Höhere Analysis = Diff III
(Prof. S.J. Patterson)

Michael Siebert, Anke Uffmann
Georg-August-Universität Göttingen
Fakultät für Mathematik

erstellt mit LaTeX

vom 16. Oktober 2006 bis 25. April 2007

Vorwort

Die Vorlesungen Differential- und Integralrechnung I und II beschreiben die Eigenschaften von Stetigkeit, Differenzierbarbeit und Integriebarkeit von Funktionen in einer bzw. mehreren Veränderlichen. Manche dieser Begriffe sind auf unendlich dimensionale Räume anwendbar. Solche wurden schon in Diff. II behandelt. Die großen Probleme der Analysis sind die Theorien der Differenial- und Integralgleichungen. Für diese und auch für den verwandten Problemkreis der Fourier-Analysis hat es sich herausgestellt, dass man feinere Eigenschaften von topologischen Vektorräumen braucht. Entsprechend bilden die Theorien der Banach- und Hilbert-Räume den Kern dieser Vorlesung. Es ist sehr bedeutsam, dass man sehr schnell auf Fragen der Mengentheorie, insbesondere das Auswahlaxiom, stoßt. Die Theorie der Sturm-Liouville'schen Gleichungen liefert eine schöne Anwendung, die auch als Muster für wichtige Weiterentwicklungen dient. Diese Begriffe sind auch für die feinere Theorie der Fourier-Reihen unerlässlich; sie sind sogar in dieser Theorie zum großen Teil entstanden. Innerhalb des Rahmens der Vorlesung war es lediglich möglich, eine Einführung in diese Theorie zu geben. Sie bildet die Grundlage mehrerer moderneren Entwicklungen (z.B. Darstellungstheorie der Lie-Gruppen, Wavelets, Chaos-Theorie, Fraktale, pseudo-differentiale Operatoren und Index-Theorie).
Last but not least: es ist meine angenehme Pflicht, Anke Uffmann und Michael Siebert für ihre sehr engagierte Arbeit beim Zustandekommen dieses Skripts herzlichst zu bedanken.

Samuel Patterson

Inhaltsverzeichnis

Literatur

S. Lang Real Analysis (etwa DiffI-DiffIV)

J. Dieudonné Treatise on Modern Analysis

G. F. Simmons Topology and modern analysis

K. Maurin Methods & Hilbert space (wenn mit S. Lang fertig)

F. Riesz, B. Sz. Nagy Functional Analysis

R. Courant, D. Hilbert Methoden der mathematischen Physik

Spezielle Themen

E.T.Whittaker, G.N.Watson Modern Analysis

A. Lyusternik, A.R. Yanpol'skii Mathematical Analysis

G. Szegö Orthogonal Polynomials

F. Smithies Integral Equations

Kapitel 1

Einführung

In dieser Vorlesung wird eines der Hauptthemen die Lösung von Integralgleichungen sein. Solche kommen häufig vor. Wir haben schon in Differential- und Integralrechnung II eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$\underline{x}'(t) = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$$

mit Anfangsbedingung

$$\underline{x}(t) = x_0$$

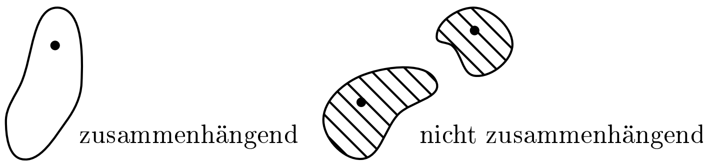
in die Integralgleichung

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} F(\underline{x}(s), s)ds$$

umgewandelt. Für den Existenzsatz war diese Verknüpfung von Differentialgleichungen und Anfangswerten sehr vorteilhaft. Die einfachste Klasse von Integralgleichungen sind welche von der Form:

$$f(t) = g(t) + \int_{a}^{b} K(t, s)f(s)ds.$$

Diese sind lineare Gleichungssysteme: hier sind K (der Kern) und g vorgegeben. Das Problem ist: finde f.
Integralgleichungen dieser Art wurden nicht nur für Probleme der Differentialgleichung, sondern auch für welche der Geometrie eingesetzt.
Ein Beispiel ist der Riemann'sche Abbildungssatz. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Wir sagen, dass U **zusammenhängend** ist, wenn es für jede zwei Punkte $P, Q \in U$ eine Kurve $\gamma : [0, 1] \to U$ gibt, mit $\gamma(0) = P, \gamma(1) = Q$.



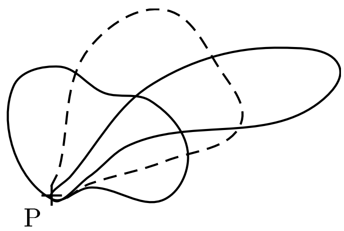
Sei U zusammenhängend und beschränkt. Wenn $\mathbb{R}^2 - U$ auch zusammenhängend ist, dann sagen wir, dass U **einfach zusammenhängend** ist.
Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to U$ Kurven, die geschlossen sind, wobei

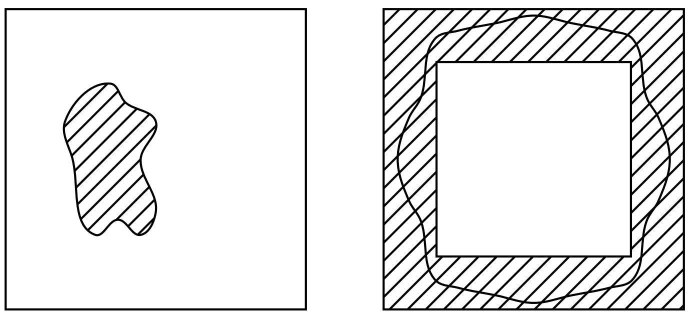
$$\gamma_1(0) = \gamma_2(1) \text{ und } \gamma_2(0) = \gamma_2(1).$$

Sei $P \in U$; seien γ_1, γ_2 geschlossen mit $\gamma_1(0) = P, \gamma_2(0) = P$. Dann sagt man, dass γ_1, γ_2 **homotop** sind, falls es eine stetige Funktion $F : [0,1] \times [0,1] \to U$ mit

$$\begin{aligned} F(t,0) &= \gamma_1(t), & F(0,s) &= P, \\ F(t,1) &= \gamma_2(t), & F(1,s) &= P. \end{aligned}$$

Dann ist U einfach zusammenhängend, wenn alle Kurven mit Basispunkt P zueinander homotop sind. Die Äquivalenz dieser beiden Definitionen von „einfach zusammenhängend" ist nicht so leicht zu beweisen.



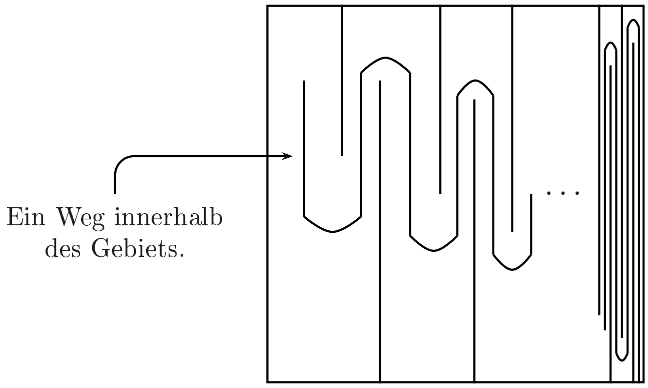


einfach zusammenhängend

nicht einfach zusammenhängend (da man die Kurve nicht innerhalb des Gebietes stetig zu einem Punkt ändern kann)

Satz (Riemann'scher Abbildungssatz)**.** *Sei U offen, zusammenhängend und einfach-zusammenhängend, $U \neq \mathbb{R}^2$. Sei $B = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$. Dann gibt es eine unendlich differenzierbare (winkeltreue) Funktion $\varphi : U \to B$; φ eine Bijektion.*

Die Gebiete U können sehr kompliziert sein, sodass unsere Vorstellungskraft damit überfodert wird, sich die Funktion φ vorzustellen. Es gibt heute sehr schöne Bilder dazu. Ein Fall, der einen Eindruck liefert, wie einfach zusammenhängende Gebiete aussehen können, ist folgender:



Kernproblem

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad v|\partial U = f \qquad \textbf{elliptische Differentialgleichung}$$

Dieses wird mit Hilfe der Greenschen Funktionen in eine Integralgleichung verwandelt - die Gleichung kann man dann analysieren.

Fourier-Reihen

In der Fourier-Theorie betrachtet man periodische Funktionen $f(x+1) = f(x)$. Man weiß, dass solche Funktionen durch die Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{2\pi i m x}$$

dargestellt werden können, wobei

$$\hat{f}(m) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i m x} dx.$$

Die genaue Bedeutung des Wortes „dargestellt“ ist eine delikate Angelegenheit. Das Problem der Charakterisierung von $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ für f in einer gewissen Klasse von Funktionen oder, umgekehrt, von der Charakterisierung von f für $\hat{f}$ in einer gewissen Klasse von Funktionen $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ist eine der Hauptangelegenheiten der Analysis der letzten 150 Jahre. Es ist wichtig festzustellen, dass die Operation $f \mapsto \hat{f}$ eine lineare Abbildung ist, die durch ein Integral definiert ist.

Problem: Für eine Klasse von Funktionen f charakterisiere $(\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C})$. Das einfachste Beispiel sind Funktionen mit

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Dann gilt

$$\sum_m |\hat{f}(m)|^2 < \infty.$$

Andere Klassen von Funktionen sind viel delikater.

Definition 1.1. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Wenn $(V, \|\cdot\|)$ vollständig ist, dann sagen wir, dass V ein **Banach-Raum** ist.*

Definition 1.2. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, sodass es eine hermitesche Form*

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

*gibt, sodass $\langle x, x\rangle > 0$ $(x \neq 0)$. Dann ist $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ eine Norm. Ist V vollständig, dann heißt $V, \langle\ ,\ \rangle$ ein **Hilbert-Raum**.*

Satz (Satz von Ptolemäus)**.** *Es gilt:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Diese Eigenschaft charakterisiert die Normen, die einem Hilbert-Raum definieren. So zum Besipiel ist

$$C(I) = \{f : f \text{ stetig auf } I = [0,1]\} \text{ mit } \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{s \in I} |f(s)|$$

kein Hilbert-Raum.
Ziele der Vorlesung In AGLA I lernt man, wie man Gleichungen von der Art

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

löst.
Die Werkzeuge, die man dabei entwickelt, sind:

- Rang einer Abbildung,
- Determinanten,
- Jordan-Normalform.

Im Rahmen von Banach-Räumen ist eine allgemeine Theorie nicht möglich, für gewisse Klassen von Abbildungen kann man allerdings eine Theorie aufbauen. Sei V ein Banach-Raum. Sei $K : V \to V$ eine lineare Funktion, welche die Eigenschaft hat, dass

$$K(\{x \in V : \|x\| \leq 1\})$$

in V kompakt ist. Dann sagen wir, dass K **kompakt** ist. Wir betrachten Operatoren von $V \to V$ von der Form $A = I + K$, I Identitätsabbildung, K kompakt. Dann kann man beweisen

$$\text{Ker}(I + K) \text{ ist endlich-dimensional und}$$
$$V/\text{Im}(I + K) \text{ ist endlich-dimensional.}$$

Operatoren mit diesen Eigenschaften sind als Friedholm-Operatoren bekannt. Für sie gibt es eine Theorie von Rang. Für Operatoren dieser Art (d.h. $I + K$) kann man sogar eine Theorie von Determinanten bilden (Fredholmsche Determinanten). Auch gibt es hier eine Jordan-Normalform.
Die Hauptschwierigkeit liegt oft darin, zu zeigen, dass ein gegebenes K kompakt ist, das Hauptwerkzeug hierzu ist der Satz von Arzelà-Ascoli.

Hauptachsensatz: Sei $V, \langle\ ,\ \rangle$ ein hermite'scher Raum. Sei A ein hermite'scher Operator $A : V \to V$, so dass

$$\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle = \overline{\langle y, Ax\rangle}.$$

Sei V endlich dimensional. Dann existiert eine orthonormale Basis:

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \qquad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \ (1 \le i, j \le n), \qquad n = \dim(V),$$

für welche gilt:

$$\langle e_i, Ae_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij} \text{ mit geeignetem } \lambda_i.$$

Aus $\langle e_i, Ae_j \rangle = \overline{\langle e_i, Ae_j \rangle}$ folgt, dass λ_i reell ist. Daher gilt:

$$\lambda_i = \overline{\lambda_i}, \ \lambda_i - \text{reell}.$$

Dieser Satz kann in verschiedenen Formen auf Hilbert-Räume übertragen werden. Falls A wieder kompakt ist, dann gibt es eine „Basis" (im Sinne von Hilbert-Räumen) $e_1, e_2, e_3, \ldots$ mit den Eigenschaften wie vorhin und $\lambda_i \to 0$ (Die λ_i's sind das „Spektrum" von A).
Wir können in diesem Zusammenhang ein Beispiel ansehen. Sei φ eine Funktion. Sei f eine Funktion mit $f(x+1) = f(x)$. Wir setzen voraus, dass φ außerhalb von $[-R, +R]$ Null ist und ebenfalls, dass φ glatt ist.

Dann bilden wir die Faltung:

$$(\varphi * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y) f(y) dy.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}(\varphi * f)(x+1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+1-y) f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y) f(y+1) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y) f(y) dy.\end{aligned}$$

Deswegen ist $\varphi * f$ auch periodisch. Gilt

$$f(x) = \sum \hat{f}(m) e^{2\pi i m x}$$

dann würde folgen:

$$\begin{aligned}(\varphi * f)(x) &= \int \sum_m \varphi(x-y) \hat{f}(m) e^{2\pi i m y} dy \\ &= \int \sum_m \varphi(-y) \hat{f}(m) e^{2\pi i m (y+x)} dy \\ &= \int \sum_m \varphi(y) \hat{f}(m) e^{-2\pi i m y} e^{2\pi i m x} dy \\ &= \sum_m \hat{f}(m) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-2\pi i m y} dy \right\} e^{2\pi i m x}.\end{aligned}$$

Das heißt $f \mapsto \varphi * f$ wirkt wie eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-2\pi i m y} dy.$$

Wir können deshalb die „Basis" von $(e^{2\pi i m x})$ als eine „Basis" betrachten, für welche alle Operatoren $f \to (\varphi * f)$ diagonal werden:

$$e^{2\pi i m x} \text{ mit Eigenwert } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-2\pi i m y} dy.$$

Lebesguesche L^p-Räume

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maß-Raum, X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$.
Wir betrachten zwei messbare Funktionen f_1 und f_2. Wir sagen, dass sie äquivalent sind, wenn $f_1 = f_2$ f.ü. (= fast überall), also wenn gilt:

$$\mu(\{x : f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0.$$

Wir schreiben auch $f_1 \equiv f_2$. Dann definieren wir für $(1 \leq p < \infty)$:

$$L^p(X, \mu) = \left\{ \text{Klassen von messbaren Funktionen } f : \int |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Für $f \in L^p(X, \mu)$ definieren wir für $1 \leq p < \infty$:

$$\|f\|_p = \left\{ \int |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \ (L^p\text{-Norm}).$$

Wir definieren auch $L^\infty(X, \mu)$ als die Klasse von Funktionen f, sodass

$$\operatorname*{Inf}_{f_1 \equiv f} \operatorname{Sup} |f_1| < \infty.$$

Dann wird $L^\infty(X, \mu)$ mit $\| \dots \|_\infty$ definiert durch

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Inf}_{f' \equiv f} \operatorname{Sup} |f'| =: \text{ess.} \operatorname{Sup} |f|$$

ein normierter Raum.

Nota bene: Bei

$$f(x) = 0 \text{ für } x \notin \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$
$$f\left(\frac{1}{j}\right) = j \text{ für } j = 1, 2, 3, \dots.$$

gelten $\operatorname{Sup} |f| = \infty$ und $\|f\|_\infty = 0$.

Satz 1.3 (Lebesgue). *Mit dieser Norm ist $(L^p(X, \mu), \| \cdot \|_p)$ ein Banach-Raum.*

Zu zeigen:

- $L^p(X, \mu)$ ist ein Vektorraum.
- $\| \cdot \|_p$ ist eine Norm.
- $L^p(X, \mu)$ ist vollständig.

Korollar 1.4. *Mit diesen Notationen und $(f, g) = \int \overline{f} g d\mu$ wird $L^2(X, \mu)$ ein Hilbert-Raum.*

Definition 1.5. *Sei (f_n) eine Folge von messbaren Funktionen auf X. Sei f eine messbare Funktion, so dass*

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

*Dann sagen wir, dass $f_n \to f$ **in Maß**.*

*Wir sagen, dass (f_n) **Cauchy in Maß** ist, wenn es für $\varepsilon, \delta > 0$ ein N gibt, so dass für $m, n > N$ gilt*

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \delta.$$

Wir sagen, dass $f_n \to f$ fast gleichmäßig konvergiert, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Menge A_ε gibt, so dass $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ und

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig auf } X - A_\varepsilon.$$

Satz 1.6 (Riesz-Fischer)**.** *Folgende Aussagen sind äquivalent für (f_n):*

1. *Es existiert f (messbar), so dass $f_n \to f$ im Maß*
2. *(f_n) ist Cauchy in Maß.*
   In beiden Fällen gilt:
3. *Es gibt einen Teilfolge von (f_n), (f_{n_j}) und eine messbare Funktion f, so dass $f_{n_j} \to f$ fast gleichmäßig.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) ist leicht.
(2) $\Rightarrow$ (1) Sei $N(\varepsilon, \delta)$ so definiert, dass für $n, m > N(\varepsilon, \delta)$ gilt:

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \delta.$$

Dann kommt der Trick. Sei $n_1 = N(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Wir definieren n_j rekursiv durch

$$n_j = \mathrm{Max}(n_{j-1} + 1, N(2^{-j}, 2^{-j})).$$

Dann gilt

$$n_j \to \infty \text{ für } j \to \infty \text{ monoton.}$$

Es gilt nach dieser Konstruktion:

$$\mu\left(\left\{x : |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| > \frac{1}{2^j}\right\}\right) < \frac{1}{2^j}.$$

Sei $S_j = \{x : |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| > \frac{1}{2^j}\}$. Dann gilt $\mu(S_j) < \frac{1}{2^j}$ und daher $\mu(\bigcup_{i \geq j} S_j) \leq \sum_{i=j} \frac{1}{2^i} = 2 \cdot 2^{-j}$. Folglich gilt

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i \geq j} S_i\right) = 0.$$

Sei

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i \geq j} S_i \qquad \textbf{(exzeptionelle Menge)}.$$

Nach Definition von E gilt: für $x \notin E$ existiert $j(x)$, so dass

$$\text{für } j > j(x) \text{ gilt:} \quad |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \frac{1}{2^j}.$$

Es folgt

$$\sum_j |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \text{ konvergiert für } x \notin E.$$

Dann können wir für $x \notin E$ die Funktion $f(x)$ durch

$$f(x) := f_{n_1}(x) + \sum_{j \geq 1} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))$$

definieren. Da die Summanden messbar sind und die Reihe absolut konvergent ist, ist f auch messbar. Nun gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f_{n_1}(x) + \sum_{1\le j<J} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)) + \sum_{j\ge J}(f_{n_{j+1}} - f_{n_j}(x)) \\ &= f_{n_J}(x) + \sum_{j\ge J}(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)). \end{aligned}$$

Wir setzen $f(x) = 0$ für $x \in E$. Wir bemerken jetzt, dass die Reihe gleichmäßig konvergent auf $X - S_i$ ist (für alle i). Weil $\mu(S_i) \to 0$ folgt, dass $f_{n_j} \to f$ fast gleichmäßig. Wir haben dabei (2) $\Rightarrow$ (3) bewiesen.

$$|f(x) - f_{n_J}(x)| \le \sum_{j\ge J} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \le \frac{2}{2^J}.$$

Es folgt jetzt, dass $f_{n_j} \to f$ in Maß konvergiert. Da (f_n) Cauchy in Maß ist, n_j monoton $\to \infty$, folgt leicht, dass $f_n \to f$ in Maß gilt. Q.E.D.

Beweis. (zu Satz 1.3) Sei $x \ge 1, 0 \le t \le 1$. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein ξ mit $1 < \xi < x$ gibt, sodass

$$x^t - 1 = t\xi^{t-1}(x-1)$$

gilt. Es folgt:

$$x^t - 1 \le t(x-1)$$

Wir betrachten

$$p, q > 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sei $x = \frac{a}{b}, t = \frac{1}{p}$. Es folgt:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \le 1 + \frac{1}{p}\left(\frac{a}{b} - 1\right).$$

Durch Multiplikation mit b erhalten wir

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \le b + \frac{1}{p}(a-b) = \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{p}} b^{-\left(1-\frac{1}{q}\right)} &\le 1 + \frac{1}{p}\left(\frac{a}{b} - 1\right) \\ a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} &\le b + \frac{1}{p}(a-b) \\ &= \frac{1}{p}a + \left(1 - \frac{1}{p}\right) b \\ &= \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b. \end{aligned}$$

Daraus folgt für $f \in L^p(X,\mu)$, $g \in L^q(X,\mu)$ mit $a(x) = |f(x)|^p$ und $b(x) = |g(x)|^{\frac{1}{q}}$:

$$|f(x)g(x)| \le \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Es folgt: $f \cdot g$ ist integrierbar. Seien nun f, g, so dass

$$\int |f|^p d\mu = 1 \quad \text{und} \quad \int |g|^q d\mu = 1$$

gelten. Dann folgt

$$\begin{aligned}\int |fg| d\mu &\leq \frac{1}{p}\int |f|^p d\mu + \frac{1}{q}\int |g|^q d\mu \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\end{aligned}$$

Für f, g beliebig gilt:

$$\left\|\frac{f}{\|f\|_p}\right\|_p = 1, \qquad \left\|\frac{g}{\|g\|_q}\right\|_q = 1.$$

Wenn wir diese in die obige Ungleichung einsetzen, bekommen wir

$$\frac{1}{\|f\|_p}\cdot\frac{1}{\|g\|_q}\cdot\int |fg| d\mu \leq 1$$

und erhalten daraus

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \qquad (\textbf{Höldersche Ungleichung})$$

Für $p = 1$, $q = \infty$ ist die Ungleichung leicht zu beweisen. Wir betrachten jetzt

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p d\mu \\ &= \int |f+g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \int |f|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu + \int |g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu.\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir bei beiden die Höldersche Ungleichung an. Es gilt

$$|f+g|^{p-1} = |f+g|^{\frac{p}{q}} \text{ , da } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}.$$

Es folgt: $|f+g|^{p-1} \in L^q(X,\mu)$ und

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &\leq \|f\|_p \cdot \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \cdot \|f+g\|_p^{p-1} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p)\cdot\|f+g\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

Und schließlich

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \qquad (\textbf{Minkowski Ungleichung})$$

Wir haben auch

$$\begin{aligned}&\|f\|_p = 0, \\ \Leftrightarrow &\int |f|^p d\mu = 0, \\ \Leftrightarrow &|f|^p = 0 \text{ f.ü.}, \\ \Leftrightarrow &f = 0 \text{ f.ü.}.\end{aligned}$$

D.h. die Norm $\|\cdot\|_p$ ist auf den Äquivalenzklassen (mod $\equiv$) definiert und es gilt:

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \text{Klasse von } f = 0.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $L^p(X,\mu)$ vollständig ist. Dazu verwenden wir den Satz von Riesz-Fischer.
Sei (f_n) eine Folge in $L^p(X,\mu)$, die bzgl. $\|\cdot\|_p$ Cauchy ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p &= \int |f|^p d\mu \\ &\geq R^p \cdot \int_{\{x:|f(x)|\geq R\}} 1 d\mu \qquad (R>0) \\ &= R^p \cdot \mu(\{x : |f(x)| \geq R\}).\end{aligned}$$

Es folgt

$$\mu(\{x : |f(x)| \geq R\}) \leq \frac{\|f\|_p^p}{R^p}. \qquad \textbf{(Tschebyscheffsche Ungleichung)}$$

Es folgt:

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) \leq \frac{\|f_n - f_m\|_p^p}{\varepsilon}.$$

Für jedes $\eta > 0$ existiert ein $N(\eta)$, so dass für $m,n > N(\eta)$ gilt

$$\|f_m - f_n\|_p < \eta.$$

D.h. die Folge (f_n) ist Cauchy in Maß. Es folgt aus dem Satz von Riesz und Fischer, dass es eine Funktion f gibt, so dass $f_n \to f$ in Maß und es eine Teilfolge n_j gibt, so dass $f_{n_j} \to f$ (gleichmäßig f.ü.). Wir weisen jetzt nach, dass $f_n \to f$ in $L^p(X,\mu)$ konvergiert. Wir haben $f_m - f_{n_j} \to f_m - f$ (gleichmäßig f.ü.), d.h. es existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine meßbare Menge A_ε mit $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ und $f_n \to f$ gleichmäßig auf A_ε.

$$X - A_\varepsilon \qquad \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$$

Nach dem Fatouschen Lemma (Diff II) gilt

$$\int |f_m - f|^p d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int_X |f_m - f_{n_j}|^p d\mu.$$

D.h. $\|f_m - f\| \leq \liminf_{j\to\infty} \|f_m - f_{n_j}\|_p^p$. Weil die Folge (f_m) in $L^p(X,\mu)$ Cauchy ist, folgt, dass für $\varepsilon > 0$ es ein N gibt, für welches $\|f_m - f_{n_j}\|_p < \varepsilon$ für $m, n_j > N$. D.h. $\|f_m - f\|_p < \varepsilon$ für $m > N$. Es folgt, dass $f_m \to f$ in $L^p(X,\mu)$. Der Fall $p = \infty$ ist ähnlich - aber einfacher. Q.E.D.

Beispiel:

$$X = \mathbb{R}, \qquad \mu = m \text{ (Lebesguesches Maß)}$$

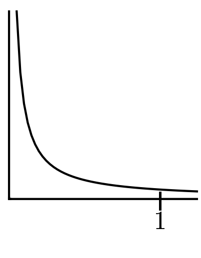
„klassische L^p Räume“. Die Bedingung, dass $f \in L^p(\mathbb{R},m)$ hat zwei Aussagen:

lokal Singularitäten sind nicht zu schlimm.

global die Funktion nimmt ordentlich bei ∞ ab.

Für die lokale Bedingung ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\alpha} & (0 < x < 1) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$



illustrativ. Hier gilt:

$$f \in L^p(\mathbb{R}, m) \qquad p\alpha < 1 \text{ oder } p < \frac{1}{\alpha}.$$

Für die globale Bedingung sei

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha} & \text{für } x \geq 1 \\ 0 & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

Dann liegt F in $L^p(X, m)$ für alle $p > \frac{1}{\alpha}$.

Beispiel: $X = [0, 1]$ $\mu = m$ - Lebesguesches Maß. Wir können uns (bis auf eine Menge vom Maß 0) diese Funktion mit $f(0) = f(1)$ vorstellen - oder als Einschränkung von Funktionen, die periodisch sind: $f(x) = f(x + 1)$. Diese sind die Funktionen, die in der klassischen Fourier-Theorie verwendet werden. Hier ist die Bedingung $f \in L^p([0, 1], m)$ nur *lokal*.

Beispiel:

$$X = \mathbb{N} \qquad m(A) = \text{Card}(A)$$

$$\ell^p = \left\{ (x_i)_{i \geq 1} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}.$$

Diese sind die "klassischen" ℓ^p-Räume. In der Fourier-Theorie gilt „teilweise" folgendes:

$$f \in L^p([0, 1], m) \quad „\Leftrightarrow" \quad (\hat{f}(n))_{n>0}, (\hat{f}(-n))_{n>0} \in l^q \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(Ungleichungen von Hausdorff-Young).
Für $p = 2$ sind die Räume Hilbert-Räume; wir haben auch die Vollständigkeit in diesen Fällen bewiesen.

Kuriosum: Wir werden zeigen, dass $C(\mathbb{R}), C(I)$ $(I = [0, 1])$ dicht in $L^p(\mathbb{R}, m)$ bzw. $L^p([0, 1], m)$ $p < \infty$ sind. Aber - für $p = \infty$ liefert $\| \cdot \|_\infty$ gleichmäßige Konvergenz und $C(\mathbb{R}), C(I)$ sind abgeschlossen und nicht dichte Unterräume von $L^\infty(\mathbb{R}, m)$ (bzw. $L^\infty(I, m)$).

Zur Erinnerung: Eine Menge $A \subset B$, B Teilmenge eines normierten Raumes heißt *dicht* in B, falls jedes $b \in B$ der Grenzwert einer Folge (a_i) mit $a_i \in A$ ist.

Kapitel 2

Topologie

Definition 2.1. *Sei X eine Menge, $X \neq \varnothing$. Eine **Topologie** auf X ist eine Menge von Teilmengen von X mit den Eigenschaften:*

i) $\varnothing, X \in \mathfrak{T}$.

ii) Falls $A_i \in \mathfrak{T}$ $(i \in I)$, *dann gilt* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{T}$.

iii) Für $A, B \in \mathfrak{T}$ *gilt* $A \cap B \in \mathfrak{T}$.

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen „offene Mengen".

Zur Erinnerung: Wir nennen eine Menge A als Teilmenge eines normierten Raums *offen*, wenn für jedes $x \in A$ ein $r > 0 : \{y : \|x - y\| < r\} \subset A$ existiert.

Definition 2.2. *Sei X eine Menge, $\mathfrak{T}$ eine Topologie auf X. Dann heißt eine Teilmenge B von $\mathfrak{T}$ eine **Basis** von $\mathfrak{T}$, wenn es für jedes $S \in \mathfrak{T}$ und $x \in S$ ein $A \in B$ gibt, so dass $x \in A \subset S$.*

Beispiel: In $\mathbb{R}^n$ bildet die Menge von $B(x, r) = \{y : \|y - x\| < r\}$ eine Basis. Genauso haben wir die Topologie auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ definiert. Die Elemente von $\mathfrak{T}$ sind von der Form $\bigcup_{j \in J} A_j$, $A_j \in B$, nämlich

$$S \in \mathfrak{T} \qquad S = \bigcup_{\substack{A \in B, \\ x \in S, \\ x \in A \subset S}} A.$$

Von jetzt an sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

Definition 2.3. *Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{T})$ heißt **separabel**, falls es eine abzählbare Basis von $\mathfrak{T}$ gibt.*

Beispiel: In $\mathbb{R}^n$ ist die Menge $\{B(x, r) : x \in \mathbb{Q}^n, r > 0, r \in \mathbb{Q}\}$ abzählbar und immer noch eine Basis. Die $\mathbb{R}^n$'s sind alle separabel.

Ankündigung: Ist $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbert-Raum, dann ist $\mathcal{H} \cong \ell^2$.

Definition 2.4. *Sei $U \in \mathfrak{T}$, $U \neq \varnothing$. Sei $A \subset U$. Dann heißt A **dicht** in U, falls für jedes $V \subset U$, $V \in \mathfrak{T}$ gilt*

$$V \cap A \neq \varnothing.$$

Definition 2.5. *Sei X eine Menge. Eine* ***Metrik*** *d auf X ist eine Funktion*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},$$

so dass

i) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b \qquad (a, b \in X)$

ii) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) \qquad (a,b,c \in X)$

iii) $d(a,b) = d(b,a) \qquad (a,b \in X)$.

Das Paar (X, d) heißt ein ***metrischer Raum****.*
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sagen wir, dass $A \subset X$ ***offen*** *ist, wenn für jedes $a \in A$ ein $r > 0$ existiert mit $\{y : d(a,y) < r\} \subset A$. Die offenen Mengen (mit $\varnothing$) bilden eine Topologie. Wir reden von einem metrischen, topologischen Raum.*

Satz 2.6. *Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein metrischer, topologischer Raum. Dann ist $(X, \mathfrak{T})$ genau dann separabel, wenn es eine abzählbare, dichte Teilmenge S von X gibt.*

Bemerkung: Für die eine Richtung brauchen wir das Auswahlaxiom.

Beweisskizze. Sei S eine abzählbare, dichte Teilmenge von X. Sei für $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$

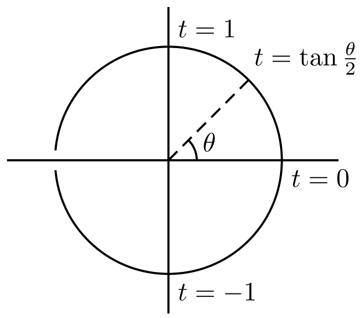
$$B_{s,n} = \left\{ x : d(x,s) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Man weist leicht nach, dass $\{B_{s,n} : s \in S, n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von X ist.
Umgekehrt sei $(X, \mathfrak{T})$ separabel. Sei $B_{\mathfrak{T}}$ eine abzählbare Basis von $\mathfrak{T}$. Für jedes $A \in B_{\mathfrak{T}}$ wählen wir $s_A \in A$ (Auswahlaxiom!). Dann ist die Menge $S = \{s_A : A \in B_{\mathfrak{T}}\}$ abzählbar und dicht. Q.E.D.

Bemerkung: Jeder Banach-Raum (und jeder Hilbert-Raum) ist ein metrischer Raum. Wir werden später zeigen, dass jeder separierbare Hilbert-Raum — und nur solche werden wir betrachten — isomorph zu ℓ^2 ist. Hilbert selbst hat alleine ℓ^2 betrachtet, weswegen man von *dem* Hilbert-Raum spricht.

Bemerkung: Die Eigenschaft „Vollständigkeit" ist eine Eigenschaft von metrischen Räumen. Wir können $\mathbb{R}$ als eine Teilmenge des Kreises betrachten, etwa $K - \{(-1,0)\}$, mit $K = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, wobei eine mögliche Einbettung

$$\varepsilon : t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$



wäre.
Hier erhalten wir eine neue Metrik auf $\mathbb{R}$, nämlich

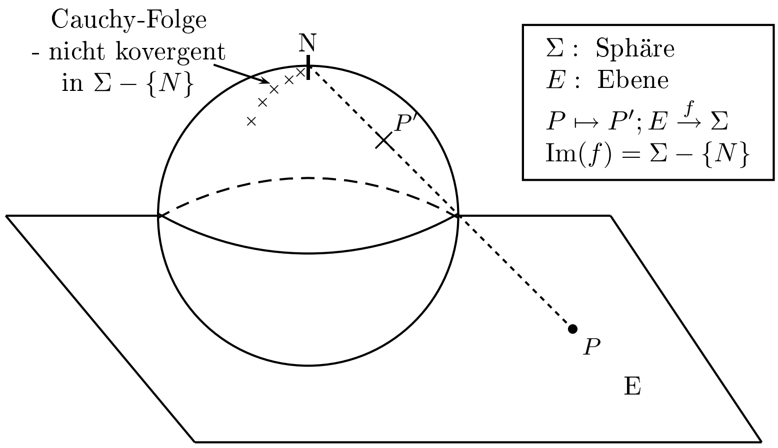
$$d_\varepsilon(t_1, t_2) = \|\varepsilon(t_1) - \varepsilon(t_2)\|_2.$$

Da $K - \{(-1,0)\}$ nicht vollständig ist, ist $\mathbb{R}$ bzgl. d_ε nicht vollständig. Die von d_ε definierte Topologie stimmt mit der üblichen überein. (Die durch d_ε definierte

Topologie ist nicht vollständig, weil die Folge $1, 2, 3, \dots$ in dieser Metrik Cauchy ist; sie hat dagegen keinen Grenzwert.)

Die Mengen $\mathbb{R}$ mit $|\cdot|$, $\mathbb{R}^n$ mit $\|\cdot\|$, $L^p(X, \mu)$ mit $\|\cdot\|_p$ sind alle metrische Räume und tragen dewegen die entsprechenden Topologien. Es wird sich herausstellen, dass $L^2(\mathbb{R}, m)$ separabel ist — und deshalb $\cong \ell^2$. Auch sind die $L^p(\mathbb{R}, m)$ separabel.

Beispiel: Die *Stereographische Projektion* f:



Die Funktion f wird dadurch definiert, dass die Gerade durch P und P' läuft. Sie ist eine 1-1 Abbildung von $\Sigma - \{N\}$ und E. Sie und ihre Inverse sind stetig. Jedoch ist E vollständig, $\Sigma - \{N\}$ aber nicht, weil es Folgen in $\Sigma - \{N\}$ mit Limes N gibt. Dieses Beispiel ist ähnlich dem obigen.

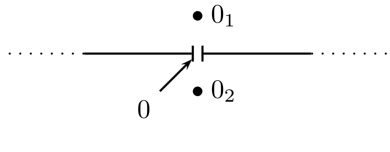
Fazit: Vollständigkeit hängt von der Metrik ab — nicht von der Topologie.

Definition 2.7. *Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{T})$ heißt* ***hausdorffsch*** *falls es für $x, y \in X$ offene Mengen $U, V \in \mathfrak{T}$ gibt mit*

$$x \in U, \ \ y \in V \ \text{ und } U \cap V = \varnothing.$$

Beobachtung: Metrische topologische Räume sind hausdorffsch. Aber es gibt jede Menge interessanter topologischer Räume, die nicht hausdorffsch sind!

