle einfach den Vektorraum mit Basis $v_i \otimes w_j$) und ist eindeutig bis auf kanonische Isomorphie (benutze die universelle Eigenschaft). Wegen dieser Eindeutigkeit spricht man auch von *dem* Tensorprodukt von V und W.

Falls $A\colon V \to V'$ und $B\colon W \to W'$ lineare Abbildungen, so gibt es genau eine lineare Abbildung $A \otimes B\colon V \otimes W \to V' \otimes W'$ mit $(A \otimes B) \circ j = j' \circ (A \times B)$. Mit dieser Definition wird das Tensorprodukt ein Funktor von $Vekt \times Vekt \to Vekt$.

Das Tensorprodukt ist kommutativ und assoziativ, d.h. es gibt kanonische Isomorphismen

$$V \otimes W \to W \otimes V; (v \otimes w) \mapsto w \otimes v$$

sowie

$$(V \otimes W) \otimes U \to V \otimes (W \otimes U); (v \otimes w) \otimes u \mapsto v \otimes (v \otimes u).$$

Es gibt kanonischen Isomorphismus $\mathbb{R} \otimes V \to V; (r \otimes v) \mapsto rv$.

Beachte, dass es in der Regel Elemente in $V \otimes W$ gibt, die nicht die Gestalt $v \otimes w$ mit $v \in V$ und $w \in W$ haben. Jedes Element kann aber also endliche Linearkombination aus solchen sogenannten *elementaren Tensoren* geschrieben werden. Beachte auch, dass diese Darstellung im allgemeinen nicht eindeutig ist. Vielmehr gilt z.B.

$$\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w); v \otimes w + v' \otimes w = (v + v') \otimes w; v \otimes w + v \otimes w' = v \otimes (w + w')$$
$$\forall v, v' \in V;\ w, w' \in W;\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die erwähnten kanonischen Isomorphismen und Homomorphismen kommen von glatten Funktoren für die jeweils korrekte Kategorie von Vektorräumen, ergeben also entsprechende Aussagen für Vektorraumbündel.

16.2 Aufgabe. Beweise die gemachten Aussagen, insbesondere auch, dass ein Tensorprodukt existiert, die gewünschte Basis hat, und bis auf kanonische Isomorphie eindeutig ist.

16.3 Bemerkung. Die Theorie der Tensorprodukte kann von $\mathbb{R}$-Vektorräume auf Vektorr"'aume über beliebigen Körpern, sowie noch weiter auf Moduln über kommutativen Ringen verallgemeinert werden (alle Aussagen, die weiterhin Sinn machen, bleiben richtig —aber nicht jeder Modul über jedem Ring hat eine Basis). Wenn man die Formulierungen geeignet modifiziert, auch auf Moduln über nicht-kommutativen Ringen (dann muss man mit Links/Rechtsmoduln aufpassen).

16.2 Verjüngungen

16.4 Aufgabe. Seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume. Dann gibt es kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(U, V^* \otimes W) \to \mathrm{Hom}(U \otimes V, W);\ \Phi \mapsto (u \otimes v \mapsto \Phi(u)(v)),$$

wobei man für $v \in V$ den Homomorphismus $V^* \otimes W \to W$ definiert durch $\phi \otimes w \mapsto \phi(v) \cdot w$ benutzt, welcher wiederum durch die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts gegeben ist. Beim Beweis muss man verwenden, dass die Vektorr"aume endlichdimensional sind.

Wegen des kanonischen Isomorphismus $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, V);\ v \mapsto (\lambda \mapsto \lambda v)$ ist somit $\mathrm{Hom}(V, V) \cong V \otimes V^*$. Ist (v_i) Basis von V mit dualer Basis v^i von V^* (also $v^i(v_j) = \delta_{ij}$), so wird id_V abgebildet auf $\sum_i v_i \otimes v^i$.

Auf $V \otimes V^*$ ist eine kanonische Abbildung (genannt Kontraktion oder Verjüngung) $V \otimes V^* \to \mathbb{R}; \otimes\phi \mapsto \phi(v)$ definiert. Unterdem Isomorphismus $V \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}(V, V)$ entspricht dies gerade der Spur.

Sei g ein Skalarprodukt auf V. Dann induziert g einen Isomorphismus $V \to V^*; v \mapsto (w \mapsto g(w, v))$. Dieser ergibt sich durch einsetzen von $g \in Sym_2(V) \subset \mathrm{Hom}(V \otimes V, \mathbb{R})$ in den kanonischen Homomorphismus

$$V \otimes \mathrm{Hom}(V \otimes V, \mathbb{R}) \cong V \otimes V^* \otimes V^* \to V,$$

wobei der Verjüngungshomomorphismus eingesetzt wird. Hiervon gibt es natürlich 2 verschiedene, aber da g symmetrisch ist, ist das Bild von $(v \otimes g)$ für jeden der beiden und für jedes $v \in V$ immer dasselbe. Um zu zeigen, dass die Abbildung ein Isomorphismus ist, muss man benutzen, dass g positiv definit ist, und dass die Vektorräume endlich dimensional sind.

17 Kovariante Ableitung und Zusammenhang

17.1 Kovariante Ableitung

17.1 Beispiel. Vektorwertige Funktionen $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kann man (komponentenweise) ableiten, insbesondere kann man deren Richtungsableitungen definieren.

Solch ein X kann man auch als Vektorfeld auffassen (da $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ kanonisch trivialisiert ist). Sei dann Y ein anderes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ (also noch eine Funktion $Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$). Dann hat man $D_Y X(x) = \partial X/\partial Y(x)|_x$.

Diese Ableitungen von Vektorfeldern entlang von Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$ haben folgende Eigenschaften:

(1) $D_{fY}(X) = fD_Y(X)$

(2) $D_Y(fX) = X(f) \cdot Y + fD_Y(X)$

(3) $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$

für alle $X, Y \in \Gamma(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Für allgemeine Mannigfaltigkeiten haben wir keine so kanonische Möglichkeit, Richtungsableitungen von Vektorfeldern, oder gar von Schnitten ganz anderer Vektorbündel, zu definieren. Zum Ersatz machen wir folgende Definition:

17.2 Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit glattem Vektorbündel $E \to M$. Eine *kovariante Ableitung* oder ein *Zusammenhang* auf E ist eine Abbildung

$$\nabla : \Gamma(E) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(E); (s, X) \mapsto \nabla_X(s)$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) ∇ ist $\mathbb{R}$-bilinear.

(2) $\nabla_{fX}(s) = f\nabla_X(s)$

(3) $\nabla_X(fs) = X(f) \cdot s + f\nabla_X(s)$

für alle $s \in \Gamma(E)$, $X \in \Gamma(TM)$, $f \in C^\infty(M)$.

17.3 Definition. Sei $E = TM$ und ∇ ein Zusammenhang auf TM. Dann heißt

$$T\colon \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM); (X,Y) \mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

die *Torsion* von ∇. Falls $T \equiv 0$, heißt ∇ *torsionsfrei*.

17.4 Lemma. *Die Torsion eines Zusammenhangs ist ein* Tensor*, d.h. es gibt einen Schnitt $t \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TM \otimes TM, TM))$, so dass*

$$T(X,Y)(p) = t(p)(X(p) \otimes Y(p)) \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM),\, p \in M.$$

Beweis. Man muss zunächst beweisen, dass für $p \in M$ der Wert $T(X,Y)(p)$ tatsächlich nur von $X(p)$ und $Y(p)$ abhängt. Dazu zeigen wir, dass T tatsächlich $C^\infty(M)$-bilinear ist. Seien also $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $f, g \in C^\infty(M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(fX, gY) &= \nabla_{fX}(gY) - \nabla_{gY}(fX) - [fX, gY] \\ &= f\nabla_X(gY) - g\nabla_Y(fX) - fg[X,Y] - fX(g)Y + gY(f)X = \end{aligned}$$
$$fg\nabla_X(Y) + fX(g)Y - gf\nabla_Y X - gY(f)X - fg[X,Y] - fX(g)Y + gY(f)X = fgT(X,Y).$$

17.5 Lemma. *Seien E, F Vektorbündel über M und $A\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ eine $C^\infty(M)$-lineare Abbildung, also $A(fs) = fA(s)$ für alle $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(E)$.*

Dann gibt es $a \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E,F))$ so dass $A(s)(p) = a(p)s(p)$ für alle $s \in \Gamma(E)$ und alle $p \in M$.

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass $As(p)$ nur von $s(p)$ abhängt. Seien dazu $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ mit $s_1(p) = s_2(p)$. $As(p)$ hängt auf jeden Fall nur von den Werten von s in beliebigen Umgebungen von p ab (wähle Abschneidefunktionen). Wir können also mittels einer Karte und einer Trivialisierung von E annehmen, dass $s_1, s_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ vektorwertige glatte Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ sind, mit $(s_1 - s_2)(0) = 0$. Nach Aufgabe 13.10 gibt es also $f_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f_j(0) = 0$ und vektorwertige Funktionen $v_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, so dass $s_1 - s_2 = \sum_j f_j v_j$.

Übersetzt auf die Mannigfaltigkeit heisst dies, dass es (auf einer genügend kleinen offenen Umgebung von M) glatte Funktionen $f_j\colon M \to \mathbb{R}$ mit $f_j(p) = 0$ und Schnitte $v_j \in \Gamma(E)$ gibt, so dass $s_1 - s_2 = \sum_j f_j v_j$. Somit

$$A(s_1)(p) - A(s_2)(p) = \sum_j f_j(p) A(v_j)(p) = 0.$$

Sei nun $p \in M$ und $v \in E_p$. Wir definieren nun einfach $a(p)(v) := A(s)(p)$, wobei $s \in \Gamma(E)$ ein Schnitt mit $s(p) = 0$ ist. Nach dem, was wir gerade gezeigt haben, ist $a(p)(v)$ wohldefiniert; da A linear ist, folgt dass $a(p) \in \mathrm{Hom}(E_p, F_p)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass der so konstruierte Schnitt des Bündels $\mathrm{Hom}(E,F)$ wirklich glatt ist. Dazu wähle lokale Basis $s_1, \dots, s_N$ von Schnitten von E (also so, dass $(s_1(q), \dots, s_N(q))$ Basis von E_q für $q \in U$, U Umgebung von p). Wir müssen zeigen, dass $q \mapsto a(q)s_k(q)$ für jedes k eine glatte Funktion ist. Es gilt aber $a(q)s_k(q) = As_k(q)$, und dies ist nach Voraussetzung glatte Funktion von $q \in M$. Damit folgt die Behauptung. □

Hilfslemma 17.5 läßt sich insbesondere auf die Torsion T anwenden. □

17.6 Satz. *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es auf TM genau einen Zusammenhang ∇, den sogenannten* Levi-Civita Zusammenhang*, welcher folgende Eigenschaften erfüllt:*

(1) ∇ *ist Torsionsfrei.*

(2) ∇ *ist* metrisch, *d.h.* $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *gilt*

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_Y Z) \tag{17.7}$$

(eine Art Produktregel für das Skalarprodukt g).

Beweis. Sei ein solcher Zusammenhang gegeben. Dann gilt natürlich auch $Y(g(X,Z)) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ und $Z(g(X,Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$. Subtrahiert man die zweite von der ersten, und addiert noch (17.7), so erhält man

$$\begin{aligned} &2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) - g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) \\ &+ Y(g(X,Z)) - g(X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - g(Z, \nabla_Y X - \nabla_X Y) - Z(g(X,Y)) = \\ &\qquad X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ &\qquad + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X). \end{aligned} \tag{17.8}$$

Damit folgt, dass ∇ eindeutig ist: unser Skalarprodukt ist positiv definit, somit $(\nabla_X Y)(p)$ eindeutig festgelegt durch $g_p(\nabla_X Y(p), Z(p))$ für alle $Z \in \Gamma(TM)$.

Umgekehrt legt für gegebenes $X, Y \in \Gamma(TM)$ die rechte Seite von Gleichung (17.8) eine Abbildung $\Gamma(TM) \to C^\infty(M)$ fest. Diese ist $C^\infty(M)$-linear, also nach Lemma 17.5 gegeben durch einen Schnitt a des Bündels $\mathrm{Hom}(TM, \mathbb{R}) = T^*M$. Die Riemannsche Metrik erlaubt jedoch, a zu übersetzen in ein Vektorfeld $\nabla_X Y$, nämlich genau durch die Regel $g_p(\nabla_X Y(p), Z(p)) = a(p)(Z(p))$. □

17.9 Bemerkung. und Aufgabe
Sei M eine Mannigfaltigkeit. Definiere die Vektorbündel $T^*M := \mathrm{Hom}(TM, \mathbb{R})$, und $T^{p,q}M := \underbrace{TM \otimes \cdots TM}_{p \text{ Faktoren}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \cdots T^*M}_{q \text{ Faktoren}}$.

Falls $p, q \geq 1$, kann man für $i \in \{1, \dots, p\}$, $j \in \{1, \dots, q\}$ den i-ten Faktor der TM-Faktoren in den j-ten der T^*M-Faktoren einsetzen. Auf diese Weise erhält man einen Vektorbündelhomomorphismus

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} \colon T^{p,q}M \to T^{p-1,q-1}M; (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_q) \mapsto \\ \omega_j(v_i) \cdot v_1 \otimes \cdots \hat{v}_i \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\omega}_j \otimes \cdots \otimes \omega_q; \end{aligned} \tag{17.10}$$

der Hut heißt, dass der entsprechende Faktor weggelassen wird. Dieser Homomorphismus wird *Verjüngungshomomorphismus* genannt.

Sei g eine Riemannsche Metrik auf M so induziert diese einen Isomorphismus $\tau_g \colon TM \to T^*M$. Entsprechend erhält man (für jeden möglichen Faktor) Isomorphismen $T^{p,q}M \to T^{p-1,q+1}M$, $T^{p,q}M \to T^{p+1,q-1}M$ (es darf natürlich keiner der Indizes negativ werden). Diese Isomorphismen werden *indexhebend oder indexsenkend* genannt (raising or lowering the index).

Grund dafür ist, dass in einer *Orthonormalbasis* v_1, v_n von T_pM mit dualer Basis $v^1, \dots, v^n$ der Isomorphismus gegeben ist durch $v_k \mapsto v^k$. Handelt es sich bei $w_1, \dots, w_n$ um eine beliebige Basis von T_pM mit dualer Basis $w^1, \dots, w^n$, und mit Gramscher Matrix $g_{ij} = g_p(w_i, w_j)$, und inverser Matrix $(g^{ij})_{i,j}$ von $(g_{ij})_{ij}$, so gilt $\tau_g(w_i) = \sum_j g_{ij} w^j$, $\tau_g^{-1}(w^i) = \sum_j g^{ij} w_j$.

