

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Tammo tom Dieck

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität

Vorläufige Version vom 13. Januar 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Mannigfaltigkeiten	5
1	Differenzierbare Strukturen	5
2	Sphären und projektive Räume	7
3	Graßmannsche Mannigfaltigkeiten	9
4	Zum Begriff der Mannigfaltigkeit	12
5	Tangentialraum und Differential	14
6	Derivationen und Tangentialraum	16
7	Untermannigfaltigkeiten	18
8	Beispiele	20
9	Mannigfaltigkeiten mit Rand	23
10	Verheftungen	26
11	Partition der Eins	27
12	Eindimensionale Mannigfaltigkeiten	30
2	Mannigfaltigkeiten II	33
1	Einbettungen	33
2	Tangentialbündel	36
3	Normalenbündel	38
4	Approximation	40
5	Transversalität	42
3	Vektorfelder und Flüsse	46
1	Vektorfelder und Flüsse	46
2	Differentialgleichungen zweiter Ordnung und Sprays	49
3	Die Exponentialabbildung eines Sprays	51
4	Normalenbündel und tubulare Umgebungen	52
4	Isotopien	55
1	Isotopien	55
2	Eigentliche Submersionen	60
5	Transformationsgruppen	63
1	Quotienten	63
2	Transformationsgruppen	66
3	Struktur der Bahnen	69
4	Scheibendarstellungen	70
5	Der Satz vom Hauptorbit	72
6	Bündel	76
1	Prinzipalbündel, Faserbündel	76

	2	Unterbündel. Quotientbündel	78
	3	Weiteres zu Vektorraumbündeln	80
	4	Bestimmung von Tangentialbündeln	86
	5	Orientierung	90
7		Bordismus	98
	1	Bordismus	98
	2	Der Satz von Pontrjagin und Thom	104
	3	Kohomologie von de Rham: Die höchste Dimension	109
	4	Der Abbildungsgrad	110
	5	Der Satz von Hopf	114
	6	Der Abbildungsgrad	115
	7	Der analytische Abbildungsgrad	120
8		Weiteres	127
	1	Seifertsche Faserungen	127
	2	Algebraische Topologie von Seifert-Faserungen	135
	3	Verheftungen	140
	4	Homotopiesphären	144
9		Morse-Theorie	147
	1	Morse-Funktionen	147
	2	Elementare Bordismen	152
		Literatur	154
		Index	162

1 Mannigfaltigkeiten

1 Differenzierbare Strukturen

Ein topologischer Raum X heißt n -dimensional *lokal euklidisch*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, die zu einer offenen Teilmenge V des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n homöomorph ist. Ein derartiger Homöomorphismus $h:U \rightarrow V$ ist eine *Karte* oder ein *lokales Koordinatensystem* von X um x mit *Kartengebiet* U und die Umkehrung $h^{-1}:V \rightarrow U$ eine *lokale Parametrisierung* von X um x . Ist $h(x) = 0$, so sagen wir, h und h^{-1} seien in x *zentriert*. Ein *Atlas* ist eine Menge von Karten, deren Kartengebiete X überdecken. Ist X n -dimensional lokal euklidisch, so schreiben wir $n = \dim X$ und nennen n die *Dimension* von X . Eine Mannigfaltigkeit wird hier mit einer Dimension definiert. Nach dem Satz von der Dimensionsinvarianz ist die Dimension aber durch den topologischen Raum bestimmt.

Eine n -dimensionale *Mannigfaltigkeit* (oder kürzer n -Mannigfaltigkeit) ist ein topologischer Raum, der n -dimensional lokal euklidisch ist, das Hausdorffsche Trennungaxiom erfüllt und eine abzählbare Basis für seine Topologie besitzt.

Zwei Karten (U_1, h_1, V_1) und (U_2, h_2, V_2) einer n -Mannigfaltigkeit unterscheiden sich um eine *Koordinatentransformation* (um einen *Kartenwechsel*)

$$h_2 h_1^{-1}: h_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow h_2(U_1 \cap U_2).$$

Die Kartenwechsel sind Homöomorphismen zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n .

Zusätzliche geometrische oder analytische Strukturen auf einer Mannigfaltigkeit werden dadurch definiert, daß die Kartenwechsel weiteren Bedingungen unterworfen werden. Das entscheidende Datum sind also nicht die Karten sondern die Koordinatentransformationen. Wir werden alsbald erläutern, daß man X gar nicht als topologischen Raum vorzugeben braucht; die Karten sind dann zunächst nur bijektive Abbildungen, aber die Kartenwechsel weiterhin Homöomorphismen. Eine Mannigfaltigkeit ohne weitere Struktur wird zur Betonung dieses Sachverhaltes auch *topologische Mannigfaltigkeit* genannt. Topologische Eigenschaften des zugrundeliegenden Raumes (etwa: kompakt, zusammenhängend) werden auch dem Wort «Mannigfaltigkeit» beigelegt.

Sind die Kartenwechsel $h_2 h_1^{-1}$ und $h_1 h_2^{-1}$ beide glatt (= unendlich oft differenzierbar = vom Typ C^∞), so heißen die Karten (U_1, h_1, V_1) und (U_2, h_2, V_2) *glatt verbunden*. Ein Atlas ist *glatt*, wenn je zwei seiner Karten glatt verbunden sind.

Ist \mathcal{A} ein glatter Atlas von M , so bildet die Gesamtheit der Karten von M , die mit allen Karten von \mathcal{A} glatt verbunden sind, einen glatten Atlas $D(\mathcal{A})$. Sind \mathcal{A} und \mathcal{B} glatte Atlanten für M , so ist $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ genau dann ein glatter Atlas, wenn $D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{B})$ ist. Der Atlas $D(\mathcal{A})$ ist der eindeutig bestimmte maximale glatte Atlas, der \mathcal{A} enthält.

Eine *differenzierbare* oder *glatte Struktur* auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist ein maximaler glatter Atlas \mathcal{D} auf M . Das Paar (M, \mathcal{D}) heißt

dann n -dimensionale *glatte Mannigfaltigkeit* und wird meist nur durch M bezeichnet. Die Karten aus \mathcal{D} heißen Karten der glatten Mannigfaltigkeit M . Der Begriff «maximaler Atlas» dient nur der Festlegung der Begriffe. Man verwendet meist einen Atlas \mathcal{A} mit weniger Karten, der dann einen maximalen Atlas $D(\mathcal{A})$ erzeugt.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist die Identität (U, id, U) eine Karte für U . Damit wird U zu einer n -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit. Obgleich es hier zunächst keine Koordinatentransformationen gibt, so wird man sich doch aus der Analysis daran erinnern, daß diese auch für offene Teilmengen euklidischer Räume eine große Rolle spielen, zum Beispiel in der Transformationsformel der Integrationstheorie.

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ offen. Die Gesamtheit der Karten von M , deren Kartengebiete in U liegen, bildet einen glatten Atlas für U . Mit dieser differenzierbaren Struktur versehen, heißt U *offene Untermannigfaltigkeit* von M .