Beispiel: Wir betrachten eine Gerade mit Doppelpunkt:



Sei

$$X = (\mathbb{R} - \{0\}) \cup \{0_1, 0_2\},$$

wobei 0_1 und 0_2 zwei neue Punkte darstellen. Auf $\mathbb{R}$ haben wir die gewöhnliche Topologie $\mathfrak{T}$. Auf X definieren wir die Topologie $\mathfrak{T}_1$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_1 = \{A \subset \mathbb{R} | A \in \mathfrak{T}, 0 \notin A\} &\cup \{(A - \{0\}) \cup \{0_1\} | A \in \mathfrak{T}, 0 \in A\} \\ \cup \{(A - \{0\}) \cup \{0_2\} | A \in \mathfrak{T}, 0 \in A\} &\cup \{(A - \{0\}) \cup \{0_1, 0_2\} | A \in \mathfrak{T}, 0 \in A\}. \end{aligned}$$

Wir haben den Punkt 0 „verdoppelt“.

Behauptung. $(X, \mathfrak{T}_1)$ *ist nicht hausdorffsch.*

Beweis. Die offenen Mengen, die 0_1 enthalten, aber nicht 0_2, sind von der Form $(A - \{0\}) \cup \{0_1\}$. Diejenigen, die 0_2 enthalten, aber nicht 0_1, sind von der Form $(A^* - \{0\}) \cup \{0_2\}$, wobei $0 \in A$, $0 \in A^*$. Da $A \ni 0$ offen, existiert ein δ_1 mit $\{x : |x-0| < \delta_1\} \subset A$. Da $A^* \ni 0$ offen, existiert ein δ_2 mit $\{x : |x-0| < \delta_2\} \subset A^*$. Sei nun $\delta = \mathrm{Min}\{\delta_1, \delta_2\}$. Es folgt: $\varnothing \neq \{x : |x-0| < \delta\} \subset A \cap A^*$. Wir schließen: $(X, \mathfrak{T}_1)$ ist nicht hausdorffsch. Q.E.D.

Bemerkung: Es gibt natürliche Topologien, (z.B. die Zariski-Topologien), die nicht hausdorffsch sind; mehrere „natürliche“ Konstruktionen — z.B. Quotientenbildung — liefern häufig nicht-hausdorffsche Räume. Wir werden fast ausschließlich mit hausdorffschen Räumen zu tun haben.

Definition 2.8. *Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein hausdorff'scher topologischer Raum. Sei $A \subset X$. Dann heißt A **kompakt**, falls gilt: Für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A, d.h. $U_{i \in I} \in \mathfrak{T}$, $\bigcup_{i \in I} U_i \supset A$, gibt es eine* endliche *Teilüberdeckung, d.h. es gibt $I_0 \subset I$, I_0 endlich, mit $\bigcup_{i \in I_0} U_i \supset A$.*

Man könnte diese Definition auf nicht-hausdorffsche Räume ohne weiteres ausdehnen. Es stellt sich jedoch heraus, dass die Definition nur sinnvoll ist, wenn der Raum hausdorffsch ist. Deswegen wird in der Regel Kompaktheit nur bei hausdorffschen Räumen definiert.

Zusatz: Falls die Bedingung hausdorffsch weggelassen wird, spricht man gelegentlich von **quasi-kompakt**.

Definition. *Wie immer sagen wir $A \subset X$ ist **abgeschlossen**, wenn $X - A$ offen ist. Sei $\overline{A}$ der Abschluss von A, d.h.*

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{B \supset A \\ B \text{ abgeschlossen}}} B.$$

Satz 2.9. *Sei $(X, \mathfrak{T})$ hausdorffsch.*

i) Ist $A \subset X$ kompakt, dann ist A abgeschlossen.

ii) Ist $A \subset X$ kompakt, $A' \subset A$ abgeschlossen, dann ist auch A' kompakt.

Beweis. i) Wir zeigen: $X - A$ offen.

Sei $y \in X - A$. Für jedes $x \in A$ wählen wir offene Mengen $U_x \ni y$, $V_x \ni x$ mit $U_x \cap V_x = \varnothing$. Dann gilt:

$$\bigcup_{x \in A} V_x \supset A.$$

Weil A kompakt ist, folgt: Es gibt eine offene Teilüberdeckung, d. h. es gibt $x_1, \ldots, x_n$ mit

$$\bigcup_{i=1,\ldots n} V_{x_i} \supset A.$$

Dann gilt $\bigcap_{i=1,\ldots,n} U_{x_i} \cap A = \varnothing$, und laut Konstruktion

$$y \in \bigcap_{i=1,\ldots,n} U_{x_i} =: U(y).$$

Ein endlicher Schnitt von offenen Mengen ist offen. D.h. für $y \in X - A$ haben wir $U(y) \in \mathfrak{T}$ mit $y \in U(y)$, $U(y) \cap A = \varnothing$. Dann ist

$$X - A = \bigcup_{y \in X-A} \underbrace{U(y)}_{\text{offen}}.$$

offen.

ii) Sei $A' \subset A$ abgeschlossen, A kompakt. Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von A'. Sei $V = X - A'$ (ist offen!). Dann ist $(U_i) \cup V$ offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, folgt: Es gibt eine endliche Indexmenge I_0, sodass $(U_i)_{i \in I_0} \cup V$ eine Überdeckung von A ist.

$$V \cap A' = (X - A') \cap A' = \varnothing.$$

Also überdeckt $(U_i)_{i \in I_0}$ schon A', d.h. A' ist kompakt.

Q.E.D.

Produkttopologie

Bemerkung: Seien $(X_j, \mathfrak{T}_j)_{j \in J}$ topologische Räume mit $X_j \neq \varnothing$. Dann ist

$$\prod_{j \in J} X_j \neq \varnothing.$$

nach dem Auswahlaxiom.

Definition. *Eine Basis der Produkttopologie $\mathfrak{T}$ auf $\prod X_j$ wird gegeben durch Mengen der Form $\prod A_j$ mit $A_j \in \mathfrak{T}_j$ und für alle bis auf endlich viele j gilt: $A_j = X_j$.*

Bemerkung: Ist $(X_j, \mathfrak{T}_j)$ hausdorffsch für alle $j \in J$, dann auch $(\prod_{j \in J} X_j, \mathfrak{T}_j)$ hausdorffsch.

Beweis. Seien $x = (x_j)$ und $y = (y_j)$ mit $x \neq y$; deshalb gibt es j_0 mit $x_{j_0} \neq y_{j_0}$. Dann existieren $U \in \mathfrak{T}_{j_0}$, $V \in \mathfrak{T}_{j_0}$ mit $x_{j_0} \in U$, $y_{j_0} \in V$, $U \cap V = \varnothing$. Dann sind

$$\tilde{U} = \prod_{j \neq j_0} X_j \times U, \qquad \tilde{V} = \prod_{j \neq j_0} X_j \times V.$$

Basiselemente der Produkttopologie, $x \in \tilde{U}$, $y \in \tilde{V}$, $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \varnothing$. Damit ist die Produkttopologie hausdorffsch. Q.E.D.

Notation: Wir bezeichnen mit $\prod_{j \in J}(X_j, \mathfrak{T}_j)$ das Produkt $\prod X_j$ mit der Produkttopologie.

Satz 2.10 (Tychonoff). *Seien alle $(X_j, \mathfrak{T}_j)$ (mit $j \in J$ beliebig) kompakt. Dann ist auch das Produkt $\prod_{j \in J}(X_j, \mathfrak{T}_j)$ kompakt.*

Bemerkung: J ist beliebig.

Zum Beweis benötigen wir eine alternative Charakterisierung von Kompaktheit.

Satz 2.11 (Cantor'scher Durchschnittssatz). *Sei X ein hausdorffscher topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *X ist kompakt.*

2. *Ist $\{F_i\}_{i\in I}$ ein zentriertes System abgeschlossener Teilmengen von X, d.h. der Durchschnitt von jeweils endlich vielen F_i's ist nicht-leer, dann ist auch $\bigcap_{i\in I} F_i$ nicht-leer.*

Beweis. Übungsaufgabe. Q.E.D.

Bemerkung: Auf englisch heißt eine Familie von Mengen, mit der Eigenschaft, dass endlich viele Durchschnitte nicht-leer sind, eine mit der "finite intersection property".

Beweis. (von Satz 2.10)
Sei $\mathfrak{F} = \{F_i\}_{i\in I}$ ein zentriertes System von abgeschlossenen Mengen im Produktraum $X := \prod_{j\in J}(X_j, \mathfrak{T}_j)$. Nach Satz 2.11 reicht es zu zeigen, dass

$$\bigcap_{F\in\mathfrak{F}} F \neq \varnothing.$$

Nota bene: Wir werden das Zorn'sche Lemma benutzen.

Wir betrachten die Menge $\mathcal{M}$ aller zentrierten Systeme von (nicht-notwendigerweise abgeschlossenen!) Mengen X, die das gegebene $\mathfrak{F}$ umfassen:

$$\mathcal{M} = \{\mathfrak{F}' | \mathfrak{F}' \text{ ist ein zentriertes System von Teilmengen von } X,\ \mathfrak{F}' \supset \mathfrak{F}\}.$$

$\mathcal{M}$ ist offensichtlich durch die Inklusion (teil-)geordnet. Jede total geordnete Teilmenge $\mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$ hat eine obere Schranke $S(\mathcal{N})$, die wir durch die Vereinigung bekommen

$$S(\mathcal{N}) := \bigcup_{\mathfrak{F}'\in\mathcal{N}} \mathfrak{F}'.$$

Dann ist $S(\mathcal{N}) \in \mathcal{M}$. Aus dem Zorn'schen Lemma folgt, dass es ein max. Element $\mathfrak{F}^*$ in $\mathcal{M}$, d.h. $\mathfrak{F}^*$ ist ein zentriertes System mit $\mathfrak{F}^* \supset \mathfrak{F}$, so dass für $\mathfrak{F}^* \in \mathcal{M}$ mit $\mathfrak{F}' \supset \mathfrak{F}^*$ gilt: $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}^*$. Sei $\Sigma_j : X \to X_j$ die Projektion auf die j-te Komponente. $\mathfrak{F}^*$ ist ein zentriertes System, also gilt dies auch für das System von abgeschlossenen Mengen $\{\overline{\Sigma_j(F)}\}_{F\in\mathfrak{F}}$ in X_j (kompakt!). Folglich gibt es nach Satz 2.11 ein $x_j \in X_j, x_j \in \bigcap_{F\in\mathfrak{F}^*} \overline{\Sigma_j(F)}$. Das ganze machen wir für alle $j \in J$ und definieren $x := (x_j)_{j\in J}$. Die *Behauptung* ist jetzt:

$$x \in F \text{ für alle } F \in \mathfrak{F}^*,$$

also, dass auch gilt: $x \in F$ für alle $F \in \mathfrak{F}$. D.h. $x \in \bigcap_{F\in\mathfrak{F}} F$. Das reicht dann, um den Satz zu beweisen.

Nebenbedingung: Bevor wir die Behauptung beweisen, eine Beobachtung. Der endliche Durchschnitt von Mengen in $\mathfrak{F}^*$ liegt wieder in $\mathfrak{F}^*$, aufgrund der Maximalität von $\mathfrak{F}^*$. (Details: Übungsaufgabe).

Sei $U \subset X$, $x \in X$ Basismenge der Produkttopologie:

$$U = U_{j_1} \times \cdots \times U_{j_n} \times \prod_{\substack{i\neq j_i \\ i=1,\ldots,n}} X_i$$

mit $U_{j_i} \in \mathfrak{T}_j$. Da $x \in U$ folgt: $x_{j_i} \in U_{j_i}$, $i = 1, ..., n$. Nach Konstruktion gilt auch

$$x_{j_i} \in \overline{\Sigma_{j_i}(F)} \quad \forall F \in \mathfrak{F}^* \quad \Rightarrow U_{j_i} \cap \overline{\Sigma_{j_i}(F)} \neq 0 \quad \forall F \in \mathfrak{F}^*.$$

Da U_{j_i} offen $\Rightarrow$ $U_{j_i} \cap \Sigma_{j_i}(F) \neq \varnothing$ $\forall F \in \mathfrak{F}$ (Übungsaufgabe: U offen, $U \cap \overline{A} \neq \varnothing \Rightarrow U \cap A \neq \varnothing$). Es folgt, dass es in

$$\Sigma_{j_i}^{-1}(U_{j_i}) = U_{j_i} \times \prod_{j \neq j_i} X_j$$

einen Punkt aus F gibt, sodass $\Sigma_{j_i}^{-1}(U_{j_i}) \cap F \neq \varnothing$ $\forall F \in \mathfrak{F}^*$. Das heißt, $\mathfrak{F}^* \cup \{\Sigma_{j_i}^{-1}(U_{j_i})\}$ ist ein zentriertes System. (Ü.A.) Wegen der Maximalität von $\mathfrak{F}^*$ folgt, dass $\Sigma_{j_i}^{-1}(U_{j_i}) \in \mathfrak{F}^*$. Also ist

$$U = \bigcap_{i=1,\ldots,n} \Sigma_{j_i}^{-1}(U_{j_i}) \in \mathfrak{F}^*.$$

Also ist $U \cap F \neq \varnothing$ $\forall F \in \mathfrak{F}^*$. Insbesondere auch: $U \cap F \neq \varnothing$ $\forall F \in \mathfrak{F}$ (da $\mathfrak{F}^* \supset \mathfrak{F}$). U war eine beliebige Basismenge, die x enthält, also $x \in \overline{F}$ $\forall F \in \mathfrak{F}$. (Ü.A.) Da $F = \overline{F} \Rightarrow x \in F$ $\forall F \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F \neq \varnothing$.

Q.E.D.

Satz 2.12 (Baire). *Sei (X, d) ein metrischer Raum; sei X vollständig (d.h. Cauchy Folgen haben Grenzwerte). Sei Y_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, $Y_i \subset X$, sodass $\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i = X$. Dann existiert*

$$i_0 : (\overline{Y}_{i_0})^0 \neq \varnothing.$$

(Alternativ: Sind V_i: V_i abgeschlossen, $V_i^0 = \varnothing$, dann gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \neq X$.)

Bemerkung:

$$\overline{Y} = \bigcap_{\substack{F \supset Y, \\ F \text{ abgeschlossen}}} F, \qquad Y^0 = \bigcup_{\substack{U \subset Y, \\ U \text{ offen}}} U.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass $(\overline{Y}_i)^0 = \varnothing$ für alle i. D.h. für $i = 1$ existiert

$$B(\xi_1, r_1) = \{x : d(\xi_1, x) < r_1\}, \qquad B(\xi_1, r_1) \cap \overline{Y}_1 = \varnothing, \qquad \xi_1 \in X.$$

Dann wählen wir $B(\xi_2, r_2)$ mit $r_2 < \frac{1}{2} r_1$ und

$$B(\xi_2, r_2) \cap \overline{Y}_2 = \varnothing, \qquad B(\xi_2, r_2) \subset B(\xi_1, r_1).$$

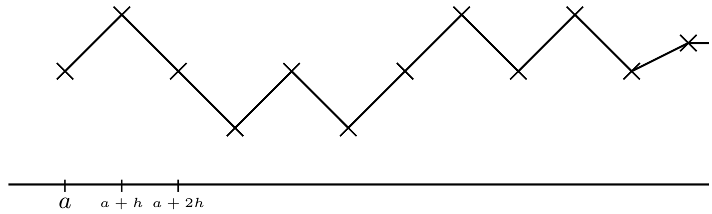
Dieses Verfahren können wir dann weiter führen. Wir bekommen eine Folge $B(\xi_j, r_j)$ mit $r_j < \frac{1}{2} r_{j-1}$ und $B(\xi_j, r_j) \subset B(\xi_{j-1}, r_{j-1})$, $B(\xi_j, r_j) \cap \overline{Y}_j = \varnothing$. Dann bildet die Folge (ξ_j) nach dieser Konstruktion eine Cauchy-Folge. $d(\xi_j, \xi_{j-1}) \leq 2^{-(j-1)} \cdot r_1$. D.h. wir haben eine Folge (ξ_j), die gegen ξ konvergiert, weil X vollständig ist. Dann gilt $\xi \in \overline{B(\xi_j, r_j)}$ für alle j. D.h. $\xi \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{B(\xi_j, r_j)}$. D.h. $\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{B(\xi_j, r_j)} \neq \varnothing$. Es folgt: $\bigcup_{i=1}^{\infty} (\overline{Y}_i{}^0) \neq \varnothing$. Es folgt jetzt, dass es ein i_0 gibt, so dass $(\overline{Y}_{i_0})^0 \neq \varnothing$.

Q.E.D.

Wir haben den Begriff von stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum X oder zwischen zwei topologischen Räumen $X \to Y$. Eine Funktion f ist stetig, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$ die Menge $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

Frage: Sei X ein topologischer Raum. Gibt es genügend stetige Funktionen auf X? Bei genügend braucht man häufig, dass "stetige Funktionen Punkte separieren"; genau: für $x, y \in X$, $x \neq y$ existiert f mit $f(x) = 0$, $f(y) = 1$, f stetig?

Satz 2.13 (Weierstraß). *Sei f eine stetige Funktion auf $[a,b]$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein Polynom p mit $|p(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$.*



$h = \frac{b-a}{n}$

Wir wissen, dass f gleichmäßig stetig ist. Man zeigt, dass eine Funktion f_1 von der Gestalt existiert, so dass $|f(x) - f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Dann beweist man, dass die Funktion $|x|$ durch ein Polynom approximiert werden kann. Hierzu verwendet man die Reihendarstellung von

$$(c + x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

So hat Weierstraß den Satz bewiesen. Wir schlagen einen anderen Weg ein.

Beweis. (Bernstein) Ohne Verlust der Allgemeinheit können wir $a = 0, b = 1$ nehmen. Dann betrachten wir

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Wir werden zeigen, dass diese Folge von Polynomen f approximiert. Zuerst, nach dem binomialschen Lehrsatz gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1.$$

Wir leiten diese Gleichung bzgl. x ab und multiplizieren mit $x(1-x)$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k) x^{k+1} (1-x)^{n-k} = 0.$$

Dann erhalten wir

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k(1-x) - (n-k)x) x^k (1-x)^{n-k},$$

oder

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k - nx) x^k (1-x)^{n-k},$$

und schließlich

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Wir haben also:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.1}$$

und

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right) x^k (1-x)^{n-k}. \tag{2.2}$$

Wir werden zeigen, dass auch

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

Wir leiten (2.2) ab und multiplizieren mit $x(1-x)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big\{ (-1) x^{k+1} (1-x)^{n+1-k} + \left(\frac{k}{n} - x\right) k x^k (1-x)^{n+1-k} \\ - \left(\frac{k}{n} - x\right) \cdot (n-k) x^{k+1} (1-x)^{n-k} \Big\} = 0.\end{aligned}$$

Diese Aussage ist die angekündigte Gleichung. Wir betrachten jetzt

$$f(x) - B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

Weil f gleichmäßig stetig ist, für $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \delta \quad \text{gilt} \quad \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir werden die Summe in zwei Untersummen unterteilen, je nachdem, ob

$$\left|\frac{k}{n}\right| < \delta \quad \text{oder} \quad \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$$

Es gilt

$$\begin{aligned}&\left| \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \\ &\leq \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

weil $x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$ für alle k

$$\begin{aligned}&\leq \sum_{k=0}^{n} x^k (1-x) \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Sei $M = \operatorname{Sup}_{[0,1]} |f|$. Dann gilt

$$\left| \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| \leq 2M \cdot \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

weil

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq 2M.$$

Jetzt verwenden wir

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

$$\sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \geq \delta^2 \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Aber es gilt:

$$\sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{n}.$$

Zusammen folgt:

$$\sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4\delta^2 n}$$

und

$$\left| \sum_{k: \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| \leq \frac{2M}{4\delta^2 n} = \frac{M}{2\delta^2 n}.$$

Es folgt dann:

$$|f(x) - B_n(f,x)| < \varepsilon \qquad \text{für } n > \frac{\varepsilon M}{\delta^2}.$$

Q.E.D.

Sei X ein topologischer Raum. Sei $C(X)$ der Raum der stetigen Funktionen auf X. Wir definieren $C_b(X)$, den Raum der *beschränkten* stetigen Funktionen auf X. Auf $C_b(X)$ definieren wir $\|f\|_\infty = \operatorname{Sup}_{x \in X} |f(x)|$. Die Norm $\|\cdot\|_\infty$ definiert gleichmäßige Konvergenz. Deswegen ist $C_b(X)$ ein Banach-Raum.
Wir haben die zusätzliche Operation $f, g \mapsto f \cdot g$ in $C_b(X)$ (Multiplikation). Es gilt $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. Mit dieser Operation ist $C_b(X)$ ein Ring - und gleichzeitig ein Vektorraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Man redet hier von einer Algebra. Weil $C_b(X)$ auch ein Banach-Raum ist, redet man von einer **Banach-Algebra**. Jetzt gehen wir davon aus, dass wir die Funktionen haben. Dann haben wir eine partielle Ordnung auf $C_b(X)$

$$f \leq g \quad \text{falls} \quad f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in X.$$

Dann bildet man von zwei Funktionen f, g die Funktionen

$$(f \vee g)(x) = \operatorname{Max}(f(x), g(x)) \text{ und } (f \wedge g)(x) = \operatorname{Min}(f(x), g(x)).$$

Weil $|\cdot|$ stetig ist, sind $f \vee g$, $f \wedge g$ auch stetig.

Beweis von Satz von Baire.

$$Y_j \qquad \bigcup Y_j = X,\ (\overline{Y}_j)^0 = \varnothing$$

Wir zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt.
0. Schritt: Wir ersetzen Y_j durch $\overline{Y}_j$; Wir brauchen nur den Fall Y_j abgeschlossen zu betrachten.
1. Schritt: Es gibt für jedes $y \notin Y_1$ ein $r > 0$, so dass $B(y,r) \cap Y_1 = \varnothing$.
$B(y,r) = \{x : d(x,y) < r\}$. $\overline{B}(y,r) = \{x : d(x,y) \leq r\}$. Der Grund: Für $y \notin Y_1$ können wir $\mathrm{Inf}\{d(\eta,y) : \eta \in Y_1\}$. Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder $R > 0$ oder $R = 0$. Im Falle $R > 0$ wählen wir $r < R$ - fertig. Für $R = 0$ existiert $\eta_k \in Y_1$ mit $d(\eta_k, y) \to 0$. Dann ist die Folge (η_k) konvergent mit Grenzwert y. D.h. $y \in Y_1$ - Widerspruch. Deswegen gilt $R > 0$.
Es existiert y mit $y \notin Y_1$, weil sonst $Y_1 = X$ und $Y_1^0 = X$ - Widerspruch mit $Y_1^0 = \varnothing$.
Induktiver Schritt: Wir gehen davon aus, dass wir ein y_1, r_1 gewählt haben, so dass

$$B(y_1, r_1) \cap Y_1 = \varnothing$$

$y_2, \dots y_j, r_2, \dots r_j$ gefunden haben mit $d(y_k, y_{k-1}) < \frac{1}{2}(r_{k-1})$ und $r_k < \frac{1}{2}(r_{k-1})$.

$$B(y_j, r_j) \cap (Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots Y_j) = \varnothing$$

Wenn für jedes $y \in \overline{B}(y_j, \frac{1}{2}r_j)$ gilt

$$B(y,r) \cap Y_{j+1} = \varnothing \qquad \text{für jedes } r > 0$$

Stilblüte: Mein unerfolgreicher Kampf mit der deutschen Grammatik.

Dann hatten wir eine Folge $\eta_1, \eta_2, \dots \in Y_{j+1}$ mit $\eta_j \to y$. Deswegen für jedes $y \in \overline{B}(y_j, \frac{1}{2}r_j), y \notin Y_{j+1}$ existiert ein r mit $B(y,r) \cap Y_{j+1} = \varnothing$; wir wählen $r < \frac{1}{2}r_j$. Auch hier existiert ein $y \in \overline{B}(y, \frac{1}{2}r_j)$. mit $y \notin Y_{j+1}$, sonst: $B(y, \frac{1}{2}r_j) \subset Y_{j+1}$; d.h. $Y_{j+1}^0 \neq \varnothing$. Deswegen existiert ein solches y. Wir wählen ein solches als y_{j+1} und ein $r_{j+1} < \frac{1}{2}r_j$ mit

$$B(y_{j+1}, r_{j+1}) \cap Y_{j+1} = \varnothing$$

Weil $r_{j+1} < \frac{1}{2}r_j$ gilt $B(y_{j+1}, r_{j+1}) \subset B(y_j, r_j)$ - und daher gilt

$$B(y_{j+1}, r_{j+1}) \cap (Y_1 \cup \cdots \cup Y_{j+1}) = \varnothing$$

Dieser ist der induktive Schritt. Nach dieser Konstruktion ist (y_j) eine Cauchy-Folge - da X vollständig ist gilt $y_j \to y$ konvergiert. Nach Konstruktion

$$y \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j$$

Q.E.D.

Satz 2.14 (Stone-Weierstraß). *Sei X* kompakt *(und damit hausdorffsch). Sei $A \subset C_b(X) = C(X)$, so dass*

1) *für $f, g \in A$ gelten $f + g \in A$, $f \cdot g \in A$*

2) *A ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $C(X)$*

3) *Für jede $x, y \in X$, $x \neq y$ existiert $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$*

4) $1 \in A$

Dann gilt

$$A = C(X) = C_b(X)$$

Bemerkung: 1. Dieser Satz wird meistens so angewandt, dass man A_0 mit Eigenschaften 1) und 3) findet. Dann $\overline{A}_0$ genügt zusätzlich 2); dann gilt $\overline{A}_0 = C(X)$. Z.B. A_0=Polynome auf $[a, b]$. Dann erhalten wir den Satz von Weierstraß.

2. Der Satz gilt nur im reellen Fall. Z.B. wenn wir die Polynome auf

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

betrachten. Dann ist der Abschluss eine wesentlich kleinere Menge von Funktionen - z.B. die Funktion $\overline{z}$ ist *nicht* im Abschluss.

(Runge-analytisch, rigid-analytisch).

Beweis. Wir brauchen zwei Hilfssätze

Hilfssatz 2.15. *Sei $L \subset C(X)$, L abgeschlossen Untermenge, so dass*

- *für $f, g \in L$ gelten $f \vee g, f \wedge g \in L$*
- *für jedes $x, y \in X$, $x \neq y$, $a, b \in \mathbb{R}$ existiert ein $f \in L$ mit $f(x) = a$, $f(y) = b$.*

Dann gilt $L = C(X)$.

Beweis. Sei $h \in C(X)$. Wir werden für jedes $\varepsilon > 0$ ein $g \in L$ finden, so dass $g(x) - \varepsilon < h(x) < g(x) + \varepsilon$. Dieses ist gleichbedeutend mit $\|g - h\| < \varepsilon$.
Es folgt daraus, dass $h \in \overline{L}$. D.h. $L = C(X)$. Zu diesem Zweck fixieren wir $x \in X$. Dann für jedes $y \neq x$ existiert f_y mit

$$f_y(x) = h(x) \qquad f_y(y) = h(y)$$

Wir definieren jetzt $G_y = \{z \in X : f_y(z) < h(z) + \varepsilon\}$. Die G_y sind offene Mengen. Es gelten $x, y \in G_y$. Es folgt $\bigcup_{y \in X} G_y = X$. Da X kompakt ist, gibt es $y_1, \ldots, y_n$ mit $\bigcup G_{y_j} = X$. Dann betrachten wir $f_{y_1} \wedge f_{y_2} \wedge \ldots \wedge f_{y_n}$. Dann gilt $g_x(x) = h(x)$ und $g_x(z) < h(z) + \varepsilon$ für alle z.
Sei jetzt $G_x = \{z : g_x(z) > h(z) - \varepsilon\}$. Dann gilt $x \in G_x$. Es folgt $\bigcup_{x \in X} G_x = X$. Dann, weil X kompakt ist, können wir $x_1, \ldots, x_m$ wählen, so dass $\bigcup_{j=1}^{m} G_{x_j} = X$. Dann bilden wir $g = g_{x_1} \vee g_{x_2} \vee \ldots \vee g_{x_m}$. Nach Konstruktion gilt

$$g(z) > h(z) - \varepsilon$$

Weil $g_{x_j}(z) < h(z) + \varepsilon$ für jedes j gilt auch $g(z) < h(z) + \varepsilon$ für alle $z \in X$. Dann haben wir Hilfssatz 2.15 bewiesen. Q.E.D.

Bemerkung: Wir haben $\wedge, \vee$ wesentlich verwendet - diese sind Operatoren, die nur im reellen Fall eine Bedeutung haben. Aus diesem Grund können wir den Beweis nicht auf den komplexen Fall übertragen.

Hilfssatz 2.16. *Sei X ein metrischer Raum (nicht unbedingt kompakt). Sei $V \subset C_b(X)$ ein abgeschlossener Unterverktorraum, der unter Multiplikation auch abgeschlossen ist. Dann für $f, g \in V$ gelten $f \wedge g, f \vee g \in V$.*

Beweis. Es gelten

$$\begin{aligned} (f \wedge g)(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\right) \\ \text{und} \quad (f \vee g)(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\right) \end{aligned}$$

Da $f, g \in C_b(X)$ reicht es, wenn wir wissen, dass $|\cdot|$ auf einem Intervall $[0, c]$ durch Polynome gleichmäßig approximiert werden kann. Das können wir kraft Satz 2.13 (Weierstraß) tun. Q.E.D.

Jetzt, wenn wir $x, y \in X$ betrachten existiert ein f mit $f(x) \neq f(y)$. Dann bilden wir

$$F(z) = \frac{f(z)-f(y)}{f(x)-f(y)} \cdot a + \frac{f(x)-f(z)}{f(x)-f(y)} \cdot b \in A$$

weil A ein Untervektorraum ist.
Dann

$$F(x) = a \qquad F(y) = b$$

D.h. die Bedingungen von Hilfssatz 2.15 sind erfüllt, wenn wir Hilfssatz 2.16 berücksichtigen. Es folgt

$$A = C(X)$$

Q.E.D.

Kapitel 3

Geometrie von Banach-Räumen

In der Geometrie von endlich dimensionalen Vektorräumen haben wir immer eine Basis - für $V \subset W$ existiert (Basis-Ergänzung) ein Komplementärraum $U \subset W$ mit $V \oplus U = W$. Diese Aussage gilt nicht so in Banach-Räumen. Was wir machen sind Ersätze zu finden.

Nota bene:

$$\ell^2 : \left.\begin{array}{l} (1,0,0,0,...) \\ (0,1,0,0,...) \\ (0,0,1,0,...) \\ (0,0,0,1,...) \end{array}\right\} \text{bilden keine Basis!}$$

aber:

$$\sum_{j=1}^{N} c_j e_j \to \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$$

In DiffI/II ist ein wesentlicher Aspekt der Satz von Heine-Borel. Dieses gilt auch hier nicht.

Satz 3.1 (F.Riesz)**.** *Sei V ein Banach-Raum mit*

$$\{x : \|x\| \leq 1\}$$

kompakt. Dann ist V endlich dimensional

Dieser Satz wurde in Diff II bewiesen.
Sei zuerst V normiert (vollständig nicht unbedingt). Dann definieren wir den Dualraum V^* von V durch

$$V^* = \{l : V \to \mathbb{C}, l \text{ linear}, l \text{ beschränkt}\} \qquad |l(x)| \leq \|l\| \cdot \|x\|$$

Diff II: Ist ein V ein Banach-Raum, dann so ist auch V^*.

Satz 3.2 (Hahn-Banach)**.** *Sei V ein normierter Vektorraum, $W \subset V$ ein Unterraum von V. Sei $l \in W^*$. Dann existiert $\tilde{l} \in V^*$ mit*

$$\tilde{l}|_W = l \quad \textit{und} \quad \|\tilde{l}\| = \|l\|$$

Bemerkung: Dieser Satz benutzt auch das Auswahlaxiom.

Bemerkung: Dieser Satz gilt für reelle und komplexe Vektorräume. Die Beweise sind leicht unterschiedlich.

Beweis. Zuerst beweisen wir die Behauptung, falls V/W 1-dimensional ist. Danach werden wir mit dem Zorn'schen Lemma den Allgemeinfall behandeln. Es gibt $x_0 \in V, x_0 \notin W$. Dann gilt $V = W \oplus \mathbb{R}x_0$ (algebraische direkte Summe). Wir definieren

$$\tilde{l}(w + \lambda x_0) = l(w) + \lambda r$$

wobei r zu bestimmen ist, $\lambda \in \mathbb{R}, w \in W$. Wir brauchen

$$\begin{aligned} & |\tilde{l}(w + \lambda x_0)| \leq \|w + \lambda x_0\|, \\ \text{d.h.} \qquad & |l(w) + r\lambda| \leq \|w + \lambda x_0\|. \end{aligned}$$

Diese Bedingung gleichbedeutend damit

$$-\|w + \lambda x_0\| \leq l(w) + r\lambda \leq \|w + \lambda x_0\|.$$

D.h. wir brauchen, wenn wir durch λ teilen,

$$-\left\|\frac{w}{\lambda} + x_0\right\| \leq \frac{l(w)}{\lambda} + r \leq \left\|\frac{w}{\lambda} + x_0\right\|.$$

Wir ersetzen w durch λw; dann brauchen wir

$$-\|w + x_0\| - l(w) \leq r \leq \|w + x_0\| - l(w). \qquad (*)$$

Wir haben

$$\begin{aligned} |l(w_1) - l(w_2)| &= |l(w_1 - w_2)| && w_1, w_2 \in W \\ &\leq \|w_1 - w_2\| && \|l\| = 1 \\ |l(w_1) - l(w_2)| &= \|(w_1 - w_0) - (w_2 - w_0)\| \\ &\leq \|w_1 - w_0\| + \|w_2 - w_0\| && \text{für alle } w_0 \in V. \end{aligned}$$

Jetzt wählen wir $w_0 = -x_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |l(w_1) - l(w_2)| &\leq \|w_1 + x_0\| + \|w_2 + x_0\| \\ -l(w_1) - \|w_1 + x_0\| &\leq -l(w_2) + \|w_2 + x_0\| \qquad \text{für alle } w_1, w_2 \in W. \end{aligned}$$

Es folgt daraus, dass es wenigstens ein r gibt, sodass

$$\operatorname*{Sup}_{w_1 \in W} (-l(w_1) - \|w_1 + x_0\|) \leq r \leq \operatorname*{Inf}_{w_2 \in W} (-l(w_2) + \|w_2 + x_0\|).$$

Mit diesem r wird die Ungleichung $(*)$ erfüllt.
Damit existiert $\tilde{l}$ in diesem Fall.
Zorn'sches Lemma Sei S eine Menge mit einer partiellen Ordnung $<$. Eine Kette $K \subset S$ ist eine total-geordnete Teilmenge. Angenommen, dass jede Kette K eine obere Schränke $b(K)$ hat, d.h. $b(K) \in S$ und für alle $k \in K$ gilt $k \leq b(K)$. Dann gibt es ein maximales Element $s_0 \in S$; d.h. für alle $s \in S$ gilt $s \leq s_0$.
Bei unserer Anwendung ergibt sich

$$S = \{(U, l^*) : W \subset U \subset V, \|l^*\| = 1, l^*|W = l\},$$

$$(U_1, l_1^*) < (U_2, l_2^*) \text{ falls } U_1 \subset U_2 \text{ und } l_2^*|U_1 = l_1^*.$$

Sei $K \subset S$ eine Kette

$$k \in K \qquad k = (U_k, l_k^*).$$

Weil K geordnet ist, ist $\bigcup_{k\in K} U_k$ wieder ein Vektorraum. Für $x \in \bigcup_{k\in K} U_k$ wählen wir k_0 mit $x \in U_{k_0}$. Dann setzen wir $L(x) = l^*_{k_0}(x)$. Es folgt:
$L : \bigcup_{k\in K} U_k \to \mathbb{R}$ ist linear und $L|W = l$. Deswegen $b(K) = (\bigcup_{k\in K} U_k, L)$ ist eine obere Schränke für K. Die Bedingungen des Zornschen Lemmas sind erfüllt. D.h. es gibt ein maximales Element (V_0, l_0). Falls $V_0 \neq V$ können wir wieder $x_0 \notin V_0$ finden und l_0 auf $V_0 + \mathbb{R}x_0$ fortsetzen. Widerspruch mit der Maximalität von (V_0, l_0). Es folgt $V_0 = V$, l_0 hat die Eigenschaften von $\tilde{l}$.
Jetzt betrachten wir den komplexen Fall. Sei l, W gegeben - wie vorher. Dann ist l eine Abbildung $V \to \mathbb{R}^2$. Sie ist gegeben mit $l_1(x) = \mathrm{Re}(l(x))$, $l_2(x) = \mathrm{Im}(l(x))$. Dann gelten

$$\begin{aligned}
l(x) &= l_1(x) + i\cdot l_2(x),\\
l(ix) &= i\cdot(l_1(x) + i\cdot l_2(x)) = -l_2(x) + i\cdot l_1(x),\\
l(ix) &= l_1(ix) + i\cdot l_2(ix) \qquad l_2(x) = -l_1(ix),\\
|l_1(x)| &\le \|l(x)\| \le \|x\|,\\
|l_2(x)| &\le \|x\|.
\end{aligned}$$

Jetzt wählen wir $\tilde{l}_1$ mit $\|\tilde{l}_1\| = \|l_1\|$, $\tilde{l}_1 : V \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{l}_1|W = l_1$. Dann definieren wir

$$\tilde{l}_2(x) = -\tilde{l}_1(ix) \qquad \text{und} \qquad \tilde{l}(x) = \tilde{l}_1(x) + i\cdot\tilde{l}_2(x).$$

Dann ist $\tilde{l} : V \to \mathbb{C}$ linear. Wir schätzen jetzt $\|\tilde{l}\|$ ab. Sei $\tilde{l}(x) = re^{i\theta}$ (Polarkoordinaten in $\mathbb{C}$).
Dann gilt $\tilde{l}(e^{-i\theta}x) = r$. Aber: r ist reell. Dann gilt $r = \tilde{l}_1(e^{-i\theta})$.
$|r| \le \|e^{-i\theta}\| = \|x\|$. Es folgt $\|\tilde{l}\| \le 1$. Das Argument zeigt auch $\|l_1\| = 1$. Q.E.D.