17.11 Beispiel. Auf $\mathbb{R}^n$ mit der kanonischen Metrik ist der Levi-Civita Zusammenhang der Zusammenhang D aus Beispiel 17.1.

17.12 Lemma. *Der Levi-Civita Zusammenhang wird in lokalen Koordinaten durch die* Christoffel-Symbole *beschrieben. Sei* $\phi\colon U \to V$ *eine Karte von* M*. Die Christoffel-Symbole* $\Gamma^i_{jk}\colon U \to \mathbb{R}$ *sind definiert durch*

$$\nabla_{\partial_j}(\partial_k) = \sum_k \Gamma^i_{ji}\partial_k, \tag{17.13}$$

wobei $partial_i := (D\phi)^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i})$ *die durch die Karte* ϕ *induzierte lokale Basis von* TM *ist (deshalb ist* Γ^i_{jk} *durch die Formel* (17.13) *auch eindeutig bestimmt).*

Falls g_{ij} *der Riemannsche Tensor in der Koordinate* ϕ *ist, mit Inversem* g^{ij}*, so gilt*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{il}\left(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}\right). \tag{17.14}$$

Außerdem gilt $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$

Beweis. Es gilt $\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_k}\partial_j = [\partial_k, \partial_j] = 0$ wegen des Satzes von Schwarz (Korollar 13.19), somit auch $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. Nach Gleichung (17.8) gilt

$$2g(\nabla_{\partial_j}\partial_k, \partial_l) = \partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}. \tag{17.15}$$

Nimmt man in Gleichung (17.13) das g-Skalarprodukt mit ∂_l und benutzt, dass $g(\partial_i, \partial_l) = g_{il}$, erhält man genau dann Gleichung (17.15), wenn Γ^i_{jk} die Formel (17.14) erfüllt (da (g^{ji}) invers zu (g_{jk})).

Da die ∂_i eine Basis bilden, und das Skalarprodukt nicht ausgeartet ist, können die Γ^i_{jk} dann nicht anders aussehen. □

17.16 Aufgabe. Bestimme $\nabla_X Y$ in lokalen Koordinaten $\phi\colon U \to V$ in der Basis (∂_i) mittels der Christoffelsymbole, falls $X = \sum_i f^i\partial_i$ und $Y = \sum g^i\partial_i$.

Viele unserer Beispiel von Riemannschen Mannigfaltigkeiten kommen daher, dass wir Untermannigfaltigkeiten bekannter Riemannscher Mannigfaltigkeiten, z.B. des flachen $\mathbb{R}^n$ betrachtet haben.

17.17 Lemma. *Sei* $(N, g|_N) \subset (M, g)$ *eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* M*. Dann ist der Levi-Civita Zusammenhang von* N *die orthogonale Projektion des Levi-Civita Zusammenhangs auf* M*.*

Genauer: Seien $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(TM)$ *Vektorfelder, so dass* $X := \tilde{X}|_N, Y := \tilde{Y}|_N \in \Gamma(TN)$ *(wobei wir* TN *als Unterbündel von* $TM|_N$ *auffassen); für alle* $x \in N$ *liegt also* $X(p) \in T_pN \subset T_pM$ *etc. Dann gilt*

$$\nabla_X Y(p) = \mathrm{pr}_p(\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}(p)), \tag{17.18}$$

wobei $\mathrm{pr}_p\colon T_pM \to T_pN$ *die orthogonale Projektion (unter Benutzung des Skalarprodukts* g_p*).*

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass nach g_p-Skalarprodukt nehmen mit jedem $Z(p) \in T_pN$ die Gleichung (17.18) korrekt ist.Dann kann man aber Gleichung (17.8) anwenden, und die Skalarprodukte mit Hilfe der Metrik und der Lie-Klammer ausdrücken.

Da nach Lemma 13.17 $[X, Y]_p = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_p$ (der eine Kommutator in $\Gamma(TN)$ genommen, der andere in $\Gamma(TM)$), liefert Gleichung (17.8) die Gleichung $g_N(\nabla_X Y, Z) = g_M(\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{Z})$ für jedes $Z \in \Gamma(TN)$ mit Fortsetzung $\tilde{Z}$ auf $\Gamma(TM)$, also die Behauptung. □

Dass die kovariante Ableitung auch “Zusammenhang” genannt wird, liegt daran, dass man mit ihrer Hilfe Tangentialvektoren ‘entlang von Kurven ‘parallel verschieben” kann. Um dies sinnvoll tun zu können, muss man sich mit Vektorfeldern und Kurven beschäftigen.

17.19 Definition. Sei $c\colon (a,b) \to M$ eine (stetige) Kurve in einer glatten Mannigfaltigkeit M. Ein *Vektorfeld X entlang c* ist eine glatte Abbildung $X\colon (a,b) \to TM$ mit $X(t) \in T_{c(t)}M$. Die Vektoren sind insbesondere *nicht* tangential an die Kurve.

Beachte: c muss nicht injektiv sein; falls $c(t_1) = c(t_2)$, ist *nicht* gefordert, dass $X(t_1) = X(t_2)$.

17.20 Beispiel. Sei $c\colon (a,b) \to M$ glatte Kurve. Dann ist $c'\colon (a,b) \to TM$ ein Vektorfeld entlang c.

17.21 Satz. *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $c\colon (a,b) \to M$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann gibt es genau einen $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\frac{D}{dt}$ von der Menge der glatten Vektorfelder entlang c nach sich selbst, welche folgende zwei Eigenschaften erfüllt:*

(1) $\frac{D}{dt}(fX) = f\frac{D}{dt}X + f'X$ *für* $f \in C^*\infty((a,b),\mathbb{R})$

(2) Falls X Einschränkung eines auf ganz M definierten glatten Vektorfelds $\tilde{X}$ ist, dann gilt

$$\frac{D}{dt}X(t) = (\nabla_{c'(t)}\tilde{X})(t) \qquad \forall t \in (a,b).$$

$\frac{D}{dt}$ *heißt* kovariante Ableitung entlang der Kurve c.

Beweis. Leider kann man nicht jedes Vektorfeld X entlang c auf ganz M ausdehnen, da c nicht injektiv ist (und selbst wenn, könnte das Bild noch eine dichte Teilmenge von M sein).

Aber: für jeden Punkt $c(t_0) \in M$ gibt es eine offene Kartenumgebung U, so dass die “Standard-Kartenvektorfelder $\partial_1, \dots, \partial_n$ eine lokale Basis von $TM|_U$ bilden. Folglich gibt es (auf einer Umgebung $(e,d) \subset (a,b)$ von t_0, so dass $c(e,d) \subset U)$ eindeutig bestimmte glatte Funktionen $f_1, \dots, f_n\colon (e,d) \to \mathbb{R}$, so dass $X(s) = \sum_i f_i(s)\partial_i$.

Unter Benutzung von Abschneidefunktion und Teilung der Eins kann man also X als lokal-endliche Linearkombination $\sum_{j\in J} g_j Y_j$ schreiben, wobei die Y_j sich auf ganz M ausdehnen.

Damit ist $\frac{D}{dt}X$ durch die beiden Regeln eindeutig festgelegt: es kann also höchsten eine Funktion $\frac{D}{dt}$ mit den gewünschten Eigenschaften geben.

Umgekehrt kann man mit Hilfe der Zerlegung $X = \sum_{j\in J} g_j Y_j$ und der beiden Regeln die Abbildung $\frac{D}{dt}X$ definieren.

Man rechnet ohne Probleme nach, dass dies wohldefiniert ist (schreibe lokal jedes Vektorfeld Y_j eindeutig als Linearkombination von ∂_k, und benutze Produktregel für $\nabla_{c'}$). Danach ist es dann auch leicht, die beiden Eigenschaften nachzuweisen. **Beachte, dass dies noch durchgeführt werden muss und nicht automatisch ist: wir haben die Regeln zwar benutzt, um die Formel herzuleiten, das heißt aber nicht automatisch, dass mit der gefundenen Formel alle Regeln erfüllt werden.** $\square$

17.22 Aufgabe. Sei $N \subset M$ eine glatte Untermannigfaltigkeit, $c\colon (a,b) \to N$ eine glatte Kurve und $X\colon c \to TN$ ein Vektorfeld entlang c, aufgefasst als Kurve in N. Sei $\overline{X}$ das selbe Vektorfeld, aber nun aufgefasst als Vektorfeld entlang der Kurve in M, benutze dazu die Inklusion $TN \subset TM$. Berechne dann $\frac{D}{dt}c$ (die kovariante Ableitung in N) in Termen von $\frac{\overline{D}}{dt}\overline{X}$ (die kovariante Ableitung in M).

Zeige: $\frac{D}{dt}X(t) = \mathrm{pr}_{T_{c(t)}N}(\frac{\overline{D}}{dt}\overline{X}(t))$, wobei $\mathrm{pr}_{T_pN}\colon T_pM \to T_pN$ die orthogonale Projektion ist.

17.23 Aufgabe. Berechne die kovariante Ableitung entlang von c' entlang der Kurven

(1) $c(t) = v\cos(t) + w\sin(t)$ auf S^n, wobei $w, v \in S^n$ mit $w \perp v$ (es handelt sich um einen Großkreis)

(2) $c(t) = v\cos(t) + w\sin(t)$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$, wobei $v, w \in S^n$.

(3) $c(t) = v + tw$ auf $\mathbb{R}^n$, $v, w \in \mathbb{R}^n$.

17.2 Paralleltransport

17.24 Definition. Ein Vektorfeld X entlang einer Kurve c heißt *parallel*, falls $\frac{D}{dt}X \equiv 0$.

17.25 Beispiel. Sei $c\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ beliebige C^1-Kurve. Ein Vektorfeld $X\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n = T_{c(t)}\mathbb{R}^n$ entlang c ist parallel (bezüglich der Standardmetrik) genau dann, wenn X konstant ist.

Wir verallgemeinern also den üblichen Begriff von Parallelität auf beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Beweis. Schreibe $X(t) = \sum_i X^i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}$, dann gilt $\frac{D}{dt}X(t) = \sum_i X^i(t)'\frac{\partial}{\partial x_i} + X^i(t)\nabla_{c'(t)}\frac{\partial}{\partial x_i}$. Im $\mathbb{R}^n$ ist die kovariante Ableitung die übliche Ableitung, die Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sind konstant, also $\nabla_{c'(t)}\frac{\partial}{\partial x_i} = 0$, also $\frac{D}{dt}X(t) = \sum X^i(t)'\frac{\partial}{\partial x_i}$. Dies ist genau dann $= 0$, wenn alle $X^i(t)' = 0$, also die X^i konstant. □

17.26 Satz. *Sei $c\colon (a,b) \to (M,g)$ stetig differenzierbare Kurve, $t_0 \in (a,b)$ und $v \in T_{c(t_0)}M$. Dann gibt es genau ein Vektorfeld X entlang c welches parallel ist und so dass $X(t_0) = v$.*

Beweis. Es genügt, dies für alle kompakten Teilintervalle $[e,d] \subset (a,b)$ zu beweisen. Ein solches kann man in endlich viele Teile $e = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ zerlegen, so dass $c([t_k, t_{k+1}])$ in einer Kartenumgebung U enthalten ist. Eingeschränkt auf so ein Teilintervall, lässt sich nun jedes X eindeutig schreiben als $X = \sum f_i\partial_i$ mit der lokalen Basis von Vektorfeldern ∂_i, sowie $c'(t) = \sum \alpha_i(t)\partial_i$.

Man erhält so das System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung für Parallelität

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{D}{dt}X(t) = \sum_i f_i'(t)\partial_i + f_i(\nabla_{\sum_k \alpha_k(t)\partial_k}\partial_i) \\ =& \sum_i (f_i'(t) + \sum_{kl} f_l\alpha_k\Gamma_{ki}^i(c(t)))\partial_i \end{aligned} \tag{17.27}$$

Hauptsatz der Theorie linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen: für jeden vorgegebenen Anfangswert $X(t_k)$ gibt es eine eindeutige Lösung, die auf ganz $[t_k, t_{k+1}]$ definiert ist.

Durch Zusammensetzen folgt so sofort die Behauptung, man muss natürlich bei t_0 starten. □

17.28 Bemerkung. Die Aussage von Satz 17.26 verallgemeinert sich sofort in der offensichtlichen Weise auf stückweise stetig diffbare stetige Kurven.

17.29 Definition. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c\colon [a, b] \to M$ stückweise C^1-Kurve. Der *Paralleltransport* entlang c ist die lineare Abbildung $P_t\colon T_{c(a)}M \to T_{c(t)}M$ welche dadurch definiert ist, dass es zu $v \in T_{c(a)}M$ ein entlang c paralleles Vektorfeld X_v gibt mit $X_v(a) = v$ und $X_v(b) = P_t(v)$.

17.30 Bemerkung. Paralleltransport hat die Halbgruppeneigenschaft: $P_{t+s} = \overline{P}_t \circ P_s$, wobei $\overline{P}$ der Paralleltransport entlang c, aber startend an $a + s$ ist. Da man Kurven auch rückwärts laufen kann, ist P_t für jedes t ein Isomorphismus.

17.31 Lemma. *Da der Levi-Civita Zusammenhang die Metrik erhält, ist der Paralleltransport entlang einer Kurve $c\colon [a, b] \to M$ isometrisch, d.h.*

$$g_{c(a)}(v, w) = g_{c(t)}(P_t v, P_t w) \qquad \forall v, w \in T_{c(a)}M, t \in [a, b].$$

Für beliebige Vektorfelder $X(t), Y(t)$ entlang c gilt

$$\frac{d}{dt} g(X(t), Y(t)) = g(\frac{D}{dt} X(t), Y(t)) + g(X(t), \frac{D}{dt} Y(t)).$$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der zweiten, und die zweite folgt wie der Beweis von Satz 17.21 aus der entsprechenden Eigenschaft von ∇. □

17.32 Aufgabe. Bei der Diskussion von kovarianten Ableitungen entlang von Kurven und beim Paralleltransport wurde nirgends benutzt, dass man Schnitte von TM (statt anderer Vektorbündel E) betrachtet, und dass der Levi-Civita-Zusammenhang torsionsfrei ist.