Eine nulldimensionale Mannigfaltigkeit ist eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Punkten mit der diskreten Topologie. Eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit heißt *Fläche*. Eine kompakte Mannigfaltigkeit wird auch als *geschlossen* bezeichnet.

Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten heißt *glatt*, wenn f stetig ist und wenn für Karten (U, h, U') um x und (V, k, V') um $f(x)$ die Abbildung kfh^{-1} immer glatt ist. Wir nennen kfh^{-1} eine *Darstellung von f in lokalen Koordinaten*. (Natürlich ist kfh^{-1} nur auf der offenen Teilmenge $h(U \cap f^{-1}V)$ eines euklidischen Raumes definiert. Es empfiehlt, diese Daten nicht pedantisch zu notieren.) Mit $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow L$ ist auch gf glatt. Eine glatte Abbildung $M \rightarrow N$ ist ein *Diffeomorphismus*, wenn sie eine glatte Umkehrabbildung besitzt; und M und N heißen *diffeomorph*, wenn es einen Diffeomorphismus $M \rightarrow N$ gibt.

Sind M und N glatte Mannigfaltigkeiten, so definieren alle Karten der Form $(U \times V, f \times g, U' \times V')$ für Karten (U, f, U') von M und (V, g, V') von N eine glatte Struktur auf $M \times N$. Die damit definierte glatte Mannigfaltigkeit $M \times N$ ist das *Produkt* von M und N . Die Projektionen auf die Faktoren sind glatt. Die kanonischen Identifizierungen $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ sind Diffeomorphismen.

Wie schon erwähnt, dienen die Kartenwechsel dazu, Mannigfaltigkeiten mit weiteren Strukturen zu versehen. Wir haben uns hier der Einfachheit halber für glatte Kartenwechsel entschieden, weil diese für die geometrische Untersuchung ausreichen und keine schwerfällige Buchführung über die Differenzierbarkeitsordnung verlangen. Ein Atlas mit C^r -verbundenen Karten (r -mal stetig differenzierbar, $1 \leq r \leq \infty$) liefert eine C^r -Mannigfaltigkeit. Sind die Kartenwechsel reell-analytisch, so erhalten wir *reell-analytische* Mannigfaltigkeiten. Eine wesentlich andere Theorie entsteht bekanntlich, wenn die Kartenwechsel komplex differenzierbar (holomorph) sind. Wir sprechen dann von *komplexen* Mannigfaltigkeiten. Obgleich diese nicht unser Thema sind, so ist es doch manchmal bequem oder ratsam, die komplexe Struktur zu benutzen.

Eine besondere zusätzliche Struktur, die wir später noch ausführlich besprechen, ist die Orientierung. Zwei glatte Karten heißen *orientiert verbunden*, wenn die Jacobi-Matrix des Kartenwechsels überall positive Determinante hat. Ein Atlas heißt *orientierend*, wenn je zwei seiner Karten orientiert verbunden sind. Hat eine Mannigfaltigkeit einen orientierenden Atlas, so ist sie *orientierbar*. Eine *Orientierung* ist ein orientierender Atlas, der als solcher maximal ist; seine Karten heißen *positiv* bezüglich der Orientierung. Diese Definitionen sind allerdings nur für Mannigfaltigkeiten positiver Dimension sinnvoll. Eine Orientierung einer 0-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist einfach eine Funktion $\varepsilon: M \rightarrow \{\pm 1\}$. Mit der vorliegenden Definition kann man allerdings kaum direkt nachweisen, daß eine Mannigfaltigkeit nichtorientierbar ist. Das liegt daran, daß die Nichtorientierbarkeit eine «globale» Eigenschaft ist.

(1.1) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Die Inklusion $U \subset M$ einer offenen Teilmenge U einer glatten Mannigfaltigkeit M ist glatt. Ist $f: M \rightarrow N$ glatt, so auch $f|_U: U \rightarrow N$. Eine Karte (U, h, V) einer glatten Mannigfaltigkeit M ist ein Diffeomorphismus der offenen Untermannigfaltigkeit U von M auf die offene Untermannigfaltigkeit V von \mathbb{R}^n . Sei $E^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ die offene Kugel vom Radius $r > 0$ im \mathbb{R}^n . (Hierin bezeichnet $\|x\|$ die euklidische Norm des Vektors x .) Dann sind

$$f: E^n(r) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{rx}{\sqrt{r^2 - \|x\|^2}}, \quad g: \mathbb{R}^n \rightarrow E^n(r), \quad x \mapsto \frac{rx}{\sqrt{r^2 + \|x\|^2}}$$

zueinander inverse Diffeomorphismen. Damit zeigt man leicht, daß eine (glatte) Mannigfaltigkeit einen Atlas hat, dessen sämtliche Karten das Bild $E^n(r)$ haben ($0 < r \leq \infty$ fest, $E^n(\infty) = \mathbb{R}^n$).

2. Die Abbildung $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ ist ein glatter Homöomorphismus, aber nicht umkehrbar differenzierbar. Die beiden Karten $(\mathbb{R}, h, \mathbb{R})$ und $(\mathbb{R}, \text{id}, \mathbb{R})$ liefern deshalb verschiedene glatte Strukturen auf dem topologischen Raum \mathbb{R} . Seien $N = (\mathbb{R}, \text{id})$ und $M = (\mathbb{R}, h)$ die durch diese Karten bestimmten Mannigfaltigkeiten. Dann ist $h: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. Übrigens ist jeder Homöomorphismus $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Karte von \mathbb{R} .

3. (Die *lange Halbgerade* von Alexandroff [3].) Sei C die Menge der abzählbaren Ordinalzahlen. Sei $L = C \times [0, 1[\setminus \{(0, 0)\}$. Versehen mit der lexikographischen Ordnung und der dadurch induzierten Ordnungstopologie ist L die Alexandroffsche Halbgerade. Sie ist ein hausdorffscher, zusammenhängender, eindimensionaler, lokal euklidischer Raum, der keine abzählbare Basis hat. Es gibt sogar eine reell-analytische Struktur auf L [88] [89].

2 Sphären und projektive Räume

Die einfachsten Beispiele für Mannigfaltigkeiten, die mindestens zwei Karten in einem Atlas brauchen, sind die Sphären. Die n -dimensionale Sphäre ist der Unterraum $S^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ der Vektoren mit euklidischer Norm 1. Als Teilraum eines euklidischen Raumes ist S^n ein

Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Wir geben einen Atlas mit zwei Karten an. Sei $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Wir definieren die *stereographische Projektion* $\varphi_N: U_N = S^n \setminus \{e_n\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dadurch, daß $\varphi_N(x)$ als Schnitt der Geraden durch e_n und x mit der zu e_n orthogonalen Hyperebene $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times 0$ definiert wird. Man errechnet $\varphi_N(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{1-x_n}(x_0, \dots, x_{n-1})$. Eine stetige Umkehrung ist $\pi_N: x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|^2}(2x, \|x\|^2 - 1)$. Also ist (U_N, φ_N) eine Karte von S^n . Analog haben wir eine stereographische Projektion $\varphi_S: U_S = S^n \setminus \{-e_n\} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Der Kartenwechsel ist $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y) = \|y\|^{-2}y$ und damit reell-analytisch. Das Differential des Kartenwechsels an der Stelle x ist $\xi \mapsto (\|x\|^2\xi - 2\langle x, \xi \rangle x) \cdot \|x\|^{-4}$. Ist $\|x\| = 1$, so ergibt sich die Spiegelung $\xi \mapsto \xi - 2\langle x, \xi \rangle x$. Daraus sieht man, daß die Jacobi-Matrix negative Determinante hat: Der Atlas aus diesen beiden Karten ist nicht orientierend.