Satz 3.3 (Satz über offene Abbildungen - open mapping theorem)**.** *Seien U, V Banach-Räume. Sei $a : U \to V$ eine surjektive, stetige, lineare Abbildung. Dann ist a offen. (Falls $T \subset U$ offen ist, dann ist $a(T) \subset V$ offen).*

Beweis. Sei $B_r = \{x \in U : \|x\| < r\}$. Sei $B^*_r = \{y \in V : \|y\| < r\}$. Dann betrachten wir

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{a(B_n)}.$$

Weil a surjektiv ist, gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} a(B_n) = V$. Deswegen existiert nach dem Satz von Baire ein n_0, so dass $\left(\overline{a(B_{n_0}}\right)^0 \neq \varnothing$. Weil $B_{n_0} = n_0 B_1$ gilt diese Aussage für alle n; d.h. $\left(\overline{a(B_1)}\right)^0 \neq \varnothing$. Es gibt deswegen $B(k, r)$ mit

$$\begin{aligned}
B(k,r) &\subset \overline{a(B_1)},\\
B(k,r) - k &\subset \overline{a(B_1)} - k \subset \overline{a(B_{1+\|k\|})}.
\end{aligned}$$

Deshalb gibt es r mit

$$B(0,r) \subset \overline{a(B_R)} \qquad \text{mit } R > 1.$$

Es folgt

$$B(0,r) \subset \overline{a\left(B_{\frac{Rr_1}{r}}\right)} \qquad \text{durch Skalieren.}$$

Sei nun $\delta > 0$, $\delta < 1$. Sei $y \in V$ mit $\|y\| < r_1$.
Dann gibt es $x \in U$ mit $\|x_1\| < c\cdot r_1$, $\left(c = \frac{R}{r}\right)$

$$\|a(x_1) - y\| < \delta\cdot r_1.$$

Wir wählen jetzt $x_2, x_3, \ldots$ so, dass $\|x_j\| < c \cdot \delta^{j-1} \cdot r_1$ und

$$\|a(x_1 + x_2 + \cdots x_n) - y\| \leq \delta^n \cdot r_1.$$

Unter diesen Umständen existiert $\sum_{j=1}^{\infty} x_j =: x$. Es gilt $a(x) = y$. D.h. $y \in a(U)$. Wir haben auch

$$\|x\| \leq c \cdot (1 + \delta + \cdots) \cdot r_1 = \frac{c \cdot r_1}{1 - \delta}.$$

Es folgt

$$a\left(B_{\frac{c \cdot r_1}{1-\delta}}\right) \supset B^*_{r_1}.$$

D.h. a ist offen. Q.E.D.

Korollar 3.4. *Ist $a : U \to V$ stetig, linear und bijektiv, dann hat a eine stetige Inverse.*

Korollar 3.5. *Seien U_1, U_2 abgeschlossene Unterräume von U mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1 + U_2 = U$. Dann ist die Abbildung $U_1 \times U_2 \to U$; $(u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$ ein Homeomorphismus.*

Beweis. Aus AGLA 1 ist $U_1 \times U_2 \to U$ eine Bijektion. Diese Abbildung ist linear und stetig. Nach Korollar 3.4 ist die Inverse stetig. D.h. $U_1 \times U_2 \to U$ ist ein Homeomorphismus. Q.E.D.

In diesem Sinne kann man $U = U_1 \oplus U_2$ als Banach-Räume verstehen.

Satz 3.6. *Sei U ein Banach-Raum. Sei $U_1 \subset U$ abgeschlossen, sodass entweder U_1 oder U/U_2 endlich dimensional ist. Dann gibt es $U_2 \subset U$, U_2 abgeschlossen, sodass $U = U_1 \oplus U_2$.*

Beweis. Sei zuerst U_1 endlich dimensional. Sei $e_1, \ldots e_n$ eine Basis von U_1. Sei $l_j : U_1 \to \mathbb{C}$ (Fall von komplexen Banach-Räumen) die lineare Abbildung mit

$$l_j(e_i) = \delta_{ij} \qquad \text{(Kronecker-}\delta\text{)}.$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach können wir l_j auf U fortsetzen, zu $\tilde{l}_j$ mit $\|\tilde{l}_j\| = 1$. Dann erhalten wir eine Abbildung $\tilde{l} : U \to \mathbb{C}^n; x \mapsto (\tilde{l}_1(x), \tilde{l}_2(x), \ldots \tilde{l}_n(x))$. Diese Abbildung ist stetig. Sei $U_2 = \mathrm{Ker}(\tilde{l})$. Dann ist U_2 abgeschlossen. Für $x \in U$ können wir

$$x' = x - \sum \tilde{l}_j(x) e_j.$$

Dann gilt

$$x' \in U_2 \qquad x = \sum \tilde{l}_j(x) e_j + x' \qquad U_1 + U_2 = U.$$

Auch

$$U_1 \cap U_2 = \varnothing \qquad \tilde{l}\left(\sum c_j e_j\right) = (c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Deswegen gilt

$$U = U_1 \oplus U_2 \qquad \text{nach Korollar 3.5.}$$

Sei $U_1 : U/U_1$ endlich-dimensional ist. Dann wählen wir eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ von U/U_1. Dann gibt es $x_1, \ldots, x_n$ in U, die unter der kanonischen Abbildung nach $e_1, \ldots, e_n$ abgebildet werden. Dann bilden wir $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle =: U_2$. Algebraisch $U = U_1 \oplus U_2$; dass U_2 auch abgeschlossen ist, folgt aus Korollar 3.5. Q.E.D.

Dieser Satz ist besonders wichtig für die Theorie von Fredholm-Operatoren, d.h. lineare Abbildungen $a : U \to V$ mit $\mathrm{Ker}(a)$ und $V/\,\mathrm{Im}(a)$ endlich dimensional.

Satz 3.7 (Satz über abgeschlossene Abbildung - Closed Graph Theorem)**.** *Sei $a : U \to V$ linear. Sei*

$$\Gamma = \{(x, a(x)) : x \in U\} \subset U \times V.$$

Ist Γ abgeschlossen, dann ist a stetig.

Beweis. Wir bemerken, dass Γ ein Unterraum von $U \times V$ ist. Wenn Γ abgeschlossen ist, ist Γ ein Banach-Raum. Nach Korollar 3.4 ist die Abbildung

$$\Gamma \to U \qquad x \mapsto (x, a(x))$$

ist Homöomorphismus. Sei $\Gamma \to U$ die inverse Abbildung - sie ist stetig. Die Abbildung $\Gamma \to V; (u, v) \mapsto v$ ist stetig. Deswegen ist

$$U \to \Gamma \to V \qquad u \mapsto a(u)$$

dann auch stetig. Q.E.D.

Satz 3.8 (Banach-Steinhaus)**.** *Seien $l_i : U \to V$ $(i \in I)$ lineare Abbildungen mit der Eigenschaft, dass für jedes x die Menge $\{l_i(x) : i \in I\} \subset V$ beschränkt ist. Sei $B \subset U$ beschränkt. Dann ist die Menge*

$$\bigcup_{i \in I} l_i(B)$$

auch beschränkt.

Beweis. Sei

$$C_n = \{x \in U : \|l_i(x)\| \leq n \text{ für alle } i\}.$$

Nach Voraussetzung gilt: $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = U$. Auch nach Konstruktion sind die $C_n' s$ abgeschlossen. Es folgt nach dem Satz von Baire, dass es ein n_0 gibt, sodass ${C_{n_0}}^0 \neq \varnothing$. Durch Skalieren gilt dieses für alle n, d.h. ${C_n}^0 \neq \varnothing$. Wir wählen x_1, r_1 mit $B(x_1, r_1) \subset {C_1}^0$. D.h. für alle $x \in B(x_1, r_1)$ gilt $\|l_i(x)\| \leq 1$. D.h. $\|l_i(x - x_1) + l_i(x_1)\| \leq 1$. D.h. $\|l_i(x - x_1)\| \leq 1 + \|l_i(x_1)\|$. Nun existiert c_1 mit $\|l_i(x_1)\| \leq c_1$ für alle $i \in I$. Es folgt: für alle $y := x - x_1$:

$$\|y\| < r_1 \text{ gilt } \|l_i(y)\| \leq 1 + c_1 \text{ d.h. } \|l_i\| \leq \frac{1 + c_1}{r_1}.$$

Die Aussage ist eine direkte Konsequenz. Q.E.D.

Satz 3.9 (Helly; Banach-Alaoglu)**.** *Sei U ein Banach-Raum. Seien $l_1, l_2, \ldots \in U^*$ mit $\|l_i\| \leq 1$. Dann gibt es eine Teilfolge $l_{n_1}, l_{n_2}, \ldots$, sodass für jedes $x \in U$ gilt: $l_{n_j}(x)$ konvergiert; $\lambda : \lambda(x) = \lim_{n_j \to \infty} l_{n_j}(x)$, $\lambda \in U^*$.*

Bemerkung: Wir hatten gesehen, dass U^* ein Banach-Raum ist. Es gibt aber eine andere Topologie: $a_i \in U^*$ **konvergiert schwach** gegen a, falls

$$a_i(x) \to a(x) \qquad \text{für jedes } x.$$

Satz von Helly: „Der Einheitsball vom Dual eines Banach-Raumes ist schwach kompakt“.

Beweis. Wir betrachten

$$X = \prod_{x \in U} \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\}.$$

Nach dem Satz von Tychonoff ist X kompakt. Dann betrachten wir

$$U_1{}^* \to X \qquad l \mapsto (x \mapsto l(x)),$$

wobei $U_1{}^* = \{l \in U^* : \|l\| \leq 1\}$. ($|l(x)| \leq \|l\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$).
Wir zeigen, dass das Bild $U_1{}^*$ abgeschlossen ist. Wenn $a_i \in U_1{}^* : a_i \to a$, dann hat man

$$a_i(x+y) = a_i(x) + a_i(y) \qquad x, y \in U,$$
$$a_i(cx) = ca_i(x) \qquad x \in U, c \in \mathbb{C}.$$

Es folgt: a ist linear. Es gilt:

$$|a_i(x)| \leq \|x\|.$$

Es folgt $|a(x)| \leq \|x\|$.
Deswegen ist a stetig im $U_1{}^*$. Es folgt: das Bild von $U_1{}^*$ in X ist abgeschlossen - und deswegen kompakt. Die Aussage des Satzes ist eine Formalisierung dieser Eigenschaft. Q.E.D.

Eine Anwendung ist in der Maßtheorie - und so auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Man betrachtet eine Raum X mit σ-Algebra $\mathcal{A}$ und eine Familie μ_i, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ von endlichen Maßen $(\mu_i(X) < \infty)$, mit $\mu_i(X) \leq 1$. Dann gibt es eine Teilfolge μ_{n_i}, sodass $\int f(x) d\mu_{n_i}(x) \to \int f(x) d\mu(x)$ für ein Maß μ und f eine stetige Funktion mit kompakten Träger. D.h. $\mathcal{A}$ ist die Borel-Algebra einer Topologie auf X. Diese Topologie soll hausdorffsch sein. Dann ist der **Träger** von f die Menge $\{x : f(x) \neq 0\}$. Es kann aber sein, dass $\mu = 0$ ist, auch wenn alle μ_i die Bedingung $\|\mu_i\| = 1$ erfüllen. Z.B.

$$\mu_i(A) = m(A \cap [i, i+1]) \qquad \text{(Lebesgue-Maß auf } \mathbb{R}).$$

Dann gilt

$$\|\mu_i\| = 1.$$

Für jede Funktion mit kompaktem Träger gilt

$$\int f d\mu_i = 0 \text{ für } i \text{ groß},$$

$$\mu_i \to 0 \text{ schwach.}$$

Dieser Satz wird meist im Falle von X kompakt angewandt. In diesem Fall hat die Funktion 1 einen kompakten Träger. Es folgt $\|\mu_i\| = \int_X d\mu_i \to \int_X d\mu = \mu(x)$. Sollte hier $\|\mu_i\| = 1$ dann gilt auch

$$\|\mu\| = 1 \text{ sodass } \mu \neq 0.$$

Sei $U = \ell^2$. Dann ist $U^* = U$; alle (linearen) Abbildungen $U \to \mathbb{C}; x \mapsto \langle y, x\rangle$ für geeignetes y. Dann betrachte man

$$e_i{}^* : \ell^2 \to \mathbb{C} \qquad (x_1, x_2, \ldots) \mapsto x_i.$$

Dann gilt $\|e_i{}^*\| = 1$. Nach dem Satz von Helly gibt es eine Teilfolge $e_{n_j}{}^*$ mit $e_{n_j}{}^* \to \eta$ für geeignetes η. *Aber* $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$; es folgt $|x_i|^2 \to 0$ für $i \to \infty$. Daraus folgt $e_i{}^*(x) \to 0$ für $i \to \infty$. D.h. $\eta = 0$.
Weshalb interessiert man sich für diesen Satz?
Einfachstes Problem: $D \subset \mathbb{R}^2$, $\partial D = \overline{D} - D$ (Rand von D). Sei $\Phi : \partial D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das Problem, das man nun lösen will, ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ zu finden, sodass

$$\frac{\partial^2 f}{dx^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ in } \overline{D},$$

$$f(x_i) \to \Phi(\xi) \qquad \text{für } \underbrace{x_i}_{\in D} \to \underbrace{\xi}_{\in \partial D}.$$

Mit dem Satz von Stokes kann man zeigen, dass eine Funktion mit diesen Eigenschaften auch die Eigenschaften

$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 dm(x,y) \text{ minimal mit } f(x_i) \to \Phi(\xi)$$

$$f \mapsto f + g \qquad g|\partial D = 0$$

erfüllt (Dirichletsches Prinzip; W.Thomson = Lord Kelvin)
Weierstraß - ein Minimum existiert nicht immer. Riemanns Satz wurde von von Neumann gerettet (Alternierende Methode, Balayage, subharmonische Funktionen).
Hilbert 1905: mit Hilbert-Räumen - man kann sogar das Dirichletsche Prinzip retten (Arzelà-Ascoli).

Kapitel 4

Geometrie von Hilbert-Räumen

In der Theorie von Banach-Räumen haben wir mehrere mengentheoretische Techniken angewandt (Auswahlaxiom).
Hilbert-Räume sind auch Banach-Räume, die Sätze gelten entsprechend. Durch die Geometrie des Skalarproduktes können wir diese Sätze wesentlich eleganter und effektiver machen.
Notationen:

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C},$$

$$\langle \lambda x, \mu y \rangle = \overline{\lambda}\mu \langle x, y \rangle,$$

$$\ell^2 = \left\{ (a_1, a_2, \cdots) : \sum |a_j|^2 < \infty \right\},$$

$$\langle (a_j), (b_j) \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{a}_j b_j.$$

Satz 4.1. *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbert-Raum. Dann gilt: $\mathcal{H} \cong \ell^2$ im Sinne, dass es eine lineare Abbildung $a : \mathcal{H} \to \ell^2$ gibt, so dass*

$$\langle a(x), a(y) \rangle_{\ell^2} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Beweis. „Separabel" heißt, dass es eine abzählbare, dichte Teilmenge von $\mathcal{H}$ gibt. Sei die Menge $\{v_1, v_2, \ldots\}$. Dann betrachten wir die Räume

$$V_n = \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\},$$

wobei $\dim V_n \leq \dim V_{n+1} \leq \dim(V_n) + 1$. Es folgt: $\dim V_n =: d(n)$ genügt $d(n) \leq n$. Nun sei $e_1, \ldots, e_{d(n)}$ eine orthonormale Basis von V_n. Falls $d(n+1) > d(n)$ können wir die Basis zu einer orthonormalen Basis $e_1, \ldots e_{d(n)}, e_{d(n+1)}$ von V_{n+1} ergänzen - Gram-Schmidt Verfahren (AGLA). Dann haben wir einen Folge $e_1, e_2, \ldots$, sodass $V_n = \operatorname{Span}\{e_1, \ldots, e_{d(n)}\}$.

Gram-Schmidt (oder quadratische Ergänzung). Sei $n : \dim V_{n+1} = \dim V_n + 1$. Dann wählen wir $\underline{f} \in V_{n+1} - V_n$. Dann bilden $e_1, \dots, e_{d(n)}, f$ eine Basis von V_{n+1}. Sei

$$f^* = f - \sum_{j=1}^{d(n)} \langle e_j, f \rangle \cdot e_j,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \langle e_i, f^* \rangle &= \langle e_i, f \rangle - \sum_{j=1}^{d(n)} \langle e_j, f \rangle \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=\delta_{ij}} \\ &= \langle e_i, f \rangle - \sum_{j=1}^{d(n)} \langle e_j, f \rangle \cdot \delta_{ij} \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei $f^* \neq 0$, weil f nicht linear abhängig ist auf $e_1, \dots e_{d(n)}$. Dann ist $\{e_1, \dots, e_{d(n+1)}\}$ eine orthonormale Basis mit

$$e_{d(n+1)} = \frac{1}{\|f^*\|} \underline{f^*}.$$

Sei $w \in \mathcal{H}$. Dann gibt es eine Folge $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots$, sodass $\|w - v_{i_j}\| \to 0$ für $j \to \infty$. Speziell: Es gibt eine Folge $w_j \in V_j$, sodass $\|w - w_j\| \to 0$ für $j \to \infty$. Jetzt betrachten wir

$$w_j{}^* = \sum_{i=1}^{d(j)} \langle e_i, w \rangle e_i \in V_j.$$

Wir zeigen jetzt, dass $\|w - w_j{}^*\| \leq \|w - w_j\|$, oder, besser $\|w - w_j{}^*\|^2 \leq \|w - w_j\|^2$. Sei $w_j = \sum_{i=1}^{d(j)} c_{ji} e_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|w - w_j\|^2 &= \langle w - w_j, w - w_j \rangle \\ &= \|w\|^2 - \langle w, w_j \rangle - \langle w_j, w \rangle + \langle w_j, w_j \rangle \\ &= \|w\|^2 - \left\langle w, \sum_{i=1}^{d(j)} c_{ji} e_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{d(j)} c_{ji} e_i, w \right\rangle + \sum_{i=1}^{d(j)} |c_{ji}|^2 \\ &= \|w\|^2 - \sum_{i=1}^{d(j)} c_{ji} \langle w, e_i \rangle - \sum_{i=1}^{d(j)} \overline{c}_{ji} \langle e_i, w \rangle + \sum_{i=1}^{d(j)} |c_{ji}|^2 \\ &= \|w\|^2 + \sum_{i=1}^{d(j)} |c_{ji} - \langle e_i, w \rangle|^2 - \sum_{i=1}^{d(j)} |\langle e_i, w \rangle|^2. \end{aligned}$$

Das Minimum wird durch

$$\|w - w_j{}^*\|^2 = \|w\|^2 - \sum_{i=1}^{d(j)} |\langle e_i, w \rangle|^2$$

erreicht, falls $\langle e_i, w\rangle - c_{ji} = 0$ für alle $1 \le i \le d(j)$.
Folglich:
Über alle möglichen w_j wird das Minimum erreicht, wenn $c_{ji} - \langle e_i, w\rangle = 0$ für alle i. Dieses Minimum wird erreicht für ${w_j}^*$. Es folgt:

$$\|w - {w_j}^*\| \le \|w - w_j\|.$$

Bemerkung: Es folgt

$$\sum_{i=1}^{d(j)} |\langle e_i, w\rangle|^2 \le \|w\|^2 \qquad \text{Besselsche Ungleichung.}$$

Wir wissen $\|w - w_j\| \to 0$ für $j \to \infty$. Es folgt: $\|w - {w_j}^*\| \to 0$ für $j \to \infty$. Die Folge $\sum_{i=1}^{d(j)} |\langle e_i, w\rangle|^2$ konvergiert für $j \to \infty$, und zwar gegen $\|w\|^2$. Wir bemerken, dass die Folge $\sum_{j=1}^{N} s_j e_j$ eine Cauchy-Folge ist, falls für jedes $\varepsilon > 0$ es ein N_0 gibt, so dass für $N, M > N_0$ gilt

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} s_j e_j - \sum_{j=1}^{M} s_j e_j \right\| \le \varepsilon.$$

Wir setzen voraus, dass $N > M$. Dann gilt

$$\left\| \sum_{j=M+1}^{N} s_j e_j \right\|^2 = \sum_{j=M+1}^{N} |s_j|^2.$$

Es folgt: Die Folge $\sum_{j=1}^{N} s_j e_j$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{j=1}^{\infty} |s_j|^2$ konvergiert. Es folgt: wenn wir

$$a : \mathcal{H} \to \ell^2 \qquad w \mapsto (\langle e_j, w\rangle)_{j=1}^{\infty} \quad (= (j \mapsto \langle e_j, w\rangle)$$

definieren, dann ist diese Abbildung injektiv. Es gilt auch $\|a(w)\|^2 = \|w\|^2$ (d.h. $\sum |\langle e_j, w\rangle|^2 = \|w\|^2$). Daraus folgt $\langle a(x), a(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Die Abbildung ist surjektiv, da $(c_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^2$ ist das Bild von $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \in \mathcal{H}$. Deswegen hat a die Eigenschaften verlangt. Q.E.D.

Wir sagen, dass (e_j) eine orthonormale Basis vom Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ ist.

Warnung: Dieses ist *keine* Basis im Sinne von AGLA.

Beispiel: (wichtig)
Wie betrachten das Invervall $[0, 1]$. Wir betrachten zuerst $L^1([0, 1], m)$ und $L^2([0, 1], m)$. Nach Cauchy-Schwarz gilt

$$\left(\int_{[0,1]} |f| dm \right)^2 \le \int |f|^2 dm.$$

Es folgt: $L^2([0, 1], m) \subset L^1([0, 1], m)$ - alle Elemente von $L^2([0, 1], m)$ sind integrierbar. Wir betrachten alle stetigen Funktionen f auf $[0, 1]$ mit $f(0) = f(1)$; Sei $C_1([0, 1])$ der Raum solcher Funktionen. Aus Diff II brauchen wir die Tatsache, dass $C_1([0, 1])$ dicht in $L^1([0, 1], m)$ ist. Jetzt betrachten wir Funktionen von der Art

$$\sum_{j=-M}^{+M} c_j e^{2\pi i j \tau}$$

- solche heißen trigonometrische Polynome. Wir brauchen die Tatsache, dass die Gesamtheit dieser Funktionen dicht in $C_1([0,1])$ ist - folgt aus Stone-Weierstraß. Sei $f \in L^2([0,1],m)$. Dann definieren wir

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & |f(x)| \leq n \\ 0 & |f(x)| > n \end{cases}.$$

Dann gilt, dass $|f_n|$ monoton steigend ist und $\lim_{n\to\infty} |f_n|^2 = |f|^2$ (f.ü.). Nach dem Lebesgueschen Satz über monotone Konvergenz gilt

$$\int |f_n|^2 dm \to \int |f|^2 dm.$$

Es folgt: $f_n \to f$ in $L^2([0,1],m)$. Es folgt, dass beschränkte, meßbare Funktionen dicht in $L^2([0,1],m)$ liegen. Wir bekommen, dass trigonometrische Polynome in $L^2([0,1],m)$ dicht sind. Andererseits ist die Menge $(x \mapsto e^{2\pi ijx})$, $j \in \mathbb{Z}$ orthonormal

$$\left(\text{weil} \int_0^1 e^{2\pi ikx} dx = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases}\right).$$

Es folgt jetzt, dass die Abbildung

$$L^2([0,1],m) \to \ell^2(\mathbb{Z}) \qquad f \mapsto \left(j \mapsto \int_{[0,1]} f(x) e^{2\pi ijx} dx\right)$$

hier ein Isomorphismus von Hilbert-Räumen ist.

Satz 4.2 (Hilbert-Raum-Fassung des Fourierschen Satzes)**.**

$$L^2([0,1],m) \to \ell^2(\mathbb{Z})$$

ist ein Isomorphismus mit

$$f \mapsto \left(j \mapsto \int_{[0,1]} f(x) e^{2\pi ijx} dx\right),$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e^{-2\pi ijx} \leftarrow\!\shortmid (c_j).$$

Bemerkung: Die Reihe $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e^{-2\pi ijx}$ konvergiert in $L^2([0,1],m)$ - aber nicht unbedingt punktweise.
Die Konvergenz in $L^2([0,1],m)$ ist eigentlich nicht, was wir haben wollen. Falls die Reihe $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|$ konvergiert, dann können wir die L^2-Funktion $\sum c_j e^{-2\pi ijx}$, $\|\ \|_2$, mit der stetigen Funktion $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e^{-2\pi ijx}$, $\|\ \|_\infty$ identifizieren.

Satz 4.3. *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbert-Raum. Sei $E \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei $E^\perp = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y\rangle = 0$ für alle $y \in E\}$. Dann gilt:*

$$\mathcal{H} = E \oplus E^\perp.$$

Bemerkung: Es folgt, dass wir immer einen ausgezeichneten Komplementarraum zu einem abgeschlossenen Unterraum haben.

Beweis. Sei $x \in \mathcal{H}$. Dann betrachten wir $A = \operatorname{Inf}_{y\in E} \|x-y\|$. Wir wählen eine Folge $y_1, y_2, \ldots$ mit $\|x-y_j\| \to A$. Es folgt: Die Folge $\|x-y_j\|$ ist eine Cauchy-Folge. Deswegen ist $(x-y_j)$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$. Es gilt:

$$\|(x-y_j)-(x-y_k)\| \leq |\|x-y_j\| - \|x-y_k\|| \,.$$

Es folgt: y_i ist eine konvergente Folge in $\mathcal{H}$. Für $x \notin E$ wählen wir $y_n : \|x-y\| \to \operatorname{Inf}_{z\in E}\{\|x-z\|\} =: A$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\| &= \|(y_n-x)-(y_m-x)\| \\ &\leq \|y_n-x\| + \|y_m-x\| \qquad \left(N : \|y_n-x\| < \frac{\varepsilon}{2},\ \|y_m-x\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } m,n > N\right)\end{aligned}$$

D.h. (y_n) ist eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$. D.h. $\lim_{n\to\infty} y_n$ existiert in $\mathcal{H}$, da $\mathcal{H}$ vollständig ist. Es gilt auch $\lim_{n\to\infty} y_n \in E$, weil E abgeschlossen ist. Es folgt nun, wenn wir $p(x) = \lim_{n\to\infty} y_n$ setzen, dann gilt für jedes $u \in E$, dass

$$\begin{aligned}\|x-p(x)+u\| &\geq \|x-p(x)\| \qquad \left(\text{weil } \|x-p(x)\| = \operatorname*{Inf}_{z\in E}\{\|x-z\|\}\right) \\ \text{also}\|x-p(x)+u\|^2 &\geq \|x-p(x)\|^2,\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}\|x-p(x)\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x-p(x),u\rangle) + \|u\|^2 &\geq \|x-p(x)\|^2, \\ 2\operatorname{Re}(\langle x-p(x),u\rangle) + \|u\|^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Wir ersetzen u durch ru. Wir bekommen

$$2r\operatorname{Re}(\langle x-p(x),u\rangle) + r^2\|u\|^2 \geq 0.$$

Für $r>0$ können wir durch r teilen:

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re}(\langle x-p(x),u\rangle) + r\|u\|^2 &\geq 0 \qquad \text{für alle } r>0. \\ 2\operatorname{Re}(\langle x-p(x),u\rangle) &\geq 0 \qquad (r\to 0).\end{aligned}$$

Wenn wir u durch $-u$ ersetzen, dann folgt

$$-2\operatorname{Re}(\langle x-p(x),u\rangle) \geq 0.$$

Es folgt

$$-2\operatorname{Re}(\langle x-p(x),u\rangle) = 0.$$

Im Falle eines reellen Hilbert-Raumes folgt $\langle x-p(x),u\rangle = 0$.
Im komplexen Fall ersetzen wir u durch $e^{i\theta}u$: es folgt wieder

$$\langle x-p(x),u\rangle = 0. \tag{4.1}$$

Wird diese Bedingung erfüllt, dann gilt:

$$\begin{gathered}\|x-p(x)+u\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + \|u\|^2. \\ \text{D.h. } \|x-p(x)+u\| \geq \|x-p(x)\|^2 \text{ mit Gleichheit nur bei } u=0.\end{gathered}$$

Seien nun $x, x' \in \mathcal{H}$. Wir zeigen, dass gilt:

$$p(x+x') = p(x) + p(x').$$

Es gelten:

$$\langle x - p(x), u\rangle = 0 \text{ für alle } u \in E,$$
$$\langle x' - p(x'), u\rangle = 0 \text{ für alle } u \in E \text{ und}$$
$$\langle x + x' - p(x + x'), u\rangle = 0 \text{ für alle } u \in E.$$

Diese ergeben:

$$\langle p(x) + p(x') - p(x + x'), u\rangle = 0 \text{ für alle } u \in E.$$

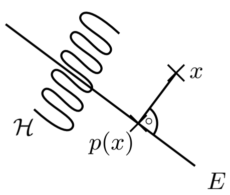
Weil $p(x), \ldots \in E$ können wir $u = p(x + x') - p(x) - p(x')$ wählen. Wie bekommen

$$p(x + x') = p(x) + p(x'),$$

wie behauptet. Ähnlich beweist man,

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \lambda \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}.$$

Es folgt: p ist linear. Die Abbildung ist eine **orthogonale Projektion** von $\mathcal{H}$ auf E.



Nun brauchen wir den Operator $I - p$. Es gilt
$\|x\|^2 = \|x - p(x) + p(x)\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$. Aus 4.1 folgt:

$$(I - p)(x) = x - p(x) \in E^\perp \qquad p(x) \in E.$$

Die Abbildungen p und dann auch $I - p$ sind linear, es gelten

$$\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2,$$
$$\|I - p(x)\| \leq \|x\|^2,$$
$$\|p(x)\|^2 + \|(I - p)(x)\|^2 = \|x\|^2,$$

$$\|p\| \leq 1, \ \|I - p\| \leq 1.$$

Es folgt zuerst, dass $E^\perp$ ein Unterraum von $\mathcal{H}$ ist; auch, weil $I - p$ stetig ist, ist $E^\perp$ auch abgeschlossen. Q.E.D.

Ist S abzählbar und dicht in $\mathcal{H}$, dann ist $p(S)$ abzählbar und dicht in E. Das gleiche gilt für $E^\perp$. D.h. wir können eine orthonormale Basis $e_1, e_2, ...$ von E und $f_1, ..., f_n, ...$ von $E^\perp$ finden. $\{e_1, e_2, ...\} \cup \{f_1, f_2, ...\}$ wird dann eine orthonormale Basis von $\mathcal{H}$ sein.
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Wir betrachten den Dualraum zu $\mathcal{H}$. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

D.h. für jedes x ist die Abbildung $y \mapsto \langle x, y\rangle$ eine (stetige) lineare Abbildung von $\mathcal{H}$ in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Sei $l : \mathcal{H} \to K$ ($K = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) eine stetige Linearform $\neq 0$. Sei $E = \mathrm{Ker}(l)$, weil l stetig ist, ist E abgeschlossen. Dann ist $\mathcal{H}/E$ ein-dimensional nach dem Homomorphismussatz. Wir wählen $x \in \mathcal{H}$, $x \notin E$. Dann gilt (x fest)

$$y \mapsto \frac{\langle x, y\rangle l(x)}{\|x\|^2}$$

ist eine stetige lineare Abbildung mit $\mathrm{Ker}(Ky)^{\perp} = E$. Es gilt

$$x \mapsto \frac{\langle x, x\rangle}{\|x\|^2} l(x) = l(x).$$

Deswegen stimmt diese Linearform mit ℓ überein. Wir haben bewiesen:

$$l(y) = \frac{\langle x, y\rangle l(x)}{\|x\|^2} \qquad \text{für } x \in \mathcal{H},\ l(x) \neq 0.$$

Es folgt: jede Linearform auf $\mathcal{H}$ ist von der Form $y \mapsto \langle x, y\rangle$ (**Riesz'scher Darstellungssatz**). Seien zunächst

$$\begin{aligned}
&\mathrm{End}(\mathcal{H}) = \{A : A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \text{ stetig, linear}\},\\
&\mathrm{Sesqui}(\mathcal{H}) = \{s : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to K, y \mapsto s(x, y) \text{ linear, } x \mapsto s(x, y) \text{ ist}\\
&\qquad\qquad \text{semilinear. Auch existiere } C > 0 \text{ mit } |s(x, y)| \leq C\|x\| \cdot \|y\|\},\\
&\mathrm{Herm}(\mathcal{H}) = \{s \in \mathrm{Sesqui}(\mathcal{H}) : s(x, y) = \overline{s(x, y)}\}.
\end{aligned}$$

Semilinear bedeutet, dass gelten:

$$\begin{aligned}
f(x + x') &= f(x) + f(x') \text{ und}\\
f(\lambda x) &= \overline{\lambda} f(x).
\end{aligned}$$

Beispiele zu $\mathrm{Herm}(\mathcal{H})$:

1. Sei
$$\langle f, g\rangle = \int \overline{f(x)} g(x) dx.$$
$$\int K(x, y)\overline{f(x)} g(y) dx dy$$
ist hermitesch, falls
$$K(x, y) = \overline{K(y, x)}.$$

2. Sei der ℓ^2 gegeben. Es gelten:
$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\overline{x}_i y_i \text{ und } c_{ij} = \overline{c_{ji}}.$$

Problem: Gibt es eine orthonormale Basis von $\mathcal{H}$, sodass ein gegebenes $s \in \mathrm{Herm}(\mathcal{H})$ diagonal ist?
Wir definieren für $s \in \mathrm{Sesqui}(\mathcal{H})$, $\|s\| = \mathrm{Sup}\,|s(x, y)|$, $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$.

Satz 4.4. *Die Abbildung*

$$\mathrm{End}(\mathcal{H}) \to \mathrm{Sesqui}(\mathcal{H}) \qquad A \mapsto ((x, y) \mapsto \langle x, A(y)\rangle)$$

ist ein Isomorphismus, die die Normen erhält.

Beweis. Sei $A \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$. Dann ist

$$s_A(x, y) = \langle x, A(y) \rangle$$

sesquilinear und es gilt

$$|s_A(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|Ay\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Es folgt

$$\|s_A\| \leq \|A\|. \tag{4.2}$$

Zunächst sei s eine Sesquilinearform. Dann ist $x \mapsto \overline{s(x, y)}$ eine Linearform auf $\mathcal{H}$. Es folgt, dass es $z \in \mathcal{H}$ gibt (Riesz Darstellungssatz), sodass $\overline{s(x, y)} = \langle z, x \rangle$. Wir schreiben für dieses z $A(y)$. Es folgt: $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, sodass

$$\begin{aligned} \overline{s(x, y)} &= \langle A(y), x \rangle, \\ \text{oder } s(x, y) &= \langle x, A(y) \rangle. \end{aligned}$$

Weil $y \mapsto s(x, y)$ linear ist und $A(y)$ eindeutig bestimmt ist, folgt, dass A linear ist. Jetzt betrachten wir $x = A(y)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} s(A(y), y) &= \|A(y)\|^2, \\ \|s\| \cdot \|A(y)\| \cdot \|y\| &\geq \|A(y)\|^2 \\ \text{oder } \|s\| \cdot \|y\| &\geq \|A(y)\|. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\|s\| \geq \|A\|. \tag{4.3}$$

Zusammen (4.2 und 4.3) erhalten wir, dass die Abbildung $A \mapsto s_A$ ein Isomorphismus ist.

$$\|s_A\| = \|A\|$$

Q.E.D.