Entwickle die entsprechende Theorie für beliebige Bündel E, also insbesondere

(1) Schnitte von E entlang einer Kurve c

(2) Kovariante Ableitung entlang solcher Schnitte entlang einer Kurve c

(3) Paralleltransport.

17.33 Bemerkung. Die kovariante Ableitung ∇ liefert den Paralleltransport entlang von Kurven c. Umgekehrt liefert der Paralleltransport aber auch die kovariante Ableitung zurück:

Zur Berechnung von $\nabla_X Y(p)$ wähle Kurve $c\colon (a, b) \to M$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X(p)$. Dann gilt

$$\nabla_X Y(p) = \lim_{t \to 0} \frac{P_t^{-1}(Y(c(t))) - Y(p)}{t},$$

die kovariante Ableitung kann also als Limes von Differenzenquotienten erhalten werden. Man braucht den Paralleltransport, um die Vektoren aus verschiedenen Vektorräumen T_pM, T_qM vergleichen und ihre Differenz bilden zu können.

17.34 Aufgabe. Beweise die Behauptungen aus Bemerkung 17.33.

18 Geodäten

18.1 Differentialgleichung für Geodäten

Geodäten sind die Kurven, welche (lokal) die kürzestmögliche Verbindung liefern. Wir werden sie aber zunächst mittels einer Differentialgleichung definieren, und erst später diese Eigenschaft beweisen.

18.1 Definition. Eine Kurve $c\colon (a,b) \to (M,g)$ heißt *Geodäte*, falls $\frac{D}{dt}c' \equiv 0$.

18.2 Lemma. *Sei $c\colon (a,b) \to (M,g)$ eine Geodäte. Dann ist $|c'(t)|$ konstant.*

Beweis. Das Vektorfeld c' entlang der Kurve c ist parallel, also ist seine Länge nach Lemma 17.31 konstant. □

18.3 Satz. *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Dann gibt es Umgebung U von P, $\epsilon > 0$ so dass für jedes $q \in U$ und $v \in T_qM$ mit $|v| < \epsilon$ eine eindeutige Geodäte $c_v\colon [-1,1] \to M$ mit $c_v(0) = p$ und $c_v'(0) = v$ existiert. Beachte dabei: c_v ist auf ganz $(-1,1)$ definiert.*

Außerdem ist die Abbildung $\{v \in T_qM \mid q \in U, |v| < \epsilon\} \to M; v \mapsto c_v(1)$ glatt.

Beweis.

18.4 Lemma. *In lokalen Koordinaten $\phi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt eine Kurve $c\colon (a,b) \to U$ genau dann die Geodätengleichung, wenn für $\gamma = \phi \circ c$ gilt*

$$\frac{d^2\gamma_i(t)}{dt^2} + \sum_{k,l} \Gamma^i_{kl}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_k(t)}{dt} \frac{d\gamma_l(t)}{dt} = 0. \tag{18.5}$$

Beweis. Hierzu muss man in die lokale Gleichung (17.27) für $X(t)$ eben $c'(t)$ einsetzen, in Koordinaten gilt dann $X_i = \gamma_i' = \alpha_i(t)$. □

Die Differentialgleichung (18.5) ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung für γ (allerdings nicht linear). Da die Γ^i_{jk} glatte Funktionen sind, sagt der Existenz-und Eindeutigkeitssatz für Lösungen solcher Differentialgleichungen in der einfachsten Variante, dass es für vorgegebene Anfangswerte $\gamma(0)$ und $\gamma'(0)$ ein $\delta > 0$ und gibt, so dass die Gleichung eine eindeutige Lösung $\gamma\colon (-\delta,\delta) \to V$ mit diesen Anfangsbedingungen besitzt.

Die nächste, etwas bessere Version des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes beinhaltet glatte Abhängigkeit von den Anfangswerten und sagt das es für jede kompakte Teilmenge $K \subset U \times \mathbb{R}^n$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jedes $(x,v) \in K$ die entsprechende eindeutige Lösung $\gamma_{x,v}$ auf $(-\delta,\delta)$ definiert ist, und so dass $K \times (-\delta,\delta) \to V; (x,v,t) \mapsto \gamma_{x,v}(t)$ glatt ist.

Um unser Ergebnis zu beweisen, ist zum Schluss noch eine Besonderheit der Geodätengleichung zu beachten: falls $\gamma\colon (-\delta,\delta) \to V$ eine Lösung ist, so ist $t \mapsto \gamma(ct)\colon (-\delta/c, \delta/c) \to V$ ebenfalls eine Lösung (für $c \neq 0$), mit $\gamma'(ct) = c\gamma'(t)$.

Zu gegebenen $K \subset V \times \mathbb{R}^n$ wie oben kann man also $K_\delta := \{(x,\delta v) \mid (x,v) \in K\}$ betrachten, dann gibt es eine eindeutige Lösung mit Anfangswerten aus K_δ auf $(-\delta/\delta, \delta/\delta) = (-1,1)$.

Wählt man nun also ursprüngliches $K = V' \times B_1(0)$, mit $0 \in \int(V')$, so erhält man die Behauptung des Satzes mit $U = \phi^{-1}(\int(V'))$, und $\epsilon = \delta$. □

18.6 Beispiel. (1) Im euklidischen Raum sind die Geodäten genau die linear parametrisierten Geraden $t \mapsto at + b$.

(2) Die Bilder solcher Geraden unter der Quotientenabbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ sind genau die Geodäten des flachen Standard-Torus. Betrachte speziell den Fall $n = 2$. Manche der Geodäten sind periodisch (falls der Steigungswinkel rational ist), es gilt also $\gamma(t+C) = \gamma(t)$ für ein $C > 0$. Die anderen haben dichtes Bild.

(3) Auf S^n sind die Geodäten gerade die Großkreise, auch sie sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und sie sind alle periodisch.

18.7 Aufgabe. Berechne die Geodäten für den (2-dimensionalen) Hyperbolischen Raum. Lösung im Halbebenenmodell: Geraden senkrecht zur x-Achse, Kreise, welche die x-Achse orthogonal schneiden (natürlich mit angepasster Parametrisierung).

18.8 Aufgabe. Die Kleinsche Flasche ist der Quotient des Standardtorus unter der Involution (Operation der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) $(x, y) \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}/2 \mapsto (x + 1/2, -y)$.

Zeige zunächst, dass dies eine freie Operation von $\mathbb{Z}/2$ liefert. Bestimme alle Geodäten. Bestimme die Länge der 2 kürzesten geschlossenen (d.h. periodischen) Geodäten und den Paralleltransport entlang dieser Geodäten, insbesondere die induzierte Selbstabbildung $P_C \colon T_pK \to T_pK$ (wobei c die (minimale) Periode ist —beachte, dass mit c auch nc für jedes $n \in \mathbb{N}$ Periode ist).

18.9 Definition. Zu gegebenen $v \in TM$ sei c_v die Geodäte mit Anfangsbedingungen v und mit maximal möglichem Definitionsintervall. Sei $\Omega \subset TM$ die (offene) Teilmenge aller v, so dass $c_v(1)$ definiert ist.

Wir definieren die *Exponentialabbildung* $\exp\colon \Omega \to M$; $v \mapsto c_v$, nach Satz 18.3 ist dies eine glatte Abbildung.

18.10 Satz. *Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung W von $(p, 0) \in TM$, so dass $F\colon W \to M \times M$; $v \mapsto (\pi(v), \exp(v))$ Diffeomorphismus von W auf eine offene Umgebung von (p, p) ist.*

Beweis. Diesen Satz beweisen wir mit Hilfe des Satzes von der Inversen Abbildung, wir müssen also das Differential von F an der Stelle $(p, 0)$ berechnen und zeigen, dass es invertierbar ist.

Nun gibt es kanonischen Isomorphismus $T_{(p,0)}TM = T_pM \oplus T_pM$ (der erste Summand entspreche Wegen, die sich nur im Nullschnitt $M \subset TM$ bewegen, der zweite (linearen) Wegen in T_pM) und $T(p, p)(M \times M) = T_pM \oplus T_pM$. Da $F(q, 0) = (q, q)$ für $q \in M$, und $F(p, tv) = (p, \exp_{p,tv}(1)) = (p, \exp_{p,v}(t))$ folgt, unter obiger Identifikation

$$T_{(p,0)}F = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{T_pM} & 0 \\ \mathrm{id}_{T_pM} & \mathrm{id}_{T_pM} \end{pmatrix},$$

also invertierbar. □

18.11 Korollar. *Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gibt eine offene Umgebung W der Diagonalen in $M \times M$, so dass für jedes Paar $(p, q) \in W$ die Punkte p und q durch eine (bis auf die Durchlaufgeschwindigkeit eindeutig bestimmten) Geodäte verbunden werden können.*

18.2 Geodäten und Metrik

Wir wissen schon, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ein metrischer Raum wird, mit $d(x, y) = \inf\{l(\gamma) \mid \gamma \text{ stückweise glatter Weg von } x \text{ nach } y\}$.

Wir wollen nun zeigen, dass Geodäten Abstandsminimierende Kurven sind.

18.12 Satz. *Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Dann gibt es Umgebung U von p und $\epsilon > 0$, so dass für je zwei Punkte $x, y \in U$ eine eindeutige Geodäte $\gamma_{x,y}$ von x nach y mit Länge kleiner ϵ existiert. Ausserdem gilt*

$$d(x, y) = L(\gamma_{xy}), d(x, y) < L(\alpha)$$

für jede andere Kurve von x nach y (welche nicht eine Umparametrisierung von γ_{xy} ist), und γ verläuft ganz in U (U ist also konvex).

Beweis. Wir können die Menge W aus Satz 18.10 so verkleinern, dass sie für eine geeignete Umgebung von p nur Tangentialvektoren der Länge $< \epsilon$ für geeignetes $\epsilon > 0$ enthält. Deren Bild enthält dann eine offene Umgebung von (p, p) der Gestalt $U \times U$ für offenes $U \subset M$. Mit anderen Worten: für je zwei Punkte $x, y \in U$ gibt es $v \in T_pM$ mit $|v| < \epsilon$ so dass $\exp(v) = q$, also $\gamma_v \colon [0, 1] \to M$ Geodäte mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ und $\gamma'(0) = v$. Dann gilt $L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^1 |\gamma'(0)|\, dt = \epsilon$, da für Geodäten $|\gamma'|$ konstant ist. Außerdem ist $\gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1) = \exp(tv) \in U$. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass es keine Kurve von x nach y mit kleinerer Länge gibt.

Wir benutzen die Exponentialfunktion, um eine "Karte" von M um x zu erhalten: nach Satz 18.10 ist $V := \{v \in T_xM \mid |v| < \epsilon\}$ offene Umgebung von Null in T_xM, so dass $\exp\colon V \to M$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Sei $S_1 := \{v \in T_pM \mid |v| = 1\}$. Dann liefert exp einen Diffeomorphismus

$$F\colon (0, \epsilon) \times S_1 \to U' \subset M; (r, v) \mapsto \exp(rv).$$

Beachte, dass nach Konstruktion von exp für jedes $v \in S_1$ die Kurve $\gamma_v \colon t \mapsto F(t, v)$ eine Geodäte ist.

Wir wollen nun in den "Koordinaten" $(0, \epsilon) \times S_1$ die Länge von beliebigen Kurven bestimmen. Dazu müssen wir die Metrik in diesen Koordinaten kennen. Dies ist durch das *Gauss-Lemma* gegeben:

18.13 Lemma. *Die Kurven γ_v sind senkrecht auf allen Hyperflächen $f(\{r\} \times S_1) \subset M$, d.h. die Metrik g ist gegeben durch*

$$g = dr^2 + h_{r,v},$$

wobei $h_{r,v}$ positiv definites Skalarprodukt auf $T_{f(r,v)}f(\{r\} \times S_1) \subset T_{f(r,v)}M$ ist, welches durch Einschränken von $g_{f(r,v)}$ entsteht.

Beweis. Sei $X \in \Gamma(TS_1)$ Vektorfeld, welches konstant in r-Richtung zu $X_1 \in \Gamma(T((0, r) \times S_1))$ fortgesetzt wird, setze $\tilde{X} := rX_1$, und $Y \in \Gamma(TU')$ das Bild von $\tilde{X}$ unter dem Diffeomorphismus F. Sei $\partial_r \in \Gamma(TU')$ entsprechend das Bild von $\frac{\partial}{\partial r}$. Wir müssen zeigen, dass Y und ∂_r überall orthogonal zueinander stehen.

Berechne dazu (da $\gamma_v' = \partial_r$)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}g(Y,\gamma_v'(r)) &= g(\nabla_{\gamma_v'}Y,\gamma_v') + g(Y,\nabla_{\gamma_v'}\gamma_v')\\ &= g(\nabla_Y\gamma_v',\gamma_v') + g([\partial_r,Y],\gamma_v')\\ &= g(f_*[\frac{\partial}{\partial r}, rX_1],\partial_r) + \frac{1}{2}Y.g(\gamma_v',\gamma_v')\\ &= \frac{1}{r}g(rf_*X_1,\partial_r)\end{aligned}$$

Die Funktion $\alpha(r) = g(Y,\gamma_v'(r))$ erfüllt also $\alpha'(r) = \frac{1}{r}\alpha(r)$ für $r > 0$. Diese Dgl hat genau die Lösungen $\alpha(r) = Ce^r$. Andererseits gilt $\alpha(r) = rg(f_*X_1,\gamma_v'(r))$, also ist α sogar stetig diffbar an 0 mit $\alpha(0) = 0$. Mit obiger Überlegung also $\alpha \equiv 0$, somit überall Y orthogonal zu ∂_r. Da Y beliebig, folgt die Behauptung des Gauss-Lemmas. □

Um den Satz zu beweisen, müssen wir also nur noch zeigen, dass für eine beliebige stückweise C^1-Kurve $\alpha\colon [0,C] \to M$ von x nach y $L(\alpha) > L(\gamma_{xy})$, dem radialen Weg in unserem "Koordinatensystem". Der Punkt y habe die Koordinaten $(\delta, v) \in (0,\epsilon) \times S_1$.