Die projektiven Räume sind Mannigfaltigkeiten von grundsätzlicher Bedeutung. Sie treten ihrem Wesen nach nicht als Teilmengen euklidischer Räume auf und sind deshalb ein guter Grund, den Begriff einer Mannigfaltigkeit abstrakt zu fassen.

Ist V ein $(n+1)$ -dimensionaler reeller Vektorraum, so ist der zugehörige projektive Raum $P(V)$ die Menge der eindimensionalen Unterräume von V . Zwei Vektoren $x, y \in V \setminus \{0\}$ spannen genau dann denselben Unterraum auf, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, so daß $\lambda x = y$ ist. Wir können deshalb $P(V)$ als die Menge der Äquivalenzklassen von $V \setminus \{0\}$ bezüglich der Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ mit $\lambda x = y$ auffassen. Die Äquivalenzklasse von $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ wird mit $[x] = [x_0, \dots, x_n]$ bezeichnet (homogene Koordinaten von $[x]$). Wir geben $P(V)$ die Quotienttopologie bezüglich $p: V \setminus \{0\} \rightarrow P(V), x \mapsto [x]$. Dadurch wird $P(V)$ ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Statt $P(\mathbb{R}^{n+1})$ schreiben wir auch $\mathbb{R}P^n$. Wir nennen $\mathbb{R}P^n$ den *n -dimensionalen reellen projektiven Raum*.

Wir definieren Karten für $P(\mathbb{R}^{n+1})$. Sei $U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i \neq 0\}$. Nach Definition der Quotienttopologie ist U_i in $P(\mathbb{R}^{n+1})$ offen. Durch

$$\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [x_0, \dots, x_n] \mapsto x_i^{-1}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

wird ein Homöomorphismus mit der Umkehrung

$$\psi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow U_i, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto [a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_i, \dots, a_n]$$

definiert. Je zwei dieser Karten sind glatt verbunden. Die Abbildung ψ_i ist als Verkettung stetiger Abbildungen stetig. Um φ_i als stetig zu erkennen, benutzen wir, daß auch die Einschränkung $p: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ eine Identifizierung ist, und wenden die universelle Eigenschaft der Quotienttopologie an.

Auf dieselbe Weise wird der projektive Raum $P(V)$ eines komplexen Vektorraumes V definiert. Er entsteht aus $V \setminus \{0\}$ durch die Äquivalenzrelation wie oben, nur daß jetzt $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist. Die Karten von $P(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{C}P^n$ werden wieder durch dieselben Formeln definiert; sie sind holomorph verbunden.

Die Quotientabbildung $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P(\mathbb{R}^{n+1})$ bildet die Einheitskugel S^n surjektiv ab. Deshalb sind die projektiven Räume kompakt. Wir können somit

$\mathbb{R}P^n$ auch als Quotientraum von S^n erhalten, bezüglich der Äquivalenzrelation, die antipodische Punkte identifiziert $x \sim -x$. Ebenso erhalten wir $\mathbb{C}P^n$ als kompakten Quotientraum von $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ bezüglich der Äquivalenzrelation $z \sim \lambda z$, $\lambda \in S^1$.

(2.1) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Einen anderen glatten Atlas für S^n erhält man, wenn man die Kartenbereiche $U_i(\pm) = \{(x_0, \dots, x_n) \mid \pm x_i > 0\}$ verwendet und die Koordinatensysteme

$$\varphi_i(\pm): U_i(\pm) \rightarrow U_1(0), \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Es ist lästig zu beweisen, daß beide Atlanten dieselbe differenzierbare Mannigfaltigkeit definieren. Später werden wir S^n besser als Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} definieren, wie es ihre Definition nahelegt.

2. Zur Definition einer Karte muß man nicht unbedingt die euklidischen Räume verwenden. Um kanonische Karten zu erhalten, sind oft andere (normierte) Vektorräume nützlich. Wir behandeln noch einmal die *stereographische Projektion*. Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$, zugehöriger Norm $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$ und Einheitsphäre $S(V) = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$. Ist $p \in S(V)$, so sind die stereographische Projektion $\varphi_p: S(V) \setminus \{p\} \rightarrow \langle p \rangle^\perp$ mit dem Pol p auf die zu p orthogonale Hyperebene $\langle p \rangle^\perp$ und ihre Umkehrung π_p durch

$$\varphi_p(x) = \frac{x - \langle x, p \rangle p}{1 - \langle x, p \rangle}, \quad \pi_p(u) = \frac{2u + (\|u\|^2 - 1)p}{1 + \|u\|^2}$$

erklärt.

3 Graßmannsche Mannigfaltigkeiten

Wir verallgemeinern nun die projektiven Räume. Sei dazu E ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und $0 < r < n$. Wir machen die Menge $G_r(E)$ der r -dimensionalen Unterräume von E zu einer glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $r(n-r)$ und nennen sie dann eine *Graßmann-Mannigfaltigkeit*. Zu diesem Zweck konstruieren wir Karten für diese Menge.

Sei K ein Unterraum der Kodimension r in E . Wir betrachten die Menge der Komplemente von K

$$U(K) = \{F \in G_r(E) \mid F \oplus K = E.\}$$

Dieses werden die Kartenbereiche. Sei

$$P(K) = \{p \in \text{Hom}(E, E) \mid p^2 = p, p(E) = K\}$$

die Menge der Projektionen mit Bild K . Dann ist $P(K) \rightarrow U(K)$, $p \mapsto \text{Kern}(p)$ eine Bijektion. Die Menge $P(K)$ ist ein affiner Raum über dem Vektorraum $\text{Hom}(E/K, K)$. Sei $j: K \subset E$ und $q: E \rightarrow E/K$ die Quotientabbildung. Dann ist

$$\text{Hom}(E/K, K) \times P(K) \rightarrow P(K), \quad (\varphi, p) \mapsto p + j\varphi q$$

eine einfach transitive Operation. Durch diese affine Struktur erhalten wir nach Wahl eines «Grundpunktes» $p_0 \in P(K)$ eine Bijektion

$$U(K) \leftarrow P(K) \rightarrow \text{Hom}(E/K, K), \quad \text{Kern}(p) \leftarrow p \mapsto p - p_0.$$

Diese Bijektionen seien Karten.