Dann können wir mit dem Rieszschen Darstellungssatz (oder Satz 4.4) schließen, dass es für $A \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$ ein so A^* gibt, dass

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle.$$

In ℓ^2 gilt: $(c_{ij})^* = (\overline{c_{ji}})$. Der Endomorphismus A^* ist der **adjungierte Endomorphismus** zu A.

$$s(y, x) = \overline{\langle A(x), y \rangle}.$$

Dann gelten:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2)^* &= {A_1}^* + {A_2}^*, \\ (cA)^* &= \bar{c}A, \\ (A_1 A_2)^* &= {A_2}^* {A_1}^*, \\ A^{**} &= A, \\ \|A^*\| &= \|A\| \text{ (weil Norm } \langle A(x), y \rangle = \text{Norm} \langle x, A^*(y) \rangle), \\ \|A^* A\| &= \|A\|^2. \end{aligned}$$

Beweis von $\|A^* A\| = \|A\|^2$.
Zuerst: $\|A^* A\| \leq \|A^*\| \cdot \|A\| = \|A\|^2$.

Zunächst gelten:

$$\begin{aligned}\|A(x)\|^2 &= \langle A(x), A(x)\rangle,\\ &= \langle x, A^*A(x)\rangle,\\ &\leq \|x\| \cdot \|A^*A(x)\| \text{ und}\\ &\leq \|x\| \cdot \|A^*A\| \cdot \|x\|.\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\|.$$

Zusammen ergeben diese:

$$\|A\|^2 = \|A^*A\|.$$

Für $s \in \mathrm{Herm}(\mathcal{H})$ gilt $s(x,x) = \overline{s(x,x)}$. D.h. $s(x,x) \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass $s \in \mathrm{Herm}(\mathcal{H})$ positiv (-definit) ist, falls $s(x,x) > 0$ für $x \neq 0$. Falls $A \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$ so ist, dass $(x,y) \mapsto \langle x, A(y)\rangle$ hermitesch und positiv-definit ist, dann schreiben wir $A > 0$. Auf diese Weise bekommen wir eine partielle Ordnung auf $\mathrm{End}(\mathcal{H})$. (Dass A eine hermiteschen Form entspricht, bedeutet $A^* = A$.)

Definition 4.5. *Seien U, V Banach-Räume. Sei $A : U \to V$ eine stetige, lineare Abbildung. Dann heißt A* kompakt*, falls*

$$A(B) \subset V$$

kompakt ist, wobei $B = \{x \in U : \|x\| \leq 1\}$.

Wir wenden diese Definition auf $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ an.

Satz 4.6. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Sei $A \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$ hermitesch und kompakt. Dann existiert $\lambda = \pm\|A\|$ und $x \in \mathcal{H}$, so dass*

$$A(x) = \lambda x.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass gilt

$$|\langle Ax, y\rangle| \leq c \cdot \|x\| \cdot \|y\|, \quad \text{wenn gilt} \quad |\langle Ax, x\rangle| \leq c\|x\|^2.$$

Beweis der Ungleichung Wir haben

$$\begin{aligned}|\langle Ax, x\rangle| &\leq c \cdot \|x\|^2,\\ |\langle A(x+y), (x+y)\rangle| &\leq c \cdot \|x+y\|^2,\\ |\langle A(x-y), (x-y)\rangle| &\leq c \cdot \|x-y\|^2 \text{ und}\\ 2 \cdot |\langle A(x), y\rangle + \langle Ay, x\rangle| &\leq c \cdot (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2).\\ \text{Weil } A^* = A \text{ gilt } \langle Ay, x\rangle &= \langle y, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle}.\end{aligned}$$

Deswegen gilt

$$2 \cdot |\langle Ax, y\rangle + \overline{\langle Ax, y\rangle}| \leq 2c \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Wir ersetzen y durch ζy, wobei $\zeta \in \mathbb{C}$. Wir erhalten

$$|\langle Ax, y\rangle\zeta + \overline{\langle Ax, y\rangle} \cdot \bar{\zeta}| \leq c \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad \text{mit } |\zeta| = 1.$$

Wir wählen (falls $\langle Ax, y\rangle \neq 0$, $\zeta = \frac{\overline{\langle Ax,y\rangle}}{|\langle Ax,y\rangle|}$)

$$2 \cdot |\langle Ax, y\rangle \leq c \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Jetzt ersetzen wir x durch tx, y durch $t^{-1}y$ mit $t > 0$. Wir bekommen

$$2 \cdot |\langle Ax, y\rangle| \leq c \cdot (\|x\|^2 t^2 + \|y\|^2 t^{-2}) \qquad \text{für alle } t.$$

Dann erhalten wir mit $t = (\|y\|/\|x\|)^{1/2}$:

$$2 \cdot |\langle Ax, y\rangle| \leq 2c \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$
$$\text{D.h. } |\langle Ax, y\rangle| \leq c \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Zunächst zeigen wir, dass wir $c = \|A\|$ nehmen können, und dass kein kleineres c in Frage kommt. Weil $\langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2$; wir können x wählen, sodass für vorgegebene $\varepsilon > 0$ gilt

$$\|Ax\| \geq (\|A\| - \varepsilon) \cdot \|x\|.$$

Aus $\|Ax\|^2 \leq c \cdot \|Ax\| \cdot \|x\|$ oder $\|Ax\| \leq c \cdot \|x\|$ folgt, dass die Ungleichung für kein $c < \|A\|$ gelten kann. D.h.

$$\operatorname{Inf}\left\{c : |\langle Ax, x\rangle| \leq c \cdot \|x\|^2\right\} \geq \|A\|.$$

Aber es gilt

$$|\langle Ax, y\rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|y\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|. \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

D.h.

$$\operatorname{Inf}\left\{c : |\langle Ax, x\rangle| \leq c \cdot \|x\|^2\right\} \leq \|A\|.$$

Es folgt

$$\operatorname{Inf}\left\{c : |\langle Ax, x\rangle| \leq c \cdot \|x\|^2\right\} = \|A\|.$$

D.h. es gibt eine Folge (x_n) in $\mathcal{H}$ so, dass mit $\|x_n\| = 1$ gilt

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle| \to \|A\|.$$

Da A hermitesch ist, ist $\langle Ax_n, x_n\rangle$ reell. Es gibt deswegen eine Teilfolge, wobei $\langle Ax_n, x_n\rangle \to \lambda$ mit $\lambda = \pm\|A\|$ - hier bezeichnen wir die Teilfolge wieder mit (x_n). Jetzt betrachten wir

$$\begin{aligned}
\|Ax_n - \lambda x_n\|^2 &= \langle Ax_n - \lambda x_n, Ax_n - \lambda x_n\rangle \\
&= \langle Ax_n, Ax_n\rangle - 2\lambda\langle Ax_n, x_n\rangle + \lambda^2 1 \\
&\leq \|A\|^2 \cdot 1 - 2\lambda\langle Ax_n, x_n\rangle + \lambda^2 \\
&\to \|A\|^2 - \lambda^2 = 0.
\end{aligned}$$

D.h. $\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0$. Deswegen gilt

$$\begin{aligned}
\langle Ax_n, x_n\rangle &= \|Ax_n - \lambda x_n\|^2 + 2\lambda\langle Ax_n, x_n\rangle - \lambda^2 \\
&\to \lambda^2 \text{ und dann auch} \\
\langle Ax_n, Ax_n\rangle &\to \|A\|^2.
\end{aligned}$$

Weil $\|x_n\| = 1$ und A kompakt, gibt es eine Teilfolge (wieder (x_n)), sodass Ax_n konvergiert. Aber $Ax_n - \lambda x_n$ konvergiert. Für $\lambda = 0$ gilt $\|A\| = 0$, oder $A = 0$; dieser Fall ist trivial. Wir haben $\lambda \neq 0$ sonst. Dann konvergiert x_n. Sei $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann gilt, weil A stetig ist, $Ax_n \to A\xi$. Es folgt

$$A\xi - \lambda\xi = 0.$$

Da $x_n \to \xi$ gilt $\|\xi\| = 1$. Damit haben wir ξ mit $\|\xi\| = 1$ und

$$A(\xi) = \lambda\xi \qquad \lambda = \pm\|A\|.$$

Q.E.D.

Wir können jetzt folgendermaßen vorgehen: Wir haben λ_1 mit $\lambda_1 = \pm\|A\|$ und ξ_1 mit $A\xi_1 = \lambda_1\xi_1$. Dann bilden wir $\langle\xi_1\rangle^\perp \subset \mathcal{H}$. Dann bildet A $\langle\xi_1\rangle^\perp$ in sich ab. D.h. es gibt in $\langle\xi_1\rangle^\perp$ ein ξ_2 mit $A\xi_2 = \lambda_2\xi_2$ und $|\lambda_2| = \|A|_{\langle\xi_2\rangle^\perp}\|$. Wir können dann induktiv weitermachen

$$A\xi_n = \lambda_n\xi_n \quad \text{mit} \quad |\lambda_n| = \|A|_{\langle\xi_1,\dots,\xi_{n-1}\rangle^\perp}\|.$$

Durch die Definition gilt $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots$. Wir behaupten, dass $|\lambda_n| \to 0$. Sonst gilt $|\lambda_n| \to l$ mit $l > 0$. Dann ist die Folge $\lambda_n\xi_n$ hat keine konvergente Teilfolge, weil

$$\|\lambda_n\xi_n - \lambda_m\xi_m\| = (|\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad \text{(Pythagoras)}$$

Dieses widerspricht der Kompaktheit von A ($A\xi_n$ soll in einer kompakten Menge liegen).
Wir haben

$$\xi_1, \xi_2, \dots \qquad A\xi_n = \lambda_n\xi_n \qquad \lambda_n \to 0.$$

Wir bilden $\langle\xi_1, \xi_2, \dots\rangle = \mathcal{H}_1$. Sei $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1^\perp$. Dann gilt $\|A|_{\mathcal{H}_0}\| = 0$, d.h. $A|_{\mathcal{H}_0} = 0$. Wir wählen eine Basis von $\mathcal{H}_0$ $\eta_1, \dots, \eta_m \dots$ $A_{\eta_m} = 0$. Es gilt (Spektralsatz für kompakte Operatoren)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0,$$

$$A|_{\mathcal{H}_0} = 0 \qquad \mathcal{H}_1 = \langle\xi_1, \xi_2, \dots\rangle \qquad A\xi_n = \lambda_n\xi_n \qquad \lambda_n \to 0.$$

Diesen Satz werden wir später an geeigneter Stelle formell angeben.

Anwendung: Dieser Satz reicht, um die Faltungsoperatoren

$$f \mapsto \varphi * f \qquad (\varphi * f)(x) = \int \varphi(x-y)f(y)dy,$$

$$f(x+1) = f(x) \qquad \int_0^1 |f(x)|^2 dm(x) < \infty$$

zu analysieren.
In diesem Fall hat man Eigenvektoren, die genügen

$$\int \varphi(x-y)e_n(y)dm(y) = e_n(x)\lambda_n.$$

In diesem Fall ist $\tilde{e}_n(x) = e_n(x+\xi)$ auch ein Eigenvektor von diesem Operator. Weil der Raum der λ_n-Eigenvektoren endlich-dimensional ($\lambda_n \to 0$) ist, kann man folgern, dass es $\eta_n(\xi)$ gibt, so dass $e_n(x+\xi) = \eta_n(\xi)e_n(x)$. Dann durch Symmetrie erhält man, dass es c gibt, so dass

$$c_n(x+\xi) = c \cdot e_n(\xi)e_n(x).$$

Es stellt sich heraus, dass man die Exponentialfunktionen bekommt. Man kann auf diese Weise die Fourier-Analysis begründen.

Was man gerne hätte, wäre eine Spektralzerlegung von $(d/dx)^2$. Dieser Operator is nicht eindeutig; man baut auch Randbedingungen in das Problem ein. Dann, mit Hilfe der sogenannten Greenschen Funktion, kann man den gerade bewiesenen Spektralsatz anwenden. Sogar für wesentlich allgemeinere Differentialoperatoren (Kapitel 7).

Kapitel 5

Fredholm-Theorie

In AGLA studiert man lineare Gleichungssysteme $Ax = y$. Man hat drei Methoden:

- Gaußsche Reduktion und Theorie des Ranges,
- Determinanten
- und die Jordan Normalform.

Definition 5.1. *Seien E, F Banach-Räume. Sei $A : E \to F$ stetig und linear. Dann heißt A* ***Fredholmsch*** *falls*

$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in E : A(x) = 0\} \text{ und } \mathrm{Coker}(A) = F/\,\mathrm{Im}(A)$$

beide endlich-dimensional sind.

Definition 5.2. *Seien E, F, A wie oben. Dann definieren wir den* ***Index*** *von A als*

$$\mathrm{ind}(A) = \dim \mathrm{Ker}(A) - \dim \mathrm{Coker}(A).$$

Sei $L(E, F)$ der Raum der linearen, stetigen Operatoren von $E \to F$. Sei $\mathrm{Fred}(E, F)$ die Teilmenge der Fredholmschen Operatoren. Dadurch hat $\mathrm{Fred}(E, F)$ eine Norm und damit eine Topologie.
Wir werden später beweisen:

Satz 5.3. *Die Teilmenge $\mathrm{Fred}(E, F)$ in $L(E, F)$ ist offen. Die Funktion*

$$\mathrm{ind} : \mathrm{Fred}(E, F) \to \mathbb{Z}$$

ist stetig.

Im Falle $E = F$ können wir $K : E \to E$ mit $\|K\| < 1$ betrachten. Dann ist $(I + K) : E \to E$ sogar invertierbar, weil

$$(I + K)^{-1} = I - K + K^2 - K^3 + K^4 \cdots \qquad \text{(Neumann Reihe; Born-Reihe)}$$

als geometrische Reihe in $L(E, E)$ konvergiert. In diesem Fall gilt, dass $\mathrm{Ker}(I + K) = \{0\}$, $\mathrm{Coker}(I + K) = 0$. Es folgt: $\mathrm{ind}(I + K) = 0$. Wir werden später beweisen, dass für beliebige *kompakte* K der Operator $(I + K)$ auch Fredholmsch ist. Nach Satz 5.3 haben wir in diesem Fall

$$\mathrm{ind}(I + K) = 0.$$

Satz 5.4. *Für K kompakt ist $I + K$ fredholmsch mit $\mathrm{ind}(I + K) = 0$.*

(Dass $\mathrm{ind}(I+K)=0$ folgt aus $s \mapsto \mathrm{ind}(I+sK)$ ($s \in [0,1]$) stetig und ganzzahlig ist. Für kleines s gilt $\mathrm{ind}(I+sK)=0$ — deswegen für alle s.)
Auch Differentialoperatoren („elliptisch", auf kompakten Mannigfaltigkeiten) können Fredholmsch sein wie man z.B. mit der Parametrix (Hilbert) und Greenschen Funktionen beweisen kann.
Für $A : E \to E$ kompakt, werden wir später zeigen, dass eine Zerlegung besteht:

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n \oplus J_n.$$

Der Teilraum E_j hat eine endliche Basis, so dass $A|E_j$ durch einen Jordan-Block gegeben wird:

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Es gilt weiter $A|J_n \to 0$ für $n \to \infty$. Wir erinnern uns daran, dass in endlich vielen Dimensionen gilt:

$$(I+K)^{-1} = \frac{(I+K)^{\mathrm{adj}}}{\det(I+K)}. \quad \text{(Cramersche Regel)}$$

Literaturtipps

A.Grothendieck La théorie de Fredholm (Bull. Soc. Mat. de France 84(1956)319-384)

F. Smithies Integral Equations, CUP (Cambridge Tracts, 49) 1970

B. Simon Trace ideals and their applications, CUP (London Mathematical Society Lecture Notes, 134) 1979

Klassische Fredholm-Theorie: Wir betrachten eine Integralgleichung

$$f(s) + \int_a^b K(s,t) f(t) dt = g(s).$$

K sei stetig auf $[a,b] \times [a,b]$. Sei g stetig und vorgegeben auf $[a,b]$. Wir suchen f.
Wir betrachten etwas allgemeiner die Gleichung

$$f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) f(t) dt = g(s).$$

Wir suchen eine Lösung f in Abhängigkeit von λ.

Ansatz: Wir zerlegen $[a,b]$ in $a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = b$ mit

$$s_j - s_{j-1} = h \text{ fest und } nh = b - a.$$

Wir betrachten nun

$$f(s_j) + \lambda h \sum_{h=0}^{n} K(s_j, s_k) f(s_k) = g(s_j), \qquad 0 \le j \le n, \qquad (n+1) \times (n+1).$$

Die Idee ist, dass wir die Gleichung wie in AGLA behandeln — dann lassen wir $n \to \infty$. Sei $K_{jk} = K(s_j, s_k)$. Wir betrachten zuerst

$$\begin{aligned} \det(\delta_{jk} + \lambda h K_{jk}) = 1 + \lambda h \sum_{j=0}^{n} K_{jj} + \frac{(\lambda h)^2}{2!} \sum_{j_1, j_2} \det \begin{pmatrix} K_{j_1 j_1} & K_{j_1 j_2} \\ K_{j_2 j_1} & K_{j_2 j_2} \end{pmatrix} \\ + \frac{(\lambda h)^3}{3!} \sum_{j_1, j_2, j_3} \det \begin{pmatrix} K_{j_1 j_1} & K_{j_1 j_2} & K_{j_1 j_3} \\ K_{j_2 j_1} & K_{j_2 j_2} & K_{j_2 j_3} \\ K_{j_3 j_1} & K_{j_3 j_2} & K_{j_3 j_3} \end{pmatrix} \\ + \text{usw.} \end{aligned}$$

Diese Identität braucht einen Beweis. Die Strategie, die wir verwenden, ist folgende: Wir wissen, dass $\det(SAS^{-1}) = \det(A)$ gilt. Wir können sie deswegen für alle diagonalisierbaren Matrizen A beweisen, wenn wir nachweisen, dass sie für alle diagonalen Matrizen erfüllt ist. Es gilt, wenn K diagonal und

$$\sum_{J_1, \ldots, J_k} \det \begin{pmatrix} K_{j_1 j_1} & \cdots & K_{j_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{j_k j_1} & \cdots & K_{j_k j_k} \end{pmatrix}$$

ist, dass

$$\sum_{\{J_1, \ldots, J_k\} \subset \{1, \ldots, n\}} k! \cdot K_{J_1 J_1} \cdots K_{J_1 J_k}.$$

Es folgt jetzt direkt, dass die Identität für alle diagonalen Matrizen gilt und somit auch für alle diagonalisierbaren. Leider sind nicht alle Matrizen diagonalisierbar. Dafür brauchen wir ein zusätzliches Argument, wonach die diagonalisierbaren Matrizen „dicht“ in der Menge aller Matrizen sind. Wir benutzen dafür ein algebraisches Argument.

Sei $p(x) = \det(\delta_{jk} + \lambda h K_{jk})$ — bis auf ein Vorzeichen ein charakteristisches Polynom. Aus diesem Polynom können wir ein Polynom $D_p(K_{**})$ bilden, so dass $D_p(K_{**}) = 0$ genau dann, wenn zwei Nullstellen gleich sind. Für

$$(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) = x^{n+1} - c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n+1} c_0$$

ist $D = \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j)$ ein Polynom in $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0$, die „Diskriminante“. Es folgt: Die Differenz der rechten und linken Seiten ist 0, falls $D_p(K_{**}) \neq 0$. Wenn wir $Q(K_{**})$ schreiben - für diese Differenz -, dann

$$Q(K_{**}) D_p(K_{**}) = 0$$

für alle Matrizen (K_{**}), $(n+1) \times (n+1)$.

Dann beweist man induktiv, dass ein Polynom $F(x_1, \ldots, x_M)$ in M Veränderlichen nur dann für alle x verschwindet, wenn das Polynom selbst verschwindet. Sei

$$F(x_1, \ldots, x_M) = G_0(x_1, \ldots, x_{M-1}) + G_1(x_1, \ldots, x_{M-1}) x_M + \cdots + G_D(x_1, \ldots, x_{M-1}) {x_M}^D.$$

Dann ist $F(x_1, \ldots, x_M) = 0$ für alle $x_1, \ldots, x_M \Rightarrow G_0, G_1, \ldots, G_D$ diese Eigenschaft als Polynome in $x_1, \ldots, x_{M-1}$ haben - und - nach Induktionsannahme, verschwinden.

Wir bekommen, dass $Q(K_{**}) D_p(K_{**}) = 0$ als Polynom $K_{0,0}, \ldots, K_{n,n}$. Weil $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_M]$ (für alle M) ein Integritätsbereich ist, ist Q oder D_p Null. $D_p(K_{**}) \neq 0$ wenn wir unterschiedliche Werte auf der Diagonale haben im Falle von (K_{**}) diagonal. Deswegen gilt

$$Q(K_{**}) = 0$$

diese ist die Identität oben.

Hilfssatz 5.5 (Hadamardsches Lemma)**.** *Sei* $(a_{ij}) \in M(n \times n; \mathbb{R})$*. Dann gelten:*

$$\left|\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right| \leq \|a_1\| \cdot \|a_2\| \cdots \|a_n\|,$$

$$\underline{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \qquad \|b\| = (|b_1|^2 + |b_2|^2 + \cdots + |b_n|^2)^{\frac{1}{2}} \text{ für } \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Beweis. Anwenden der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren (War eine Übungsaufgabe in Diff II, Blatt 6, Aufgabe 4). Q.E.D.

Sei $M = \operatorname{Sup}|K(s,t)|$. Dann gilt — das Polynom

$$I + \lambda h \sum K_{ij} + \frac{(\lambda h)^2}{2!} \sum \det(\cdots) + \cdots$$

wird — als Reihe — durch

$$I + \lambda h(n+1)M + \frac{\lambda h}{2!}(n+1)^2 M^2 + \frac{(\lambda h)^3}{3!}(n+1)^3 M^3 + \cdots$$

majoriert (Hadamardsche Ungleichung). Weil $hn = b - a$ gilt
$h(n+1) = b - a + h \to b - a$. Diese Reihe konvergiert gegen $\exp(\lambda M)$.
Als Grenzwert für $n \to \infty$ haben wir

$$1 + \lambda \int_a^b K(s,s)ds + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \det\begin{pmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) \\ K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) \end{pmatrix} ds_1 ds_2 + \cdots.$$

Wir definieren die Fredholmsche Determinante von $I + \lambda K$ als diesen Ausdruck.
Idee jetzt: Parallel zu dieser Konstruktion konstruieren wir die adjugierte Matrix. Dann erhalten wir eine formelle Lösung des linearen Gleichungssystems

$$f(s) + \lambda \int K(s,t) f(t) dt = g(s) \quad \text{als} \quad g(s) + \int_a^b L(s,t;\lambda) g(t) dt / D(\lambda)$$

$$f(s) + \int_a^b k(s,t) f(t) dt = g(s)$$

Idee:

$$f(s_j) + \lambda h \sum_k k(s_j, s_k) f(s_k) = g(s_j)$$

$$\det(I + \lambda(hk(s_j,s_k))) \to 1 + \lambda \int k(s,s)ds + \frac{\lambda^2}{2!} \iint \det\begin{pmatrix} k(s_1,s_1) & k(s_1,s_2) \\ k(s_2,s_1) & k(s_2,s_2) \end{pmatrix} ds_1 ds_2 + \ldots$$

(Fredholmsche Determinante) für $h \to 0$. Diese Reihe konvergiert für alle λ, vorausgesetzt, dass $k(\cdot,\cdot)$ stetig ist. Die Cramersche Regel besagt:

$$A = (a_{ij}) \qquad Ax = b \qquad x_j = \frac{\det(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{\det(a_1, a_2, \ldots, a_n)}.$$

Sei $D(\lambda)$ die Fredholmsche Determinante. Sei nun

$$\begin{aligned}\tilde{k}(t_1,t_2;\lambda) = \lambda k(t_2,t_1) &+ \frac{\lambda^2}{1!}\int \det\begin{pmatrix} k(t_2,t_1) & k(t_2,s_1) \\ k(s_1,t_1) & k(s_1,s_1)\end{pmatrix} ds_1 \\ &+ \frac{\lambda^3}{2!}\iint \det\begin{pmatrix} k(t_2,t_1) & k(t_2,s_1) & k(t_2,s_2) \\ k(s_1,t_1) & k(s_1,s_1) & k(s_1,s_2) \\ k(s_2,t_1) & k(s_2,s_1) & k(s_2,s_2)\end{pmatrix} ds_1 ds_2 \\ &+ \quad \cdots\end{aligned}$$

Nach der Cramerschen Regel erwartet man, dass die Lösung zu

$$f(s) + \lambda \int k(s,t) f(t) dt = g(s)$$

gleich

$$g(s) + D(\lambda)^{-1} \int \tilde{k}(s,t;\lambda) g(t) dt$$

ist - unter der Voraussetzung, dass $D(\lambda) \neq 0$.
Es gibt zwei Methoden, um dieses zu beweisen.

1. Man zeigt, dass die Cramersche Formel einen Grenzwert bei $h \to 0$ besitzt. Beweis ist analog dem Beweis der Existenz von $D(\lambda)$.

2. Man setzt den Ausdruck in die Gleichung ein. Man beweist

$$\tilde{k}(t_1,t_2;\lambda) = \lambda D(\lambda) k(t_2,t_1) + \lambda \int_a^b \tilde{k}(s_1,t_2;\lambda) k(s_1,t_1) ds_1$$

welche man mit Rechnungen bei Determinanten beweist. Dafür s. F.Smithies, Integral Equations, §5.4.

Bemerkung: 1. Bei hermiteschen Kernen werden wir beweisen (fast sogar schon), dass es eine orthonormale Basis von $L^2([a,b],m)$ gibt, $e_1, e_2, \ldots$ so dass

$$\int k(s,t) e_j(t) dt = \lambda_j e_j(s).$$

Es gilt: $\lambda_j \to 0$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad I + \begin{pmatrix} \lambda\lambda_1 & & \\ & \lambda\lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\det(\ldots) = \prod (1 + \lambda\lambda_j)$$

Man bekommt eine Identität

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{\infty}(1+\lambda\lambda_i) = 1 + \lambda \int k(s,s) ds& \\ + \frac{\lambda^2}{2!}\int \det\begin{pmatrix} k(s_1,s_1) & k(s_1,s_2) \\ k(s_2,s_1) & k(s_2,s_2)\end{pmatrix} ds_1 ds_2 + \cdots&\end{aligned}$$

Diese Identität verbindet zwei Klassen von Größen — besonders in der Differentialgeometrie von großer Bedeutung.

2. Die Formel
$$f(s) = g(s) + D(\lambda)^{-1} \int \tilde{k}(s,t)g(t)dt$$
zeigt (für diejenigen, die etwas Funktionentheorie gemacht haben), dass die Lösung eine meromorphe Funktion in λ ist - mit Nenner $D(\lambda)$. Man kann sogar die Ordnung von diesen Funktionen abschätzen. Diese Methode zur analytischen Fortsetzung ist besonders effektvoll.

3. Die Möglichkeit, dass $D(1) = 0$ besteht, zeigt, dass für die Analyse der Fredholmschen Gleichung der Parameter λ sehr hilfreich ist.

Beweis. (zu Satz 5.3) Wir haben $E \xrightarrow{A} F$. Sei $K = \operatorname{Ker}(A)$. Dann ist K endlich dimensional. Nach Satz 3.6 gilt $E = K \oplus W$, W Banach-Raum $A|_W$ ist injektiv. Auch ist $A(E)$ abgeschlossen in F. Es folgt nach Satz 3.6, dass es $Y \subset F$ gibt, so dass $F = A(E) \oplus Y$, wobei Y endlich-dimensional ist. Die Abbildung

$$W \oplus Y \to A(W) \oplus Y = F \quad (w, y) \mapsto (A(w), y) = A(w) + y$$

ist deswegen ein Isomorphismus. Für E_1, F_1 Banach-Räume werden wir zeigen, dass die Menge von Isomorphismen $E_1 \to F_1$ in $L(E_1, F_1)$ offen ist (Wir hatten vorher gezeigt, dass eine Umgebung von $I : E \to E$ aus Isomorphismen besteht. Wir brauchen nur diese Aussage auszudehnen). Falls A_1 „in der Nähe von“ A ist, so ist $A_1^* : W \oplus Y \to F$ auch ein Isomorphismus. Da $\operatorname{Ker}(A_1) \cap K = \{0\}$ ist der Kern von A_1 endlich dimensional. Dann ist $\operatorname{Ker}(A_1)$ abgeschlossen (Satz 3.6). Auch ist die Codimension des Bildes $\leq \dim Y$ und somit auch endlich-dimensional. Es folgt, dass A_1 Fredholmsch ist.
Nun ist $W \oplus \operatorname{Ker}(A_1)$ eine direkte Summe zweier abgeschlossener Unterräume - und ist deswegen auch abgeschlossen, so dass es einen endlich dimensionalen Unterraum Z von E gibt mit

$$W \oplus \operatorname{Ker}(A_1) \oplus Z = E.$$

Nun
$$A_1 : W \oplus Z \to A_1(W) \oplus A_1(Z).$$
und diese Abbildung ist ein Isomorphismus. Weil $Z \cap \operatorname{Ker}(A_1) = \{0\}$ folgt

$$\dim(A_1(Z)) = \dim(Z).$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(A_1) &= \dim \operatorname{Ker}(A) - (\dim(Y) - \dim A_1(Z)) \\
&= \dim \operatorname{Ker}(A) - \dim(A_1(Z)) - \dim(Y) \\
&= \dim \operatorname{Ker}(A) - \dim(Y) \\
&= \operatorname{ind}(A).
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass Isomorphismen $E \to F$ offen in $L(E, F)$ sind, gibt es zwei Fälle. Entweder gibt es überhaupt keine Isomorphismen. In diesem Fall ist die Aussage richtig. Sonst gibt es einen. Dann können wir o.E.d.A. annehmen, dass $F = E$. Dann für $\alpha : E \to F$ eine bijektive Abbildung, betrachten wir $\alpha(I + K)$ mit $\|K\| < \frac{1}{2}$. Dann bilden diese eine Umgebung von α (soll noch nachgewiesen werden). Durch diese Konstruktion ist $\alpha(I + K)$ bijektiv, weil
$(I + K)^{-1} = 1 - K + K^2 - K^3 \cdots$ konvergiert. Sei nun also α', so dass
$\|\alpha - \alpha'\| < \delta$. Dann gilt

$$\|\alpha^{-1}(\alpha - \alpha')\| \leq \|\alpha^{-1}\|\delta, \qquad \|I - \alpha^{-1}\alpha'\| < \|\alpha^{-1}\|\delta.$$

Wenn wir δ so wählen, dass $\|\alpha^{-1}\| \cdot \delta < \frac{1}{2}$, dann gilt:

$$-K = I - \alpha^{-1}\alpha' \quad \text{genügt} \quad \|K\| < \frac{1}{2} \quad \alpha^{-1}\alpha' = I + K \quad \alpha' = \alpha(I + K).$$

Q.E.D.

Beweis. (zu Satz 5.4) Wir betrachten $\operatorname{Ker}(I + K)$. Es gilt:

$$I|\operatorname{Ker}(I + K) = -K|\operatorname{Ker}(I + K).$$

Wenn wir den Einheitsball in $\operatorname{Ker}(I + K)$ betrachten, dann ist das Bild davon unter $-K$ *kompakt*, weil K kompakt ist. Unter I ist das Bild sich selbst. Deswegen ist der Einheitsball in $\operatorname{Ker}(I + K)$ kompakt. Nach dem Satz von Riesz (Satz 3.1) ist $\operatorname{Ker}(I + K)$ endlich dimensional. Sei $Y = \operatorname{Ker}(I + K)$. Es existiert ein abgeschlossener Komplementarraum Z zu Y in E; $Y \oplus Z = E$. Sei $K_1 = K|_Z$. Dann ist K_1 injektiv. Wenn $(I + K_1)$ surjektiv wäre, dann wäre die Inverse stetig. Wir beweisen dieses ohne Voraussetzung. Wenn $(I + K_1)^{-1}$ nicht stetig wäre, dann gäbe es $x_n \in (I + K_1)(E)$ mit $x_n \to 0$ und $(I + K_1)^{-1}(x_n) \nrightarrow 0$, oder es gibt $y_n \nrightarrow 0$ mit $(I + K_1)(y_n) \to 0$. Da $y_n \nrightarrow 0$ existiert ein $r > 0$, so dass $\|y_n\| \geq r$ für fast alle n. Wenn wir jetzt y_n mit $r/\|y_n\|(< 1)$ multiplizieren, bekommen wir einen Folge y'_n mit $\|y'_n\| = r$ und $(I + K_1)(y'_n) \to 0$. Dieses ist aber unmöglich, wiel $K_1(y'_n)$ konvergent ist (weil K_1 kompakt); sei $\eta = \lim K_1(y'_n)$. Dann gilt $(I + K_1)(y'_n) \to 0$, $y'_n + K(y'_n) \to 0$. Es folgt: $y'_n \to -\eta$. Es folgt $\eta + K_1(\eta) = 0$. Aber $\eta \in Z$ mit $\operatorname{Ker}(I + K_1) \cap Z = \{0\}$. D.h. $\eta = 0$ - Widerspruch mit $\|\eta\| = r$. Q.E.D.

Hilfssatz 5.6. *Sei $Z \subseteq E$ abgeschlossener Unterraum, $Z \neq E$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ und $d(x, Z) \geq 1 - \varepsilon$.*

Bemerkung: Da Z abgeschlossen ist, gilt
$x \notin Z, \qquad d(x, Z) = \operatorname{Inf}\{\|x - y\| : y \in Z\} > 0$ für $x \notin Z$. Um dieses zu zeigen, wissen wir zunächst, dass aus der Definition folgt, dass es eine Folge (y_n) gibt, sodass

$$d(x, y_n) \to d(x, Z).$$

Dann ist $d(x, y_n)$ eine Cauchy-Folge. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$d(x, Z) \leq d(x, y_n) \leq d(x, Z) + \varepsilon.$$

Gelte $d(x, Z) = 0$, so würde folgen, dass $d(x, y_n) \to 0$. Da $y_n \in Z$ und Z abgeschlossen ist, würde folgen: $x \in Z$, ein Widerspruch.

Beweis. Sei $x_1 \in E, x_1 \notin Z$. Dann existiert $y_0 \in Z$ mit

$$\|x_1 - y_0\| \leq d(x_1, Z)(1 + \varepsilon).$$

Sei

$$x = \frac{x_1 - y_0}{\|x_1 - y_0\|}.$$

Für $z \in Z$ gilt dann

$$\|x - z\| = \left\| \frac{x_1 - y_0}{\|x_1 - y_0\|} - z \right\| = \frac{1}{\|x_1 - y_0\|} \cdot \|x_1 - \underbrace{(y_0 + \|x_1 - y_0\| z)}_{\in Z}\|.$$

Es folgt:

$$\|x_1 - (y_0 + \|x_1 - y_0\| z)\| \geq d(x, Z) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \cdot \|x_1 - y_0\|.$$

Es gilt $1/(1+\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$, weil $1 \geq (1+\varepsilon)(1-\varepsilon) = 1-\varepsilon^2$. Folglich:

$$\|x-z\| \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \geq 1-\varepsilon.$$

Andererseits nach Konstruktion haben wir

$$\|x\| = 1.$$

Q.E.D.

Wir beweisen jetzt für K kompakt, dass

$$E/(I+K)E$$

endlich dimensional ist. Wir nehmen an, dass dieses nicht der Fall ist. Wir betrachten eine Folge von Banach-Räumen

$$(I+K)(E) = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset E$$

wobei $\dim(F_j/F_{j-1}) = 1$. Wir wählen einfach immer ein Element von F, das nicht in F_{j-1} liegt; mit F_{j-1} zusammen erzeugt dieses F_j. Wir wählen $\varepsilon > 0$. Dann wählen wir $x_1 \in F_1 : d(x_1, F_0) \geq 1-\varepsilon,\ x_2 \in F_2 : d(x_2, F_1) \geq 1-\varepsilon$ usw. Bei allen x_j gilt $\|x_j\| = 1$. Wir wissen, dass $(I+K)(x_j) \in F_0$. Wir betrachten mit $j > k$:

$$\begin{aligned}\|K(x_j) - K(x_k)\| &= \|(-(x_j - x_k) + (I+K)(x_j) - (I+K)(x_k)\| \\ &= \|x_j - \underbrace{\underbrace{x_k}_{\in F_k \subset F_{j-1}} - \underbrace{(I+K)(x_j) + (I+K)(x_k)}_{\in F_0}}_{\in F_{j-1}}\|.\end{aligned}$$

Nach der Konstruktion gilt dann:

$$\|K(x_j) - K(x_k)\| \geq 1-\varepsilon.$$

Da $\|x_j\| \leq 1$ für alle j, da K kompakt ist, sollte es eine konvergente Teilfolge von $K(x_j)$ geben — Widerspruch mit $\|K(x_j) - K(x_K)\| \geq 1-\varepsilon$. Es folgt $E/(I+K)(E)$ endlich-dimensional ist.