Wir nehmen zunächst an, dass α den Bereich des Koordinatensystems nicht verläßt, und schreiben $\alpha(t) = (\alpha_r(t),\alpha_\phi(t)) \in [0, epsilon) \times S_1$. Der Weg $\beta(t) := (\alpha_r(t), v)$ ist ein zweiter Weg von x nach y, der ebenfalls radial verläuft. Dann gilt wegen des Gauss-Lemmas und nach Satz von Pythagoras

$$\begin{aligned}L(\alpha) = \int_0^C |\alpha'(t)|\,dt &= \int_0^C \sqrt{\alpha_r'(t)^2 + h_{\alpha(t)}(\alpha_\phi'(t),\alpha_\phi'(t))}\,dt\\ &\geq \int_0^C |\alpha_r'(t)| \geq \int_0^C \alpha_r'(t)\,dt = \alpha_r(C) - \alpha_r(0) = \delta = L(\gamma_{xy}).\end{aligned}$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $\alpha_\phi(s)$ konstant ist, und $\alpha_r'(s) \geq 0$ für alle s. Das heißt aber, dass α eine Umparametrisierung von γ_{xy} ist.

Falls α aber den Bereich des Koordinatensystems verläßt, gibt es $s \in (0,C]$ so dass $\alpha([0,s]) \subset F((0,\epsilon)\times S_1)$ und so dass die Länge der radialen Geodäten von x nach $\alpha(s) > \delta$. Nach dem gerade bewiesenen ist dann $\delta \leq L(\alpha|_{[0,s]}) < L(\alpha)$. □

18.14 Korollar. *Sei (M,g) Riemannschen Mannigfaltigkeit. Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve stückweise C^1-Kurve $\alpha\colon (a,b) \to M$ ist genau dann eine Geodäte, wenn sie lokal abstandsminimierend ist, also für jeden Punkt $p = \alpha(s)$ einen Umgebung U existiert, so dass $d(\alpha(s),\alpha(t)) = |t-s|$ falls $\alpha(t) \in U$.*

Insbesondere sind solche Kurven immer glatt.

Beweis. Falls α Geodäte, so ist α nach Satz 18.12 lokal abstandsminimierend.

Ist umgekehrt α lokal abstandsminierend, so ist für $\alpha(s)$ und $\alpha(t)$ genügend nahe bei $\alpha(s)$ α gleich der Geodäten von $\alpha(s)$ nach $\alpha(t)$, da die Geodäte dann nach Satz 18.12 die einzige abstandsminimierende Kurve ist welche nach Bogenlänge parametrisiert ist. Da die Geodäteneigenschaft eine lokale Eigenschaft ist (Lösung einer Differentialgleichung) ist α also Geodäte. □

18.3 Der Satz von Hopf-Rinov

18.15 Definition. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt (geodätisch) vollständig, falls jede Geodäte von M zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Geodäte ausgedehnt werden kann, also der Definitionsbereich der Exponentialabbildung ganz TM ist.

18.16 Beispiel. Ist (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit positiver Dimension, $x \in M$, so ist $M \setminus \{x\}$ nicht geodätisch vollständig.

18.17 Satz. ***Satz von Hopf-Rinov***

(1) Sei (M, g) geodätisch vollständig. Dann gilt für jeden Punkt $p \in M$, dass $\exp_p$ auf ganz T_pM definiert und surjektiv ist.

(2) Sei $p \in M$ und $\exp_p$ auf ganz T_pM definiert. Dann gibt es für alle $x \in M$ eine Geodäte minimaler Länge von p nach x (im allgemeinen nicht eindeutig).

Beweis. Die erste Aussage ist gerade die Definition von geodätischer Vollst"'andigkeit, da die Exponentialabbildung mit Hilfe von Geodäten definiert ist.

Sei also $x, p \in M$ und $\exp_p\colon T_pM \to M$ auf ganz T_pM definiert. Wähle $0 < \epsilon < d(p, x)$ so, dass $S := \{y \in M \mid d(p, y) = \epsilon\} = \exp_p(S_\epsilon(0) \subset T_pM)$ (dies geht nach Satz 18.12). Die entsprechende Menge ist also insbesondere kompakt. Wähle dann $p_0 \in S$ mit $d(p_0, x) = d(S, x)$. Dann gilt $d(p, x) = d(p, p_0) + d(p_0, x)$ (da der Abstand durch Länge von Kurven gegeben ist, und jede Kurve von p nach x durch S laufen muss).

Sei $v \in T_pM$ mit $|v| = 1$ und $\exp(\epsilon v) = p_0$. Definiere die Geodäte $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ durch $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ (nach Voraussetzung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert). Wir beweisen nun, dass $\gamma(d(p, x)) = x$, damit folgt die Behauptung.

Wähle nämlich $T \le d(p, x)$ maximal, so dass $T + d(\gamma(T), x) = d(p, x)$ (d.h. T maximal, so dass man sich auf dem richtigen Weg befindet). Wähle dann p_1 auf δ-Sphäre um $\gamma(T)$ als Punkt in Richtung von x wie eben, und Geodäte c von $\gamma(T)$ nach p_1. Dann ist $d(p, p_1) = l(\gamma|_{[0,T]}) + l(\gamma)$. Da lokal minimierende Kurven aber Geodäten sind, ist die Hintereinanderschaltung von c und $\gamma|_{[0,T]}$ eine Geodäte. Da Geodäten lokal eindeutig sind, ist c die Verlängerung von γ. Da T maximal war so dass γ genau in Richtung x zeigte, geht dies nur von $T = d(p, x)$ und $\gamma(T) = x$. $\square$

18.18 Korollar. *Sei (M, g) zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) (M, g) ist geodätisch vollständig.

(2) Für jedes $x \in M$ ist $\exp_x$ auf ganz T_xM definiert.

(3) Es gibt $x \in M$, so dass $\exp_x$ auf ganz T_xM definiert ist.

(4) jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge von M ist kompakt

(5) (M, d) ist als metrischer Raum vollständig.

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

18.19 Korollar. *Jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist vollständig, und $\exp_p$ ist auf ganz T_pM definiert.*

18.4 Geodäten und Energie

18.20 Definition. Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit $c\colon [a,b] \to M$ eine C^1-Kurve. Ihre *Energie* ist definiert als

$$E(c) := \frac{1}{2}\int_a^b \left|c'(t)\right|^2 \, dt.$$

18.21 Aufgabe. Zeige, dass die Energie einer Kurve im allgemeinen von der Parametrisierung abhängt.

18.22 Satz. *Eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to (M,g)$ ist genau dann eine minimale Geodäte, wenn $E(\gamma) \le E(c)$ für jede andere Kurve c von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$.*

γ ist eine Geodäte genau dann (nicht notwendig mimimal), wenn γ eine kritischer Punkt für das Energiefunktional ist, d.h. falls $\Phi\colon [a,b] \times (-\epsilon,\epsilon)$ eine C^2-Variation von γ mit festen Endpunkten ist ($\Phi_0(t) := \Phi(t,0) = \gamma(t)$ und $\Phi(a,x) = \gamma(a)$, $\Phi(b,s) = \gamma(b)$ für alle relevanten s,t), so gilt

$$\frac{d}{d\epsilon}E(\Phi_\epsilon) = 0$$

Beweis. Übungsaufgabe mit Anleitung (wird aus Zeitgründen weggelassen). □

19 Krümmung

19.1 Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, E ein Vektorfeld über M mit Zusammenhang ∇. Definiere die Krümmungsoperator R folgendermaßen. Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$ Vektorfelder, $s \in \Gamma(E)$. Dann definiere

$$R(X,Y)(s) := \nabla_X(\nabla_Y(s)) - \nabla_Y(\nabla_X(s)) - \nabla_{[X,Y]}(s).$$

19.2 Lemma. *(1) Die Krümmung ist schiefsymmetrisch in X und Y, d.h.*

$$R(X,Y)(s) = -R(Y,X)(s)$$

und ist linear in s.

(2) Sei lokal der Zusammenhang gegeben durch $\nabla = d + \omega$ mit der 1-Form ω mit Werten in $\mathrm{End}(E)$ (also ω ein Schnitt von $T^*M \otimes \mathrm{End}(E)$). Dann gilt $R = d\omega + \omega \wedge \omega$.

(3) Die Krümmung ist tensoriell in allen Einträgen, d.h. $R(X,Y)(s)(p)$ hängt nur von $X(p)$, $Y(p)$ und $s(p)$ ab. Mit anderen Worten: die Krümmung ist ein Schnitt des Vektorbündels $\mathrm{Alt}^2(TM) \otimes \mathrm{End}(E)$ (eine alternierende 2-Form mit Werten in $\mathrm{End}(E)$: wenn man 2 Tangentialvektoren aus T_pM einsetzt, erhält man einen Endomorphismus von E_p).

Beweis. Die erste Aussage erhält man sofort durch Einsetzen (da $[X,Y] = -[Y,X]$). Für die zweite müssen wir, wie schon des öfteren benutzt, zeigen, dass R $C^\infty(M)$-linear in allen 3 Einträgen ist. Sei also $f \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $s \in \Gamma(E)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} R(fX,Y)(s) =& \nabla_{fX}(\nabla_Y(x)) - \nabla_Y(\nabla_{fX}(s)) - \nabla_{[fX,Y]}(s) \\ =& f\nabla_X(\nabla_Y(s)) - Y(f)\nabla_X(s) - f\nabla_Y(\nabla_X(s)) - f\nabla_{[X,Y]}(s) \\ & + Y(f)\nabla_X(s) = fR(X,Y)(s) \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(fs) =&\nabla_X(\nabla_Y(fs)) - \nabla_Y(\nabla_X(fs)) - \nabla_{[X,Y]}(fs)\\
=&\nabla_X(Y(f)s + f\nabla_Y(s)) - \nabla_Y(X(f)s + f\nabla_X(s)) - [X,Y](f)s - f\nabla_{[X,Y]}(s)\\
=&XY(f)s + Y(f)\nabla_X(s) + X(f)\nabla_Y(s) + \nabla_X(\nabla_Y(s))\\
&- YX(f)s - X(f)\nabla_Y(s) - Y(f)\nabla_X(s) - f\nabla_Y(\nabla_X(s))\\
&- XY(f)s + YX(f)s - f\nabla_{[X,Y]}(s)\\
=&fR(X,Y)(s).
\end{aligned}$$

□

19.3 Lemma. *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi-Civita Zusammenhang auf TM. Definiere durch Indexsenken den $(0,4)$-Tensor R_m mit $R_m(X,Y,Z,W) = g(R_{X,Y}(Z),W)$ für $X,Y,Z,W \in T_mM$. Dann gilt*

(1) R_m ist antisymmetrisch in den ersten beiden und in den letzten beiden Argumenten.

(2) erste Bianci-Identität: $R(X,Y,Z,W)+R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W) = 0$

(3) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$.

Beweis. Die zweite Gleichung folgt, weil der Levi-Civita-Zusammenhang torsionsfrei ist aus der Jakobi-Identität und expliziten (durch Einsetzen) Berechungen

$$R(X,Y)(Z)+R(Y,Z)(X)+R(Z,X)(Y) = -([[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]).$$

Die Antisymmetrie in den ersten beiden Argumenten gilt allgemein und wurde bereits gezeigt. Für die zweite leite man $g(Z,W)$ ab und benutze, dass g symmetrisch ist.

Die dritte Identität ist eine (komplizierte, aber elementar erhältliche) Konsequenz aus der ersten und der zweiten.

Rest ist Übungsaufgabe. □

19.4 Definition. Anstelle des Krümmungstensors ist die Schnittkrümmung eine sehr beliebte Invariante. Definiere dazu das *Graßmannbündel* der Tangentialebenen $G_2M := \bigcup_{x\in M}\{E \subset T_xM \mid \dim(E) = 2\}$ (auch daraus kann man wieder eine Mannigfaltigkeit machen, ein lokal triviales Bündel über M, dessen Faser isomorph zur Menge der 2-dimensionalen Ebenen in $\mathbb{R}^{\dim M}$ ist, das soll hier aber nicht durchgeführt werden).

Die *Schnittkrümmung* ist die Funktion

$$K\colon G_2M \to \mathbb{R}; E =< v,w >\mapsto \frac{R_m(v,w,v,w)}{g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2}. \tag{19.5}$$

19.6 Aufgabe. Zeige, dass Gleichung (19.5) tatsächlich nicht von der Basis $\{v,w\}$ der Ebene $E \subset T_xM$ abhängt, sondern nur von E. Sinnvollerweise wählt man eine Orthonormalbasis $\{e_1,e_2\}$ von E, dann gilt $K(E) = R(e_1,e_2,e_1,e_2)$.

19.7 Satz. *Die Schnittkrümmungsfunktion (und die Metrik) bestimmt bereits den gesamten Krümmungstensor.*

Beweis. Unter Benutzung der Symmetrien aus Lemma 19.3 rechnet man nach, dass

$$6R(x,y,z,w) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left(R(x+sz,y+tw,x+sz,y+tw) - R(x+sw,y+tz,x+sw,y+tz)\right)|_{s=t=0}.$$

□

19.8 Aufgabe. Beweise Satz 19.7.

19.9 Beispiel. Für den euklidischen Raum ist die Krümmung konstant 0.

19.10 Beispiel. Die Schnittkrümmung von S^n und von $\mathbb{H}^n$ ist konstant.

Beweis. Beobachtung 1: die Gruppe $SO(n+1)$ operiert auf S^n durch Isometrien, und diese Operation ist transitiv. Da die Schnittkrümmung isometrieinvariant ist, genügt es also, die Schnittkrümmungen an einem Punkt auszurechnen.

Die Untergruppe der $SO(n+1)$, welche den Nordpol $p = (1,0,\ldots,0) \in S^n$ festhält ist isomorph zu $SO(n)$. Diese Untergruppe operiert auf $T_pS^n = \{0\} \times \mathbb{R}^n$. Die Operation ist die übliche von $SO(n)$ auf $\mathbb{R}^n$ und ist insbesondere transitiv auf der Menge der 2-dimensionalen Ebenen in T_pS^n. Wegen der isometrieinvarianz ist die Schnittkrümmung also auch auf jeder dieser Ebenen die gleiche.

Es bleibt jetzt nur noch, diese konstante zu berechnen (wir werden später sehen, dass man den Wert 1 erhält).