Um die Kartenwechsel rechnerisch zu verfolgen definieren wir Kartenabbildungen mit Hilfe von Matrizen Theorie. Sei $B = \{f_1, \dots, f_r, k_1, \dots, k_{n-r}\}$ eine Basis von E derart, daß $\{k_1, \dots, k_{n-r}\}$ eine Basis von K ist. Wir geben eine Bijektion

$$\varphi_B: U(K) \rightarrow M(n-r, r)$$

auf den Vektorraum der reellen $(n-r, r)$ -Matrizen an. Sei $X \in U(K)$. Wir wählen eine Basis $\{x_1, \dots, x_r\}$ von X . Bezüglich der Basis B wird $\{x_1, \dots, x_r\}$ durch eine (n, r) -Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}, \quad P \in GL(r, \mathbb{R})$$

beschrieben, wobei die k -te Spalte die Komponenten von x_k enthält. Die Matrix $PQ^{-1} \in M(n-r, r)$ ist unabhängig von der Wahl der Basis von X , und durch $X \mapsto PQ^{-1}$ wird eine Bijektion φ_B definiert. Bei dieser Bijektion entspricht der von den f_j aufgespannte Raum $F = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ der Nullmatrix. Da die kanonische Abbildung $X \rightarrow E/K$ eine Bijektion ist, gibt es eine Basis $\{x_j\}$ von X , so daß x_j auf das Bild von f_j abgebildet wird. In diesem Fall ist Q die Einheitsmatrix.

Sei L ein anderer Unterraum der Kodimension r mit einer zugehörigen Basis $C = \{g_1, \dots, g_r, l_1, \dots, l_{n-r}\}$ wie oben, die dann $\varphi_C: U(L) \rightarrow M(n-r, r)$ definiert. Wir wollen die Koordinatentransformation $\varphi_C \varphi_B^{-1}$ untersuchen. Zu diesem Zweck nehmen wir zunächst $f_j = g_j$ an, das heißt, φ_B und φ_C seien in $\langle f_1, \dots, f_r \rangle = F \in U(K) \cap U(L)$ zentriert. Die Übergangsmatrix von B nach C hat dann die Form (I_r Einheitsmatrix)

$$\begin{pmatrix} I_r & M \\ 0 & N \end{pmatrix}.$$

Ist $P \in M(n-r, r)$ gegeben, so wird $\varphi_B^{-1}(P)$ durch $\begin{pmatrix} I_r \\ P \end{pmatrix}$ repräsentiert. Diese Basis eines Elements aus $U(K)$ hat bezüglich C die Matrix

$$\begin{pmatrix} I_r & M \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r + MP \\ NP \end{pmatrix}.$$

Dieses Element gehört genau dann zu $U(L)$, wenn $I_r + MP \in GL(r, \mathbb{R})$ ist. Also ist

$$\varphi_C \varphi_B^{-1}(P) = NP(I_r + MP)^{-1}.$$

Die Einträge dieser Matrix sind rationale Funktionen in den Einträgen von P . Also ist die Koordinatentransformation rational, insbesondere glatt.

Arbeiten wir mit einer Basis $\bar{B} = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r, k_1, \dots, k_{n-r}\}$, so ist die Übergangsmatrix von B nach \bar{B} von der Form

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ S & I_{n-r} \end{pmatrix}, \quad R \in GL(r, \mathbb{R}).$$

Damit errechnet sich

$$\varphi_{\bar{B}} \varphi_B^{-1}(P) = (S + P)R^{-1},$$

das heißt, es handelt sich um eine affine Bijektion von $M(n-r, r)$. Insgesamt sehen wir, daß alle Karten der Form φ_B rational und insbesondere glatt verbunden sind.

Es gibt genau eine Topologie auf $G_r(E)$, bezüglich der die $U(K)$ offen und die φ_B Homöomorphismen sind. Diese Topologie wollen wir jetzt noch anders beschreiben. Sei dazu

$$S_r(E) = \{(x_1, \dots, x_r) \mid x_i \text{ linear unabhängig}\} \subset E^r.$$

Wegen des Determinantenkriteriums für die lineare Unabhängigkeit und der Stetigkeit der Determinante gilt: $S_r(E)$ ist eine offene Teilmenge von E^r und damit eine glatte Mannigfaltigkeit. Sie heißt *Stiefel-Mannigfaltigkeit* der r -Beine in E . Wir haben eine Surjektion $p: S_r(E) \rightarrow G_r(E)$, $(x_1, \dots, x_r) \mapsto \langle x_1, \dots, x_r \rangle$.

(3.1) Lemma. *Bezüglich der Quotienttopologie von p sind die Kartenbereiche $U(K)$ offen und die φ_B Homöomorphismen.*

BEWEIS. Die Menge $p^{-1}U(K)$ besteht aus den r -Tupeln (x_1, \dots, x_r) , so daß $(x_1, \dots, x_r, k_1, \dots, k_{n-r})$ eine Basis von E ist. Nach dem Determinantenkriterium ist das eine offene Menge in $S_r(E)$. Die Komposition

$$\varphi_B \circ p: p^{-1}U(K) \rightarrow U(K) \rightarrow M(n-r, r), \quad \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \mapsto PQ^{-1}$$

ist stetig und damit auch φ_B stetig. Durch $P \mapsto \begin{pmatrix} I_r \\ P \end{pmatrix}$ wird eine stetige Umkehrung gegeben. \square

(3.2) Satz. *$G_r(E)$ ist eine kompakte glatte $r(n-r)$ -Mannigfaltigkeit.*

BEWEIS. Wir müssen nur noch die topologischen Eigenschaften nachweisen. Da $S_r(E)$ eine abzählbare Basis hat, so auch jeder Quotientraum. Wir versehen E mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Die Menge

$$V_r(E) = \{(x_j) \in G_r(E) \mid (x_j) \text{ orthonormiert}\}$$

ist eine kompakte Teilmenge von E^r . Also ist $G_r(E)$ als stetiges Bild $pV_r(E)$ eines kompakten Raumes selbst kompakt. Sind X_1 und X_2 aus $G_r(E)$, so gibt es immer ein gemeinsames Komplement K . Dann liegen die X_i in dem hausdorffschen Kartenbereich $U(K)$ und haben disjunkte Umgebungen. \square

Eine analoge Konstruktion mit komplexen Vektorräumen E liefert die kompakte komplex Mannigfaltigkeit $G_r(E)$ der r -dimensionalen komplexen Unterräume von E . Sie hat als glatte Mannigfaltigkeit die Dimension $2r(n-r)$.

4 Zum Begriff der Mannigfaltigkeit

Die folgenden beiden Sätze zeigen, warum die Ordnung der Differenzierbarkeit meist vernachlässigt werden kann.