Satz 5.7. *Seien $E \xrightarrow{A_1} E_2$ und $E_2 \xrightarrow{A_2} E_3$ Fredholmsche Operatoren. Dann ist $A_2 \circ A_1$ auch Fredholmsch. Es gilt*

$$\operatorname{ind}(A_2 \circ A_1) = \operatorname{ind}(A_2) + \operatorname{ind}(A_1).$$

Beweis. Sei $K_1 = \operatorname{Ker}(A_1)$, $K_2 = \operatorname{Ker}(A_2)$. Dann existieren Komplementärräume $X_1 : X_1 \oplus K_1 = E_1$ und $X_2 : X_2 \oplus K_2 = E_2$. Auch existieren Y_1, Y_2 mit $\operatorname{Im}(A_1) \oplus Y_1 = E_2$ und $\operatorname{Im}(A_2) \oplus Y_2 = E_3$. Hier sind K_1, K_2, Y_1, Y_2 endlich dimensional

$$\operatorname{Im}(A_2 \circ A_1) \oplus A_2(Y_1) = \operatorname{Im}(A_2).$$

Weil $A_2(Y_1)$ von endlicher Dimension ist, ist $\operatorname{Im}(A_2 \circ A_1)$ von endlicher Kodimension in E_3 (Komplement $A_2(Y_1) \oplus Y_2$). Auch gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(A_2 \circ A_1) &= \{x \in E_1 : A_2 A_1(x) = 0\} \\ &= \{x \in E_1 : A_1(x) \in K_2\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in (X_1 \oplus K_1) : A_1((x_1, x_2)) \in K_2\} \\ &= \{x_1 \in X_1 : A_1(x_1) \in K_2\} \oplus K_1.\end{aligned}$$

$A_1|_{X_1}$ ist injektiv. Wir haben auch:
$\dim\{x \in X_1 : A_1(x) \in K_2\} = \dim(K_2 \cap \mathrm{Im}(A_1)) \leq \dim(K_2)$. Daraus folgt:

$$\dim \mathrm{Ker}(A_2 \circ A_1) \leq \dim(K_1) + \dim(K_2).$$

Deshalb ist $A_2 \circ A_1$ Fredholmsch. Für die Dimensionen haben wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}(A_1) &= \dim(Y_1) - \dim(K_1),\\
\mathrm{ind}(A_2) &= \dim(Y_2) - \dim(K_2),\\
\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(A_2 \circ A_1)) &= \mathrm{codim}(\mathrm{Im}(A_2)) - \dim(A_2(Y_1)),\\
\dim(\mathrm{Ker}(A_2 \circ A_1)) &= \dim(K_2 \cap \mathrm{Im}(A_1)) + \dim(K_1).
\end{aligned}$$

Wir brauchen deshalb

$$\begin{aligned}
&\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(A_2 \circ A_1)) - \dim(\mathrm{Ker}(A_2 \circ A_1))\\
&\qquad = \mathrm{codim}(\mathrm{Im}(A_1)) + \cancel{\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(A_2))} - \cancel{\dim(K_1)} - \dim(K_2).
\end{aligned}$$

Die linke Seite ist

$$\cancel{\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(A_2))} - \dim A_2(Y_1) - \dim(K_2 \cap \mathrm{Im}(A_1)) - \cancel{\dim(K_1)}$$

Die Dimensionsformel wird

$$\dim(Y_1) - \dim(K_2) = -\dim A_2(Y_1) - \dim(K_2 \cap \mathrm{Im}(K_2 \cap \mathrm{Im}(A_1))).$$

Diese wird die Dimensionsformel für $A|_{Y_1}$ (mit $\mathrm{Ker}(Y_1 \cap K_2)$).

Q.E.D.

Satz 5.8 (Fredholmsche Alternative, 1. Fassung). *Sei K kompakt. Dann ist entweder $I + K$ invertierbar oder es existiert x mit $(I + K)(x) = 0$, d.h. $K(x) = -x$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $I + K$ nicht invertierbar ist. Weil $\mathrm{ind}(I + K) = 0$ gilt dann $\dim(\mathrm{Ker}(I + K)) = \mathrm{codim}(\mathrm{Im}(I + K))$. Wenn beide Null wären, dann wäre $I + K$ invertierbar. Da dieses nicht der Fall ist, sind beide positiv. D.h. $\mathrm{Ker}(I + K) \neq \{0\}$. D.h. es existiert ein x mit $(I + K)(x) = 0$. Q.E.D.

Satz 5.9. *Sei K kompakt auf E, E nicht endlich-dimensional, dann ist K nicht invertierbar.*

Beweis. Wir können annehmen, dass $\mathrm{Ker}(K) = \{0\}$, weil sonst kann K nicht invertierbar sein. Sei $\overline{B}_1 = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Dann ist $K(\overline{B}_1)$ kompakt in E, weil K kompakt ist. Nach Satz 3.3 ist $K(B_1)$ offen. Es folgt, dass E lokal kompakt ist — und, nach dem Satz von Riesz (Satz 3.1) — ist E endlich dimensional. E war aber nicht endlich-dimensional. Q.E.D.

Wir betrachten $\ell^2 = \{(x_n) : \sum |x_n|^2 < \infty\}$. Sei λ_n eine Folge mit $\lambda_n \to 0$. Der Operator

$$A : \ell^2 \to \ell^2, \qquad (x_n) \mapsto (\lambda_n x_n)$$

ist dann kompakt. A ist kompakt, injektiv — falls alle $\lambda_n \neq 0$ — aber nicht surjektiv. Es gibt aber (falls $\lambda_n \neq 0$ für alle n) kein x mit $Ax = 0$ — es gibt keinen Eigenvektor mit Eigenwert 0. (Aber: $Ae_n = \lambda_n e_n$,
$e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{n-te Stelle}}, 0, \dots, 0)$.)

Satz 5.10. *Seien E, K wie oben. Dann existiert n, sodass für alle $m \geq n$ gilt*

$$\mathrm{Ker}((I + K)^m) = \mathrm{Ker}((I + K)^n).$$

Beweis. Es gilt

$$(I+K)^m = I + \binom{m}{1}K + \binom{m}{2}K^2 + \cdots + \binom{m}{m}K^m = I + \text{komp. Operator.}$$

D.h. $\operatorname{ind}(I+K)^m = 0$, oder $\dim(\operatorname{Ker}(I+K)^m) = \operatorname{codim}(\operatorname{Im}((I+K)^m))$ Wir betrachten jetzt $L_j = \operatorname{Ker}((I+K)^j)$. Dann gilt $L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \cdots$. Wir wollen zeigen, dass diese Kette abbricht. Falls $L_1 = \{0\}$, dann nach Satz 5.8 ist $(I+K)$ invertierbar. Es folgt $\dim L_j = 0$ für alle j. Deswegen brauchen wir nur den Fall $\dim L_j > 0$ zu betrachten. Wir wenden Hilfssatz 5.6 wieder an. Es gibt $x_j \in L_j$ $(j \geq 2)$, so dass $\|x_j\| = 1$ und

$$\|x_j - y\| \geq 1 - \varepsilon \text{ für alle } y \in L_{j-1}, \qquad \varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq 1 \text{ vorgegeben.}$$

Falls $L_r = L_{r+1}$, dann folgt: $L_j = L_r$ für alle $j \geq r$ - deswegen, sollte die Kette nicht abbrechen, haben wir eine solche Folge. Wie vorher gilt:

$$\|K(x_j) - K(x_k)\| \geq 1 - \varepsilon \quad \text{für } j \neq k,$$

da für $x \in L_j$ gilt: $(I+K)x \in L_{j-1}$. Wie vorher führt dieses zu einem Widerspruch mit der Kompaktheit von K. Die Kette bricht dann irgendwann ab. Auch die Kette $(I+K)^m(E)$, eine absteigende Kette, bricht ab. Q.E.D.

Satz 5.11. *Seien E, K wie vorher. Sei n, so dass*

$$\operatorname{Ker}((I+K)^m) = \operatorname{Ker}((I+K)^n) \textit{ für alle } m \geq n.$$

Dann gilt

$$E = \operatorname{Ker}((I+K)^n) \oplus \operatorname{Im}((I+K)^n).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst:

$$\operatorname{Ker}((I+K)^n) \cap \operatorname{Im}((I+K)^n) = \{0\}.$$

Sei $x \in \operatorname{Ker}((I+K)^n) \cap \operatorname{Im}((I+K)^n)$. Dann gilt $x = (I+K)^n(\xi)$ für $\xi \in E$. Weil $x \in \operatorname{Ker}((I+K)^n)$ gilt $(I+K)^{2n}(\xi) = 0$. Nach Satz 5.10 haben wir:

$$\operatorname{Ker}((I+K)^{2n}) = \operatorname{Ker}((I+K)^n).$$

D.h. $\xi \in \operatorname{Ker}((I+K)^n)$. D.h. $(I+K)^n\xi = 0$ oder $x = 0$. Wir haben:

$$\operatorname{Ker}((I+K)^n) \oplus \operatorname{Im}((I+K)^n) \subset E.$$

"gemeiner Trick": Jetzt erinnern wir uns daran, dass
$\operatorname{ind}((I+K)^n) = \operatorname{ind}((I+K)) = 0$. Es folgt
$\operatorname{codim}(\operatorname{Ker}((I+K)^n) \oplus \operatorname{Im}((I+K)^n)) = 0$ oder

$$\operatorname{Ker}((I+K)^n) + \operatorname{Im}((I+K)^n) = E.$$

Q.E.D.

Wir werden jetzt $I - \lambda K$ betrachten. Wir hatten schon bewiesen, dass

$$E = \operatorname{Ker}((I-\lambda K)^n) \oplus \operatorname{Im}((I-\lambda K)^n).$$

für geeignetes n. $x \in \operatorname{Ker}(\lambda K)^n)$, dann gilt $Kx \in \operatorname{Ker}((I-\lambda K)^n)$. Der Grund dafür ist, dass K und $(I-\lambda K)^n$ vertauschbar sind. Auch ist $K(\operatorname{Im}(I-\lambda K)^n) \subset \operatorname{Im}((I-\lambda K)^n)$ - aus dem gleichen Grunde. Der Raum $\operatorname{Ker}((I-\lambda K)^n)$ ist endlich dimensional. Auf diesem Raum gilt

$(I-\lambda K)^n(\mathrm{Ker}((I-\lambda K)^n)) = 0$. Wir können jetzt die Jordan Normalform von K auf $\mathrm{Ker}((I-\lambda K)^n)$ verwenden. Wir bekommen eine Basis von $\mathrm{Ker}((I-\lambda K)^n)$, so dass K auf diesen Raum durch die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
\lambda^{-1} & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & \lambda^{-1} & \ddots & & & & & & & & & & \\
 & & \ddots & 1 & & & 0 & & & & & 0 & \\
 & & & \lambda^{-1} & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & \lambda^{-1} & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & \lambda^{-1} & \ddots & & & & & & \\
 & 0 & & & & & \ddots & 1 & & & & 0 & \\
 & & & & & & & \lambda^{-1} & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & \lambda^{-1} & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & \lambda^{-1} & \ddots & \\
 & 0 & & & & & 0 & & & & & \ddots & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & \lambda^{-1}
\end{array}\right)$$

dargestellt wird.
Um diese Matrix zu bestimmen, wird $\mathrm{rg}(I-K)^j$ bestimmt (für $j = 1, \dots, n$). Dadurch erhält man die Größe der Jordanblöcke.
Sollte $\mathrm{Ker}((I-\lambda K)) \neq 0$, dann gibt es ein x mit

$$(I-\lambda K)x = 0.$$

Wir nennen λ^{-1} einen Eigenwert von K, falls diese Bedingung erfüllt ist

Satz 5.12. *Seien $\lambda^{-1}, \lambda'^{-1}$ Eigenwerte von K, $\lambda \neq \lambda'$. Dann gilt*

$$\mathrm{Ker}((I-\lambda K)^n) \subset \mathrm{Im}((I-\lambda' K)^m)$$

wobei n (bzw. m) die Zahlen, die durch Satz 5.10 bestimmt werden, sind.

Beweis. Sei $x \in \mathrm{Ker}((I-\lambda K)^n)$. Dann nach Satz 5.11 können wir $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in \mathrm{Ker}((I-\lambda' K)^m)$ und $x_2 \in \mathrm{Im}((I-\lambda' K)^m)$ schreiben. Es gilt
$(I-\lambda K)^n(x) = 0$. Nach unserer Bemerkung von vorhin

$$(I-\lambda K)^n \, \mathrm{Ker}((I-\lambda' K)^m) \subset \mathrm{Ker}((I-\lambda' K)^m)$$
$$(I-\lambda K)^n \, \mathrm{Im}((I-\lambda' K)^m) \subset \mathrm{Im}((I-\lambda' K)^m)$$

D.h.

$$(I-\lambda K)^n(x_1) = 0 \qquad (I-\lambda K)^n(x_2) = 0$$

Jetzt auf $\mathrm{Ker}((I-\lambda' K)^m)$ hat K eine Matrixdarstellung

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c}
\lambda^{-1} & 1 & & & & \\
 & \lambda^{-1} & \ddots & & & \\
 & & \ddots & 1 & & \\
 & & & \lambda^{-1} & & \\
\hline
 & & & & & \\
\cline{5-5}
 & & & & & \ddots
\end{array}\right)$$

D.h. $I - \lambda K$ hat auf diesem Raum die Matrixdarstellung

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1-\frac{\lambda'}{\lambda} & 1 & & & & & \\ & 1-\frac{\lambda'}{\lambda} & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & 1 & & \\ & & & & 1-\frac{\lambda'}{\lambda} & & \\ \hline & & & & & & \ddots \end{array}\right)$$

Diese Matrix ist invertierbar (Da $\lambda = 0$ liefert $(I - \lambda K) = I$ ist $\lambda \neq 0$). D.h. $x_1 = 0$. Es folgt $x = x_2 \in \mathrm{Im}((I - \lambda' K)^n)$ Q.E.D.

Satz 5.13. *Die Menge der Eigenwerte von K ist abzählbar mit Häufungspunkt 0, falls die Menge endlich ist.*

Beweis. Wir bemerken, dass aus $Kx = \mu x$ folgt $|\mu| \leq \|K\|$. Da $\|K\|$ endlich ist, gilt, dass die Eigenwerte beschränkt sind. Für jedes $R > 0$ betrachten wir $\{\mu : |\mu| \geq R\}$. Ist diese Menge unendlich, dann gibt es $\mu_1, \mu_2, \ldots R \leq |\mu_j| \leq \|K\|$. Wir können deswegen eine konvergente Teilfolge finden. Ohne Einschränkung gilt $\mu_j \to \mu : |\mu| \geq R$. Seien $x_1, x_2, \ldots$ Eigenvektoren: $Kx_j = \mu_j x_j$. Ohne Einschränkung sind die $\mu_j' s$ alle verschieden. Wir wählen die $x_j' s$ mit $\|x_j\| = 1$. D.h. die $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist linear unabhängig für jedes n.

Nota bene: Wir benutzen hier, dass für das Gleichungssystem

$$\mu_1{}^k c_1 x_1 + \mu_2{}^k c_2 x_2 + \ldots + \mu_n{}^k c_n x_n = 0 (0 \leq k < n)$$

die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \ddots & \mu_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1{}^{n-1} & \cdots & \mu_n{}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (\mu_i - \mu_j)(-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}$$

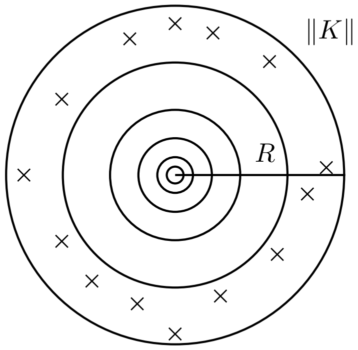
ungleich 0 ist. Diese Determinante nennt man **Vandermonde Determinante**.

Da K kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge der $K(x_j)$. O.E. nehmen wir an, dass $K(x_j)$ konvergiert. D.h. $\mu_j x_j$ konvergiert. Allerdings $\mu_j \to \mu$; d.h. $x_j \to \xi$. $\|\xi\| = 1$, $K(x_j) \to K(\xi)$. D.h. $K(\xi) = \mu \xi$. Wir betrachten den von $x_1, x_2, \ldots, x_j$ erzeugten Raum $\langle x_1, \ldots, x_j \rangle$. Nach Hilfssatz 5.6 können wir $y \in \langle x_1, \ldots, x_j \rangle$ mit $\|x_j - y\| > 1 - \varepsilon$ finden, wobei $0 < \varepsilon < 1$ vorgegeben wird. D.h.

$$\|K(x_j) - K(x_k)\| = \|\mu_j x_j - \mu_k x_k\| \geq R(1 - \varepsilon) \qquad k < j$$

D.h. die $(K(x_j))$ konvergieren nicht. Widerspruch. Es folgt: die Menge der μ_j's ist endlich. Q.E.D.

Veranschaulichung zum Beweis:



Dabei sind pro Ring nur endlich viele Punkte, daher ergeben sich insgesamt abzählbar viele Punkte.

Satz 5.14. *Sei K kompakt mit $\|K\| < 1$. Dann ist K invertierbar.*

Beweis.
$$(I+K)^{-1} = I - K + K^2 - K^3 + \cdots$$

Q.E.D.

Satz 5.15. *Unter den obigen Voraussetzungen gilt*

$$E = \bigoplus_{\substack{\lambda : |\lambda^{-1}| \geq R \\ n_\lambda \neq 0}} \operatorname{Ker}((I - \lambda K)^{n_\lambda} \oplus E(R)$$

wobei n_λ: der durch Satz 5.10 angegebene Wert für λ. Der Raum $E(R)$ wird durch

$$E(R) = \prod_{\substack{\lambda : |\lambda^{-1}| \geq R \\ n_\lambda \neq 0}} (I - \lambda K)^{n_\lambda}(E)$$

gegeben. Alle Summanden werden in sich durch K abgebildet. Für jeden Eigenwert μ von K auf $E(R)$ gilt $|\mu| < R$. Auf $\operatorname{Ker}((I+K)^{n_\lambda})$ kann K durch Jordan-Blöcke dargestellt werden.

Anwendung: Theorie von Perron-Frobenius-Ruelle Operatoren in der Ergodentheorie. (Thermodynamischer Formalismus)

Satz (Satz von Perron-Frobenius)**.** *Sei $A = (a_{ij})$ eine reelle Matrix mit $a_{ij} > 0$ für alle i, j. Dann gibt es einen positiven Eigenwert $\lambda_0 > 0$ von A mit Eigenvektor x_0, so dass alle anderen Eigenwerte λ der Ungleichung*

$$|\lambda| < \lambda_0$$

genügen.

Beispiel:

$$E = \left\{(x_j : x_j \in \mathbb{C}, \sum \varepsilon_j |x_j| < \infty\right\} \qquad \|(x)\| = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j |x_j|$$

Dann betrachten wir

$$K((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (0, \theta_1 x_1, \theta_2 x_2, \theta_3 x_3, \ldots)$$

Dann betrachten wir die Eigenwerte von K. Wir bekommen

$$K((x_1, x_2, \ldots)) = \mu(x_1, x_2, \ldots)$$

In diesem Fall

$$(0, \theta_1 x_1, \theta_2 x_2, \theta_3 x_3, \ldots) = \mu(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

Für $\mu = 0$: $(\theta_1 \neq 0, \theta_2 \neq 0, \ldots)$, $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots$

$$\begin{array}{c|c} x_1 = \mu^{-1} 0 & x_1 = 0 \\ x_2 = \mu^{-1}\theta_1 x_1 & x_2 = 0 \\ x_3 = \mu^{-1}\theta_2 x_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Es gibt hier keine Eigenwerte überhaupt. Z.B. bei $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \ldots$ und $\theta_j \to 0$ kann man zeigen, dass K kompakt ist.
Sei $K'(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\theta_1 x_2, \theta_2 x_3, \ldots)$. Nun ist $(1, 0, 0, \ldots)$ ein Eigenvektor mit Eigenwert 0. Für $\mu \neq 0$

$$(\theta_1 x_2, \theta_2 x_3, \ldots) = \mu(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 x_2 &= \mu x_1 \\ \theta_2 x_3 &= \mu x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Der zugehörige Eigenvektor ist:

$$\left(1, \frac{\mu}{\theta_1}, \frac{\mu^2}{\theta_1\theta_2}, \frac{\mu^3}{\theta_1\theta_2\theta_3}, \ldots\right)$$

Dieses liegt in E, falls

$$\varepsilon_1 + \frac{|\mu|}{|\theta_1|}\varepsilon_2 + \frac{|\mu|^2}{|\theta_1\theta_2|}\varepsilon_3 + \ldots$$

Ob diese Reihe konvergiert hängt von der Wahl der Konstanten ab. Sollte es für μ_1 konvergieren, dann konvergiert es für alle $\mu : |\mu| \leq |\mu_1|$ - überabzählbar viele. In diesem Fall kann K nicht kompakt sein.

Kapitel 6

Spektraltheorie in Hilbert-Räumen

Satz 6.1. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Sei $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ kompakt. Dann gibt es eine Zerlegung*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$$

mit $K|_{\mathcal{H}_0} = 0$ und $\mathcal{H}_1 \cong \ell^2$ oder $\mathbb{C}^n$ für endliches n. Für die kanonische Basis e_j, $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ des ℓ^2 bzw. für die kanonische Basis e_j, $(j = 1, 2, 3, \ldots, n)$ des $\mathbb{C}^n$ gilt

$$Ke_j = \lambda_j e_j.$$

Falls $\mathcal{H}_1 \cong \ell^2$, gilt $\lambda_j \to 0$ für $j \to \infty$.

Dieses wurde am Ende von Kapitel 4 bewiesen. Dieser Satz reicht nicht aus.

Beispiel: Ein Beispiel, das man gerne behandeln möchte, ist der Schrödinger Operator auf $\mathbb{R}^3$ (Betrachte: Wasserstoffatom mit Energieniveaus)

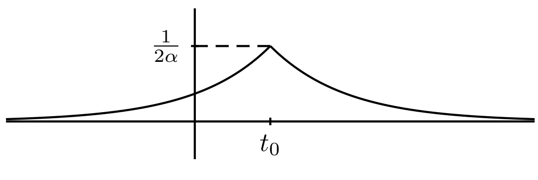
$$\Delta\psi(x) + (E - V(x))\psi(x) = 0 \qquad \psi(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

Stilblüte: Manchmal in diesem Land ist die Reihenfolge ein bisschen unverständlich.

Das Problem, was ein Differentialoperator in einem Hilbert-Raum zu suchen hat, werden wir gleich diskutieren.

Beispiel: Wir betrachten

$$R(t, t_0; \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} \cdot e^{\alpha(t - t_0)} & (t_0 \geq t) \\ \frac{1}{2\alpha} \cdot e^{\alpha(t_0 - t)} & (t_0 < t) \end{cases}.$$



Sei f eine Funktion auf $\mathbb{R}$, so dass

$$f(x)e^{-\varepsilon|x|} \to 0 \text{ für } |x| \to \infty$$
$$\text{und } f'(x)e^{-\varepsilon|x|} \to 0 \text{ für } |x| \to \infty.$$

für alle $\varepsilon > 0$. Angenommen, dass f'' die gleiche Bedingung erfüllt, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} R(t,t_0;\alpha) D^2 f(t_0) dt_0 &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} R(t,t_0;\alpha) f''(t_0) dt_0 \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{t} \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha(t_0-t)} f''(t_0) dt_0 + \int_{t}^{R} \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha(t_0-t)} f''(t_0) dt_0 \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{2\alpha} e^{\alpha(t_0-t)} f''(t_0)\right]_{-R}^{t} - \frac{1}{2}\int_{-R}^{t} e^{\alpha(t_0-t)} f'(t_0) dt_0 \\
&+ \left[\frac{1}{2\alpha} e^{\alpha(t-t_0)} f''(t_0)\right]_{t}^{R} + \frac{1}{2}\int_{t}^{R} e^{\alpha(t-t_0)} f'(t_0) dt_0 \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_{t}^{R} e^{\alpha(t-t_0)} f'(t_0) dt_0 - \frac{1}{2}\int_{-R}^{t} e^{\alpha(t-t_0)} f'(t_0) dt_0 \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\left[e^{\alpha(t_0-t)} f(t_0)\right]_{t}^{R} + \frac{\alpha}{2}\int_{t}^{R} e^{\alpha(t-t_0)} f(t_0) dt_0 \\
&- \frac{1}{2}\left[e^{\alpha(t_0-t)} f(t_0)\right]_{-R}^{t} + \frac{\alpha}{2}\int_{-R}^{t} e^{\alpha(t_0-t)} f(t_0) dt_0 \\
&= -\frac{1}{2} f(t) - \frac{1}{2} f(t) + \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} R(t,t_0;\alpha) f(t_0) dt_0 .
\end{aligned}$$

Alles in allem: Was wir bekommen, ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(t,t_0;\alpha)(D^2 f(t_0) - \alpha^2 f(t_0)) dt_0 = -f(t).$$

$-R(\cdot,\cdot;\alpha)$ ist der Kern von $(D^2-\alpha^2)^{-1}$ — auch **Resolventenkern** genannt. Dieses hat die Wirkung, dass Probleme mit Differentialoperatoren in Probleme mit Integraloperatoren verwandelt werden. Wir betrachten:

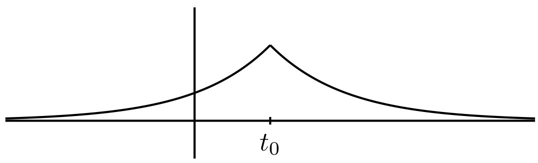
$$\int_{\infty}^{\infty} D^2 f(t) f(t) dt = \lim_{R\to\infty} [f'(t)f(t)]_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} f'(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)^2 dt.$$

falls $f(t)f'(t) \to 0$ für $|t| \to \infty$. Die Funktion $R(t,t_0;\alpha)$ hängt nur von $t-t_0$ ab:

$$R(t,t_0;\alpha) = R(t_0,t;\alpha).$$

Es folgt, dass $\sum_{m\in\mathbb{Z}} R(t,t_0+m;\alpha) = R^{\mathbb{Z}}(t,t_0;\alpha)$ existiert. Es gelten für $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
R^{\mathbb{Z}}(t+k,t_0;\alpha) &= R^{\mathbb{Z}}(t,t_0;\alpha), \\
R^{\mathbb{Z}}(t,t_0+k;\alpha) &= R^{\mathbb{Z}}(t_0,t;\alpha), \\
R^{\mathbb{Z}}(t,t_0;\alpha) &= R^{\mathbb{Z}}(t_0,t;\alpha).
\end{aligned}$$



Jetzt betrachten wir eine periodische Funktion f mit f', f'', $f \in C^2(\mathbb{R})$. Insbesondere gelten für $|x| \to \infty$:

$$\begin{aligned}
e^{-\varepsilon|x|} f(x) &\to 0, \\
e^{-\varepsilon|x|} f'(x) &\to 0, \\
e^{-\varepsilon|x|} f''(x) &\to 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_0^1 R^{\mathbb{Z}}(t,t_0;\alpha)f(t_0)dt_0 &= \int_0^1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} R(t,t_0+m;\alpha)f(t_0)dt_0 \\
&= \int_0^1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} R(t,t_0+m;\alpha)f(t_0+m)dt_0 \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^1 R(t,t_0+m;\alpha)f(t_0+m)dt_0 \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} R(t,t_0+m;\alpha)f(t_0)dt_0 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} R(t,t_0+m;\alpha)f(t_0)dt_0.
\end{aligned}$$

Wir bekommen

$$\int_0^1 R^{\mathbb{Z}}(t,t_0;\alpha)(D^2 f(t_0) - \alpha^2 f(t_0))dt_0 = -f(t).$$

Andererseits ist $[0,1]$ kompakt, $R^{\mathbb{Z}}(t,t_0;\alpha)$ stetig in t, t_0 und stellt deswegen einen kompakten Operator auf $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ dar. Wir suchen dann die Eigenvektoren und Eigenwerte dieses Operators (Satz 6.1). Sei λ jetzt ein Eigenwert. Wir haben dann für f_λ einen zugehörigen Eigenvektor $f_\lambda \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. D.h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(t,t_0;\alpha)f_\lambda(t_0)dt_0 = \lambda f_\lambda(t)$$

oder

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(t_0-t)} f_\lambda(t_0)dt_0 + \frac{1}{2\alpha}\int_t^{+\infty} e^{\alpha(t-t_0)} f_\lambda(t_0)dt_0 &= \lambda f_\lambda(t), \\
\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha t_0} f_\lambda(t_0)dt_0 + \frac{1}{2\alpha}e^{\alpha t}\int_t^{+\infty} e^{-\alpha t_0} f_\lambda(t_0)dt_0 &= \lambda f_\lambda(t), \\
\lambda f_\lambda(t) = \frac{1}{2\alpha}\cdot e^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha t_0} f_\lambda(t_0)dt_0 + \frac{1}{2\alpha}\int_t^{\infty} e^{-\alpha t_0} f_\lambda(t_0)dt_0.&
\end{aligned}$$

Sei $\lambda \neq 0$. Dann gelten:

$$\begin{aligned}
\lambda f_\lambda'(t) &= \frac{1}{2\alpha}(-\alpha)e^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha t_0} f_\lambda(t_0)dt_0 + \cancel{\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha t}}e^{\alpha t} f_\lambda(t), \\
&+ \frac{1}{2\alpha}(+\alpha)e^{-\alpha t}\int_t^{\infty} e^{-\alpha t_0} f_\lambda(t_0)dt_0 - \cancel{\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha t}}e^{\alpha t} f_\lambda(t), \\
&= -\frac{1}{2}\cdot e^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha t_0} f_\lambda(t_0)dt_0 + \frac{1}{2}\cdot e^{\alpha t}\int_t^{\infty} e^{-\alpha t_0} f_\lambda(t_0)dt_0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda f_\lambda''(t) &= \frac{\alpha}{2}\cdot e^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha t_0} f_\lambda(t_0)dt_0 \\
&+ \frac{\alpha}{2}\cdot e^{\alpha t}\int_t^{\infty} e^{-\alpha t_0} f_\lambda(t_0)dt_0 - \frac{1}{2}f_\lambda(t) - \frac{1}{2}f_\lambda(t) \\
&= \alpha^2 \lambda f_\lambda(t) - f_\lambda(t).
\end{aligned}$$

1. $\lambda \neq 0$: f_λ ist 2-mal differenzierbar und genügt der Differentialgleichung. Deswegen ist f_λ unendlich differenzierbar.

2. $\lambda = 0$: Die linke Seite ist 0. Also ist

$$\cancel{\alpha^2 \lambda f_\lambda(t)} - f_\lambda(t) = 0$$

Wir erfahren von dieser Gleichung, dass f_λ in t differenzierbar ist — sogar unendlich oft. Es gilt

$$\lambda(f_\lambda''(t) - \alpha^2 f_\lambda(t)) = -f_\lambda(t).$$

Für $\lambda = 0$ gilt $f_\lambda = 0$. Sonst: $f_\lambda''(t) = (\alpha^2 - \frac{1}{\lambda})f_\lambda(t)$. Wir haben zwei Lösungen zu dieser Gleichung

$$f(t) = e^{\pm\sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{\lambda}} \cdot t}.$$

Weil diese periodisch sein sollen, sind die Lösungen nur für $\sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{\lambda}} = 2\pi i k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ zulässig. Es folgt:

$$\lambda = \frac{1}{\alpha^2 + (2\pi k)^2}.$$

Für $k = 0$ ist die Lösung 1, für $k > 0$ ergeben sich die Lösungen:

$$\sqrt{2}\cos(2\pi k t) \text{ und } \sqrt{2}\sin(2\pi k t).$$

Ziel: Theorie, sodass wir $R(t, t_0; \alpha)$ auf $L^2(\mathbb{R})$ untersuchen können. ($\cos(2\pi xy)$ und $\sin(2\pi xy)$ mit $y \in \mathbb{R}$ sind fast Eigenvektoren, aber sie liegen nicht in $L^2(\mathbb{R})$.)

Hilfssatz 6.2. *Sei A stetig, hermitesch in $\mathcal{H}$. Sei $R \geq \|A\|$. Dann sind die Operatoren $RI \pm A$ positiv.*

Beweis. Es gilt $\langle x, (RI \pm A)x\rangle = R\|x\|^2 + \langle x, Ax\rangle$. Es gilt $|\langle x, Ax\rangle| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2$. Auch ist $\langle x, Ax\rangle$ reell. Es folgt:

$$\langle x, (RI \pm A)x\rangle \geq 0.$$

Q.E.D.

Hilfssatz 6.3. *Sei $[a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$. Sei p ein Polynom, sodass für $x \in [a, b]$ gilt $p(x) \geq 0$. Dann existieren Polynome $Q_1, \ldots, Q_r, P_1, \ldots, P_s, P_1^*, \ldots, P_{s^*}^*$, sodass*

$$p(t) = \sum_{j=1}^{r} Q_j(t)^2 + (t - a)\sum_{k=1}^{s} P_k(t)^2 + (b - t)\sum_{l=1}^{s^*} P_l^*(t)^2.$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Algebra können wir p in irreduzible Faktoren zerlegen; Diese sind entweder vom Grad 1 oder von Grad 2 mit komplex konjugierten Nullstellen. Bei den Polynomen von Grad 1 haben wir $(t - \theta)$; falls $(t - \theta)$ mehrfach in p aufgeht, gibt es 2 Möglichkeiten. Entweder die Vielfachheit ist gerade oder ungerade.

1. Im ersten Fall $p(t) = (t - \theta)^{2K} p_1(t)$. Wenn wir den Hilfssatz für p_1 bewiesen haben, haben wir ihn auch für p, weil $(t - \theta)^{2K}$ ein Quadrat ist.

2. Im anderen Fall teilt $(t - \theta)^{2k+1}$ das Polynom $p(t)$. Weil sich das Vorzeichen bei θ ändert, haben wir, dass $\theta \notin [a, b]$. Es folgt: entweder $\theta \leq a$ oder $\theta \geq b$.

Im ersten Fall schreiben wir

$$t - \theta = (t - a) + ((a - \theta)^{\frac{1}{2}})^2.$$

Im zweiten Fall

$$\theta - t = (b - t) + ((\theta - b)^{\frac{1}{2}})^2.$$

Ein quadratischer Faktor sieht so aus:

$$(x - \zeta)(x - \overline{\zeta}) = (x - \xi)^2 + \eta^2 \text{ mit} \zeta = \xi + i\eta.$$

— eine Summe von zwei Quadraten. Wir multiplizieren alles zusammen und bekommen

$$p(t) = \mathcal{A}_1(t) + (t - a)\mathcal{A}_2(t) + (b - t)\mathcal{A}_3(t) + (t - a)(b - t)\mathcal{A}_4(t).$$

wobei $\mathcal{A}_1(t), \ldots$ Summen von Quadraten von Polynomen sind. Jetzt benutzen wir

$$(t - a)(b - t) = \frac{(t - a)^2(b - t) + (t - a)(b - t)^2}{b - a}$$

und bekommen die zitierte Form. Q.E.D.

Zur Erinnerung: Wir schreiben $A \geq B$, falls $A - B$ positiv semidefinit ist.

Satz 6.4 (Murrays Lemma)**.** *Seien a, b, so dass*

$$aI \leq A \leq bI.$$

Sei p ein Polynom auf $[a, b]$ mit $p(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$. Dann gilt

$$p(A) \geq 0.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 6.3 gilt

$$p(A) = \sum_{j=1}^{r} Q_j(A)^2 + (A - aI) \sum_{k=1}^{s} P_k(A)^2 + (bI - A) \sum_{l=1}^{s^*} P_l^*(A)^2,$$

weil A hermitesch ist, ist es auch $Q_j(A)$ usw. Dann gilt:

$$\langle x, Q_j(A)^2 \rangle = \langle Q_j(A)x, Q_j(A)x \rangle \geq 0.$$

Auch gilt

$$\begin{aligned} \langle x, (A - aI)P_k(A)^2 x \rangle &= \langle x, P_k(A)(A - aI)P_k(A)x \rangle \\ &= \langle P_k(A)x, (A - aI)P_k(A)x \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ebenfalls haben wir $\langle x, (bI - A)P_k^*(A)^2 x \rangle \geq 0$. Es folgt die Behauptung. Q.E.D.

Korollar 6.5. *Sei p beliebig. Sei $\|p\|_\infty = \mathrm{Sup}_{t \in [a,b]} |p(t)|$. Dann gilt*

$$-\|p\|_\infty I \leq p(A) \leq \|p\|_\infty I.$$

Beweis. Wir betrachen $\|p\|_\infty \pm p(t)$. Q.E.D.

Satz 6.6. *Sei $A \geq 0$. Dann existiert $A_1 \geq 0$ mit $A = {A_1}^2$.*

Beweis. Wir finden p_j auf $[0, \|A\|]$, so dass $p_j(t)$ Polynom und $p_j(t) \to \sqrt{t}$ gleichmäßig. Es gilt außerdem $p_j(t) \geq 0$ für $t \in [0, \|A\|]$. Nach Korollar 6.5 ist die Folge $p_j(A)$ konvergent. Es folgt, dass

$$A_1 = \lim_{j\to\infty} p_j(A)$$

existiert. Da ${p_j}^2(t) \to t$, folgt ${A_j}^2 = A$. Q.E.D.