Ganz entsprechend operiert auf $\mathbb{H}^n$ (im Hyperboliodmodell) die Gruppe $SO_0(n,1)$ transitiv, mit derselben Standgruppe $SO(n)$ des Punktes $p = (1,0,\ldots,0)$, welche wieder transitiv auf den 2-dimensionalen Ebenen in $T_p\mathbb{H}^n$ operiert. Wieder folgt, dass die Schnittkrümmung konstant ist, hier ergibt sich (was wir später zeigen werden) -1 für die Konstante. □

19.11 Lemma. *Sei $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ ein Riemannsches Produkt. Für jeden Punkt $(p_1,p_2) \in M_1 \times M_2$ gilt $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) = T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$. Zerlegt man bezüglich dieser direkten Summenzerlegung $X,Y,Z,W \in T_{(p_1,p_2)}M_1 \times M_2$ als $X = (X_1,X_2)$, …, so gilt für die Krümmung*

$$R(p_1,p_2)(X,Y,Z,W) = R_{p_1}(X_1,Y_1,Z_1,W_1) + R_{p_2}(X_2,Y_2,Z_2,W_2).$$

Es folgt, dass es für jedes $T_{(p_1,p_2)}M_1 \times M_2$ Ebenen E gibt, so dass $K(E) = 0$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

19.12 Bemerkung. Insbesondere hat die Standard-Produktmetrik auf $S^2 \times S^2$ keine positive Schnittkrümmung, sondern es gilt nur $K \geq 0$.

Die *Hopf-Vermutung* besagt, dass es keine Riemannsche Metrik auf $S^2 \times S^2$ gibt, so dass $K > 0$. Diese ist seit 50 Jahren offen, und es gibt auch heute noch keine Ansätze, sie zu beweisen.

Eins der Forschungsgebiete der Riemannschen Geometrie beschäftigt sich damit, festzustellen, welche Arten von Krümmung man auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit realisieren/nicht realisieren kann.

19.13 Definition. Neben dem Krümmungstensor und der Schnittkrümmung sind noch weitere (aus diesen gewonnene und einfachere) Krümmungsgrößen von Bedeutung. Insbesondere die *Ricci-Krümmung* aus symmetrischen $(0,2)$-Tensor (also Schnitt von $Sym_2(TM)$) mit

$$T_xM \oplus T_xM \ni (v,w) \mapsto \mathrm{Ric}(v,w) := \mathrm{Spur}(z \mapsto R_x(v,z)w).$$

Dabei erinnere man sich daran, dass man die Spur berechnen kann, indem man eine Orthonormalbasis $(e_1,\dots,e_n)$ von T_xM wählt, dann gilt

$$\mathrm{Ric}(v,w) = \sum_{i=1}^n g(R_x(v,e_i)w,e_i) = \sum_{i=1}^n R(v,e_i,w,e_i),$$

hieraus wird die Symmetrie von Ric deutlich, wenn man Lemma 19.2 benutzt.

Beachte, dass Ric hier algebraisch dasselbe Objekt wie der Krümmungstensor selbst ist. Für eine Konstante c defineren wir insbesondere

$$\mathrm{Ric} \geq cg \quad \iff \quad \mathrm{Ric}(v,w) \geq cg(v,w) \quad \forall v,w \in T_xM \quad \forall x \in M.$$

Mit Hilfe der Metrik g kann Ric auch als $(1,1)$-Tensor aufgefaßt werden, genauer gesagt als Schnitt des B"undels $\mathrm{Hom}(TM,TM)$, wobei man sogar im Unterbündel der selbstadjungierten Endomorphismen landet.

Diese neue Form der Ricci-Krümmung ist dann definiert durch

$$g(\widetilde{\mathrm{Ric}}(v),w) = \mathrm{Ric}(v,w).$$

In der Notation wird häufig nicht unterschieden, man muss dann aus dem Kontext erkennen, was gemeint ist.

Die Skalarkrümmung ist die glatte Funktion $\mathrm{scal}\colon M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathrm{scal}(x) = \mathrm{Spur}(\tilde{\mathrm{Ric}}_x) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}(e_i,e_i) = \sum_{i,j=1}^n R(e_i,e_j,e_i,e_j).$$

19.14 Definition. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) heißt *Einstein-Mannigfaltigkeit*, falls eine Konstante c existiert, so $\mathrm{Ric} = cg$.

19.15 Bemerkung. Diese Mannigfaltigkeiten stehen in engem Zusammenhang zu den Lösungen der Einsteingleichung der allgemeinen Relativitätstheorie in Materiefreien Bereichen (z.B. der Aussenraum eines Sterns). Die Zahl c steht in Beziehung zur Existenz und zum Vorzeichen der "kosmologischen Konstante".

19.1 Krümmung und Topologie

Die folgenden Sätze werden wir erst später beweisen können. Sie sollen hier aber schon einmal aufgelistet werden.

19.16 Satz. ***Satz von Synge***
Sei (M,g) eine orientierte zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit strikt positiver Schnittkrümmung $K > 0$. Dann ist ihre Fundamentalgruppe trivial.

19.17 Satz. ***Satz von Myers***
Sei (M, g) eine zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m mit

$$\mathrm{Ric} \geq r^{-2}(m-1)g; \quad r > 0.$$

Dann ist $\mathrm{diam}(M) \leq \mathrm{diam}(rS^m)$, *wobei rS^m die Sphäre im $\mathbb{R}^{m+1}$ vom Radius r ist.*

Insbesondere ist M kompakt mit endlicher Fundamentalgruppe.

19.18 Satz. ***Satz von Cartan-Hadamard***
Sei (M, g) vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq 0$.

Dann ist für jeden Punkt $p \in M$ die Exponentialabbildung $\exp_p \colon T_pM \to M$ eine Überlagerungsabbildung. Falls M zusätzlich einfachzusammenhängend ist, ist also $\exp_p \colon T_pM \to M$ ein Diffeomorphismus und damit M diffeomorph zu $\mathbb{R}^m$.

20 Variation von Bogenlänge und Jakobifelder

20.1 Variation von Bogenlänge und Energie

Wir haben uns bisher schon Kurven und Vektorfelder entlang von Kurven angeschaut, und damit z.B. Geodäten mit ihren Eigenschaften erhalten. Man kann viele weitere Eigenschaften von Kurven erhalten, indem man nicht eine Kurve anschaut, sondern eine ganze "Schar" von Kurven.

20.1 Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *Variation* von Kurven ist eine glatte Abbildung $H \colon [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$. Wir schreiben $c_t(s) := H(t, s)$ und fassen die einzelnen $c_t \colon [a, b] \to M$ als Kurven in M auf, die glatt vom Parameter $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ abhängen ($\epsilon > 0$). (Natürlich kann man statt glatter auch geringere Regularität anschauen, z.B. C^2.)

Wir müssen auch den Begriff des Vektorfelds entlang einer Kurve verallgemeinern.

20.2 Definition. Ein *Vektorfeld entlang einer Variation H* (wie in Definition 20.1), oder allgemeiner ein Vektorfeld entlang einer glatten Abbildung $H \colon N \to M$ für irgendeinen Raum N ist eine Abbildung $X \colon N \to TM$ so dass $X(p) \in T_{H(x)}M$ für alle $x \in N$. In der Regel wird N eine Mannigfaltigkeit sein, und wir werden verlangen, dass X eine glatte Abbildung ist.

20.3 Beispiel. Sei $H \colon [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon)$ eine Variation von Kurven und $X \in \Gamma(T([a, b] \times (-\epsilon, \epsilon)))$ ein Vektorfeld an die Quelle, z.B. $X = \frac{\partial}{\partial t}$ oder $X = \frac{\partial}{\partial s}$, wobei wir die Koordinaten $(s, t) \in [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon)$ verwenden.

Dann ist $\overline{X} := TH(X)$ ein Vektorfeld entlang von H, wobei natürlich $\overline{X}(s, t) = T_{(x,t)}H(X) \in T_{H(s,t)}M$, wie gefordert.

20.4 Definition. Sei $H \colon N \to M$ eine Abbildung, $X \in \Gamma(TN)$. Dann definiert man das Vektorfeld $\overline{X}$ entlang von H wie in Beispiel 20.3.

Ebenso, wie wir Vektorfelder entlang von Kurven ableiten wollten, werden wir das auch mit Vektorfeldern entlang von Variationen machen müssen. Dazu dient folgender Satz:

20.5 Satz. *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang ∇. Sei $H\colon N \to M$ glatte Abbildung. Es gibt genau eine bilineare Abbildung $\overline{\nabla}$, die kovariante Ableitung entlang von H, die einem Vektorfeld $X \in \Gamma(TN)$ und einem Vektorfeld W entlang von H ein Vektorfeld $\overline{\nabla}_X W$ entlang von H zuordnet, und so dass gilt*

(1) $\overline{\nabla} fXW = f\overline{\nabla}_X W$, $\overline{\nabla}_X(fW) = ff\overline{\nabla}_X W + X(f)\cdot W$.

(2) Falls es Vektorfeld $\tilde{W} \in \Gamma(TM)$ gibt, so dass $\tilde{W}(H(y)) = W(y)$ für alle $y \in N$, so gilt
$$\overline{\nabla}_X W(y) = \nabla_{T_y H(X)} \tilde{W}.$$
(Beachte, dass $\nabla_U V$ tensoriell in U ist, also hier nur der Wert $U(H(y))$ an einem festen Punkt $H(y)$ gebraucht wird, um $(\nabla_U V)(H(y))$ zu bestimmen.

Anwenden werden wir dies insbesondere auf Variationen, also $N = [a,b] \times (-\epsilon,\epsilon)$.

Beweis. Der Satz folgt genauso wie bei der kovarianten Ableitung entlang von Kurven. □

Es ergeben sich direkt Eigenschaften ganz entsprechend denen des Levi-Civita Zusammenhangs ∇, indem man einfach die Regeln aus Satz 20.5 anwendet.

20.6 Definition. Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $c\colon [a,b] \to M$ glatte Kurve. Wir definieren die *Energie* von c als
$$E(c) := \frac{1}{2}\int_a^b |c'(s)|^2 \, ds;$$
die Länge war
$$L(c) = \int_a^b |c'(s)| \, ds.$$

20.7 Satz. *Erste Variantionsformel.* *Sei $H\colon [0,1]\times(-\epsilon,\epsilon); (s,t) \mapsto H(s,t) =: c_t(s)$ eine Variation der Kurve c_0. Dann gilt*
$$\frac{d}{dt}E(c_t)) = \left[g(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}(0,s), c'(s)) \right]_0^1 - \int_0^1 g(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}(0,s), \overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial s})\, ds. \qquad (20.8)$$

Es gilt: die kritischen Punkte des Energiefunktionals, d.h. die Kurven c_0 mit $\frac{d}{dt}E(c_t)|_{t=0} = 0$ für jede Variation $H\colon [0,1]\times(-\epsilon,\epsilon)$ von c_0 mit festen Endpunkten, d.h. mit $H(0,t) = c_0(0)$ und $H(1,t) = c_0(1)$ für jedes t, sind genau die Geodäten.

Falls c_0 nach Bogenlänge parametrisiert ist, so gilt für jede Variation H von c_0
$$\frac{d}{dt}E(c_t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}L(c_t)|_{t=0}.$$

Eine Kurve c_0 ist kritischer Punkt für L (entsprechend definiert wie für E) genau dann, wenn eine Umparametrisierung von c_0 eine Geodäte ist.

Beweis. Zum Beweis wird folgendes Lemma benutzt:

20.9 Lemma. *Sie Y ein Vektorfeld entlang einer Kurve $c_0\colon [a,b] \to M$. Dann gibt es eine Variation $H\colon [a,b] \times (-\epsilon,\epsilon) \to M$ von c_0, so dass $Y(s) = \overline{\frac{\partial}{\partial t}}(s,0)$ für alle $s \in [a,b]$. Falls $Y(a) = Y(b) = 0$, kann man die Variation so wählen, dass sie konstante Endpunkte hat.*

Beweis. Man konstruiere $H(s,t) := \exp_{c_0(s)}(tY(s))$; für genügend kleine $\epsilon > 0$ liefert diese Definition das gewünschte. □

Man beweist nun Gleichung (20.8) durch Ableiten von $E(c_t)$. Durch Einsetzen sieht man, dass für Variationen von Geodäten mit konstanten Endpunkten diese Ableitung verschwindet.

Sei umgekehrt c_0 eine Kurve und $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $f(s) > 0$ für $x \in (0,1)$ und $f(0) = f(1) = 0$. Dann gibt es zu dem Vektorfeld $Z(s) := f(s)\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial s}$ entlang von c_0 eine Variation $H\colon [0,1] \times (-\epsilon,\epsilon)$ mit festen Endpunkten und mit $\overline{\partial/\partial t}(s,0) = Z(s)$. Ist c_0 kritisch für E, so gilt also

$$0 = \int_0^1 f(s) g(\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial s}, \overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial s})\, ds.$$

Da f fast überall positiv und $g(v,v) \geq 0$ ist, folgt dass der Integrand identisch verschwindet, also c_0 genau die Geodätengleichung erfüllt. □

Damit haben wir die Geodäten auch als Lösung eines recht einfachen Variationsproblems erkannt. Dies erlaubt es nun, die Krümmung mit den Eigenschaften von Geodäten in Verbindung zu bringen. Dazu dient

20.10 Satz. ***Zweite Variationsformel:*** *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $c_0\colon [0,L] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte (insbesondere $L(c_0) = L$). Sei $H\colon [0,L] \times (-\epsilon,\epsilon); (s,t) \mapsto M$ ein Variation von c_0. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} E(c_t)|_{t0} &= \Big[g(\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial t}(s,0), c_0'(s))\Big]_0^L \\ &+ \int_0^L \Big|\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial t}(s,0)\Big|^2 - R(\overline{\partial/\partial t}, c_0', \overline{partial/\partial t}, c_0')\, ds.\end{aligned}$$

Für die Länge gilt entsprechend

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} L(c_t)|_{t0} &= \Big[g(\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial t}(s,0), c_0'(s))\Big]_0^L \\ &+ \int_0^L \Big|\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial t}(s,0)\Big|^2 - R(\overline{\partial/\partial t}, c_0', \overline{partial/\partial t}, c_0') - g(c_0', \overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial t}(s,0))\, ds.\end{aligned}$$

Hierbei ist R der Riemannsche $(0,4)$-Krümmungstensor.