(4.1) Satz. *Jede C^r -Struktur auf einer Mannigfaltigkeit enthält eine reell analytische Struktur ($1 \leq r \leq \infty$).* \square

(4.2) Satz. *Sei $1 \leq r < p \leq \omega$. Sind zwei Mannigfaltigkeiten C^r -diffeomorph, so auch C^p -diffeomorph.* \square

Beide Sätze wurden von Whitney [147] bewiesen, wobei im Satz (1.??) für den Fall $p = \omega$ vorausgesetzt wurde, daß es sich um C^ω -Untermannigfaltigkeiten eines euklidischen Raumes handelt. Um (1.??) in voller Allgemeinheit zu erhalten, muß noch ein Satz von Grauert [52] über die Einbettbarkeit reell-analytischer Mannigfaltigkeiten verwendet werden. In (1.??) braucht man nicht die abzählbare Basis und die Separiertheit [90]. Für Beweise siehe auch [107] und [65]. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten ohne differenzierbare Struktur [80].

Riemann hat in seinen Beiträgen zur Funktionentheorie den Standpunkt vertreten, daß zunächst die grundlegenden topologisch-geometrischen Eigenschaften der Flächen herausgearbeitet werden müssen, damit deutlich wird, wie diese die feineren funktionentheoretischen Phänomene beeinflussen [120] [121] [122, p. 9–12, 85–89].

Die Definition der Mannigfaltigkeit enthält eine Idee, die noch vielerlei andere Ausprägungen zuläßt:

Gegeben sind *lokale Modelle* (hier: die euklidischen Räume und ihre offenen Teilmengen). Die lokalen Modelle werden durch die spezifizierte Klasse von Kartenwechseln verheftet (hier: C^r -Diffeomorphismen; holomorphe Isomorphismen). Das Resultat der Verheftung wird *globales* Objekt genannt. Überhaupt beziehen sich lokale Betrachtungen auf Aussagen über (kleine) Umgebungen von Punkten und globale auf die gesamte Mannigfaltigkeit. Bei Mannigfaltigkeiten mit Rand werden Halbräume die lokalen Modelle sein. Für die Zwecke der globalen Analysis werden unendlich-dimensionale Mannigfaltigkeiten verwendet; die lokalen Modelle sind Hilbert- oder Banachräume. In der algebraischen Geometrie werden affine Varietäten zu allgemeineren verschmolzen. Bei den später zu besprechenden Bündeln werden Produkte von Räumen die lokalen Modelle sein.

Mannigfaltigkeiten kommen indirekt in der Mathematik seit langem vor. In seinem berühmten Habilitationsvortrag vom 10. Juni 1854 hat Riemann deutlich eine Theorie n -dimensionaler (und sogar unendlich-dimensionaler) Mannigfaltigkeiten gewünscht, wie die folgenden Zitate andeuten [122, p. 255–277]:

... Je nachdem unter diesen Bestimmungsweisen von einer zu einer andern ein stetiger Uebergang stattfindet oder nicht, bilden sie eine stetige oder discrete Mannigfaltigkeit; die einzelnen Bestimmungsweisen heissen im ersten Falle Punkte, im letztern Elemente dieser Mannigfaltigkeiten. Begriffe, deren Bestimmungsweisen eine discrete

Mannigfaltigkeit bilden, sind so häufig, dass sich für beliebig gegebene Dinge wenigstens in den gebildeteren Sprachen immer ein Begriff auffinden lässt, unter welchem sie enthalten sind [...], dagegen sind die Veranlassungen zur Bildung von Begriffen, deren Bestimmungsweisen eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, im gemeinen Leben so selten, dass die Orte der Sinngegenstände und die Farben wohl die einzigen einfachen Begriffe sind, deren Bestimmungsweisen eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden

Riemann fährt dann fort, die Bestimmungsweisen durch Koordinatenbeschreibungen festzulegen:

. . . Durch n malige Wiederholung dieses Verfahrens wird daher die Ortsbestimmung in einer n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf n Grössenbestimmungen, und also die Ortsbestimmung in einer gegebenen Mannigfaltigkeit, wenn dieses möglich ist, auf eine endliche Anzahl von Quantitätsbestimmungen zurückgeführt. Es giebt indess auch Mannigfaltigkeiten, in welchen die Ortsbestimmung nicht eine endliche Zahl, sondern entweder eine unendliche Reihe oder eine stetige Mannigfaltigkeit von Grössenbestimmungen erfordert. Solche Mannigfaltigkeiten bilden z. B. die möglichen Bestimmungen einer Funktion für ein gegebenes Gebiet, die möglichen Gestalten einer räumlichen Figur u.s.w.

Eines ist, Mannigfaltigkeiten zu verwenden, also sie etwa durch Lösungen von Gleichungen oder Identifizierungen in Polyedern vorzugeben; ein anderes ist die axiomatische Definition des Begriffes Mannigfaltigkeit.

Eine erste akzeptable Definition einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit wurde wohl von Hilbert [61] unter der Bezeichnung Ebene gegeben. Er schreibt unter anderem:

Eine doppel punktlose und einschließlich ihrer Endpunkte stetige Curve in dieser Zahlenebene heiÙe eine *Jordansche Curve*. Ist eine Jordansche Curve geschlossen, so heiÙe das Innere des von derselben begrenzten Gebietes der Zahlenebene ein *Jordansches Gebiet*.

Die Definition der Ebene. Die Ebene ist ein System von Punkten. Jeder Punkt A bestimmt gewisse Theilsysteme von Punkten, zu denen er selbst gehört und welche Umgebungen des Punktes A heißen.

Die Punkte einer Umgebung lassen sich stets umkehrbar eindeutig auf die Punkte eines gewissen Jordanschen Gebietes in der Zahlenebene abbilden. Jedes in diesem Jordanschen Gebiete enthaltene Jordansche Gebiet, welches den Punkt A umschließt ist wiederum eine Umgebung von A . Das Jordansche Gebiet wird ein Bild jener Umgebung genannt. Liegen verschiedene Bilder einer Umgebung vor, so ist die dadurch vermittelte umkehrbar eindeutige Transformation der betreffenden Jordanschen Gebiete aufeinander eine stetige.

Ist B irgend ein Punkt in einer Umgebung von A , so ist diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B .

Zu irgend zwei Umgebungen eines Punktes A gibt es stets eine solche Umgebung des Punktes A die beiden Umgebungen gemeinsam ist.

Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Geometrie sind, so gibt es stets eine Umgebung die beide Punkte A und B gleichzeitig enthält.

In diesem Zusammenhang ist es bemerkenswert, daß die Definition eines topologischen Raumes durch Umgebungssysteme erst in dem berühmten Buch von Hausdorff 1914 über Mengenlehre erscheint [58]. Weyl [140] gibt eine zusammenfassende Darstellung der Theorie der Riemannschen Flächen; ihre axiomatische Definition (loc. cit. p. 17) hat dort aber noch nicht die endgültige Form gefunden.

Die erste allgemeine axiomatische Definition einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit mit differenzierbarer oder anderer Struktur scheint von J.H.C. Whitehead und Veblen gegeben worden zu sein [144] [143, p. 93]. Die Zielsetzung war differentialgeometrisch. Die eigentliche Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten wurde von Whitney begründet, [145] [147] und weitere Arbeiten. Die Terminologie Karte und Atlas erscheint bei Ehresmann [44], wo auch das später zu besprechende Tangentialbündel definiert wird [44, p. 319]. Siehe auch [125].