Satz 6.7. *Sei X ein kompakter, toplogischer Raum. Sei $C(X)$ die Algebra der stetigen Funktionen auf X mit der $\|\cdot\|_\infty$. Sei I ein abgeschlossenes Ideal in $C(X)$. Sei*

$$Z(I) = \{x \in X : \varphi(x) = 0 \textit{ für alle } \varphi \in I\}.$$

Dann gilt:

$$I = \{f \in C(X) : f(\xi) = 0 \textit{ für alle } \xi \in Z(I)\}.$$

Beweis. Nach Definition von $Z(I)$ gilt: $I \subset \{f : f(\xi) = 0 \text{ für alle } \xi \in Z(I)\}$. Sei $f : f(\xi) = 0$ für alle $\xi \in Z(I)$. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $U = \{x : f(x) < \varepsilon\}$. Dann ist U offen; es folgt, dass $X - U$ abgeschlossen ist und deswegen kompakt. Für $y \in X - U$ gilt, dass $y \notin Z(I)$. Dann existiert $g_y \in I$ mit $g_y(y) \neq 0$. Es gibt eine offene Umgebung V_y von y, sodass $|g_y(v)| \geq r_y > 0$ für $v \in V_y$. Insbesondere ist g_y invertierbar auf V_y.
Wir betrachten jetzt die V_y $(y \in X - U)$ als eine Überdeckung von der kompakten Menge $X - U$; es gibt deswegen eine Teilmenge entsprechend $y_1, \ldots, y_m$, sodass $V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_m} \supset X - U$. Wir betrachten jetzt

$$g = {g_{y_1}}^2 + {g_{y_2}}^2 + \cdots + {g_{y_m}}^2.$$

Es gibt $m_0 > 0$, sodass $g(x) \geq m_0$ für $x \in X - U$. Wir haben auch, dass $g \in I$. Für n groß betrachten wir $\frac{ng}{1+ng}$. Diese Funktion liegt in I. Für $n \to \infty$ konvergiert sie gleichmäßig auf $X - U$ gegen 1. Jetzt liegt auch $f\frac{ng}{1+ng}$ in I; die Folge konvergiert gleichmäßig gegen f auf $X - U$. Es gilt aber auch $g \geq 0$, weil g Summe von Quadraten ist. Deswegen gilt $\frac{ng}{1+ng} \leq 1$. Auf U gilt $|f| \leq \varepsilon$. Wir wählen $n_1 : \|f\frac{n_1 g}{1+n_1 g} - f|_{X-U}\|_\infty \leq \varepsilon$. Wir haben auch $\|(f\frac{n_1 g}{1+n_1 g} - f)|_U\| \leq \varepsilon$. Für jedes ε wählen wir eine solche Funktion:

$$G_\varepsilon = f\frac{n_1 g}{1 + n_1 g}, \qquad g = g(\varepsilon).$$

Dann gilt $\|f - G_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$ und $G_\varepsilon \in I$. Weil I abgeschlossen ist, folgt jetzt, dass $f \in I$. Q.E.D.

Nota bene: Sei $Z \subset X$ abgeschlossen. Dann ist $I(Z) = \{f : f|_Z = 0\}$ ein Ideal.

Exkurs: Sei $\mathbb{C}^n$ gegeben, $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ der Ring von Polynomen. Jedes Ideal I in $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ist endlich erzeugt durch $f_1, \ldots f_n$, also $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$,
$V(I) = \{\underline{z} \in \mathbb{C}^n : f_1(\underline{z}) = 0, \ldots f_k(\underline{z}) = 0\}$,
$\{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] : f|_{V(I)} = 0\} = \sqrt{I} = \{f : \text{ es gibt } m > 0 \text{ mit } f^m \in I\}$ (Radikal von I) nach dem Hilbertschen Nullstellensatz. Man kann hiermit auf $\mathbb{C}^n$ die Zariski-Topologie konstruieren. (Diese ist so weit wie möglich davon entfernt, haussdorfsch zu sein.)

Wir schreiben jetzt $\mathbb{R}[A]$ für die Algebra von Polynomen in A als eine Teilmenge von $L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Sei $\overline{\mathbb{R}[A]}$ der Abschluss von dieser Algebra in $L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Nach dem Satz von Weißerstraß und Korollar 6.5 liefert die Abbildung

$$\text{Polynomfunktionen auf } [a, b] \to \mathbb{R}[A] \qquad (aI \leq A \leq bI)$$

nach Abschluss eine Abbildung

$$C([a,b]) \to \overline{\mathbb{R}[A]}$$

einen Homomorphismus zwischen Algebren. Der Kern ist ein Ideal I; zu diesem Ideal ordnen wir die Menge $Z(I) \subset [a,b]$ zu. Diese Menge ist abgeschlossen in $[a,b]$. Wir schreiben $\sigma(A)$ (Spektrum von A) für diese Menge.

Satz 6.8 (Spektralsatz)**.** *Die obige Abbildung induziert eine Abbildung von*

$$C(\sigma(A)) \to \overline{\mathbb{R}[A]}.$$

Diese Abbildung ist ein Isomorphismus. Für $z \in \mathbb{C} - \sigma(A)$ ist $zI - A$ invertierbar als stetiger Operator.

Bemerkung: In dem Fall von *kompakten* Operatoren ist $\sigma(A) = \{\lambda_n : n \geq 1\} \cup \{0\}$.

Beweis. Wir werden den Satz von Tietze (s.u.) verwenden, wonach für eine stetige Funktion f_1 auf $\sigma(A)$ eine stetige Funktion f auf $\mathbb{R}$ existiert mit $f|(\mathbb{R} - [a,b]) = 0$ und $f|_{\sigma(A)} = f_1$, falls $\sigma(A) \cap [a,b] = \varnothing$. Nach diesem Satz können wir jede Funktion in $C(\sigma(A))$ so fortsetzen. Wenn wir zwei Fortsetzungen f_1 und f_2 haben, dann $(f_1 - f_2)|_{\sigma(A)} = 0$. D.h. — nach Satz 6.7 ist $f_1 - f_2$ im Kern von $C([a,b]) \to \overline{\mathbb{R}[A]}$. D.h. die Abbildung $C(\sigma(A)) \to \overline{\mathbb{R}[A]}$ ist (wohl-)definiert. Wir wissen, dass das Bild von der Abbildung $C([a,b]) \to \overline{\mathbb{R}[A]}$ als Kern die Funktionen besitzt, die aus $\sigma(A)$ verschwinden. $\sigma(A)$ ist kompakt — also abgeschlossen. Für jede Funktion φ stetig auf $\sigma(A)$ existiert $\tilde{\varphi}$ stetig auf $[a,b]$ mit den Eigenschaften von Satz 6.9. Es gilt:

$$\|\varphi\|_{C(\sigma(A))} = \|\tilde{\varphi}\|_{C([a,b])}.$$

Es folgt, dass

$$\operatorname*{Inf}_{\sigma(A)}(\varphi)I \leq \varphi(A) \leq \operatorname*{Sup}_{\sigma(A)}(\varphi)I.$$

Wir haben dann eine Abbildung von $C(\sigma(A))$ in $\overline{\mathbb{R}[A]}$. Dann folgen alle anderen Aussagen relativ formell. Q.E.D.

Satz 6.9 (Tietze-Urysohn Fortsetzungslemma)**.** *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, stetige Funktion. Dann existiert $\tilde{f}$ stetig auf X mit*

$$\tilde{f}|_A = f, \quad \operatorname*{Sup}_X \tilde{f} = \operatorname*{Sup}_A f \quad \textit{und} \quad \operatorname*{Inf}_X \tilde{f} = \operatorname*{Inf}_A f.$$

Beweis. Wir konstruieren $\tilde{f}$ folgendermaßen:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ \operatorname{Inf}_{y\in A} f(y)\frac{d(y,x)}{d(x,A)} & x \notin A \end{cases}.$$

Dabei ist $d(x,A) = \operatorname{Inf}_{z\in A} d(x,z)$ stetig auf $X - A$. Für $x \notin A$ gilt $d(x,A) \neq 0$. Für den Beweis ist es bequem anzunehmen, dass $\operatorname{Sup}_A f = 2$, $\operatorname{Inf}_A f = 1$. Dieses können wir erreichen, indem wir $f \to \alpha f + \beta$ mit $\alpha > 0$ wählen.

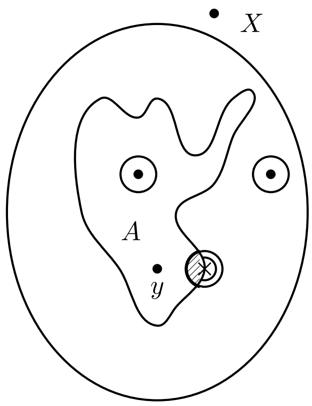
Bemerkung: Anstatt f mit α zu skalieren und um β zu verschieben, kann man auch $f \mapsto \arctan f$ wählen, falls f unbeschränkt ist.

Da $1 \leq f(y) \leq 2$ gilt, haben wir die Ungleichungen

$$d(x,A) \leq \operatorname*{Inf}_{y\in A} d(y,x) \leq \operatorname*{Inf}_{y\in A} f(y)d(y,x) \leq 2 \operatorname*{Inf}_{y\in A} d(y,x) = 2d(x,A).$$

D.h. $1 \leq \tilde{f}(x) \leq 2$ für alle $x \notin A$. Weil nun $\tilde{f}(x)|_A = f(x)$ gilt auch $1 \leq \tilde{f}(x) \leq 2$ für alle $x \in A$.

$$\operatorname*{Sup}_X \tilde{f} \leq 2 \qquad \operatorname*{Inf}_X \tilde{f} \geq 1$$
$$\operatorname*{Sup}_X f = 2 \Rightarrow \operatorname*{Sup}_X \tilde{f} = 2$$
$$\operatorname*{Inf}_X f = 1 \Rightarrow \operatorname*{Inf}_X \tilde{f} = 1$$



Wir brauchen nur noch zu zeigen, dass $\tilde{f}$ stetig ist. Es gibt drei Fälle: A° (Innere von A), $\partial A = A - A^\circ$ und $X - A$. Im ersten Fall haben wir keine Probleme, weil f stetig ist. Im dritten Fall ist der Beweis fast wortwörtlich gleich mit dem Beweis, dass $d(x,A)$ stetig ist. Sei $x \in \partial A$. Da A abgeschlossen ist, gilt $x \in A$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt dann $r > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ für $d(x,y) \leq r$ und $x, y \in A$. Sei $B = A \cap \overline{B(x,r)}$. Sei $y \in A - B$ und $x' \in \overline{B(x, \frac{r}{4})} - A$. Dann gilt:

$$d(x',y) \geq d(x,y) - d(x,x') \geq \frac{3r}{4}.$$

Es folgt:

$$\operatorname*{Inf}_{y\in A-B} f(y)d(x',y) \geq \frac{3r}{4}. \qquad (f \geq 1)$$

Andererseits gilt:

$$f(x)d(x',x) \leq 2d(x',x) \leq \frac{r}{2}.$$

Es folgt:

$$\operatorname*{Inf}_{y\in A} f(y)d(y,x') = \operatorname*{Inf}_{y\in B} f(y)d(y,x').$$

Es gilt aber in B, dass $f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon$. Es folgt

$$\operatorname*{Inf}_{y\in B} d(y,x')(f(x) - \varepsilon) \leq \operatorname*{Inf}_{y\in B} f(y)d(y,x') \leq (f(x) + \varepsilon) \operatorname*{Inf}_{y\in B} d(y,x')$$

oder

$$f(x) - \varepsilon \leq \tilde{f}(x') \leq f(x) + \varepsilon.$$

Es folgt, dass $\tilde{f}$ stetig ist. Q.E.D.

Korollar 6.10. *Seien A_1, A_2 mit $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ abgeschlossen in X (wie oben). Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, so dass*

$$0 \leq f \leq 1, \quad f|_{A_1} = 0 \quad \textit{und} \quad f|_{A_2} = 1.$$

Zur Erinnerung: Wir hatten bei kompakten Operatoren

$$Ae_n = \lambda_n e_n, \quad \lambda_n \to 0 \quad, \|e_n\| = 1, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1,$$
$$A|_{\mathcal{H}_0} = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_1 = \langle e_1, e_2, \ldots \rangle.$$

Jedes $x \in \mathcal{H}$ kann als

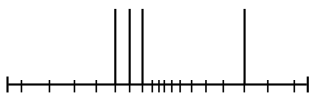
$$x^0 + \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, x \rangle e_j \tag{6.1}$$

dargestellt werden ($x^0 \in \mathcal{H}_0$). Es gilt:

$$\|x\|^2 = \|x^0\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |\langle e_j, x \rangle|^2.$$

Die Darstellung von Ax ist dann $\sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, x \rangle \lambda_j e_j$. Man sagt, dass die Koeffizienten eine Spektralzerlegung von x darstellen. Die Gleichung (6.1) ist eine spektrale Synthese. Beim Spektralsatz in der obigen Form ist keine Spektralanalyse bzw. Synthese vorhanden. Um diese zu erreichen hat man eine Konstruktion folgender Art: Man hat ein Maß μ auf $\sigma(A)$ (auf Borel-Teilmengen). Dann betrachtet man eine meßbare Funktion $n : \sigma(A) \to \mathbb{N} \cup \infty$. Wir betrachten einen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ (direktes Integral von Hilbert-Räumen). Die Elemente von $\mathcal{H}$ sind meßbare Funktionen $x_1(\lambda), \ldots, x_{n(\lambda)}(\lambda)$ - oder $x_1(\lambda), x_2(\lambda), x_3(\lambda), \ldots$ mit $x_j(\lambda) = 0$ für $y > n(\lambda)$. Die Norm in $\mathcal{H}$ ist

$$\left(\int_{\sigma(A)} \sum_{j=1}^{n(\lambda)} |x_j(\lambda)|^2 d\mu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}.$$



$\sigma(A)$

Auf diesem Raum operiert A durch $(x_j(\lambda)) \mapsto (\lambda x_j(\lambda))$.
Diese Theorie kann weiterentwickelt werden. Wir haben bisher einen Operator betrachtet. Man kann genauso gut mehrere Operatoren $A_1, A_2, \ldots, A_n$, oder sogar eine Algebra von Operatoren (nicht unbedingt endlich erzeugt) betrachten (alles kommutativ).

Anwendung: 1. Klassische Fouriertheorie auf $\mathbb{R}$; auch auf beliebige lokal kompakte *abelsche* Gruppen

2. Quantenmechanik. Hier geht es meistens um Differentialoperatoren. Dafür muss die Theorie ausgeweitet werden - "rigged Hilbert-Räume" - Gelfand-Triplette.

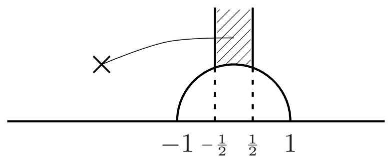
3. Differentialgeometrie. Für kompakte Mannigfaltigkeiten verwendet man fast ausschließlich kompakte Operatoren ("Laplace-Beltrami-Operatoren"). Für allgemeine Mannigfaltigkeiten braucht man den vollen Spektralsatz.

4. Automorphe Formen. Wir betrachten zuerst Lie-Gruppen G, z. B. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und einen Raum X auf dem G operiert, z.B. $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ gelten

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad g_1(g_2(z)) = (g_1 g_2)(z).$$

Auf diesem Raum gibt es ein invariantes Maß — in unserem Fall $d\sigma(z) = \frac{dxdy}{y^2}$ $(z = x + iy)$. Es gibt sehr viele diskrete Untergruppen

$$\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{z.B. } \Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

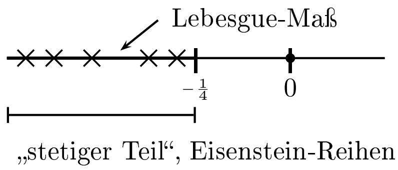


Man betrachtet hier auch den Differentialoperator

$$\Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

negativ definit.

$$\mathcal{H} = \left\{ f \text{ messbar auf } \mathbb{H} : f(\gamma(z)) = f(z),\ \gamma \in \lambda,\ \int_{\Gamma \backslash \mathrm{H}} |f(z)|^2 d\sigma(z) < \infty \right\}, \quad \Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$



A.Selberg

Kapitel 7

Sturm-Liouville Theorie

In dieser Theorie betrachtet man Differentialoperatoren

$$D : Df(t) = p(t)f''(t) + q(t)f(t)$$

auf einem Intervall $[a, b]$. Wir setzen voraus, dass p, q stetig sind, $p(t) > 0$ auf $[a, b]$. Wir stellen Randbedingungen von der Art

$$\begin{aligned} c_1 f(a) + d_1 f'(a) &= 0 \qquad (c_1, d_1) \neq (0, 0) \\ c_2 f(b) + d_2 f'(b) &= 0 \qquad (c_2, d_2) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

Literatur: H.Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Kapitel VI.

Ziel: Wir werden zeigen, dass es eine Folge $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$ gibt, sodass $\lambda_n \to \infty$ und es eine Funktion

$$e_j(t) \text{ mit } De_j(t) = -\lambda_j e_j(t)$$

gibt. Wir betrachten den Hilbert-Raum $\mathcal{H} = L^2([a, b], p^{-1}dm)$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b \overline{f}_1(t) f_2(t) p^{-1}(t) dt$$

Wir können annehmen, dass die (e_j) orthonormal sind. Sie sind vollständig - für jedes $f \in \mathcal{H}$ gilt

$$f = \sum \langle e_j, f \rangle e_j \qquad \text{konvergent in } \mathcal{H}$$

Eine Besonderheit von diesem Problem ist, dass die Eigenräume eindimensional sind.

Warum sollte man die Klasse von Differentialgleichungen studieren?

1. Dieses Problem hat Anwendung bei vielen Klassen von speziellen Funktionen

2. Allgemeine Probleme dieser Art treten bei physikalischen Problemen (besonders Schwingungstheorie) auf.

3. Dieses ist ein Problem mit *Differentialoperatoren*, also nicht Operatoren auf Hilbert-Räumen. Es dient als Modell für andere Klassen von Problemen.

Hier sind die folgenden Probleme gemeint

$$u \text{ auf } B \subset \mathbb{R}^n$$
$$Du = 0 \qquad u|_{\partial B} = \phi,\ \phi \text{ vorgeschrieben}$$
$$D = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x)(\tfrac{\partial}{\partial x_1})^{i_1}(\tfrac{\partial}{\partial x_2})^{i_2} \cdots (\tfrac{\partial}{\partial x_n})^{i_n}$$
$$a_{i_1 \ldots i_n}(x) \text{ ist stetig}$$

Wir sagen, dass D von der Ordnung N ist, wenn es ein $a_{i_1 \ldots i_n}(x) \neq 0$ mit $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = N$ gibt, N maximal. Dann nennen wir

$$\sigma_D(x, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_n \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_n = N}} a_{i_1 i_2 \cdots i_n}(x) \cdot {\xi_1}^{i_1} \cdots {\xi_n}^{i_n}$$

das **Symbol** von D.
Dann sagen wir, dass D **elliptisch** ist, wenn

$$\sigma_D(x, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \neq 0 \text{ für alle } x \in B \text{ und } (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

Insbesondere existieren elliptische D's nur, wenn N gerade ist.

Beispiel (Laplace-Operator)*:*

$$\Delta = (\tfrac{\partial}{\partial x_1})^2 + (\tfrac{\partial}{\partial x_2})^2 + \cdots + (\tfrac{\partial}{\partial x_n})^2$$

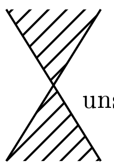
Die Bedingung $p(t) \neq 0$ bedeutet in unserem Fall, dass unser Operator elliptisch ist. Die Theorie lässt sich größtenteils auf elliptische Operatoren übertragen. Ein nicht-elliptisches Problem ist die Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f = 0.$$

Diese ist eine hyperbolische Gleichung mit dem Symbol

$$\sigma_D(x, \xi_0, \ldots, \xi_n) = -\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots \xi_n^2.$$

Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung von Licht (wenigstens zur 1. Annäherung). Der Lichtkegel bedeutet, dass es Lösungen gibt, die nicht stetig sind.



stetig innerhalb des Kegels,
unstetig entlang „Wellenfronten“.

Eine weitere Klasse von linearen partiellen Differentialgleichungen sind die parabolischen Gleichungen - von der Form der Wärmeleitungsgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) f = 0.$$

Der Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen zeigt, dass wir für

$$c_1 f(a) + d_1 f'(a) = 0$$

mit $d_1 \neq 0$ und $f(a) = 1,\ f'(a) = -\frac{c_1}{d_1}$ immer eine Lösung mit der Randbedingung bei a finden können. Ebenfalls können wir Lösungen mit der Randbedingung bei b finden. Dass beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden, ist nur für spezielle α möglich.

Ansatz: Die Theorie der sogenannten **Greenschen Funktion** (Green Function). Wir werden für geeignetes λ eine Funktion $G(s,t;\lambda)$ konstruieren, so dass

$$\int_a^b G(s,t;\lambda)(D+\lambda)f(t)dt = f(s)$$

Es wird sich herausstellen, dass unsere bisherige Theorie auf G anwendbar ist. Wie wird G konstruiert?
Eine Methode ist die folgende: Wir finden eine Lösung u_a der Differentialgleichung

$$(D+\lambda)u_a(t) = 0$$

die der Randbedingung bei a genügt. Sei u_b eine Lösung der Randbedingungen bei b.

$$G(x,y;\lambda) = -\frac{1}{p(y)} \cdot \frac{1}{W} \begin{cases} u_a(x)u_b(y) & x \le y \\ u_b(x)u_a(y) & x \ge y \end{cases}$$

Die Funktion

$$W(t) = u_a(t){u_b}'(t) - {u_a}'(t)u_b(t)$$

hat die Eigenschaft

$$\begin{aligned} W'(t) &= \cancel{{u_a}'(t){u_b}'(t)} + u_a(t){u_b}''(t) - {u_a}''(t)u_b(t) - \cancel{{u_a}'(t){u_b}'(t)} \\ &= u_a(t)\frac{1}{p(t)}(-\lambda - q(t))u_b(t) + \frac{1}{p(t)}(+\lambda + q(t))u_a(t)u_b(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sei $W = W(t)$. Daraus folgt, dass $W(t)$ eine Konstante ist (Wronski-Funktion). Wir brauchen, dass $W(t) \neq 0$. Dieses bedeutet, dass u_a und u_b keinen Vielfachen voneinander sind.

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} c_1 f(a) + d_1 f'(a) &= 0 \\ c_2 f(b) + d_2 f'(b) &= 0 \end{aligned} \qquad Df(t) = p(t)f''(t) + q(t)f(t)$$

Hilfssatz 7.1. *Es gibt $R > 0$, so dass für $\lambda > R$ die Differentialgleichung*

$$p(t)f''(t) + q(t)f(t) = \lambda f(t)$$

keine Lösungen besitzt, die die Randbedingungen bei a und b erfüllt.

Bemerkung: Der Beweis gehört der „geometrischen Theorie“ von gewöhnlichen Differentialgleichungen an. Diese Methode steht für elliptische Partialdifferentialgleichungen nicht zur Verfügung. Man benutzt die Parametrix-Methode.

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $d_1 \neq 0, d_2 \neq 0$. Sei f eine Lösung der Differentialgleichung. Wir werden zuerst zeigen, dass $f(t) \neq 0$ für alle t, wenn wir R so wählen, dass

$$\frac{-q(t)+\lambda}{p(t)} \ge M, \text{ falls } \lambda \ge R$$

Wir betrachten zuerst $F(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{f''(t)}{f(t)} - \frac{f'(t)^2}{f(t)^2} \\ &= \frac{-q(t)f(t) + \lambda f(t)}{f(t)p(t)} - F(t)^2 \\ &= \frac{-q(t) + \lambda}{p(t)} - F(t)^2 \\ &\geq M - F(t)^2 \qquad \text{für } \lambda \geq R \end{aligned}$$

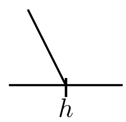
Wir wählen $M = 1 + (\frac{c_1}{d_1})^2$

$$F'(t) + F(t)^2 \geq 1 + \left(\frac{c_1}{d_1}\right)^2$$

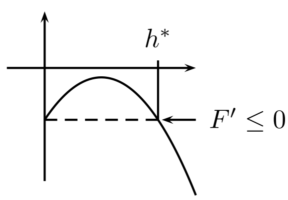
Wir setzen voraus, dass $f(a) = 1$. Für den Fall, dass es ein t gibt mit $f(t) = 0$ existiert

$$h = \text{Inf}\,\{t : f(t) = 0\}$$

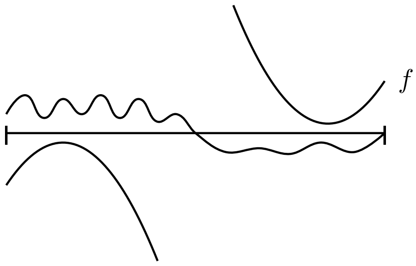
Für h gilt $h > a$, $f(h) = 0$, für $t : a \leq t < h$ gilt $f(t) > 0$. Nun gilt $0 = f(h) < f(a) = 1$. Es gibt deswegen $x_1 : 0 < x_1 < h$ und $f'(x_1) < 0$ (Mittelwertsatz). Weil $f''(t) = \frac{-q(t)+\lambda}{p(t)} f(t)$ gilt: $f''(t) > 0$ auf $[a, b[$. D.h. $f'(t)$ ist monoton wachsend auf $[a, h[$.



Es gilt $f'(h) \leq 0$, weil $f(t) > 0$ für $t < h$. Aber $f'(h) = 0$ würde nach dem Eindeutigkeitssatz für Lösungen der Differentialgleichung bedeuten, dass $f(t) = 0$ für $a \leq t \leq h$. Dieses ist falsch - also $f'(h) < 0$. Es folgt $f'(x) < 0$ für alle $x : a \leq x \leq h$. Daraus würde folgen, dass $F(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \to -\infty$ für $t \to h$. Dieses bedeutet auch, dass $f'(a) \leq 0$. D.h. dass c_1 und d_1 das gleiche Vorzeichen haben. D.h. dass $-\frac{c_1}{d_1} < 0$. Es gibt deswegen h^* mit $F(h^*) = -\frac{c_1}{d_1}$. Es gilt nach Definition $F(t) \to -\frac{c_1}{d_1}$ für $t \to a$. Bei a gilt $F'(a) \geq 1 + (\frac{c_1}{d_1})^2 - (\frac{a}{d_1})^2 \geq 1$. D.h. $F'(t) > 0$ in einer Umgebung von a. Wir wählen h^* als Infimum von allen Lösungen von $F(t) = -\frac{a_1}{d_1}$, $t > a$.



Wir wählen h^* als Infinum von allen Lösungen von $F(t) = -\frac{c_1}{d_1}$, $t > a$.



Wir haben deshalb

$$F(x) > -\frac{c_1}{d_1} \text{ im Intervall } [a, h^*[.$$

Bei h^* gilt

$$F'(h^*) \leq 0$$

Aber $F'(t) + F(t)^2 \geq 1 + (\frac{c_1}{d_1})^2$. Es folgt $F(t)^2 < (\frac{c_1}{d_1})^2$ oder $F'(t) \geq 1$. D.h. $F'(h^*) \geq 1$. Widerspruch! Es folgt, dass $f(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Wir haben bei diesem Argument auch gezeigt, dass

$$F(t) \leq -\frac{c_1}{d_1} \text{ auf } [a, b]$$

Ähnlich gilt

$$F(t) \geq -\frac{c_2}{d_2} \text{ auf } [a, b]$$

wenn wir die Rollen von a und b vertauschen. D.h.

$$|F(t)| \leq \operatorname{Max}\left(\left|\frac{c_1}{d_1}\right|, \left|\frac{c_2}{d_2}\right|\right) =: C$$

Nun gilt

$$F'(t) = -\frac{q(t) + \lambda}{p(t)} - F(t)^2$$

$$F'(t) \geq \operatorname{Inf}\left(-\frac{q(t)}{p(t)}\right) - \frac{\lambda}{\operatorname{Sup} p} - C^2 \text{ für alle } t \in [a, b]$$

Es gibt aber x_1 mit

$$F'(x_1) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \qquad \text{(Mittelwertsatz)}$$

D.h.

$$\lambda \leq C^* = \operatorname{Sup} p \left(\frac{\frac{c_1}{d_1} - \frac{c_2}{d_2}}{b - a} + \operatorname{Sup}\left(\frac{q(t)}{p(t)}\right) + C^2\right)$$

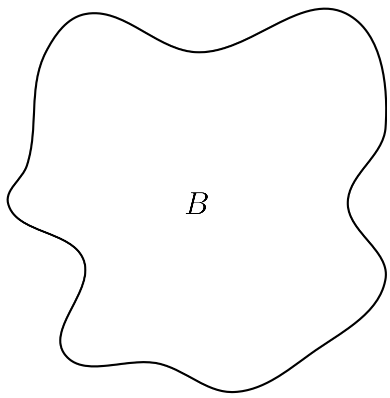
Für $\lambda > C^*$ gibt es keine Lösung. Damit haben wir die Aussage im Falle $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$.

(7.1)

Ankündigung: Es folgt eine Weihnachtsvorlesung auf Englisch!

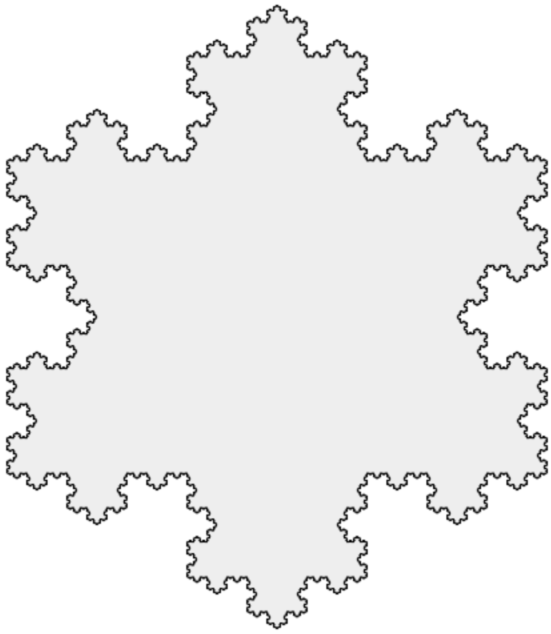
Reminder: If we consider the surface of a drum, the tones given by the drum are eigenvalues of the Laplace equation with boundary values 0 along the boundary. Mark Kaç foundated the question, as whether the set of eigenvalues determine the geometry. He put it in the form "Can one hear the shape of a drum?". The general answer is "No!"; two surfaces with the same spectrum are called "isospectral". There are some particulary intricate shapes — for example the v. Koch snowflake curve; here the length of the boundary is infinite.

$$p(t)f''(t) + q(t)f(t) = \lambda f(t)$$
$$c_1 f(a) + d_1 f'(a) = 0$$
$$c_2 f(b) + d_2 f'(b) = 0$$
$$F(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \qquad F'(t) + F(t)^2 = \frac{-q(t) - \lambda}{p(t)}$$



"Drum".

Von Koch Schneeflocken-Kurve (**Fraktale Trommel** (F. Lapidus))



We dealt with $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$. Let $d_1 = 0$. This means that $f(a) = 0$, $f'(a) = 1$ - just a matter of normalization - $F(t) \to \infty$ as $t \to a$. We first take

$$\lambda : \operatorname*{Inf}_t \left(\frac{-q(t) + \lambda}{p(t)} \right) \geq 2 \Rightarrow F'(t) \geq 2 \text{ and}$$

$$f''(t) = \frac{-q(t) + \lambda}{p(t)} f(t).$$

If $f(t) > 0$ then $f''(t) \geq 2f(t)$. We have $f'(a) = 1$ and therefore $f'(x) > 0$ in a neighbourhood of a. We have $f(a) = 0$ and therefore $f(x) > 0$ in a neighbourhood of a. This means that $f''(x) \geq 2 \cdot f(x) > 0$ in a neighbourhood of a. This means that $f'(x) > 1$ in $]a, h]$ for a suitable h (Mean value theorem).
We prove now that $f'(x) > 1$ in the entire interval. Otherwise there would exist x_1 with $f'(x_1) = 1$. We consider the infinum of all such ξ with $f'(\xi) = 1$ - this we define by x_1. Since $f'(a) = 1$ Rolle's theorem implies that there is a $x_2 : a < x_2 < x_1$ with $f''(x_2) = 0$. Since $f''(x) \geq 2f(x)$ this would mean that $f(x_2) \leq 0$. This is impossible, since $f'(x) \geq 1$ on $[a, x_1]$ and $f(x) > 0$ for x in a neighbourhood of a. Thus: $f'(x) > 1$ for all x.
There *are* two possibilities. Either

$$F(t) \geq \sqrt{\operatorname*{Inf}_{t_1} \left(\frac{-q(t_1) + \lambda}{p(t_1)} \right)} \quad \text{or} \quad F(t) < \sqrt{\operatorname*{Inf}_{t_1} \left(\frac{-q(t_1) + \lambda}{p(t_1)} \right)}.$$

for some t. In the second case there would be x_3 such that

$$F(x_3)^2 = \operatorname*{Inf}_{t_1} \left(\frac{-q(t_1) + \lambda}{p(t_1)} \right).$$

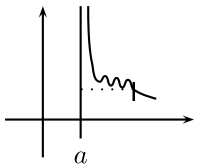
Again, by assuming that x_3 is the infinum of all such numbers, we have that for $t : a < t < x_3$

$$F(t)^2 > \operatorname*{Inf}_{t_1} \left(\frac{-q(t_1) + \lambda}{p(t_1)} \right) \text{ and } F'(t) + F(t)^2 = \frac{-q(t) + \lambda}{p(t)}.$$

It would follow that

$$\begin{aligned}
&F'(x_3) \leq \frac{-q(x_3)+\lambda}{p(x_3)} - \operatorname*{Inf}_{t_1}\left(\frac{-q(t_1)+\lambda}{p(t_1)}\right) \quad \text{and} \\
&F'(x_3) \geq 0.
\end{aligned}$$

This should lead to a contradiction.



As x_3 is minimal $F'(x_3) \leq 0$. The uniqueness theorem rules out $F'(x_3) = 0$.

Comment: Solutions of $p(t)f''(t) + q(t)f(t) = \lambda f(t)$ with given boundary solutions are unique. If u, v were two different solutions. Since

$$\frac{d}{dt}\left(u'(t)v(t) - u(t)v'(t)\right) = 0$$

we conclude that

$$u'(t)v(t) - u(t)v'(t) = W,$$

a constant. With the boundary conditions at a and $t = a$ we get $W = 0$. This means

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = 0, \qquad \frac{u}{v} = \text{const.}, \qquad F(t) \geq \sqrt{\operatorname*{Inf}_{t_1}\left(\frac{-q(t_1)+\lambda}{p(t_1)}\right)}.$$

For $t = b$ we should have $F(b) = -\frac{c_2}{d_2}$. If λ is large enough this cannot happen. If $d_2 = 0$ then as $f > 0$ we have $f(b) \neq 0$ for λ large enough. Finally if $d_2 = 0$ and $d_1 \neq 0$ then we can reflect the situation between a and b.

Q.E.D.

The conclusion is: for λ large enough the solution u_a satisfying

$$p(t)f''(t) + q(t)f(t) = \lambda f(t), \qquad u_a = f.$$

with the boundary condition at a and u_b, satisfying the same equation but with the boundary condition at b. are *different*. It turns out that they are different for all but countably many λ's.

$$K(s,t;\lambda) = -\frac{1}{p(t)} \cdot \frac{1}{W} \cdot \begin{cases} u_a(s)u_b(t) & s < t \\ u_b(s)u_a(t) & s \geq t \end{cases},$$

$$\frac{\partial}{\partial s}K(s,t;\lambda)|_{t_+} - \frac{\partial}{\partial s}K(s,t;\lambda)|_{s=t_-} = -\frac{1}{p(t)}. \tag{7.2}$$

The point is that K is continuous. The derivative is not continuous but satisfies (7.2). Also

$$K(s,t;\lambda)p(t)$$

is symmetric between s and t. It also satisfies in both s and t the boundary conditions. We shall show

$$\int_a^b K(s,t;\lambda)(p(t)f''(t)+q(t)f(t)+\lambda f(t))dt = f(s).$$

This is the property we need.

$$\begin{gathered} p(t)y''(t)+q(t)y(t) \qquad [a,b] \qquad p(t)>0 \\ c_1y(a)+d_1y'(a)=0 \\ c_2y(b)+d_2y'(b)=0 \\ p(t)y''(t)+q(t)y(t)=\lambda y(t) \end{gathered} \tag{7.3}$$

$$\tag{7.4}$$

Ankündigung: Das Jahr 2007 beginnt und die Weihnachtsvorlesung auf Englisch ist beendet.

Es gibt ein R, sodass es für $\lambda > R$ keine Lösungen mit den angegebenen Randbedingungen gibt. Wir betrachten λ, so dass es keine Lösung der Eigenfunktiongleichung (7.3) mit den Randwerten gibt - z.B. $\lambda > R$. Wir definieren

u_a Eine Lösung von (7.3) mit Randbedingungen $c_1u_a(a)+d_1u_a'(a)=0$.

u_b Eine Lösung von (7.3) mit Randbedingungen $c_2u_b(b)+d_2u_b'(b)=0$.