Beweis. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} g(\overline{\partial/\partial s}, \overline{\partial/\partial s}) = 2g(\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial t}, \partial/\partial s).$$

Nochmaliges Ableiten liefert

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(\overline{\partial/\partial s}, \overline{\partial/\partial s}) = 2g(\overline{\nabla}_{\partial/\partial t}\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial t}, \partial/\partial s) + 2g(\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial t}, \overline{\nabla}_{\partial/\partial t}\partial/\partial s).$$

Da der Kommutator von $\partial/\partial s$ und $\partial/\partial t$ verschwindet, gilt

$$\overline{\nabla}_{\partial/\partial t}\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial t} = \overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\nabla}_{\partial/\partial t}\overline{\partial/\partial t} - R(\overline{\partial/\partial t}, \overline{\partial/\partial s})\overline{\partial/\partial t}.$$

Einsetzen liefert

$$\frac{\partial^2}{2\partial t^2} g(\overline{\partial/\partial s}, \overline{\partial/\partial s}) = g(\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\nabla}_{\partial/\partial t}\overline{\partial/\partial t}, \overline{\partial}/\partial s) - R(\overline{\partial/\partial t}, \overline{\partial/\partial s}, \overline{\partial/\partial t}, \overline{\partial/\partial s}) + \left|\overline{\partial}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial t}\right|^2.$$

Da c_0 Geodäte ist für $t = 0$ auch $\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial s} = 0$. Somit, nochmals benutzend, dass der Zusammenhang mit g verträglich ist, folgt durch Integration die Behauptung. □

20.11 Satz. *Sei M kompakte Mannigfaltigkeit. Sei $\gamma\colon S^1 \to M$ eine glatte Abbildung welche nicht homotop zur konstanten Abbildung ist. Dann gibt es eine Geodäte $c\colon S^1 \to M$ welche homotop zu γ ist, und so dass $L(c)$ das Minimum aller Längen von zu γ homotopen Schleifen realisiert.*

Hierbei ist $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. $c\colon S^1 \to M$ heißt Geodäte*, falls $c \circ \exp$ Geodäte, wobei $\exp\colon \mathbb{R} \to S^1; t \mapsto \exp(2\pi i t)$, und $L(c) := L(c \circ \exp|_{[0,1]})$.*

Beweis. Sei L das Infimum der relevanten Längen und sei c_i eine Folge von Schleifen homotop zu c, so dass $L(c_i) \xrightarrow{i\to\infty} L$.

Indem wir die c_i ggf. noch verkürzen, können wir sie zu auf vorgegebenen Intervallen $[t_{i-1}, t_i]$ stückweise Geodäten umformen. Nach übergang zu einer Teilfolge können wir mit Arzela-Ascoli annehmen, dass c_i gleichmäßig gegen eine Schleife c konvergiert, so dass die Ableitungen der Einschränkungen auf die $[t_{i-1}, t_i]$ ebenfalls gleichmäßig konvergieren. Die Limeskurve ist also wieder stückweise C^1 und hat Länge L. Wegen der lokalen Kontrahierbarkeit von M ist sie homotop zu den c_i. Da $L(c) = L$ minimal ist, kann man die Länge nicht lokal verkleinern. Also ist c eine Geodäte. □

20.12 Satz. ***Satz von Synge****. Sei (M, g) kompakt, zusammenhängend, von gerader Dimension, orientierbar mit strikt positiver Schnittkrümmung. Dann ist M einfach zusammenhängend.*

Falls M nicht orientierbar ist, gilt $\pi_1(M) \cong, \mathbb{Z}/2$.

Beweis. Wir machen folgende (vorläufige) Definition: M heißt orientierbar, wenn der Paralleltransport entlang jeder Schleife $c\colon S^1 \to M$ eine Abbildung aus $SO(T_{c(1)}M)$ induziert.

Eine Mannigfaltigkeit ist einfach-zusammenhängend, wenn jede Schleife homotop zu einer konstanten Schleife ist.

Zum Beweis des Satzes nehmen wir nun das Gegenteil an. Sei also, mit Satz 20.11 $c_0\colon S^1 \to M$ eine geodätische Schleife minimaler Länge in ihrer Homotopieklasse. Damit hat sie auch minimale Energie.

Der Paralleltransport $P\colon T_{c_0}(1)M \to T_{c_0}(1)M$ entlang von c ist orientierungserhaltend und läßt außerdem sowohl $c_0'(1)$ als auch dessen orthogonales Komplement $E \subset T_{c_0(1)}M$ invariant. Nun ist E von ungerader Dimension. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass dann auch ein (zweier) Vektor $0 \neq v \in E$ existiert mit $Pv = v$. Sei nun Y ein paralleles Vektorfeld entlang von c_0 mit $Y(1) = v$ und $H\colon S^1 \times (-\epsilon, \epsilon); (s,t) \mapsto H(s,t) = c_t(s)$ eine entsprechende Variation mit $\overline{partial/\partial t} = Y$.

Dann ist $dL(c_t)/dt = 0$ bei $t = 0$ und da c Schleife und Y parallel

$$\frac{d^2}{dt^2} L(c_t)|_{t=0} = -\int_0^L R(Y, c', Y, c')\, ds < 0.$$

Nach der Taylorformel wäre dann aber für genügend kleine $t \neq 0$ $L(c_t) < L(c_0)$, im Widerspruch zur Wahl von c_0.

Der Satz über die nicht-orientierbaren Mannigfaltigkeiten wird so bewiesen: die entweder 2-blättrige Orientierungsüberlagerung $\overline{M}$ von M ist orientierbar und hat dieselben lokalen metrischen Eigenschaften, also nach dem gerade bewiesenen ist sie einfachzusammenhängend, und somit hat M selbst eine Fundamentalgruppe der Ordnung 2. □

20.2 Jakobifelder

Wir haben bisher Variationen von Kurven angeschaut, bei denen vielleicht eine Kurve (c_0) eine Geodäte war. Nun wollen wir die Besonderheiten studieren, die sich ergeben, wenn man eine ganze Variation durch Geodäten durchführt.

20.13 Satz. *Sei $H\colon [0, C] \times (-\epsilon, \epsilon) \to (M, g); (s, t) \mapsto H(s, t) =: c_t(s)$ eine Variation einer Geodäten $c_0(t)$, so dass alle Kurven c_t Geodäten sind. Dann erfüllt $X(s) := \overline{\partial/\partial t}|_{(s,0)}$ die Differentialgleichung*

$$\overline{\nabla}_{\partial/\partial s} \overline{\nabla}_{\partial/\partial s} X = R(X, c_0')c_0'. \tag{20.14}$$

Umgekehrt ergibt sich jedes Vektorfeld $X(s)$ entlang von $c_0(s)$, welches die Differentialgleichung (20.14) *erfüllt, auf genau diese Weise aus einer Variation von Geodäten.*

20.15 Definition. Ein Vektorfeld $X(t)$ entlang einer Geodäten c, welches die Differentialgleichung (20.14) erfüllt, heißt *Jakobi-Vektorfelder*, oder kurz *Jakobifeld*.

Beweis. **Beweis von Satz 20.13.**
Sei $\underline{H(s,t)} = c_t(s)$ eine Variation von Geodäten c_t. Wir berechnen einfach mit $X = \overline{\partial/\partial t}$, benutzend dass $\partial/\partial t$ und $\partial/\partial s$ kommutieren

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\partial/\partial s} \overline{\nabla}_{\partial/\partial s} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} &= \overline{\nabla}_{\partial/\partial s} \overline{\nabla}_{\partial/\partial t} \overline{\frac{\partial}{\partial s}} \\ &= \overline{\nabla}_{\partial/\partial t} \overline{\nabla}_{\partial/\partial s} \overline{\frac{\partial}{\partial s}} + R(\overline{\partial/\partial t}, \overline{\partial/\partial s})\overline{\partial/\partial t} = R(\overline{\partial/\partial t}, \overline{\partial/\partial s})\overline{\partial/\partial t}\end{aligned}$$

da alle c_t Geodäten sind und damit $\nabla_{\partial/\partial s} \overline{\partial/\partial s}$ überall verschwindet.

Um zu gegebenem S die Existenz zu beweisen, benötigen wir ein weiteres fundamental Resultat über Jakobifelder:

20.16 Satz. *Sei $c\colon [0, L] \to M$ eine Geodäte in (M, g) und $X_0, Y_0 \in T_{c(0)}M$ zwei Vektoren. Dann existiert ein eindeutiges Jakobifeld X entlang von c mit $X(0) = X_0$ und $(\overline{\nabla}_{\partial/\partial s} X)(0) = Y_0$.*

Beweis. Die Jakobifeld-Gleichung (20.14) ist eine lineare gewöhnliche homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine vektorwertige Funktion von t (benutze den Paralleltransport, um in eine $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion zu übersetzen). Zu vorgegebenem Anfangswert und Anfangsableitung hat sie daher genau eine Lösung. □

Nun sei ein Jakobifeld X entlang der Geodäten $c_0\colon [0,L] \to M$ gegeben. Wir betrachten die eindeutige Geodäte $h\colon (-\epsilon,\epsilon) \to M$ mit $h(0) = c_0(0)$ und $h'(0) = X(0)$, und transportieren $c_0'(0)$ parallel entlang von h zu einem Vektorfeld Y und $\overline{\nabla}_{\partial/\partial s} X(0)$ parallel entlang von h zu einem Vektorfeld Z entlang von h. Definiere dann

$$H(s,t) := \exp_{h(t)}(s(Y(t) + tZ(t))).$$

Da $H(s,0)$ für $s \in [0,L]$ definiert ist, gibt es kleines $\epsilon > 0$, so dass auch $H(s,t)$ für $(s,t) \in (-\epsilon,\epsilon) \times [0,L]$ definiert ist. Nach konstruktion ist jedes $c_t(s) = H(s,t)$ eine Geodäte. Also ist das zugehörige $\overline{\partial/\partial t}$ ein Jakobifeld. Für $s = 0$ hat es nach Konstruktion den Wert $X(0)$, und für $s = t = 0$

$$\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial t} = \overline{\nabla}_{\partial/\partial t}\overline{\partial/\partial s} = \overline{\nabla}_{\partial/\partial t}(Y(t) + tZ(t)) = Z(0) = \overline{\nabla}_{\partial/\partial s} X(0).$$

Da Jakobifelder mit vorgegebenem Anfangswert und Ableitung nach Satz 20.16 eindeutig sind, stimmt X mit $\overline{\partial/\partial t}$ überein, wie verlangt. $\square$

20.17 Beispiel. Seien $v, w \in S^n$. $v \perp w$ Die Kurve $c(s) = \cos(s)v + sin(s)w$ ist dann ein Großkreis, also eine Geodäte, mit $c'(s) = -sin(s)v + \cos(s)w \in T_{c(s)}S^n$. Sei nun auch $u \in S^n$ mit $u \perp v$ und $u \perp w$, also insbesondere $n \geq 2$. Dann erhält man eine Variation $H(s,t) := \sin(s)v + \cos(s)(\sin(t)u + \cos(t)w)$. Hier gilt nun $\overline{\partial/\partial t} = \cos(s)(\cos(t)u - \sin(t)w) \in T_{H(s,t)}S^n$.

Somit

$$\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\nabla}_{\partial/\partial s}\overline{\partial/\partial t} = -\overline{\partial/\partial t} = -R(\partial/\partial s, \partial/\partial t)\overline{\frac{\partial}{\partial s}}.$$

wobei die letzte Gleichung einfach die Jakobi-Gleichung ist. Man bilde nun das Skalarprodukt mit $\left|\overline{\partial/\partial t}\right|^{-2}$ (für $\cos(s) \neq 0$) und erhält so die Schnittkrümmung. Da $\overline{\partial/\partial s}$ und $\overline{\partial/\partial t}$ ein Orthogonalbasis bildet (solange $\sin(s) \neq 0$), und jede Ebene in jedem T_pS^n auf diese Weise aufgespannt werden kann (durch geeignete Wahl von u, v, w), ist die Schnittkrümmung von S^n konstant $+1$.

20.18 Bemerkung. Unter Benutzung des Hyperboloidmodells von $\mathbb{H}^n$ berechnet man auf identische Weise dass die Schnittkrümmung von $\mathbb{H}^n$ konstant -1 ist.

20.3 Cut Locus

20.19 Definition. Sei (M,g) vollstänsdige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$.

Sei $q \in M$. q heißt *konjugiert zu* p, falls es eine (abstandsminimierende) Geodäte $c\colon [0,L] \to M$ von p nach q und ein nicht-verschwindendes Jakobi-Feld Y entlang c mit $Y(0) = 0 = Y(L)$ gibt.

Der *cut locus* von p in M ist die Teilmenge $cut_p := \{q \in M \mid$ entweder q konjugiert zu p oder es gibt zwei verschiede

20.20 Satz. *Sei (M,g) vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$.*

Es gilt $M = cut_p \amalg M_{reg}(p)$. Hierbei ist $M_{reg}(p)$ diffeomorph zur offenen Scheibe $(D^\circ)^{\dim M}$ und definiert als $M_{reg}(p) := \exp_p(\{v \in T_pM \mid [0,1] \to M; t \mapsto \exp_p(tv)$ ist global abstandsminimierende Geodäte$\})$.

20.4 Myers Theorem

20.21 Satz. *Sei (M,g) vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit* $\mathrm{Ric} \geq \lambda g$ *für ein $\lambda > 0$. Dann ist der Durchmesser von M durch $\pi\sqrt{(n-1)/\lambda}$ nach oben beschränkt.*

Außerdem ist M kompakt und hat endliche Fundamentalgruppe.

Beweis. Per Definition gilt $\mathrm{diam}(M) = \sup\{d(p,q) \mid pq, \in M\}$. Seien $p, q \in M$ mit $d(p,q) = L$ und sei (da M vollständig) $c\colon [0,L] \to M$ eine nach bogenlänge parametrisierte Geodäte von p nach q. Sei $Y_1, \dots, Y_n$ eine Basis von parallelen Vektorfeldern entlang von c (erhält man durch paralleltransport), mit $Y_1 = c'$.

Setze $X_i(s) := \sin(\pi s/\rho) Y_i(s)$. Dies sind Vektorfelder entlang c, welche an den Endpunkten verschwinden. Seien $H_i\colon [0,L] \times (-\epsilon, \epsilon)$ dazu gehörige Variationen der Geodäten c, d.h. $\overline{partial/\partial t_i} = X_i$.