5 Tangentialraum und Differential

Jedem Punkt p einer m -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit M wird ein m -dimensionaler Vektorraum T_pM , der *Tangentialraum* von M in p , zugeordnet. Die Elemente von T_pM heißen *Tangentialvektoren* von M in p . Jeder glatten Abbildung $f: M \rightarrow N$ wird eine lineare Abbildung $T_p f: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$, das *Differential* von f in p , zugeordnet, so daß die Eigenschaften eines Funktors gelten (*Kettenregel*)

$$(5.1) \quad T_p(g \circ f) = T_{f(p)}(g) \circ T_p(f), \quad T_p(\text{id}) = \text{id}.$$

Ein *Tangentialraum* einer m -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit M im Punkt p besteht aus einem m -dimensionalen Vektorraum $T_p(M)$ und einer Familie von linearen Isomorphismen $i_k: T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}^m$, und zwar einen für jede Karte $k = (U, \varphi, U')$ um p , so daß für je zwei Karten k und $l = (V, \psi, V')$ der Isomorphismus $i_l i_k^{-1}$ das Differential des Kartenwechsels $\psi \varphi^{-1}$ im Punkt $\varphi(p)$ ist. Ist $(T'_p(M), i'_k)$ ein weiterer Tangentialraum, so ist $\iota_p = i_k^{-1} \circ i'_k: T'_pM \rightarrow T_pM$ unabhängig von der Wahl der Karte k . Deshalb ist ein Tangentialraum bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt.

Zu jedem m -dimensionalen Vektorraum T_pM und jedem Isomorphismus $i_k: T_pM \rightarrow \mathbb{R}^m$ für eine feste Karte k gibt es genau einen Tangentialraum mit zugrundeliegenden Daten T_pM und i_k ; das folgt mit Hilfe der Kettenregel. Wenn wir künftig von einem Tangentialraum T_pM sprechen, so unterstellen wir einen Isomorphismus $i_k: T_pM \rightarrow \mathbb{R}^m$ als Strukturdatum.

Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Es gibt genau eine lineare Abbildung $T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, so daß für jede Karte $k = (U, \varphi, U')$ um $p \in M$ und $l = (V, \psi, V')$ um $f(p) \in N$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{T_p f} & T_{f(p)} N \\ \downarrow i_k & & \downarrow i_l \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D(\psi f \varphi^{-1})} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

kommutativ ist; unten steht dabei das Differential von $\psi f \varphi^{-1}$ an der Stelle $\varphi(p)$. Diese Definition ist mit den universellen Isomorphismen ι_p verträglich, das heißt, es gilt $T_p f \circ \iota_p = \iota_{f(p)} \circ T_p' f$. Die lineare Abbildung $T_p f$ heißt *Differential* von f in p . Es gelten die Regeln (5.1).

(5.2) Beispiel. Ist $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, so setzen wir $T_p V = \mathbb{R}^n$ und $i_k = \text{id}$ für $k = (V, \text{id}, V)$. Auf diese Weise identifizieren wir $T_p V$ mit \mathbb{R}^n . Mit diesen Identifizierungen wird $T_p f$ für eine glatte Abbildung f zwischen offenen Teilmengen euklidischer Räume das gewöhnliche Differential $Df(p)$ der Analysis.

Sei $k = (U, h, V)$ eine Karte von M um p . Dann ist mit dieser Vereinbarung $T_p h: T_p M \rightarrow T_{h(p)} V = \mathbb{R}^n$ gleich i_k . \diamond

(5.3) Beispiel. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Die Differentiale der Projektionen auf die Faktoren induzieren einen Isomorphismus $T_{(x,y)}(M \times N) \cong T_x M \times T_y N$, den wir häufig als Identifizierung ansehen. Mit solchen Identifizierungen erhalten wir die Regel $T_{(x,y)}(f \times g) = T_x f \times T_y g$. Sei $f: M \times N \rightarrow P$ glatt. Zu $(x, y) \in M \times N$ betrachten wir die partiellen Abbildungen $f_1: x \mapsto f(x, y)$ und $f_2: y \mapsto f(x, y)$. Dann gilt $T_{(x,y)} f(u, v) = T_x f_1(u) + T_y f_2(v)$. \diamond

Sei $f: M \rightarrow N$ glatt. Der Rang von $T_p f$ heißt der *Rang von f im Punkt p* . Der Punkt $p \in M$ ist ein *regulärer Punkt* von f , wenn $T_p f$ surjektiv ist, und andernfalls ein *kritischer Punkt* von f . Enthält $f^{-1}(q)$ nur reguläre Punkte von f , so ist q ein *regulärer Wert* von f und andernfalls ein *kritischer Wert*. Ist f surjektiv und $T_p f$ für alle $p \in M$ surjektiv, so ist f eine *Submersion*. Ist $T_p f$ für alle $p \in M$ injektiv, so ist f eine *Immersion*.

(5.4) Rangsatz. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung einer m -Mannigfaltigkeit in eine n -Mannigfaltigkeit. Dann gilt:

(1) Ist $T_a f$ bijektiv, so gibt es offene Umgebungen U von a und V von $f(a)$, zwischen denen f einen Diffeomorphismus $f: U \rightarrow V$ induziert.

(2) Ist $T_a f$ injektiv, so gibt es offene Umgebungen U von a , V von $f(a)$, W von $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ und einen Diffeomorphismus $F: U \times W \rightarrow V$, so daß $F(x, 0) = f(x)$ für alle $x \in U$.

(3) Ist $T_a f$ surjektiv, so gibt es offene Umgebungen U von a , V von $f(a)$, W von $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$ und einen Diffeomorphismus $F: U \rightarrow V \times W$, so daß $\text{pr}_V F(x) = f(x)$ für $x \in U$ mit der Projektion $\text{pr}_V: V \times W \rightarrow V$.

(4) Habe $T_x f$ für alle $x \in M$ den konstanten Rang r . Dann gibt es zu jedem $a \in M$ offene Umgebungen U von a , V von $f(a)$ und Diffeomorphismen $\varphi: U \rightarrow U'$,

$\psi: V \rightarrow V'$ zu offenen Teilmengen $U' \subset \mathbb{R}^m$, $V' \subset \mathbb{R}^n$, so daß $f(U) \subset V$ und $\psi f \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ für alle $(x_1, \dots, x_m) \in U'$.

BEWEIS. Die Behauptungen sind lokaler Natur. Vermöge lokaler Karten kann man daher M und N als offene Teile von euklidischen Räumen annehmen. In diesem Fall handelt es sich um Versionen des Rangsatzes aus der Analysis (siehe etwa [?]). \square

(5.5) Notiz. Sei $f: M \rightarrow N$ stetig und sei $j: N \rightarrow P$ eine Immersion. Ist $j \circ f$ glatt, so auch f . Ist zusätzlich j ein Homöomorphismus auf sein Bild, so muß man die Stetigkeit von f nicht voraussetzen. \square

(5.6) Notiz. Sei $f: M \rightarrow N$ eine Submersion und $g: N \rightarrow P$ eine Mengenabbildung in eine glatte Mannigfaltigkeit P . Ist $g \circ f$ glatt, so auch g .