Es folgt: $u_a \neq u_b$. Die Funktionen u_a und u_b sind nicht eindeutig bestimmt - jedes Vielfache ist ebenfalls eine Lösung. Die Wronski-Funktion $W = u_a'(x)u_b(x) - u_a(x)u_b'(x)$ ist eine Konstante. Dann bilden wir

$$K(s,t;\lambda) = \begin{cases} -\frac{u_b(t)u_a(s)}{Wp(t)} & (s \le t) \\ -\frac{u_a(t)u_b(s)}{Wp(t)} & (s \ge t) \end{cases}.$$

Diese ist die Green'sche Funktion. Wichtig ist, dass $K(s,t;\lambda)$ in s und t die Randbedingungen erfüllt. Auch ist $K(s,t;\lambda)$ stetig. Dieses ist klar für $s \neq t$. Bei $s=t$ gilt $K(s,s;\lambda) = \frac{u_a(s)u_b(s)}{p(s)W}$ für die beiden Fälle - deswegen ist die Definition konsistent. Wir haben auch

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{s>t \\ s\to t}} \frac{\partial}{\partial s}K(s,t;\lambda) - \lim_{\substack{s<t \\ s\to t}} \frac{\partial}{\partial s}K(s,t;\lambda) &= -\frac{u_b{}'(t)u_a(t)}{p(t)W} + \frac{u_a{}'(t)u_b(t)}{p(t)W} \\ &= -\frac{1}{p(t)}. \end{aligned}$$

Es gilt auch $K(s,t;\lambda)p(t) = K(t,s;\lambda)p(s)$. Wir berechnen jetzt für die Funktion f, die zweimal stetig differenzierbar ist und die Randbedingungen erfüllt, das Integral

$$\int_a^b K(s,t;\lambda)(p(t)f''(t)-\lambda f(t))dt.$$

Wir zeigen jetzt, dass dieses Integral gleich $f(s)$ ist. Wir benutzen partielle Integration. Wir schreiben das Integral als

$$\begin{aligned}
&\int_a^s -\frac{u_a(t)u_b(s)}{p(t)W}p(t)f''(t)dt + \int_s^b -\frac{u_a(s)u_b(t)}{p(t)W}p(t)f''(t)dt + \int_a^b K(s,t;\lambda)q(t)f(t)dt \\
&= -u_b(s)\left(\left[\frac{u_a(t)f'(t)}{W}\right]_a^s - \int_a^s {u_a}'(t)f'(t)dt\right) \\
&\quad + u_a(s)\left(\left[\frac{u_b(t)f'(t)}{W}\right]_s^b - \int_s^b \frac{{u_b}'(t)f'(t)}{W}\,dt\right) \\
&= -u_b(s)\left(\left[\frac{u_a(t)f'(t)}{W}\right]_a^s - \left[\frac{{u_a}'(t)f(t)}{W}\right]_a^s + \int_a^s {u_a}''(t)f(t)dt\right) \\
&\quad - u_a(s)\left(\left[\frac{u_b(t)f'(t)}{W}\right]_s^b - \left[\frac{{u_b}'(t)f(t)}{W}\right]_s^b + \int_s^b {u_b}''(t)f(t)dt\right).
\end{aligned}$$

Wir berechnen ${u_a}''(t)$ und ${u_b}''(t)$:

$$\begin{aligned}
{u_a}''(t) &= \frac{1}{p(t)}\left(-q(t)u_a(t) + \lambda u_a(t)\right) \\
{u_b}''(t) &= \frac{1}{p(t)}\left(-q(t)u_b(t) + \lambda u_b(t)\right).
\end{aligned}$$

Wir bekommen:

$$\begin{aligned}
&- u_b(s)\left(\left[\frac{u_a(t) + f'(t) - {u_a}'(t)f(t)}{W}\right]_a^s\right) - u_a(s)\left[\frac{u_b(t)f'(t) - {u_b}'(t)f(t)}{W}\right]_s^b \\
&\qquad + \int_a^b K(s,t;\lambda)\lambda f(t)dt
\end{aligned}$$

für

$$\int_a^b K(s,t;\lambda)\left(p(t)f''(t) + q(t)f(t)\right)dt.$$

D.h.

$$\begin{aligned}
&\int_a^b K(s,t;\lambda)\left(p(t)f''(t) + q(t)f(t) - \lambda f(t)\right)dt \\
&= -u_b(s)\frac{\cancel{u_a(s)f'(s)} - {u_a}'(s)f(s)}{W} + u_a(s)\frac{\cancel{u_b(s)f'(s)} - {u_b}'(s)f(s)}{W} \\
&\quad - u_b(s)\underbrace{\frac{u_a(a)f'(a) - {u_a}'(a)f(a)}{W}}_{=0} + u_a(s)\underbrace{\frac{u_b(b)f'(b) - {u_b}'(b)f(b)}{W}}_{=0} \\
&= \frac{{u_a}'(s)u_b(s) - u_a(s){u_b}'(s)}{W}f(s) \\
&= f(s).
\end{aligned}$$

$$\int_a^b K(s,t;\lambda)(p(t)f''(t) + q(t)f(t) - \lambda f(t))dt = f(s).$$

Es gilt:

$$Df(t) = p(t)f''(t) + q(t)f(t).$$

Nun gilt (mithilfe der Randbedingungen):

$$K(y)(D - \lambda I) = \text{Identität}.$$

Wir brauchen nun
$$(D-\lambda I)\cdot K(\lambda) = \text{Identität}.$$

$$\int_a^b K(s,t;\lambda)f(t)dt = -\frac{u_b(s)}{W}\int_a^s \frac{u_a(t)f(t)}{p(t)}\,dt - \frac{u_a(s)}{W}\int_s^b \frac{u_b(t)f(t)}{p(t)}\,dt.$$

Wir bilden die Ableitungen nach s

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{ds}\right)\int_a^b K(s,t;\lambda)f(t)dt &= -\frac{u_b{}'(s)}{W}\int_a^s \frac{u_a(t)f(t)}{p(t)}\,dt - \cancel{\frac{u_b(s)u_a(s)}{p(s)W}f(s)} \\
&\quad -\frac{u_a{}'(s)}{W}\int_s^b \frac{u_b(t)f(t)}{p(t)}\,dt + \cancel{\frac{u_a(s)u_b(s)}{p(s)W}f(s)} \\
\left(\frac{d}{ds}\right)^2\int_a^b K(s,t;\lambda)f(t)dt &= -\frac{u_b{}''(s)}{W}\int_a^s \frac{u_a(t)f(t)}{p(t)}\,dt - \frac{u_b{}'(s)u_a(s)f(s)}{Wp(s)} \\
&\quad -\frac{u_a{}''(s)}{W}\int_s^b \frac{u_b(t)f(t)}{p(t)}\,dt + \frac{u_a{}'(s)u_b(s)f(s)}{Wp(s)}.
\end{aligned}$$

Es folgt
$$\left(p(s)\left(\frac{d}{ds}\right)^2 + q(s) - \lambda\right)\int_a^b K(s,t;\lambda)f(t)dt = f(s).$$

Wir werden jetzt den Operator mit Kern $K(s,t;\lambda)$ so verstehen

$$\int_a^b K(s,t;\lambda)g(t)dt = \int_a^b K(s,t;\lambda)p(t)g(t)\frac{1}{p(t)}dt.$$

Wir betrachten den Hilbert-Raum von messbaren Funktionen g auf $[a,b]$ mit der Norm
$$\|g\|_*^2 = \int_a^b |g(t)|^2 p(t)^{-1}dt.$$

Weil $K(s,t;\lambda)p(t)$ symmetrisch ist, ist der Operator, der durch diesen Kern dargestellt wird, symmetrisch bzw. hermite'sch. Weil K stetig ist, ist der Operator kompakt. D.h. der Operator besitzt eine Familie von Eigenvektoren e_j mit den Eigenwerten λ_j die gegen Null konvergieren. Wir werden erfahren, dass Null kein Eigenwert von diesem Operator ist. Sei u ein Eigenvektor von $g \mapsto \int K(s,t;\lambda)g(t)dt$ mit Eigenwert μ. Dann gilt

$$\int_a^b K(s,t;\lambda)u(t) = \mu u(s).$$

Aus dieser Gleichung bekommen wir, dass $\mu u(s)$ zweimal differenzierbar ist. Jetzt wenden wir die zweite Identität an. Dann bekommen wir

$$(D-\lambda I)\int_a^b K(s,t;\lambda)dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mu = 0 \\ \mu\left(p(t)u''(t) + q(t)u(t) - \lambda u(t)\right) & \text{falls } \mu \neq 0. \end{cases}$$

D.h. $u(s) = 0$ falls $\mu = 0$ - dieser Fall scheidet aus. Oder für $\mu \neq 0$

$$u(s) = \mu\left(p(t)u''(t) + q(t)u(t) - \lambda u(t)\right).$$

Wir erfahren, dass u eine Eigenfunktion von $p(s)(\frac{d}{ds})^2 + q(t)$ mit Eigenwert $\lambda + \frac{1}{\mu}$ ist. Wir bekommen:

$$\mu u(a) = -\frac{u_a(a)}{W}\int_a^b \frac{u_b(t)u(t)}{p(t)}\,dt \text{ und } \mu u'(a) = -\frac{u_a'(a)}{W}\int_a^b \frac{u_b(t)u(t)}{p(t)}\,dt.$$

Weil u_a die Randbedingungen bei a erfüllt, tut es u auch. Das Gleiche gilt bei b. Deswegen ist jede Eigenfunktion von K auch eine Eigenfunktion von $p(s)(\frac{d}{ds})^2 + q(s)$ *mit* den Randbedingungen. Sei v eine Eigenfunktion von $p(s)(\frac{d}{ds})^2 + q(s)$ mit Eigenwert λ^* und erfülle sie die Randbedingungen. Dann gilt

$$\begin{aligned} v(s) &= \int_a^b K(s,t;\lambda)\left(p(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^2 v(t) + q(t)v(t) - \lambda v(t)\right) dt \\ &= \int_a^b K(s,t;\lambda)\left(\lambda^* v(t) - \lambda v(t)\right) dt \\ &= \int_a^b K(s,t;\lambda)p(t)v(t)p(t)^{-1} dt(\lambda^* - \lambda). \end{aligned}$$

D.h. v ist eine Eigenfunktion von $K(\lambda)$ mit dem Eigenwert $(\lambda^* - \lambda)^{-1}$.

Dirichlet-Bedingung $f(a) = 0,\ f(b) = 0$

Neumann-Bedingung $q'(a) = 0,\ f'(b) = 0$

Im Allgemeinen können Eigenwerte eine höhere Multiplizität haben. Hier nicht. Seien $v_1, v_2 \neq 0$ Eigenfunktionen von $p(s)(\frac{d}{ds})^2 + q(s)$, welche die Randbedingungen erfüllen, dann gilt $v_1 = cv_2$ für ein $c \neq 0$. Der Grund ist, dass v_1 und v_2 durch die Anfangsbedingungen bei a bestimmt sind. Falls $v_1(a) \neq 0$ und $v_2(a) = 0$ sind, dann gilt $v_2(s) = \frac{v_2(a)}{v_1(a)} v_1(s)$; falls $v_1'(a) \neq 0$, $v_2(s) = \frac{v_2'(a)}{v_1'(a)} v_1(s)$. Die Multiplizität von jedem Eigenwert ist Eins.

Satz 7.2. *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Seien p, q stetige Funktionen auf $[a,b]$ mit $p(t) > 0$ für alle $t \in [a,b]$. Sei $\mathcal{H}_p$ der Hilbert-Raum von meßbaren Funktionen auf $[a,b]$ mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle_* = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) \frac{1}{p(t)} dt.$$

Seien $(c_1, d_1) \neq (0,0)$ und $(c_2, d_2) \neq (0,0)$. Dann gibt es ein vollständiges, orthonormales System von Eigenvektoren von $D = p(t)(\frac{d}{dt})^2 + q(t)$ mit den Randbedingungen

$$c_j e_j(a) + d_1 e_j'(a) = 0 \text{ und } c_2 e_j(b) + d_2 e_j'(b) = 0$$

mit den Eigenwerten λ_n, $\lambda_n \to -\infty$ für $n \to \infty$. Der Raum der Lösungen von $Df = \lambda f$ mit den Randbedingungen ist eindimensional, falls $\lambda = \lambda_n$, sonst $\{0\}$.

Man kann diesen Satz verwenden, um die Gleichung $Df = g$ zu lösen, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind. In $\mathcal{H}_*$ gilt

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, g\rangle_* e_j$$

Dann können wir

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \langle e_j, g\rangle_* e_j$$

setzen, vorausgesetzt, dass Null kein Eigenwert von D ist. Diese Lösung existiert vorerst in $\mathcal{H}_*$. Es ist notwendig festzustellen, ob die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, g\rangle_* e_j$$

absolut und gleichmäßig konvergent sind. Dieses hängt von den Gegebenheiten ab. Es gibt zwei Möglichkeiten, um zu beweisen, dass solche Reihen in einem anderen Sinne als L^2 konvergieren.

Mercers Satz Gelten

$$\int_a^b \overline{f(x)} k(x,y) f(y) p(y)^{-1} dy > 0 \quad \forall f$$

und

$$\int_a^b k(x,y) e_j(y) p(y)^{-1} dy = \kappa_j e_j(x),$$

dann folgt, dass

$$\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \overline{e_j(x)} e_j(y) = k(x,y)$$

absolut konvergent ist. (Literaturhinweis: Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen S. 415)

Zweite Methode Seien

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, f \rangle e_j \text{ und } g = \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, g \rangle e_j.$$

Dann folgt, dass

$$\sum_{j=1}^{\infty} \overline{\langle e_j, f \rangle} \langle e_j, g \rangle = \langle f, g \rangle$$

absolut konvergent ist.

Man benutzt diese Tatsachen zusammen mit dem Begriff der Faltung.

Nicht alle Differentialoperatoren sind unabhängig voneinander. Seien

$$p(t) f''(t) + q(t) f(t) = \lambda f(t) \text{ und } t = \tau(s).$$

Dann betrachten wir $f(\tau(s))$. Dann gelten

$$\frac{d}{ds}(f \circ \tau) = f'(\tau)\tau'(s) \quad \text{und}$$
$$\frac{d^2}{ds^2}(f \circ \tau)(s) = f''(\tau)(\tau'(s))^2 + f'(\tau)\tau''(s).$$

Wenn wir, z.B. τ so wählen, dass

$$\tau'(s)^2 = p(\tau(s)), \qquad \frac{d\tau}{ds} = p(\tau(s))^{\frac{1}{2}},$$
$$s = s(\tau), \qquad \frac{ds}{d\tau} = p(\tau)^{-\frac{1}{2}}, \qquad s(\tau) = \int_a^{\tau} \frac{d\tau_1}{p(\tau_1)^{\frac{1}{2}}}\, d\tau_1 \text{ mit } a \le \tau \le b.$$

Wir erhalten

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^2 (f \circ \tau) = p(\tau(s)) f''(\tau(s)) + f'(\tau(s))\tau''(s).$$

Die Eigenfunktionsgleichung wird

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^2 (f \circ \tau) - (f \circ \tau)' \frac{\tau''(s)}{\tau'(s)} + (q \circ \tau)(s)(f \circ \tau) = \lambda (f \circ \tau)(s).$$

Wir schreiben jetzt $f \circ \tau =: F$ und $q \circ \tau(s) =: Q(s)$.

$$F''(s) - F'(s)\frac{\tau''(s)}{\tau'(s)} + Q(s)F(s) = \lambda F(s).$$

Jetzt schreiben wir $F = WG$, wo W so gewählt wird, dass das Glied erster Ordnung verschwindet:

$$WG'' + 2W'G' + W''G - (WG' + W'G)\frac{\tau''}{\tau'} + QWG = \lambda WG.$$

Wir wählen W so, dass

$$2W' - W\frac{\tau''}{\tau'} = 0, \qquad \frac{W'}{W} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\tau''}{\tau'} \Leftrightarrow \log W = \text{konst} + \tfrac{1}{2}\log\tau' \Leftrightarrow W = \tau'$$

$$G'' + \left(\frac{W''}{W} - \frac{W'}{W}\frac{\tau''}{\tau} + Q\right)G = \lambda G.$$

Wir können deswegen mit diesen beiden Transformationen die Gleichung so reduzieren, dass $p = 1$. Die Gleichung ist jetzt auf einem Intervall von Länge $\int_a^b \frac{1}{(p(t))^{\frac{1}{2}}}\,dt$.
In der letzten Vorlesung hatten wir das Intervall $[0,1]$ und eine Funtion $f \in [0,1]$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 0$. Als Lösung dazu ergab sich $\sin(\frac{\pi n x}{1})$. Nun haben wir allgemeiner das Intervall $[0, L]$. Als Lösung ergibt sich in diesem Fall:

$$\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \qquad \lambda_n \sim -\frac{\pi^2}{L^2}\cdot n^2.$$

Im Allgemeinen gilt:

$$\lambda_n \sim \frac{\pi^2 n^2}{\left(\int_a^b \frac{1}{p(s)^{\frac{1}{2}}}ds\right)^2}.$$

Siehe auch C-H: I, Kapitel VI, §2.
$G_n(s)$ mit λ_n als n-ten Eigenwert hat n Nullstellen und wird gut durch eine trigonometrische Funktion approximiert.
Die Lösungen von elliptischen Gleichungen sind regulär, so haben wir

$$Df = g, \qquad g \text{ k-mal differenzierbar} \quad \text{und somit} \quad f \text{ (k-N)-fach differenzierbar.}$$

Die Verallgemeinerung der Sturm-Liouville Theorie gilt *nur* für elliptische Operatoren. Die Hauptarbeit in der Sturm-Liouville Theorie lag in der die Konstruktion der Greenschen Funktion. Die Methode, die wir benutzt haben, funktioniert nicht in anderen Fällen.
Deswegen braucht man andere Konstruktionen:

- Parametrix-Methode (Hilbert); C-H Bd. II, Kap IV, §6
- „Direkte Methode“ (Kelvin, Dirichlet), Variationsrechnung; C-H Bd. II, Kap III, §§1,2
- Brownsche Bewegungen (N. Wiener); S. Mark Kaç, „Can one hear the shape of drum?“, Amer. Math. Monthly 73 (1966), 1-26

Die Grundidee von der Parametrix im Falle von Sturm-Liouville-Theorie. Wir suchen $G(x, y; \lambda)$ mit

$$\int G(x,y;\lambda)(p(y)f''(y) + q(y)f(y) - \lambda f(y))dy = f(x).$$

G genügt den Randbedingungen beider Variablen. Wir wissen, dass G stetig sein soll und

$$\frac{\partial}{\partial y} \; G(x,y)|_{y=x+} - \frac{\partial}{\partial y} \; G(x,y)|_{x-} = 1$$

Wir wählen zuerst eine Funktion G_0, die diese Eigenschaft hat. Wir berechnen mit $\lambda = 0$

$$\int_a^b G_0(x,y)(p(y)f''(y) + q(y)f(y))p(y)^{-1}dy$$

wie vorhin.

$$\begin{aligned}
\int_a^b G_0(x,y)f''(y)dy &= [G_0(x,y)f'(y)]_a^b - \int_a^x \frac{\partial G_0}{\partial y}(x,y)f'(y)dy - \int_x^b \frac{\partial G_0}{\partial y}(x,y)f'(y)dy \\
&= \left[-\frac{\partial G_0}{\partial y}(x,y)f(y)\right]_a^x + \left[-\frac{\partial G_0}{\partial y}(x,y)f(y)\right]_x^b + \int_a^b \frac{\partial^2 G_0}{\partial y^2} f(y)dy \\
&= f(x) + 0
\end{aligned}$$

wegen der Randbedingungen.

$$\begin{aligned}
&\int_a^b G_0(x,y)(p(y)f''(y) + q(y)f(y) - \lambda f(y))p(y)^{-1}dy \\
&= f(x) + \int_a^b \left\{ \frac{\partial^2 G_0}{\partial y^2}(x,y) + G(x,y)\frac{q(y)}{p(y)} \right\} f(y)dy.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung bedeutet, dass G_0 bis auf einen kompakten Operator die gesuchte Eigenschaft hat. Wir können die Fredholm'sche Theorie verwenden, um die Existenz der Green'schen Funktion zu beweisen.

Kapitel 8

Fourier-Theorie

In der Fourier-Theorie betrachtet man periodische Funktionen mit $f(x+1) = f(x)$. Wir werden zeigen, dass es — unter gewissen Umständen — trigonometrische Reihen gibt, die gegen diese Funktionen konvergieren. Zwei Notationen sind

$$\text{(komplexe Form)} \qquad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{2\pi i n x} \quad \text{und} \tag{8.1}$$

$$\text{(reelle Form)} \qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + a_n^* \sin(2\pi n x). \tag{8.2}$$

Die Fourierkoeffizienten werden durch

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx, \\ a_0 = \alpha_0 &= \int_0^1 f(x) dx \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z} \\ \text{bzw. } a_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x) dx, \\ a_n^* &= 2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x) dx \qquad \text{für } n > 0 \end{aligned}$$

berechnet. Außerdem kann man zwischen reellen und komplexen Koeffizienten umrechnen:

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{-n}), & \alpha_n &= a_n - i a_n^*, \\ a_n^* &= \tfrac{i}{2}(\alpha_n - \alpha_{-n}), & \alpha_{-n} &= a_n + i a_n^*. \end{aligned}$$

Literaturtip: T.W. Körner: Fourier Analysis, CUP 1988.

Bisher haben wir gezeigt, dass die Familie $e^{2\pi i n x}$ oder 1, $\sqrt{2}\cos(2\pi n x)$, $\sqrt{2}\sin(2\pi n x)$ eine orthonormale Basis von $L^2([0,1])$ bilden, die „vollständig“ ist. Ein weiteres Argument zu diesem Zwecke liefert: die Sturm-Liouville Theorie. Wir betrachten für $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $f(x+1) = f(x)$ die Funktionen

$$\text{(gerade)} \qquad f_g(x) = \tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{und} \tag{8.3}$$

$$\text{(ungerade)} \qquad f_u(x) = \tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)). \tag{8.4}$$

„Gerade“ bedeutet in diesem Zusammenhang $f_g(-x) = -f_g(x)$ und „ungerade“ $f_u(-x) = -f_u(x)$. Dann gelten $f_g'(x) = \frac{1}{2}(f'(x) - f'(-x))$, $f_g'(0) = 0$, $f_g'(1) = 0$,

$f_u(0) = 0$, $f_u(1) = 0$. Für gerade Funktionen haben wir die Randbedinungen $g'(0) = 0$, $g'(1) = 0$, für ungerade Funktionen gelten: $g(0) = 0$, $g(1) = 0$. Wir können hier die Sturm-Liouville Theorie mit $D = (\frac{d}{dx})^2$ anwenden. Die Eigenfunktionen von diesem Differentialoperator (also jene mit $D\varphi = \lambda\varphi$) sind

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{\lambda}x},\ e^{-\sqrt{\lambda}x} & \lambda > 0 \\ \cos(\sqrt{-\lambda}x),\ \sin(\sqrt{-\lambda}x) & \lambda < 0 \\ 1, x & \lambda = 0 \end{cases}.$$

Die angegebenen Funktionen sind Eigenfunktionen (nachrechnen). Die Differentialgleichung $\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$ ist linear; es folgt, dass die Lösungen durch die Anfangsbedingungen vollständig bestimmt sind. Linearkombinationen von den angegebenen Funktionen haben vorgegebene Anfangsbedingungen. Die Funktionen $\alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x}$ können die Randbedingungen für gerade oder ungerade periodische Funktionen nicht erfüllen, denn sei

$$\varphi(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}\cdot x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}\cdot x}.$$

Zuerst seien die Randbedingungen $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 0$. Aus der ersten folgt $\alpha + \beta = 0$, d.h. $\beta = -\alpha$. Aus der zweiten Randbedingung ergibt sich die Gleichung

$$\alpha e^{\sqrt{\lambda}} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}} = 0.$$

Setzen wir nun die erste Gleichung in die zweite ein, dann erhalten wir schließlich

$$\alpha = 0 \text{ oder } \sqrt{\lambda} = 0.$$

Seien die Randbedingungen nun $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi'(1) = 0$, dann ergeben sich

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda}\alpha - \sqrt{\lambda}\beta &= 0 \\ \sqrt{\lambda}\alpha e^{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}\beta e^{-\sqrt{\lambda}} &= 0 \end{aligned}$$

Da der Fall $\Rightarrow \alpha, \beta = 0$ nicht zulässig ist, erhalten wir keine Lösungen.
Im nächsten Fall seien die Eigenfunktionen von der Form $\varphi(x) = \sqrt{2}\cos(\pi n x)$, dann erhält man

$$\varphi(x) = \alpha\cos(\sqrt{-\lambda}\cdot x) + \beta\sin(\sqrt{-\lambda}\cdot x).$$

Seien zunächst die Randbedingungen durch $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi'(1) = 0$ gegeben, dann bekommt man bei $x = 0$ die Gleichung

$$\beta\sqrt{-\lambda}\cdot 1 = 0.$$

Bei $x = 1$ erhält man

$$\begin{gathered} -\alpha\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}\cdot 1) + \beta\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda}\cdot 1) = 0 \\ \sin(\sqrt{-\lambda}\cdot 1) = 0 \\ \text{also } \sqrt{-\lambda} = \pi n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{gathered}$$

Als Eigenfunktionen bekommt man daher Funktionen der Art $\cos(\pi n x)$.
Nun betrachten wir dazu die andere Randbedingung (also $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 0$): Für $x = 0$ ergibt sich die Gleichung

$$\alpha\cdot 1 + \beta\cdot 0 = 0.$$

Bei $x = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha\cos(\sqrt{-\lambda}) + \beta\sin(\sqrt{-\lambda}) &= 0 \\ \sin(\sqrt{-\lambda}) &= 0 \\ \text{also } \sqrt{-\lambda} &= \pi n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

Daher sind die Eigenfunktionen in diesem Fall Funktionen der Art $\sin(\pi n x)$.
Für $\lambda = 0$ kann $\alpha \cdot 1 + \beta x$ die Bedingung $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi'(1) = 0$ nur für $\varphi(x) = 1$ erfüllen und die zweite Bedingung $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 0$ kann gar nicht erfüllt werden. Deswegen ergeben sich die Basen

$$\begin{array}{lll} 1, \sqrt{2}\cos(\pi n x) & \text{für die Randbedingungen } \varphi'(0) = 0 \text{ und } \varphi'(1) = 0 & \text{(gerader Fall)}, \\ \sqrt{2}\sin(\pi n x) & \text{für die Randbedingungen } \varphi(0) = 0 \text{ und } \varphi(1) = 0 & \text{(ungerader Fall)}, \end{array}$$

jeweils für $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Unsere Funktionen genügen einer weiteren Bedingung:

$$\begin{aligned} f_g(x) &= \tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ f_g(x) &= f_g(-x) = f_g(1-x) \\ f_u(x) &= -f_u(-x) = -f_u(1-x). \end{aligned}$$

Der Unterraum der Lösungen, die diese Bedingung erfüllen, sind genau die, für die n gerade ist. Wenn man alles zusammenfasst, erfährt man, dass die Funktionen

$$1, \ \sqrt{2}\cos(2\pi n x), \ \sqrt{2}\sin(2\pi n x)$$

eine orthonormale Basis von den periodischen Funktionen bilden. Es folgt: für f periodisch, $f \in L^2([0,1])$ gilt

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(2\pi n x) + a_n^*\sin(2\pi n x)\Big),$$

wobei die Konvergenz im Sinne von $L^2([0,1])$ ist. Bis jetzt wissen wir aber nicht, ob die Reihe überhaupt für einen Wert von x punktweise konvergiert.

Satz 8.1. *Sei f periodisch; sei $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$ (p-fach stetig differenzierbar). Dann gelten für $n > 0$*

$$|a_n| \le \frac{2}{(2\pi n)^p}\int_0^1 |f^{(p)}(x)|dx \text{ und } |a_n^*| \le \frac{2}{(2\pi n)^p}\int_0^1 |f^{(p)}(x)|dx.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)dx \\ &= 2\left[\frac{f(x)\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{f'(x)\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\,dx \\ &= -2\int_0^1 \frac{f'(x)\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\,dx \\ &\ \vdots \\ &= 2\begin{cases} -\int_0^1 \frac{f^{(p)}(x)\cos(2\pi n x)}{(2\pi n)^p}\,dx & \text{für } p \text{ gerade}, \\ +\int_0^1 \frac{f^{(p)}(x)\sin(2\pi n x)}{(2\pi n)^p}\,dx & \text{für } p \text{ ungerade}. \end{cases} \end{aligned}$$

Es folgt

$$|a_n| \leq \frac{2}{(2\pi n)^p} \int_0^1 |f^{(p)}(x)| \cdot 1 dx$$

wie behauptet. Auch gilt:

$$|a_n^*| \leq \frac{2}{(2\pi n)^p} \int_0^1 |f^{(p)}(x)| \cdot 1 dx.$$

Q.E.D.

Korollar 8.2. *Sei f periodisch, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Dann konvergiert*

$$a_0 + \sum_n \Big(a_n \cos(2\pi n x) + a_n^* \sin(2\pi n x) \Big)$$

absolut und gleichmäßig gegen f.

Beweis. Dass die Reihe konvergiert folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$. Die Konvergenz ist gleichmäßig nach dem Weierstraßschen Majoranten-Kriterium. Die Summe ist deswegen stetig und daher beschränkt. Wenn wir $S_n(f, x)$ für partielle Summen schreiben und $F(x)$ für die Grenzfunktion, dann folgt, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein N existiert, sodass für alle $n > N$ gilt $|S_n(f, x) - F(x)| \leq \varepsilon$. Folglich gilt

$$\int_0^1 |S_n(f, x) - F(x)| dx \leq \varepsilon.$$

Also gilt $S_n(f, \cdot) \to F$ auch in $L^2([0, 1])$. Nach unseren Bemerkungen gilt ebenfalls $S_n(f, \cdot) \to f$ in $L^2([0, 1])$. Es folgt, dass $f = F$ (fü). Da jedoch beide stetig sind, folgt nun $f = F$ überall. Q.E.D.

Wir werden jetzt den Satz von Abel aus Diff I brauchen: Sei (a_n) eine Folge, sodass die Reihe $\sum a_n$ konvergiert. Sei $s = \sum_{n=1}^\infty a_n$. Dann gilt

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} \sum_{n=1}^\infty a_n r^n = s.$$

Satz 8.3 (Poisson)**.** *Sei f eine stetige, periodische Funktion. Dann gilt*

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} a_0 + \sum_{n=1}^\infty r^n (a_n \cos(2\pi n x) + a_n^* \sin(2\pi n x)) = f(x).$$

Der Beweis von diesem Satz demonstriert eine wichtige Technik.

Beweis. Wir untersuchen zunächst die linke Seite:

$$\begin{aligned}
&a_0 + \sum_{n=1}^\infty r^n (a_n \cos(2\pi n x) + a_n^* \sin(2\pi n x)) \\
&= \int_0^1 f(s) ds + 2 \sum_{n=1}^\infty r^n \int_0^1 f(s) \left(\cos(2\pi n s) \cos(2\pi n x) + \sin(2\pi n s) \sin(2\pi n x) \right) ds \\
&= \int_0^1 f(s) ds + 2 \sum_{n=1}^\infty r^n \int_0^1 f(s) \cos(2\pi n (s - x)) ds.
\end{aligned}$$

Für $r < 1$ konvergiert $\sum r^n \cos(2\pi n y)$ gleichmäßig in y. Wir können Summe und Integral vertauschen:

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 f(s)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(2\pi n(x-s))\right) ds \\
&= \int_0^1 f(s)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{2\pi i n(x-s)} + e^{-\pi i n(x-s)})\right) ds \\
&= \int_0^1 f(s)\left(1 + \frac{r e^{2\pi i(x-s)}}{1 - r e^{2\pi i(x-s)}} + \frac{r e^{-2\pi i(x-s)}}{1 - r e^{-2\pi i(x-s)}}\right) ds \\
&= \int_0^1 f(s) \frac{1-r^2}{(1 - r e^{2\pi i(x-s)})(1 - r e^{-2\pi i(x-s)})}\, ds \\
&= \int_0^1 f(s) P(r, x-s) ds
\end{aligned}$$

$$\text{mit } P(r,y) = \frac{1-r^2}{1 - 2r\cos(2\pi y) + r^2}. \qquad \textbf{(Poisson-Kern)}$$

Es gilt zuerst:

$$\int_0^1 P(r,x)dx = 1,$$

weil

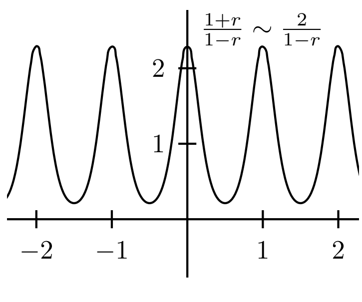
$$P(r,x) = 1 + r \cdot 2\cos(2\pi x) + r^2 \cos(4\pi x) + \dots$$

eine Fourier-Reihe für $P(r,x)$ in x darstellt. Sei $|y| > \varepsilon$, $|y| \leq \frac{1}{2}$. Dann gilt für $n > \cos(2\pi\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
P(r,x) &\leq \frac{1-r^2}{1 - 2r\cos(2\pi\varepsilon) + r^2} \\
&< \frac{1-r^2}{1 + 2\cos(2\pi\varepsilon) + 1} = \frac{1-r^2}{(2\sin(\pi\varepsilon))^2}.
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Mit anderen Worten: In diesem Bereich gilt $P(r,y) \to 0$ gleichmäßig. Zum Vergleich:

$$P(r,0) = \frac{1-r^2}{1 - 2r + r^2} = \frac{(1-r)(1+r)}{(1-r)^2} = \frac{1+r}{1-r}.$$



Wir schreiben

$$\int_0^1 P(r, x-y) f(y) dy \text{ als } \int_{|x-y| \leq \frac{1}{2}} P(r, x-y) f(y) dy$$
$$= \int_{|z| \leq \frac{1}{2}} P(r,z) f(x-z) dz.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $M = \operatorname{Sup}|f|$. Wir wählen δ so, dass für x_1, x_2 mit $|x_1 - x_2| \leq \delta$ gilt $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Nun betrachten wir

$$\begin{aligned}
&\int_{|z|\leq \frac{1}{2}} P(r,z)(f(x-z) - f(x))dz + \int_{|z|\leq \frac{1}{2}} P(r,z)f(x)dz \\
&= \int_{|z|\leq \frac{1}{2}} P(r,z)(f(x-z) - f(x))dz + f(x).
\end{aligned}$$

Wir schreiben dieses Integral als

$$\int_{|z|\leq\delta} P(r,z)(f(x-z) - f(x))dz + \int_{\delta\leq|z|\leq\frac{1}{2}} P(r,z)(f(x-z) - f(x))dz.$$

Für das erste Integral gilt

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|z|\leq\delta} P(r,z)(f(x-z) - f(x))dz\right| &\leq \int_{|z|\leq\delta} P(r,z)|f(x-z) - f(x)|dz \\
&\leq \int_{|z|\leq\delta} P(r,z)\cdot\varepsilon\ dz \\
&\leq \varepsilon \int_{|z|\leq\frac{1}{2}} P(r,z)dz \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Für das andere gilt

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\delta\leq|z|\leq\frac{1}{2}} P(r,z)(f(x-z) - f(x))dz\right| &\leq 2M \int_{\delta\leq|z|\leq\frac{1}{2}} P(r,z)dz \\
&\leq 2M \frac{1-r^2}{(2\sin(\pi\delta))^2}
\end{aligned}$$

für $r > \cos(2\pi\delta)$. Es folgt

$$\limsup_{r\to 1}\left|\int_0^1 P(r,x-y)f(y)dy - f(x)\right| \leq \varepsilon \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

D.h.

$$\lim_{r\to 1}\int_0^1 P(r,x-y)f(y)dy$$

existiert und ist $f(x)$. Q.E.D.

Wichtig:

- $P \geq 0$,
- $\int_0^1 P(r,y)dy = 1$,
- $\int_{\delta<|y|\leq\frac{1}{2}} P(r,y)dy \to 0$ für $r \to 1$ für jedes $\delta > 0$.