Wir benutzen nun die zweite Variationsformel. Diese besagt (mit $L = \rho$)

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i^2} E(t_i) = \Big[g(\overline{\nabla}_{\partial/\partial s} \overline{\partial/\partial t_i}, \overline{\partial/\partial s}) \Big]_{s=0}^{s=L} + \int_0^L \left| \overline{\nabla}_{\partial/\partial s} \overline{\partial/\partial t_i} \right|^2 - R(\overline{\partial/\partial s}, \overline{\partial/\partial t_i}, \overline{\partial/\partial s}, \overline{\partial/\partial t_i}).$$

Hier ist nun nach Konstruktion $\overline{\partial/\partial t_i}(s) = X_i(s) = \sin(\pi s/\rho) Y_i(s)$ mit $Y_i(s)$ parallel. Damit gilt $\overline{\nabla}_{\partial/\partial s} \overline{\partial/\partial t_i} = \pi/\rho \cos(\pi s/\rho) Y_i(s)$ und ist insbesondere überall orthogonal zu $\overline{\partial/\partial s} = c'(s)$. Somit verschwindet hier der Randterm. Nochmaliges Ableiten liefert

$$\overline{\nabla}_{\partial/\partial s} \overline{\nabla}_{\partial/\partial s} X_i(s) = -\pi^2/\rho^2 X_i(s).$$

Weiterhin beachte, dass

$$\frac{\partial}{\partial s} g(X_i(s), \overline{\nabla}_{\partial/\partial s} X_i(s)) = \left| \overline{\nabla}_{\partial/\partial s} X_i(s) \right|^2 + g(X_i(s), \overline{\nabla}_{\partial/\partial s} \overline{\nabla}_{\partial/\partial s} X_i(s)).$$

Man integriere nun diese Gleichung und benutze $X_i(0) = 0 = X_i(L)$, um zu erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t_i^2} E(t_i) &= -\int_0^L g(X_i(s), \overline{\nabla}_{\partial/\partial s} \overline{\nabla}_{\partial/\partial s} X_i(s) + R(X_i(s), \overline{\partial/\partial s}, X_i(s), \overline{\partial/\partial s}))\, ds \\ &= -\int_0^\rho \sin^2(\pi s/\rho) \left(\pi^2/\rho^2 - R(c', X_i, c', X_i) \right). \end{aligned}$$

wobei am Ende $Y_i(s) = \sin(\pi s/\rho) X_i(s)$ eingesetzt wurde, und die Tatsache dass die X_i eine Orthonormalbasis bilden.

Nun ist c eine global Abstandsminimierende Geodäte. Entsprechend ist sie ein echtes (lokales) Minimum für das Energiefunktional. Die erste Ableitung der Energie verschwindet, und die zweite Ableitung muss ≥ 0 sein, sonst wäre nach Satz von Tayler diese Eigenschaft nicht gew"'ahrleistet, also $\frac{\partial^2}{\partial t_i^2} E(t_i) \geq 0$. Wir bilden nun die Summe dieser Ungleichungen für $i = 2, \dots, n$ und erhalten, nach definition der Ricci-Krümmung

$$0 \leq \int_0^\rho \sin^2(\pi s/\rho) \left(n-1)\pi^2/\rho^2 - \mathrm{Ric}(c', c') \right)\, ds$$

Da nach Voraussetzung $\mathrm{Ric}(c', c') \geq \lambda$, kann dies nur gelten wenn $\rho < \pi\sqrt{(n-1)/\lambda}$, wie behauptet.

Nach dem Satz von Hopf-Rinow ist M, als abgeschlossene und beschr"'ankte Teilmenge von M also kompakt.

Die universelle Überlagerung von M hat aber jetzt die gleichen metrischen Eigenscharten, ist insbesondere ebenfalls kompakt. Somit muss die Überlagerung eine endliche Überlagerung und damit die Fundamentalgruppe endlich sein. □

21 Riemannsche Untermannigfaltigkeiten

Sei $(\tilde{M}, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $M \subset \tilde{M}$ eine Untermannigfaltigkeit mit der induzierten Riemannschen Metrik, $i\colon M \to \tilde{M}$ die Inklusion. Als Beispiel haben wir schon eingebettete Flächen im $\mathbb{R}^3$ kennen gelernt.

Unser Ziel ist nun, die (metrischen) Eigenschaften von $\tilde{M}$, M und der Einbettung i in Beziehung zu setzen.

21.1 Definition. Die zweite Fundamentalform der Einbettung i ist der Tensor $II \in \Gamma(Sym^2(TM) \otimes i^*T\tilde{M})$ definiert durch

$$II_p(u, v) := \tilde{\nabla}_U V - \nabla_U V,$$

wobei $p \in M$, $u, v \in T_pM$, $U, V \in \Gamma(T\tilde{M})$ mit $U(p) = u$, $V(p) = v$ und so dass $U|_M, V|_M \in \Gamma(TM)$. ∇ ist der Levi-Civita Zusammenhang auf M und $\tilde{\nabla}$ derjenige auf $\tilde{M}$.

II mißt also den Unterschied der beiden Zusammenhänge.

21.2 Bemerkung. Es ist leicht zu zeigen, dass II tensoriell (i.e. $C^\infty(M)$-linear) ist, und insbesondere nicht von den Fortsetzungen U und V abhängt, und dass II symmetrisch ist (man benutzte, dass der Kommutator auf M und $\tilde{M}$ übereinstimmt).

Zur Namensgebung: als *erste Fundamentalform* wird die Riemannsche Metrik aufgefaßt.

21.3 Lemma. *In der Situation von Definition 21.1 gilt*

$$II(u, v) = (\tilde{\nabla}_U V)^\perp,$$

wobei $X^\perp$ der Anteil von X orthogonal zu $T_pM \subset T_p\tilde{M}$ ist.

Beweis. Diese Eigenschaft der kovarianten Ableitung wurde bereits in Aufgabe 17.22 nachgeprüft. □

21.4 Definition. Sei $M \subset \tilde{M}$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit einer m-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Dann kann man $T\tilde{M}$ auf M einschränken und erhält so ein m-dimensionales Vektorbündel $T\tilde{M}|_M$. Dieses enthält als Unterbündel TM. Das orthogonale Komplement (faserweise gebildet) von TM in $T\tilde{M}|_M$ wird das *Normalenbündel* ν genannt.

Die entsprechende Konstruktion kann man immer durchführen, wenn ein Unterbündel E_1 eines euklidischen Vektorbündels E vorliegt.

Hat man keine euklidische Metrik auf E zur Verfügung, wird das Normalenbündel definiert als das (faserweise) Quotientenbündel E/E_1.

Beachte, dass das Normalenbündel 1-dimensional ist, falls $\dim(M) = \dim(\tilde{M}) - 1$.

21.5 Aufgabe. Zeige, dass die in Definition 21.4 konstruierten Objekte wirklich (auf kanonische Weise) Vektrorraumbündel sind.

21.6 Definition. Die Weingarten Abbildung einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \tilde{M}$ mit $\dim(M) = n$ und $\dim(\tilde{M}) = n + 1$ mit (lokalem) Einheitsnormalenfeld $\nu \in \Gamma(T\tilde{M}|_M)$ ist definiert als) $S\colon T_pM \to T_pM; S(u) := \tilde{\nabla}_u \nu$ (wobei eine Fortsetzung von ν auf $\tilde{M}$ benutzt wird).

Wir definieren außerdem die reellwertige zweite Fundamentalform $l(u, v)$ durch $l(u, v) \cdot \nu = -II(u, v)$.

21.7 Lemma. $l(u, v) = g(S(u), v)$

Beweis. $g(S(u), v) = g(\tilde{\nabla}_u \nu, v) = -g(\nu, \tilde{\nabla}_u v) = l(u, v)$. □

21.8 Definition. Gauss-Krümmung

$$\overline{K}(u, v) := \frac{l(u, u)l(v, v) - l(u, v)^2}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2},$$

unabhängig vom vorzeichen von ν und damit für die Einbettung $M \hookrightarrow \tilde{M}$ von Kodimension 1 wohldefiniert.

21.9 Satz. ***(Gauss Theorema Egregium)***
Es gilt für $x, y, u, v \in T_pM \subset T_p\tilde{M}$

$$R(x, y, u, v) = \tilde{R}(x, y, u, v) + l(x, u)l(y, v) - l(x, v)l(y, u)$$

Für die Schnittkrümmung folgt

$$K(x, y) = \tilde{K}(x, y) + \overline{K}(x, y).$$

Beweis. $\nabla_x Y = \tilde{\nabla}_x Y - (\tilde{\nabla}_x Y)^\perp = \tilde{\nabla}_x Y - l(x, y)\nu$. Somit

$$\tilde{\nabla}_x \tilde{\nabla}_Y U = \tilde{\nabla}_x (\nabla_Y U - l(y, u)\nu) = \nabla_X \nabla_Y U - l(X, \nabla_Y U)\nu - l(Y, U)\tilde{\nabla}_X \nu - (X.l(y, u))\nu.$$

Somit, nach Skalarprodukt mit v

$$g(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y U, v) - g(\nabla_X \nabla_Y U, v) = l(Y, U)\, \underbrace{g(\tilde{\nabla}_X \nu, V)}_{=l(x,v)}$$

Damit ergibt sich die erste Gleichung aus der Definition der Krümmung, die zweite folgt durch Spezialisierung. □

21.10 Beispiel. Sei als Spezialfall $\tilde{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ mit der flachen Standardmetrik. Dann sieht man, dass die Gaußkrümmung eine intrinsische Größe ist, die nicht von der Einbettung abhängt (und zwar gleich der Schnittkrümmung der Untermanngifaltigkeit).

Dies kann man insbesondere auf den Fall von Flächen in $\mathbb{R}^3$ spezialisieren. Dort ist die Weingarten Abbildung (wie früher definiert) identisch mit unserer oben definierten Weingarten Abbildung (da in $\mathbb{R}^n$ $\tilde{\nabla}$ die gewöhnliche Ableitung ist). Wir sehen insbesodnere, dass sie symmetrisch ist.

Beachte, dass die früher definierte Gaußkrümmung $\det(W)$ in diesem Fall gerade die oben definierte Gaußkrümmung ist.

22 Riemannsche Submersionen

Das “Gegenteil” von Einbettungen sind Submersionen, also Abbildungen $p\colon \tilde{M} \to M$ mit $T_x p\colon T_x\tilde{M} \to T_{p(x)}M$ surjektiv für jedes $x \in \tilde{M}$.

22.1 Beispiel. Sei G eine Liegruppe, welche glatt auf einer Mannigfaltigkeit M operiere. Die Operation sei frei und proper. Letzteres heißt, dass für jede Kompakte Teilmenge $K \subset M$ die Menge $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ kompakten Abschluss in G hat.

Dann hat die Quotientenmenge M/G auf kanonische Weise die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit, und die Projektion $M \to M/G$ ist eine Submersion. Diese hat lokale Schnitte $U \subset M \to tildeM$.

Sie insbesondere H eine (abgeschlossene) Lie-Untergruppe einer Liegruppe G. H operiert auf G durch Linksmultikation. Diese Operation ist frei und proper, folglich erhält man eine Quotientenmannigfaltigkeit G/H (diese wird *homogener Raum* genannt), mit Submersion $G \to G/H$.

Beweis. Durch die freie Operation erhält man ein Unterbündel $U = \mathrm{im}(T_eG) \subset TM$, wobei die Abbildung $GtoM; x \mapsto gx$ in einer Umgebung der 1 verwendet wird. Sie V ein in einer Umgebung von x definiertes komplementäres Bündel. Wähle Riemannsche Metrik auf M bezüglich der U und V orthogonal werden. Dann wird $\exp_x|\colon V \to M \to M/G$ eine (inverse) Karte von M/G (hier braucht man, dass G proper operiert), und mit dieser Struktur ist außerdem offenbar $M \to M/G$ eine Submersion. □

22.2 Definition. (Bi)invariante Riemannsche Metrik auf G (biinvariant falls G kompakt).

22.3 Definition. Riemannsche Submersion: Submersion $p\colon (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ so dass $T_x p\colon H_x \to T_x M$ isometrie, wobei $H_x := \ker(T_x p)^\perp$.

22.4 Satz. *Falls $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeit mit properer freier G-Operation, so gibt es eindeutige Metrik auf $M = \tilde{M}/G$, so dass p eine Riemannsche Submersion wird.*

Beweis. Definiere die Metrik durch liften; dies ist wohldefiniert, da G isometrsich operiert. □

22.5 Beispiel. Auf $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^n$ operiert $S^1 \subset \mathbb{C}$ isometrisch, frei und proper; der Quotient ist $\mathbb{C}P^n$, erhält also eine kanonische Sumersionsmetrik, die Fubini-Study Metrik.

22.6 Satz. *Sei $p\colon \tilde{M} \to M$ Submersion. Dann gilt*

(1) p verkleinert Abstände.

(2) Falls $\tilde{c}$ Geodäte in $\tilde{M}$ mit $\tilde{c}'(0)$ horizontal, dann ist $\tilde{c}'(t)$ immer horizontal, und das Bild ist ebenfalls eine Geodäte.

(3) Umgekehrt sind horizontale Lifts von Geodäten in M Geodäten in $\tilde{M}$.

Beweis. Kurven werden beim Projezieren nicht länger, dies beweist i. Falls c Geodäte in M, lifte c' zu horizontalem Vektorfeld in $\tilde{M}$ (genauer in der Umf $p^{-1}(\mathrm{im}(c))$, und lifte lokal zu Integralkurve $\tilde{c}$, welche nicht länger ist als c, also wegen erster Ugl lokal minimierend.

Für ii), vergleiche Geodäte $\tilde{\gamma}$ mit der gelifteten zum Bildvektor $Tp(\tilde{\gamma}'(0))$. Beide haben gleichen Anfangspunkt und Anfangsgeschwindigkeit, stimmen also überein. $\square$

22.7 Lemma. *Sei $p\colon \tilde{M} \to M$ Riemannsche Submersion.*

Für Vektorfelder $X \in \Gamma(TM)$ gibt es horizontale Lifts $\tilde{X}$. $V \in \Gamma(T\tilde{M})$ ist vertikal, *falls $Tp(V) = 0$.*

22.8 Lemma. $[\tilde{X}, \tilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]}$ *ist vertikal, genause $[\tilde{X}, U]$ für jedes vertikale Vektorfeld U.*

Beweis. Benutze Kriterium: U horizontal genau wenn $U(f \circ p) = 0$ für jedes $f \in C^\infty(M)$. $\square$

22.9 Satz. $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \widetilde{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v$.