BEWEIS. Sei $f(x) = y$. Nach dem Rangsatz (5.4) gibt es Kartenbereiche U um x und V um y , so daß $f(U) = V$ und $f: U \rightarrow V$ in geeigneten Koordinaten die Form $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ hat ($m = \dim M$, $n = \dim N$). Es gibt deshalb eine glatte Abbildung $s: V \rightarrow U$, so daß für alle $z \in V$ die Gleichung $f \circ s(z) = z$ gilt (etwa $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ in lokalen Koordinaten). Dann ist für $z \in V$ aber $g(z) = g \circ f \circ s(z)$, und $g \circ f$ ist glatt. \square

Die Abbildung s im Beweis von (5.6) nennt man einen *lokalen Schnitt* von f . Eine Submersion ist eine stetige, offene Abbildung, also insbesondere eine Identifizierung im Sinne der mengentheoretischen Topologie. Wegen (5.6) nennen wir sie auch eine *glatte Quotientabbildung*.

(5.7) Folgerung. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p: M \rightarrow N$ eine Identifizierung. Dann gibt es auf N höchstens eine Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit, die p zu einer Submersion macht. \square

Eine Teilmenge $A \subset N$ einer glatten n -Mannigfaltigkeit N heißt *Nullmenge*, wenn für jede Karte (U, h, V) von N die Teilmenge $h(U \cap A)$ eine Lebesguesche Nullmenge in \mathbb{R}^n ist.

(5.8) Satz von Sard. Die Menge der singulären Werte einer glatten Abbildung ist eine Nullmenge. [100] \square

Für unsere Anwendungen sind wir hauptsächlich an einer topologischen Eigenschaft von Nullmengen interessiert: Das Komplement $N \setminus C$ einer Nullmenge C ist dicht in N . Die regulären Werte einer glatten Abbildung $f: N \rightarrow M$ liegen dicht in M .

6 Derivationen und Tangentialraum

Ungeachtet der Tatsache, daß ein Tangentialraum durch eine universelle Eigenschaft definiert werden muß, wie wir es getan haben, gibt es wichtige Konstruktionen von Vektorräumen, die durch interne Struktureigenschaften als Modelle für Tangentialräume erhalten können. Wir beschreiben eine Konstruktion, die

gang und gäbe ist und durch ihren algebraischen Charakter zu allerlei Verallgemeinerungen Anlaß gibt.

Sei $\mathcal{E}_x(M)$ der Ring (genauer die \mathbb{R} -Algebra) der Keime glatter Funktionen $(M, x) \rightarrow \mathbb{R}$. Elemente darin werden durch glatte, in einer Umgebung von x definierte Funktionen repräsentiert; zwei solche sind äquivalent, wenn sie auf einer Umgebung von x übereinstimmen. Die Klasse von f wird ihr *Keim* im Punkt x genannt. Addiert und multipliziert werden die Äquivalenzklassen durch Addition und Multiplikation von Funktionswerten (nach Einschränkung auf geeignete Umgebungen von x). Ein Keim f an der Stelle x hat einen wohldefinierten Funktionswert $f(x)$. Eine *Derivation* von $\mathcal{E}_x(M)$ ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $D: \mathcal{E}_x(M) \rightarrow \mathbb{R}$, die die Produktregel $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot D(g)$ erfüllt. Die Derivationen werden zu einem Vektorraum $\mathcal{T}_x(M) = \text{Der } \mathcal{E}_x(M)$ durch die Vorschrift $(\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2)(f) = \lambda_1 D_1(f) + \lambda_2 D_2(f)$. Eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ induziert einen Homomorphismus von Algebren $\mathcal{E}_x f: \mathcal{E}_{f(x)} N \rightarrow \mathcal{E}_x M$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ und eine lineare Abbildung $\mathcal{T}_x f: \mathcal{T}_x(M) \rightarrow \mathcal{T}_{f(x)}(N)$, $D \mapsto D \circ \mathcal{E}_x f$. Das nächste Lemma zeigt, daß die $\mathcal{T}_x M$ als Tangentialräume dienen können.

(6.1) Lemma. *Der Vektorraum $\mathcal{T}_p \mathbb{R}^n$ hat die Basis $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Dabei interpretieren wir $\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ als die Derivation $f \mapsto \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, die aus den Standardkoordinaten x_1, \dots, x_n des \mathbb{R}^n entsteht. Falls wir $\mathcal{T}_p \mathbb{R}^n$ bezüglich dieser Basis mit \mathbb{R}^n identifizieren, so wird $\mathcal{T}_p(\varphi)$ für eine glatte Abbildung φ zwischen offenen Teilmengen euklidischer Räume durch die Jacobi-Matrix $D\varphi(p)$ gegeben.*

BEWEIS. Sei $\mathbf{1}$ die konstante Funktion mit dem Wert 1. Dann gilt nach der Produktregel $D(\mathbf{1}) = D(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) = D(\mathbf{1}) \cdot \mathbf{1}(p) + \mathbf{1}(p) \cdot D(\mathbf{1}) = 2D(\mathbf{1})$, also $D(\mathbf{1}) = 0$. Wegen $D(\lambda \mathbf{1}) = \lambda D(\mathbf{1})$ ist also D auf konstanten Funktionen Null.

Ist $h: U_\varepsilon(p) \rightarrow \mathbb{R}$ auf der ε -Umgebung von $p = (p_1, \dots, p_n)$ glatt, so gibt es glatte Funktionen h_i auf $U_\varepsilon(p)$, mit denen in $U_\varepsilon(p)$ die Gleichung $h(x) = h(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - p_i)(x) \cdot h_i(x)$ gilt, mit den Koordinatenfunktionen x_i und den konstanten Funktionen p_i ; ferner ist $h_i(p) = D_i h(p)$. Die Derivationen $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sind sicherlich linear unabhängig, was man durch Anwendung auf die Koordinatenfunktionen erkennt. Aus

$$\begin{aligned} D(h) &= D(h(p)) + \sum_{i=1}^n D((x_i - p_i) \cdot h_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (D(x_i - p_i)h_i(p) + (x_i - p_i)(p)D(h_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n D(x_i - p_i)D_i h(p) = \left(\sum_{i=1}^n D(x_i - p_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (h) \end{aligned}$$

folgt $D = \sum D(x_i - p_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Also erzeugen sie auch den Vektorraum. Aus der Kettenregel folgt die Behauptung über die Jacobi-Matrix. \square