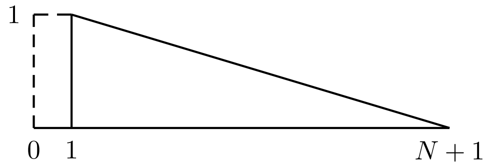
Es handelt sich dabei um eine Approximation zur Identität.
Seien die partiellen Summen durch

$$S_n(f,x) = a_0 + \sum_{m\leq n}(a_n\cos(2\pi nx) + a_n^*\sin(2\pi nx))$$

definiert. Dann haben wir

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\left(S_1(f,x)+S_2(f,x)+\cdots+S_N(f,x)\right)\\
&=\frac{1}{N}\sum_{1\le n\le N} S_n(f,x)\\
&=\frac{1}{N}\sum_{1\le n\le N}\left(a_0+\sum_{1\le m\le n}(a_m\cos(2\pi mx)+a_m^*\sin(2\pi mx))\right)\\
&=a_0+\frac{1}{N}\sum_{1\le m\le n\le N}(a_m\cos(2\pi nx)+a_m^*\sin(2\pi mx))\\
&=a_0+\frac{1}{N}\sum_{1\le m\le N}\big((N-m+1)(a_m\cos(2\pi mx)+a_m^*\sin(2\pi mx))\big)\\
&=a_0+\underbrace{\frac{N+1}{N}}_{\to 1}\sum_{1\le m\le N}\left(\left(1-\frac{m}{N+1}\right)(a_m\cos(2\pi mx)+a_m^*\sin(2\pi mx))\right).
\end{aligned}
$$

Dieses ist ein ähnlicher Ausdruck zu der Definition der $S_n(f,x)$. Hier werden die Glieder mit einem „Glättungsfaktor“ multipliziert.



Es ist zu erwarten, dass für $N\to\infty$ gilt

$$\frac{1}{N}(S_1(f,x)+S_2(f,x)+\cdots+S_N(f,x))\to a_0+\sum_{m\ge 1}(a_m\cos(2\pi mx)+a_m^*\sin(2\pi mx)).$$

Aufgabe (Diff I): Gilt $s_j\to s$, dann folgt $\frac{1}{N}(s_1+s_2+\cdots+s_N)\to s$. Sollte $\sum(a_m\cos(2\pi mx)+a_m^*\sin(2\pi mx))$ konvergieren, dann ist der Limes gleich

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}(S_1(f,x)+S_2(f,x)+\cdots+S_N(f,x)).$$

Satz 8.4 (Fejér). *Sei f periodisch und beschränkt. Sei f stetig bei x. Dann gilt*

$$\frac{1}{N}(S_1(f,x)+S_2(f,x)+\cdots+S_N(f,x))\to f(x).$$

Bemerkung: Dieses „Summationsverfahren“ wird nach (M.) Riesz benannt.

Beweis. Die linke Seite ist

$$
\begin{aligned}
&a_0 + \frac{N+1}{N} \sum_{1 \le m \le N} \left(\left(1 - \frac{m}{N+1}\right) (a_m \cos(2\pi m x) + a_m^* \sin(2\pi m x)) \right) \\
&= a_0 + \frac{N+1}{N} \sum_{1 \le m \le N} \left(1 - \frac{m}{N+1}\right) 2 \int_0^1 f(y) \cos(2\pi m(x-y)) dy \\
&= \frac{N+1}{N} \left\{ a_0 + \sum_{1 \le m \le N} \left(1 - \frac{m}{N+1}\right) 2 \int_0^1 \cos(2\pi m(x-y)) f(y) dy \right\} - \frac{1}{N}\ a_0 \\
&= \frac{N+1}{N} \left\{ \int_0^1 \left(1 + \sum_{1 \le m \le N+1} \left(1 - \frac{m}{N+1}\right) 2\cos(2\pi m(x-y)) \right) f(y) dy \right\} - \frac{1}{N}\ a_0 \\
&= \frac{N+1}{N} \left\{ \int_0^1 F_{N+1}(x-y) f(y) dy \right\} - \frac{1}{N}\ a_0.
\end{aligned}
$$

$F_{N+1}(x-y)$ wird Fejér-Kern genannt. Wir wissen, dass

$$(x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n)(1-x)^2 = x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}$$

gilt. Sei außerdem $z = x - y$.

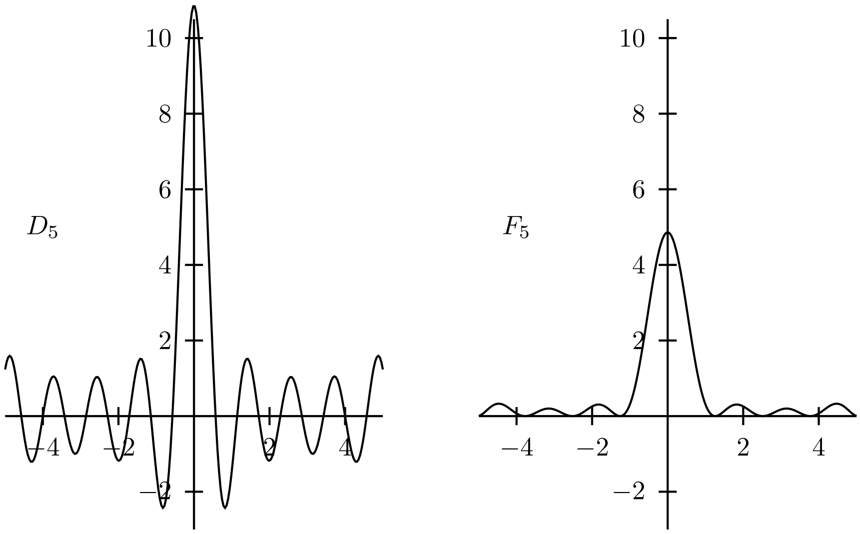
$$
\begin{aligned}
&1 + \sum_{1 \le m \le N+1} \left(1 - \frac{m}{N+1}\right) (e^{2\pi i m z} + e^{-2\pi i m z}) \\
&= 1 + \frac{e^{2\pi i(N+2)z} - 1}{e^{2\pi i z} - 1} + kK - \frac{1}{N+1} \left\{ \frac{e^{2\pi i z} - (N+2)e^{2\pi i z(N+2)z} + (N+1)e^{2\pi i(N+3)z}}{(1 - e^{2\pi i z})^2} + kK \right\} \\
&= 1 + \frac{e^{-2\pi i(N+\frac{3}{2})z} - e^{-\pi i z} - e^{2\pi i(N+\frac{3}{2})z} + e^{\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} \\
&- \frac{1}{N+1} \left\{ \frac{1 + 1 - (N+2)e^{2\pi i(N+1)z} + e^{-2\pi i(N+1)z} + (N+1)\left(e^{2\pi i(N+2)z} + e^{-2\pi i(N+2)z}\right)}{(e^{\pi i z} - e^{-\pi i z})^2} \right\} \\
&= \frac{1}{(N+1)(e^{\pi i z} - e^{-\pi i z})^2} \Big\{ (N+1)(\cancel{e^{2\pi i z}} + \cancel{e^{-2\pi i z}} - \cancel{2}) \\
&+ (N+1)(\cancel{e^{2\pi i(N+2)z}} - e^{2\pi i(N+1)z} + \cancel{e^{-2\pi i(N+1)z}} - \cancel{e^{-2\pi i(N+1)z}} - \cancel{e^{2\pi i z}} - \cancel{e^{-2\pi i z}} + \cancel{2}) \\
&-2 + \cancel{(N+2)}(e^{2\pi i(N+1)z} + e^{-2\pi i(N+1)z}) - (N+1)e^{2\pi i(N+2)z} - \cancel{(N+1)e^{-2\pi i(N+2)z}} \Big\} \\
&= \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{-4(\sin(\pi z))^2} \cdot \underbrace{\left\{ -2 + \left(e^{2\pi i(N+1)z} + e^{-2\pi(N+1)z} \right) \right\}}_{=-(4\sin(\pi(N+1)z))^2} \\
&= \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\pi(N+1)z)}{\sin(\pi z)} \right)^2.
\end{aligned}
$$

Für $|z| \ge \delta, |z| \le \frac{1}{2}$ gilt wieder

$$|\sin(\pi z)| \ge \sin(\pi\delta).$$

Für $|z| \le \frac{1}{2}$, $|z| \ge \delta$ gilt $|F_{N+1}(z)| \le \frac{1}{N+1} \frac{1}{(\sin(\pi\delta))^2}$. Durch die Definition gilt

$$\int_0^1 F_N(\zeta) d\zeta = 1$$



Auch $F_{N+1}(\zeta) \geq 0$. Jetzt funktioniert das Argument genau im Falle des Poisson-Kerns. Q.E.D.

Warum funktioniert dieses für $S_n(f,x)$ nicht? Hier haben wir

$$\begin{aligned} S_n(f,x) &= a_0 + a_1\cos(2\pi x) + a_1^*\sin(2\pi x) + \cdots + a_n\cos(2\pi nx) + a_n^*\sin(2\pi nx) \\ &= \int D_n(x-y)f(y)dy. \end{aligned}$$

$D_n(z) = 1 + 2\cos(2\pi z) + 2\cos(4\pi z) + \cdots + 2\cos(2\pi nz)$ heißt **Dirichlet-Kern** und ist *nicht* positiv.

Satz 8.5. *Sei f stetig bei x und beschränkt. Falls*

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos(2\pi mx) + a_m^*\sin(2\pi mx))$$

konvergiert, dann ist die Summe $f(x)$.

Beweis. Folgt jetzt aus Satz 8.4 und der Diff-I Aufgabe - oder aus Satz 8.3 und dem Satz von Abel. Q.E.D.

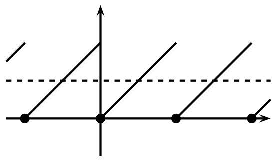
Korollar 8.6. *Ist f zweimal stetig differenzierbar und periodisch, dann gilt*

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos(2\pi mx) + a_m^*\sin(2\pi mx)) = f(x).$$

Beweis. Nach Satz 8.1 gilt $a_m = O(\frac{1}{m^2})$, $a_m^* = O(\frac{1}{m^2})$, weshalb die Reihe (gleichmäßig) konvergiert. Q.E.D.

Bemerkung: Die Sätze sind lokal. Wir werden später erfahren, dass die Konvergenz von der Fourierreihe bei x nur von f in einer unmittelbaren Umgebung von x abhängt (Riemanns Lokalisierungssatz).

Beispiel: Wir betrachten die periodische Funktion f mit $f(x) = x$ für $0 \leq x < 1$.



$f(x) - \frac{1}{2}$ ist ungerade. Deswegen wird $f(x) - \frac{1}{2}$ durch eine Fourier-Reihe dargestellt, in der nur der Sinus vorkommt. Wir rechnen die Fourier-Koeffizienten aus:

$$\begin{aligned} a_j^* &= 2\int_0^1 (x - \tfrac{1}{2})\sin(2\pi jx)dx = \left[-\frac{2(x-\frac{1}{2})}{2\pi j}\cos(2\pi jx)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2\cos(2\pi jx)}{2\pi j}\,dx \\ &= -\frac{2}{2\pi j}. \end{aligned}$$

D.h. die Fourier-Reihe soll

$$x - \frac{1}{2} \overset{?}{=} \frac{\sin(2\pi jx)}{\pi j}$$

sein. Diese Reihe konvergiert. Für $x = 0$ sind alle Glieder gleich Null, daher hat die Reihe den Wert Null. Für $x \neq 0$, $0 < x < 1$ benutzen wir das Kriterium von Abel-Leibniz: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ mit $a_n \searrow 0$ monoton und $\sum_{n=1}^{M} b_n$ beschränkt konvergiert. Sei $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \sin(2\pi nx)$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{M} b_n &= \sum_{n=1}^{M} \frac{e^{2\pi inx} - e^{-2\pi inx}}{2i} \\ &= \tfrac{1}{2i}\left\{\frac{e^{2\pi i(M+1)x} - e^{2\pi ix}}{e^{2\pi ix} - 1} - \frac{e^{-2\pi i(M+1)x} - e^{2\pi ix}}{e^{-2\pi ix} - 1}\right\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

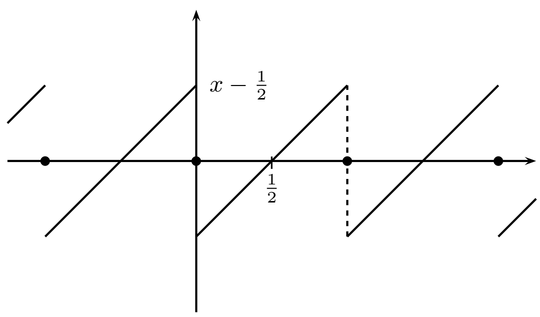
$$\left|\sum_{n=1}^{M} b_n\right| \leq \tfrac{1}{2}\frac{4}{|e^{2\pi ix} - 1|} = \frac{2}{|e^{\pi ix} - e^{-\pi ix}|} = \frac{1}{|\sin(\pi x)|}$$

beschränkt ist. Für $x : 0 < x < 1$ ist f stetig bei x. Unsere Ergebnisse liefern für $0 < x < 1$:

$$x - \frac{1}{2} = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi jx)}{\pi j}.$$

Für $x = 0$ erhalten wir

$$-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi jx)}{\pi j} = 0.$$



Wir werden später zeigen, dass die Konvergenz weit davon entfernt ist, gleichmäßig zu sein (Gibbs Phänomen); dafür werden wir folgende Darstellung benutzen:

$$\begin{aligned} S_n(f,x) &= a_0 + \sum_{j\leq n}(a_j\cos(2\pi jx) + a_j^*\sin(2\pi jx)) \\ &= \int_0^1 f(y)dy + \sum_{j\leq n} 2\int_0^1 f(y)\left(\cos(2\pi jy)\cos(2\pi jx) + \sin(2\pi jx)\sin(2\pi jx)\right)dy \\ &= \int_0^1 f(y)D_n(y-x)dy, \end{aligned}$$

wobei

$$D_n(z) = 1 + 2\sum_{j\leq n}\cos(2\pi jz) = \frac{\sin(2\pi(2n+1)x)}{\sin(\pi x)}.$$

Satz 8.7 (Riemann-Lebesgue-Lemma)**.** *Es gilt für f integierbar mit $n\to\infty$*

$$\int_0^1 f(x)e^{2\pi inx}dx = o(1).$$

Sei f eine rellwertige Funktion auf $[a,b]$. Dann heißt f „von oben beschränkter Variation", falls es ein $C>0$ gibt, sodass für alle Zerlegungen
$a=\xi_0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n=b$ gilt

$$\sum_{j=1}^n |f(\xi_j)-f(\xi_{j-1})| < C.$$

Wir schreiben

$$V_a^b(f) = \operatorname*{Sup}_{\text{Zerlegungen}} \sum_{j=1}^n |f(\xi_j)-f(\xi_{j-1})|.$$

Eine Klasse von Funktionen mit beschränkter Variation sind die monotonen Funktionen - hier $V_a^b(f)=|f(b)-f(a)|$. Die Funktionen beschränkter Variation auf $[a,b]$ bilden einen Vektorraum, also gelten

$$\begin{aligned} V_a^b(f_1+f_2) &\leq V_a^b(f_1)+V_a^b(f_2) \\ V_a^b(\lambda f_1) &= |\lambda|V_a^b(f_1). \end{aligned}$$

Ist $f\in\mathcal{C}^1([a,b])$, dann ist f von beschränkter Variation, denn es gilt nach dem Mittelwertsatz

$$V_a^b(f) \leq \int_a^b |f'(x)|dx.$$

Jede Funktion von beschränkter Variation ist die Differenz zweier monotoner Funktionen. Man weist nach, dass

$$f(x) = V_a^x(f) + (f(x)-V_a^x(f)) = V_a^x(f) - (V_a^x(f)-f(x))$$

gilt. $V_a^x(f)$ ist offensichtlich monoton wachsend, denn für $x<y$ gelten

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &\leq V_x^y(f), \\ -f(x)+f(y) &\leq V_x^y(f), \\ f(y)-V_x^y(f) &\leq f(x), \\ f(y)-V_x^y(f)-V_a^x &\leq f(x)-V_a^x(f), \\ f(y)-V_a^y(f) &\leq f(x)-V_a^x(f). \\ \Rightarrow V_a^x(f)-f(x) &\leq V_a^y(f)-f(y). \end{aligned}$$

Es gibt ein zweites Riemann-Lebesgue-Lemma, nämlich: Ist f periodisch und von beschränkter Variation, dann gilt:

$$\int_0^1 f(x)e^{2\pi inx}dx = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Sei f von beschränkter Variation. Sei x fest. Sei $f = f_1 - f_2$ mit f_1, f_2 monoton wachsend. Wir schreiben

$$\tilde{f}(x) = \tfrac{1}{2}(f_1(x-) + f_1(x+)) - \tfrac{1}{2}(f_2(x-) + f_2(x+)),$$

$$f_j(x-) = \lim_{\substack{y\to x\\ y<x}} f_j(y)\ ,\ f_j(x+) = \lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} f_j(y).$$

2. **Satz von Dirichlet** (Satz 8.10 unten): Für f von beschränkter Variation gilt

$$S_n(f,x) \to \tilde{f}(x).$$

Beweis. (von Satz 8.7) Weil f integierbar ist, existiert eine Treppenfunktion $\sum a_j\chi_{E_j}$ mit $\int |f - \sum a_j\chi_{E_j}|dm \le \frac{\varepsilon}{3}$ mit E_j messbar. Weil die $E_j's$ messbar sind, haben sie eine Überdeckung durch Intervalle, die ihr Maß beliebig annähert. Es gibt deswegen offene Intervalle $I_1,\dots,I_k$ und $b_n,\dots,b_K$, so dass $\int |f - \sum_{j=1}^K b_j I_j|dm < \frac{2\varepsilon}{3}$.

$$\begin{aligned}\int_I e^{2\pi inx}dx &= \int_\alpha^\beta e^{2\pi inx}dx \quad \text{für } I = [\alpha,\beta]\\ &= \frac{e^{2\pi in\beta} - e^{2\pi in\alpha}}{2\pi in}.\end{aligned}$$

Für $n > \frac{1}{\eta}$ gilt

$$\left|\int_I e^{2\pi inx}dx\right| \le \frac{\eta}{\pi}.$$

Für n groß, $n > N$ gilt

$$\int_0^1 e^{2\pi inx}\sum_{j=1}^K b_j\chi_{I_j}(x)dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zusammen ergibt sich

$$\left|\int_0^1 e^{2\pi inx}f(x)dx\right| < \varepsilon$$

für $n > N$. Q.E.D.

Satz 8.8 (Riemanns Lokalisierungssatz)**.** *Seien f_1, f_2 integrierbare Funktionen auf $[0,1]$. Sei $x \in]0,1[$. Wir nehmen an, dass es ein $\eta > 0$ gibt, so dass*

$$f_1(y) = f_2(y) \text{ für } y : |y-x| < \eta.$$

Dann konvergiert $S_n(f_1,x)$ genau dann gegen $f(x)$, wenn $S_n(f_2,x)$ gegen $f_2(x)$ konvergiert.

Beweis. Seien

$$\begin{aligned}S_n(f_1,x) &= \int_0^1 D_n(y-x)f_1(y)dy = \int_{|y|\le\frac{1}{2}} D_n(y)f_1(x-y)dy,\\ S_n(f_2,x) &= \int_0^1 D_n(y-x)f_2(y)dy = \int_{|y|\le\frac{1}{2}} D_n(y)f_2(x-y)dy.\end{aligned}$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
S_n(f_2,x)-S_n(f_1,x) &= \int_{|y|\le\frac{1}{2}} D_n(y)(f_1(x-y)-f_2(x-y))dy \\
&= \int_{\eta\le|y|\le\frac{1}{2}} D_n(y)(f_1(x-y)-f_2(x,y))dy \\
&= \int_{|\eta|\le|y|\le\frac{1}{2}} \frac{\sin((2n+1)\pi y)}{\sin(\pi y)}(f_1(x-y)-f_2(x-y))dy \\
&= \int_{|\eta|\le|y|\le\frac{1}{2}} \sin((2n+1)\pi y)\left\{\frac{f_1(x-y)-f_2(x-y)}{\sin(\pi y)}\right\}dy \quad \to 0
\end{aligned}
$$

wegen des Riemann-Lebegueschen Lemmas. Q.E.D.

Gibbs Phänomen

Die Funktion f mit

$$f(x)=x-\tfrac{1}{2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}, \qquad (0<x<1), \qquad f(x+1)=f(x)$$

ist an den Stellen $k\in\mathbb{Z}$ unstetig. Wir betrachten

$$S_N(x)=-\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}.$$

Die Ableitung ist

$$-2\sum_{n=1}^{N}\cos(2\pi nx).$$

D.h. die Ableitung von $x-S_N(x)$ ist

$$1+2\sum_{n=1}^{N}\cos(2\pi nx)=D_N(x) \qquad (Dirichletscher Kern).$$

D.h. diese ist

$$\frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}.$$

Die Maxima und Minima sind bei $x=\frac{j}{2N+1}$, $(j=1,2,\dots,2N)$. Wir untersuchen zunächst $h_N=\frac{1}{2N+1}$.

$$
\begin{aligned}
h_N-S_N(h_N) &= \int_0^{h_N} D_N(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2N+1}} \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\sin(\pi x/(2N+1))(2N+1)}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)/(\pi x)}{(\sin(\pi x/(2N+1))(2N+1))/(\pi x)}\,dx.
\end{aligned}
$$

Es gilt:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2N+1}\right)(2N+1)}{\pi x}\to 1 \text{ für } N\to\infty.$$

$$1 - \frac{(\pi x)^2}{3!(2N+1)^2} + \frac{(\pi x)^4}{5!(2N+1)^4} - \cdots.$$

Es folgt:

$$h_N - S_N(h_N) \to \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\, dx.$$

Man kann $\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\, dx$ numerisch berechnen der Wert ist deutlich größer als $\frac{1}{2}$.

$$h_N - \tfrac{1}{2} - S_N(h_N) > c > 0 \text{ für alle } N > N_0 \qquad \left(c < \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\, dx\right)$$

Satz 8.9 (Bonnet – Zweiter Mittelwertsatz)**.** *Sei f stetig auf $[a,b]$. Sei φ monoton fallend und positiv auf $[a,b]$. Dann existiert ein $c : a < c < b$ mit*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int_a^c f(x)dx \cdot \varphi(a).$$

Beweis. (Skizze) Sei g monoton steigend auf $[a,b]$. Dann gibt es für $x \in]a,b[$ die Werte

$$\begin{aligned} g(x-) &= \lim_{\substack{y\to x\\ y<x}} g(y) \text{ und} \\ g(x+) &= \lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} g(y). \end{aligned}$$

Mit diesen Werten gilt $g(x-) \le g(x) \le g(x+)$. Dann definieren wir mit $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$

$$\begin{aligned} \mu_g([\alpha,\beta]) &= g(\beta) - g(\alpha) \\ \mu_g(]\alpha,\beta]) &= g(\beta) - g(\alpha+) \\ \mu_g([\alpha,\beta[) &= g(\beta-) - g(\alpha) \\ \mu_g(]\alpha,\beta[) &= g(\beta-) - g(\alpha+). \end{aligned}$$

Man kann die Konstruktion des Lebesgueschen Maßes nachahmen – μ_g lässt sich zu einem Borel-Maß fortsetzen. Dann kann man die verschiedenen Eigenschaften von dem Integral analog beweisen. Man schreibt $\int_a^b f(x)dg(x)$ für dieses Integral. Insbesondere gilt für f stetig differenzierbar

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b.$$

Beispiele:
Mit $g(x) = x$ hat man normale partielle Integration, mit $g(x) = [x]$ Abelsche Summation.
Man nennt μ_g Lebesgue-Stieltjes Maß und das dazugehörige Integral Riemann-Stieltjes Integral.
Literaturtipps:

- E. Kamke: Das Lebesgue-Stieltjes Integral.
- H. Heuser: Analysis 2, §90. (Satz 90.2)

Zum Beweis des Satzes: Sei $g(x) = \varphi(a) - \varphi(x)$. Dann ist g monoton wachsend, $g(a) = 0$. Wir setzen

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi.$$

Dann gilt

$$\int_a^b F(x)dg(x) + \int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b = F(b)g(b)$$

D.h.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\varphi(x)dx &= \int_a^b F(x)dg(x) + \varphi(a)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx(\varphi(a)-\varphi(b)) \\ &= \int_a^b F(x)dg(x) + \varphi(b)\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

D.h.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\varphi(x)dx &\leq \operatorname{Sup} F(x)(\varphi(a)-\varphi(b)) + \varphi(b)F(b) \\ &\leq \operatorname{Sup} F(x)\varphi(a) \\ \text{und} \quad \int_a^b f(x)\varphi(x)dx &\geq \operatorname{Inf} F(x)(\varphi(a)-\varphi(b)) + \varphi(b)F(b) \\ &\geq \varphi(a)\operatorname{Inf} F(x) + \varphi(b)(F(b) - \operatorname{Inf} F(x)) \\ &\geq \varphi \operatorname{Inf} F(x).\end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert c mit

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) = F(c)\varphi(a) = \int_a^b f(x)dx\varphi(a).$$

Q.E.D.

Satz 8.10 (Dirichlet). *Sei f monoton in einer Umgebung von x; auch sei f periodisch mit Periodenlänge 1 und integrierbar. Dann gilt*

$$S_n(f,x) \to \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

Beweis. Wir werden den Satz für $x = 0$ beweisen – der allgemeine Fall folgt durch Translation. Sei $f_1(x) = f(x)$ auf $]0,\varepsilon[$, $f|[0,\varepsilon[$ o.B.d.A. monoton wachsend; $f_1(0) = f(0+)$. Dann ist f_1 stetig bei 0. Wir zeigen

$$\int_0^\varepsilon D_N(x)f_1(x)dx \to \tfrac{1}{2}f_1(0).$$

Die allgemeine Aussage folgt, wenn man das entsprechende Ergebnis in $x < 0$ hinzufügt und auch den Lokalisierungssatz von Riemann anwendet. Wir schreiben jetzt

$$\begin{aligned}\int_0^\varepsilon D_N(x)f_1(x)dx &= \int_0^\varepsilon \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}f_1(x)dx \\ &= \int_0^\varepsilon \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\pi x}\frac{\pi x}{\sin(\pi x)}f_1(x)dx.\end{aligned}$$

Dann bemerken wir, dass $\frac{\pi x}{\sin(\pi x)}$ auch monoton steigend ist. Es folgt: $\frac{f_1(x)\pi x}{\sin(\pi x)} \geq f_1(0)$. Dann ist für $C \in \mathbb{R}$ die Funktion $C + f_1(0) - \frac{f_1(x)\pi x}{\sin(\pi x)}$ monoton fallend. Für geeignetes C (z.B. $C = \frac{f_1(\varepsilon)\pi\varepsilon}{\sin(\pi x)} - f_1(0)$) ist diese Funktion positiv. Dann können wir den Satz von Bonnet anwenden. Wir bekommen:

$$\int_0^\varepsilon \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\pi x}\left(C + f_1(0) - \frac{f_1(x)\pi x}{\sin(\pi x)}\right)dx = C\int_0^c \frac{\sin((2N+1)x)}{\pi x}dx \text{ mit } 0 < c < \varepsilon$$

$$\int_0^\varepsilon \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\pi x}\frac{f_1(x)\pi x}{\sin(\pi x)}\,dx = f_1(0)\int_0^\varepsilon \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\pi x}\,dx - \int_c^\varepsilon \frac{\sin((2N+1)x)}{\pi x}\,dx\cdot C$$

$$\int_0^\varepsilon \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\pi x}\,dx = \int_0^{(2N+1)\varepsilon} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\,dx \to \int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\,dx \text{ für } N\to\infty$$

$$-C\int_c^\varepsilon \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\pi x}\,dx = -\left(\frac{f_1(\varepsilon)\pi\varepsilon}{\sin(\pi\varepsilon)} - f_1(0)\right)\int_c^\varepsilon \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\pi x}\,dx.$$

Die Tatsache, dass

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\varepsilon(2N+1)} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

konvergiert, bedeutet, dass

$$\left|\int_0^\varepsilon \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\pi x}\,dx\right| \le K$$

für alle c, ε, N und ein geeignetes K. Für $\varepsilon\to 0$ gelten $\frac{\pi\varepsilon}{\sin(\pi\varepsilon)}\to 1$, $f_1(\varepsilon)\to f_1(0)$. D.h. für $\eta>0$ können wir $\varepsilon_0>0$ finden, so dass für alle $\varepsilon<\varepsilon_0$ gilt:

$$\left|\frac{f_1(\varepsilon)\pi\varepsilon}{\sin(\pi\varepsilon)} - f_1(0)\right| < \eta.$$

Für $\eta>0$ haben wir für $\varepsilon<\varepsilon_0$

$$\left|\int_0^\varepsilon D_N(x)f_1(x)dx - \int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\,dx\cdot f_1(0)\right| < K\eta.$$

D.h.

$$\limsup_{N\to\infty}\int_0^\varepsilon D_N(x)f_1(x)dx \le f_1(0)\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\,dx + K\eta,$$
$$\liminf_{N\to\infty}\int_0^\varepsilon D_N(x)f_1(x)dx \ge f_1(0)\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\,dx + K\eta.$$

Nach dem Riemannschen Lokalisierungssatz ist der Limes (bzw. $\liminf$, $\limsup$) von $\int_0^\varepsilon D_N(x)f_1(x)dx$ von ε unabhängig. Es folgt

$$\int_0^\varepsilon D_N(x)f_1(x)dx \to \int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\,dx f_1(0).$$

Falls f zweimal stetig differenzierbar ist, gilt:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} D_N(x)f(x)dx = f(0).$$

Es folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Damit ist der Satz bewiesen. Q.E.D.

Wir haben folgendes Korollar mitbewiesen:

Korollar 8.11. *Es gilt*

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Satz 8.12. *Ist f integrierbar und in einer Umgebung von x von beschränkter Variation, dann gilt:*

$$S_N(f,x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\substack{y\to x\\ y<x}} f(y) + \lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} f(y)\right).$$

Beweis. Wir hatten schon gesehen, dass jede Funktion von beschränkter Variation eine Differenz zweier monoton wachsender Funktionen ist. Deswegen existieren die Grenzwerte. Es gilt nach dem Satz von Dirichlet, dass $S_N(f,x)$ gegen diesen Grenzwert konvergiert. Q.E.D.

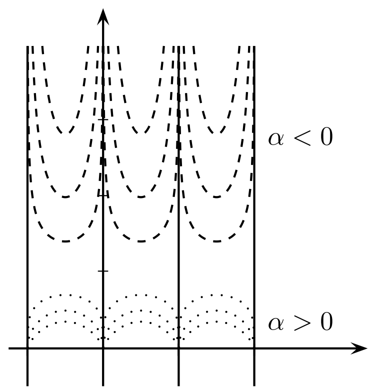
Korollar 8.13. *Ist f integrierbar und differenzierbar in einer Umgebung von x, dann gilt*

$$S_N(f,x) \to f(x).$$

Wir haben das Beispiel

$$x - [x] - \tfrac{1}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{\pi n}.$$

schon untersucht. Wir können eine breitere Klasse von verwandten Funktionen untersuchen, die für die allgemeine Theorie lehrreich ist. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$.



Wir betrachten $f(x) = x^\alpha(1-x)^\alpha$ für $0 < x < 1$, $f(x)$ periodisch. Für $\alpha > -1$ liegt f in $L^1([0,1])$. Die Fourier-Koeffizienten sind

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\alpha \cos(2\pi n x)dx \\ &= 2\frac{1}{n^{\alpha+1}}\int_0^n x^\alpha\left(1-\frac{x}{n}\right)^\alpha \cos(2\pi x)dx. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass

$$\int_0^n x^\alpha\left(1-\frac{x}{n}\right)^\alpha \cos(2\pi x)dx \to \int_0^\infty x^\alpha \cos(2\pi x)dx,$$

sodass

$$a_n \sim \frac{C}{n^{\alpha+1}}$$

mit
$$C = 2\int_0^1 x^\alpha \cos(2\pi x)dx.$$
Für $\alpha : -1 < \alpha < 0$ existiert ebenfalls ein C, sodass
$$a_n \sim \frac{C}{n^{\alpha+1}}.$$
Wir haben $f \in L^p([0,1])$ für alle $p < \frac{1}{|\alpha|}$. Bei den Fourier-Koeffizienten gilt: $(a_n) \in \ell^q$ für alle $q > \frac{1}{\alpha+1}$,
$$\frac{1}{\frac{1}{|\alpha|}} + \frac{1}{\frac{1}{\alpha+1}} = 1.$$
Ganz grob: $f \in L^p$ ist teilweise äquivalent zu $(a_n) \in \ell^q$ mit
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Poisson Summationsformel

Sei f integrabel auf $\mathbb{R}$; sei
$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ixy}dx, \qquad \hat{f}(0) = \int_0^1 f(x)dx.$$
Dann gilt
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$
„für geeignete f“.
Sei f von kompaktem Träger auf $\mathbb{R}$ (d.h. es gibt $R > 0$: für $x : |x| \geq R$ gilt $f(x) = 0$). Sei f stetig und von beschränkter Variation. Dann gilt
$$\begin{aligned}\sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n) &= \sum_{|n|\leq N} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi inx}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{|n|\leq N} e^{-2\pi inx}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)D_N(x)dx \\ &= \int_{-R}^{+R} f(x)D_N(x)dx \\ &\to \sum_{m:|m|<R} f(m)\end{aligned}$$
nach dem Satz von Dirichlet, angewandt auf $\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} f(x)D_N(x)dx$

Es gilt
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m).$$
(Eigentlich braucht man nur, dass f in der Nähe von $m \in \mathbb{Z}$ stetig ist.)
Die anderen Ansätze waren:

- Auf periodischen Funktionen hatten wir den Faltungsoperator $f \mapsto \varphi * f$. Dann liefert die Entwicklung dieses Operators nach Eigenfunktionen die Poissonsche Summationsformel.
- Für φ „gut" betrachten wir

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi(x+m) = \sum a_n e^{2\pi i n x}, \qquad a_n = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Wie geht es weiter?

1) Wir wissen noch nicht, ob stetige periodische Funktionen in konvergenten Fourier-Reihen entwickelt werden können. (Können sie nicht!)

2) Dass eine trigonometrische Reihe konvergiert, heißt noch lange nicht, dass sie Fourier-Reihe einer Funktion ist. Wir betrachten

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{\ln(n)}.$$

Nach dem Kriterium von Abel-Leibniz konvergiert diese Reihe für alle x. Es gibt aber keine integrierbare Funktion f so, dass gilt

$$2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x) dx = \frac{1}{\ln(n)} \qquad (n > 1).$$

Eine derartige Reihe heißt eine „trigonometrische Reihe". Die Singularitäten können sehr kompliziert sein, in diesem Fall also das Verhalten in der Nähe der Sigularität $x = 0$ von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{\ln(n)}.$$

Dieses führt weiter in die Richtung von Fraktalen (exzeptionelle Mengen), ...

3) Seien $\sum |a_n|$, $\sum |a_n^*|$ konvergent. Können wir die Funktion $\sum(a_n \cos(2\pi n x) + a_n^* \sin(2\pi n x))$ charakterisieren? Schwierig: Wiener-Theorie, Verbindungen zur Brownschen Bewegung, ...

4) Die Theorie von Fourier-Reihen kann auf beliebige, lokal-kompakte abelsche Gruppen übertragen werden. Man betrachtet von G die Gruppenhomomorphismen $\chi : G \to \mathbb{C} : |\chi(g)| = 1$ (Charaktere). Die Gesamtheit aller Charaktere bilden eine neue lokal-kompakte abelsche Gruppe $\hat{G}$. Die Gruppen G und $\hat{G}$ sind „dual" — Pontriaginsche Dualität.

5) Was passiert mit nicht-abelschen Gruppen? Sei G kompakt — dann gibt es elegante Theorien (Weyl, 1930er-Jahre). Für nicht kompakte Gruppen: $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ kann man fragen: Gibt es $T : G \to \mathrm{Hom}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ Hilbert-Raum, $T(g)$ unitär? Man kann diese sogar klassifizieren: I.M. Gelfand, Naimark, Graev, Harish-Chandra. Die „Darstellungstheorie" solcher Gruppen ist eine der Erfolgsgeschichten der letzten 60 Jahre.

6) Sei G eine lokal kompakte Gruppe. Dann existiert ein Borel-Maß μ auf G, so dass

$$\begin{array}{rl} (A) > 0 & A \text{ offen} \\ \mu(K) < \infty & K \text{ kompakt} \\ \mu(g\cdot B) = \mu(B) & B \text{ Borel-Menge}, g \in G \end{array}$$

Dieses Maß ist bis auf eine Vielfachheit eindeutig und wird **Haar-Maß** genannt.

7) **Distributionen** — oder verallgemeinerte Funktionen. Man betrachtet $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ — Test-Funktionen auf $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ und von kompakten Träger. Nun betrachten wir den Dualraum $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $f \mapsto L(f)$. Man kann eine Topologie auf $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ definieren, aber es ist viel schwieriger als im Falle von Banach-Räumen. Sei $\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Diese Linearfunktion kann man als $\int \ell(x)f(x)dx$ schreiben. Beispiel: $L(f) = f(a)$, $\int \delta_a(x)f(x)dx$. Man kann die Ableitung definieren $\ell' : \int \ell'(x)f(x)dx := -\int \ell(x)f'(x)dx$, $\int_{\mathbb{R}} \delta'_a(x)f(x) = -f'(a)$. Man benutzt Distributionen um Differentialgleichungen zu lösen. Man zeigt, dass eine Gleichung eine Lösung als Distribution besitzt. Danach benutzt man „Regularitätssätze“ um zu zeigen, dass die Lösung tatsächlich eine richtige Funktion ist.

Stichwortverzeichnis