22.10 Theorem. *X, Y orthonormal. Dann $K(X,Y) = \tilde{K}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{3}{4}\left|[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v\right|^2$.*

23 Struktur von allgemeinen topologishcen Räumen und Mannigfaltigkeiten —ein Ausbilck

Im allgemeinen ist es sehr schwierig, die Struktur eines topologischen Raumes zu verstehen. Ein Ansatz zur Beschreibung topologischer Räume besteht darin, sie in "einfach Stücke zu zerlegen. Dann kann man hoffen, durch reine Kombinatorik herauszubekommen, wie sich diese Stücke zum topologischen Raum zusammensetzen.

23.1 Beispiel. In den $\mathbb{R}^3$ eingebettete 2-dimensionale geometrische Simplizialkomplexe; hier werden 2-dimensionale Dreiecke entlang gemeinsamer Kanten und Ecken zusammengeklebt.

Ein Beispiel ist (der Rand) eines Tetraeders.

23.2 Definition. Ein topologischer Raum U heißt *zusammenziehbar*, falls es ein $x_0 \in U$ und eine stetige Abbildung $H\colon U \times [0,1] \to U$ gibt mit $H(x,0) = x$ und $H(x,1) = x_0$ für alle $x \in U$.

Man nennt H eine *Kontraktion*, und man schreibt $U \simeq \{*\}$.

23.3 Beispiel. Die die abgeschlossene Scheibe $D^n \subset \mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar, genauso $\mathbb{R}^n$.

23.4 Definition. Sei X topologischer Raum, $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Die Überdeckung heißt *gut*, falls für jedes endliche Teilmenge $\{i_1, \dots, i_k\} \subset I$ gilt

$$U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k} \begin{cases} \simeq \{*\}; & U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k} \neq \emptyset \\ = \emptyset : & \text{sonst.} \end{cases}$$

23.5 Beispiel. Die übliche Zerlegung von S^1 in 2 offene Intervalle ist nicht gut, da die Schnittmenge aus 2 Komponenten besteht.

Die feinere Zerlegung von S^1 in 3 ist eine gute Überdeckung (sogar eine endliche).

23.6 Bemerkung. Ist eine gute Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ eines topologischen Raums X gegeben, so kann man (im Prinzip) jede *Homologiegruppe* von X alleine aus der Kenntnis, welche der Schnittmengen $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$ leer sind und welche nicht, bestimmen.

23.7 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex und offen. Dann ist U homöomorph zu $(D^n)^\circ$, der offenen Scheibe.*

Beweis. Sei $x_0 \in U$ und $S_1^{n-1} \subset T_{x_0}U$ die Sphäre vom Radius 1 (dazu benutze man, dass $T_{x_0}U$ kanonisch zu $\mathbb{R}^n$ isomorph ist, dann muss man noch nicht einmal ein Skalarprodukt wählen).

Setze $\alpha\colon S_1^{n-1} \to \mathbb{R}_{>0}; v \mapsto \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \mid x_0 + \lambda v \in U\}$. Dann liefert

$$h\colon U \to (D^n)^\circ; p = x_0 + \lambda v \mapsto \frac{\lambda}{\alpha(v)} v$$

einen Homöomorphismus, weil U konvex ist. □

23.8 Bemerkung. Wenn $U, V \subset \mathbb{R}^n$ konvex sind, dann auch $U \cap V$. Somit ist eine Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von $M \subset \mathbb{R}^n$ eine gute Überdeckung, falls jede der Mengen U_i konvex ist.

23.9 Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann existiert eine gute Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$, sogar so, dass für jede endliche Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$ gilt: $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k} \begin{cases} \approx (D^n)^*; & U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k} \neq \emptyset \\ = \emptyset; & \textit{sonst}. \end{cases}$*

Beweis. Ziel ist, dasselbe Konvexitätsprinzip wie in Bemerkung 23.8 zu verwenden. Dazu muss zunächst einmal sinnvoll definiert werden, was eine konvexe Menge auf einer Mannigfaltigkeit eigentlich sein soll. Dies hängt von zusätzlichen Wahlen ab: wähle eine Riemannsche Metrik g auf M.

Dann existiert (nach dem Satz über Existenz und Eindeutigkeit von Geodäten) eine offene Teilmenge $U \subset M \times M$, welche die Diagonale $\{(m, m) \in M \times M \mid m \in M\}$ enthält, und so dass für je zwei Element $(x, y_1), (x, y_2) \in U$ eine eindeutige Geod"'ate $\gamma\colon [0, 1] \to M$ von y_1 nach y_2 existiert, Diese erfüllt außerdem $(x, \gamma(t)) \in U$ für alle $t \in [0, 1]$.

Da also die offenen Mengen $U_x := \{y \in M \mid (x, y) \in Y\}$ geodätisch konvex sind, ist U_x homöomorph zu $(D^n)^\circ$. Dies sieht man genauso wie in Lemma 23.7, man muss nur den Ausdruck $x_0 + \lambda v$ ersetzen durch $\exp_{x_0}(\lambda v)$.

Wähle also eine offene Überdeckung durch solche U_x. Dann ist jede Schnittmenge $U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_k}$ ebenfalls geodätisch konvex. Hierbei muss man die Eindeutigkeit verwenden: falls γ Geodäte von y_1 nach y_2 in U_{x_1} und $y_1, y_2 \in U_{x_2}$, so ist γ auch die in U_{x_2} verlaufende Geodäte von y_1 nach y_2, liegt also sogar in $U_{x_1} \cap U_{x_2}$.

Damit ist die Aussage bewiesen. □

23.10 Satz. *Sei $\tilde{M}$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $M \subset \tilde{M}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit und $\tilde{g}$ eine Riemannsche Metrik auf $\tilde{M}$. Definiere*

$$\nu := \{v \in T_x\tilde{M} \mid x \in M, v \perp T_xM \subset T_x\tilde{M}\}.$$

Dies ist ein glattes Vektorbündel über M, das sogenannte Normalenbündel *der Einbettung $M \hookrightarrow \tilde{M}$.*

Aussage: Es gibt eine offene Umgebung $U \subset \tilde{M}$ von M und einen Diffeomorphismus $\phi\colon \nu \to U$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \nu & \xrightarrow{\phi} & U \\ {\scriptstyle \mathit{Nullschnitt}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathit{Inklusion}} \\ M & \xrightarrow{\mathrm{id}|} & M \end{array}$$

Beweis. Betrachte die Abbildung $\hat{\phi}\colon \nu \to \tilde{M}; v \in T_xM \mapsto \exp_x^{\tilde{M}}(v)$. Diese Abbildung hat die folgenden Eigenschaften:

(1) $\hat{\phi}|_M = \mathrm{id}_M$.

(2) $\hat{\phi}$ ist gar nicht auf ganz ν, sondern auf einer offenen Teilmenge des Nullschnitts $M \subset \nu$ definiert.

(3) Die Berechnung des Differentials der Exponentialabbildung zeigt, dass $D_{(x,0)}\hat{\phi}$ invertierbar ist für jedes $x \in M$. Nach dem Satz über die Inverse Abbildung ist also $\hat{\phi}$ nach Einschränkung auf eine geeignete offene Umgebung von $(x, 0) \in \nu$ ein Diffeomorphismus auf seine Bildmenge (welche offen in $\tilde{M}$ ist).

(4) Wähle eine lokal endliche Familie $\{U_i\}_{i\in I}$ offener Teilmengen von ν, welche $M \subset \nu$ überdeckt, und so dass $\hat{\phi}|_{U_i}\colon U_i \to \hat{\phi}(U_i)$ ein Diffeomorphismus ist. Setze $U := \bigcup_{i\in I} U_i$. Durch verkleinern von U wir $\hat{\phi}|_U$ injektiv: Sei nämlich $A \subset U$ definiert durch $A := \{x \in U \mid x \in U_i \cap U_j \implies (\hat{\phi}|_{U_i})^{-1}(x) = (\hat{\phi}|_{U_j})^{-1}(x)\}$.

    Entscheidend ist dann, zu zeigen, dass A offen ist (Übungsaufgabe).

Man hat nun einen Diffeomorphismus $\hat{\phi}\colon A \to V$ mit $M \subset A \subset \nu$ und $M \subset V \subset \tilde{M}$ konstruiert, wobei A und V offen und $\hat{\phi}|_M = \mathrm{id}_M$.

Falls M kompakt, wähle nun $\epsilon > 0$, so dass $\{v \in \nu \mid |v| < \epsilon\} \subset A$. Indem man in jeder Faser den üblichen Diffeomorphismus $(D^n)^\circ \cong \mathbb{R}^n$ anwendet, erhält man einen Diffeomorphismus $\nu \to \{v \in \nu \mid |v| < \epsilon\}$. Komponiert mit $\hat{\phi}$ erhält man die gewünschte Abbildung.

Ist M nicht kompakt, wird es eine solche Konstante $\epsilon > 0$ im allgemeinen nicht geben.

Statt dessen kann man eine glatte Funktion $\epsilon\colon M \to (0, \infty)$ finden, so dass $\{v \in \nu \mid |v| \leq \epsilon(p(v))\}$ die Rolle der Menge der Vektoren von Länge kleiner der Konstanten ϵ spielt. Hier ist $p\colon \nu \to M$ die Bündelprojektion. Details sind Übungsaufgabe. ☐

23.11 Satz. *Seien M, N kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten, $f\colon M \to N$ stetig und $\epsilon > 0$. Dann gilt*

(1) Es gibt eine glatte Funktion $g\colon M \to N$ so dass $d(g(x), f(x)) \leq \epsilon$ für alle $x \in M$.

(2) Falls $\epsilon > 0$ hinreichend klein ist, so ist sogar $f \simeq g$, d.h. es existiert eine Abbildung (genannt Homotopie) $H\colon M \times [0, 1] \to N$ mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in M$.

23.12 Bemerkung. Die erste Aussage aus Satz 23.11 gilt auch, wenn M und N nicht kompakt sind.

Die zweite verallgemeinert sich, wenn man wie im Beweis von Satz 23.10 anstelle von Konstanten auch Funktionen $\epsilon\colon M \to (0,\infty)$ zuläßt; man muss dann voraussetzen, dass die Funktion genügend klein ist.

von Satz 23.11. Beweis von (2): Falls $\epsilon > 0$ hinreichend klein, existiert für jedes $x \in M$ eine eindeutige Geodäte $\gamma_x\colon [0,1] \to N$ von $f(x)$ nach $g(x)$. Diese h"'angt stetig von den Endpunkten ab, also auch von x. Man setzt dann $H(x,t) := \gamma_x(t)$.

Beweis von (1): Falls $N = \mathbb{R}^n$, wähle man eine lokal endliche offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von M mit untergeordneter glatte Teilung der Eins $(\phi_i)_{i\in I}$ und wähle für jedes i ein $x_i \in U_i$. Definiere dann $g(p) := \sum_{i\in I} \phi_i(p) f(x_i)$. Indem man den Durchmesser der U_i genügend klein wählt, wird g die gewünschte Eigenschaft erhalten.

Für beliebiges N wähle eine Einbettung $i\colon N \to \mathbb{R}^k$, mit Tubenumgebung $U \subset \mathbb{R}^k$ und Diffeomorphismus $\phi\colon U \to \nu$, wobei $p\colon \nu \to N$ das Normalenbündel. Zu $f\colon M \to N \xrightarrow{i} \mathbb{R}^k$ erhält man dann g mittels folgenden kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\hat{g}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] & U \subset \mathbb{R}^k \arrow[r, "\phi"] & \nu \arrow[d, "p"] \\
M \arrow[rr, "g"] & & N
\end{tikzcd}$$

□

Literatur

[1] Christian Bär. *Elementare Differentialgeometrie.* de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2001. 9.1, 9.2

[2] Marcel Berger. *A panoramic view of Riemannian geometry.* Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[3] William M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, No. 63.

[4] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology,* volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[5] Glen E. Bredon. *Topology and geometry,* volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1997. Corrected third printing of the 1993 original. 1

[6] Theodor Bröcker and Klaus Jänich. *Introduction to differential topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 1982. Translated from the German by C. B. Thomas and M. J. Thomas.

[7] Isaac Chavel. *Riemannian geometry—a modern introduction*, volume 108 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[8] James F. Davis and Paul Kirk. *Lecture notes in algebraic topology*, volume 35 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[9] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.

[10] Manfredo P. do Carmo. *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, volume 55 of *Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik [Vieweg Studies: Mathematics Course]*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1983. Translated from the English by Michael Grüter.

[11] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.

[12] Luther Pfahler Eisenhart. *Riemannian geometry*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Eighth printing, Princeton Paperbacks.

[13] William Fulton. *Algebraic topology*, volume 153 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course.

[14] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990. 1

[15] David B. Gauld. *Differential topology*, volume 72 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 1982. An introduction.

[16] Marvin J. Greenberg and John R. Harper. *Algebraic topology*, volume 58 of *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981. A first course.

[17] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential topology*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[18] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[19] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.

[20] Jürgen Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2002.

[21] Klaus Jnich. *Topologie. (Topology). 7. Aufl.* Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer. ix, 239 S. DM 39.90; S 292.00; sFr. 36.00; Pound Sterling14.00; $ 19.00 , 2001.

[22] Klaus Jnich. *Vector analysis. Transl. from the German by Leslie Kay.* Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer. xiv, 281 p. DM 69.00; S 504.00; sFr. 61.00; Pound Sterling24.00; $ 34.95 , 2001.

[23] Klaus Jnich. *Vektoranalysis. (Vector analysis). 4. Aufl.* Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer. xii, 275 S. EUR 19.95/net; sFr. 32.00 , 2003.

[24] William S. Massey. *A basic course in algebraic topology*, volume 127 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[25] C. R. F. Maunder. *Algebraic topology.* Dover Publications Inc., Mineola, NY, 1996. Reprint of the 1980 edition.

[26] Karl Heinz Mayer. *Algebraische Topologie.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1989.

[27] Frank Morgan. *Riemannian geometry.* A K Peters Ltd., Wellesley, MA, second edition, 1998. A beginner's guide.

[28] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology.* Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[29] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[30] Joseph J. Rotman. *An introduction to algebraic topology*, volume 119 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[31] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang. *Algebraische Topologie.* Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, second edition, 1994. Eine Einführung. [An introduction].

[32] Robert M. Switzer. *Algebraic topology—homotopy and homology.* Springer-Verlag, New York, 1975. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 212.

[33] Tammo tom Dieck. *Topologie.* de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1991.