(6.2) Kanonischer Tangentialraum. Aus Lemma (6.1) folgt, daß die Vektorräume $\mathcal{T}_x(M)$ zusammen mit den Isomorphismen

$$\mathcal{T}_x \varphi: \mathcal{T}_x(M) \rightarrow \mathcal{T}_{\varphi(x)}(V) = \mathbb{R}^n$$

für Karten (U, φ, V) einen Tangentialraum bilden. Das zugehörige Differential ist $\mathcal{T}_x f$. Mit diesem Modell eines Tangentialraumes haben wir für jedes $X_p \in \mathcal{T}_p(M)$

und jede glatte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ die Ableitung $X_p f$ von f in Richtung X_p , nämlich als Wert der Derivation X_p auf f . \diamond

Sei $\mathcal{E}_x(M) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$ die Evaluation an der Stelle x . Der Kern ist ein maximales Ideal m_x . Jede Derivation D von $\mathcal{E}_x(M)$ liefert eine lineare Abbildung $m_x \rightarrow \mathbb{R}$, die wegen der Produktregel auf m_x^2 verschwindet und deshalb als Element des Dualraumes von m_x/m_x^2 angesehen werden kann. Deshalb ergibt sich eine lineare Abbildung $\omega_x: T_x M \rightarrow (m_x/m_x^2)^*$ in den Dualraum von m_x/m_x^2 .

(6.3) Notiz. Die Abbildung ω_x ist ein Isomorphismus. Sind $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{E}_x(M)$ Keime, die durch die Koordinatenfunktionen einer in x zentrierten Karte gegeben sind, so repräsentieren sie eine Basis von m_x/m_x^2 . Die zugehörige Dualbasis entspricht bei ω_x der Basis der partiellen Ableitungen. Die Abbildung $\mathcal{E}_x f$ induziert eine lineare Abbildung $m_{f(x)}/m_{f(x)}^2 \rightarrow m_x/m_x^2$, und die duale Abbildung wird durch ω_x und $\omega_{f(x)}$ in $T_x f$ transformiert. \square

Den Dualraum des Tangentialraumes nennt man *Kotangentialraum* und die Elemente darin *Kotangentialvektoren*. Wir haben in m_x/m_x^2 ein kanonisches Modell für den Kotangentialraum, weil ein endlichdimensionaler Vektorraum kanonisch mit seinem doppelten Dualraum identifiziert werden kann.

7 Untermannigfaltigkeiten

Eine Teilmenge N einer n -Mannigfaltigkeit M heißt *k-dimensionale* oder auch *(n - k)-kodimensionale Untermannigfaltigkeit* von M , wenn folgendes gilt: Zu jedem Punkt $x \in N$ gibt es eine Karte $h: U \rightarrow U'$ von M um x , so daß $h(U \cap N) = U' \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$ ist. Eine Karte von M mit dieser Eigenschaft heißt *N angepaßt*. Identifizieren wir $\mathbb{R}^k \times 0$ mit \mathbb{R}^k , so ist $(U \cap N, h, U' \cap \mathbb{R}^k)$ eine Karte von N . Ist M glatt, so heißt *N glatte Untermannigfaltigkeit* von M , wenn es um jeden Punkt angepaßte Karten aus der differenzierbaren Struktur von M gibt. Die Gesamtheit der Karten $(U \cap N, h, U' \cap \mathbb{R}^k)$, die aus angepaßten Karten von M hervorgehen, ist dann ein glatter Atlas von N . Damit wird N selbst zu einer glatten Mannigfaltigkeit, und die Inklusion $N \subset M$ ist eine glatte Abbildung. Wir nennen $f: M \rightarrow N$ eine *glatte Einbettung*, wenn $f(M)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von N ist und $f: M \rightarrow f(M)$ ein Diffeomorphismus. Sind $X_i \subset Y_i$ Untermannigfaltigkeiten, so ist auch das Produkt $X_1 \times X_2 \subset Y_1 \times Y_2$ eine Untermannigfaltigkeit.

Die nachstehenden Aussagen ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen. Sie werden beim Arbeiten mit Untermannigfaltigkeiten häufig gebraucht.

(7.1) Notiz. (1) Sei $i: X \rightarrow Y$ die Inklusion einer glatten Untermannigfaltigkeit X von Y . Dann ist i eine injektive Immersion. Sei $f: M \rightarrow X$ eine Abbildung einer weiteren glatten Mannigfaltigkeit M . Genau dann ist f glatt, wenn $i \circ f$ glatt ist.

(2) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $A \subset M$ eine Teilmenge. Genau dann ist A eine glatte Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $a \in A$ eine offene Umgebung U von a in M gibt, so daß $A \cap U$ glatte Untermannigfaltigkeit

von U ist.

(3) Ist $f: N_1 \rightarrow N_2$ ein Diffeomorphismus, so ist $M_1 \subset N_1$ genau dann eine glatte Untermannigfaltigkeit, wenn $f(M_1) = M_2 \subset N_2$ eine glatte Untermannigfaltigkeit ist. \square

(7.2) Tangentialraum von Untermannigfaltigkeiten. Sei $i: M \rightarrow N$ eine Inklusion einer Untermannigfaltigkeit. Dann ist $T_p i$ injektiv, da in lokalen Koordinaten bezüglich angepaßter Karten i die Inklusion eines Unterraumes (eingeschränkt auf offene Teile) ist, und das Differential von i ist diese Inklusion. Falls $T_p N$ festgelegt ist, so ist das Bild von $T_p i$ unabhängig von der Wahl von $T_p M$. Wir wählen deshalb oft dieses Bild als ein Modell für $T_p M$. Genauer: Ist $K = (U, \Phi, V)$, $V \subset \mathbb{R}^n$ eine angepaßte Karte und $k = (U \cap M, \varphi, W)$, $W \subset \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \times 0 \subset \mathbb{R}^n$ ihre Einschränkung, dann verwenden wir i_k und i_K im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_p N & \xrightarrow{i_K} & \mathbb{R}^n \\ \uparrow \cup & & \uparrow \cup \\ T_p M & \xrightarrow{i_k} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

als Strukturdaten eines Tangentialraumes, und $T_p i$ wird wegen der Kommutativität die Inklusion $T_p M \subset T_p N$. \diamond

Falls speziell M eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist, so wird nach (7.2) $T_p M$ mit einem Unterraum von \mathbb{R}^n identifiziert. Dieser Unterraum hat folgende Interpretation durch Tangenten. Sei $\alpha:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ eine glatte Kurve mit $\alpha(0) = p$. Dann gilt für die Ableitung $d\alpha/dt(0) \in T_p M \subset \mathbb{R}^n$, und $T_p M$ ist die Gesamtheit dieser «Geschwindigkeitsvektoren» von solchen Kurven α .

(7.3) Satz. Sei $f: M \rightarrow N$ eine Immersion und eine topologische Einbettung. Dann ist f eine glatte Einbettung.

BEWEIS. Wir zeigen, daß $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N ist. Sei $f(a) = b$. Wir wählen U, V, W und F gemäß (3.4.2). Da U offen ist und $M \rightarrow f(M)$ ein Homöomorphismus, ist $f(U)$ offen in $f(M)$. Also gilt $f(U) = f(M) \cap P$ mit einer geeigneten offenen Menge $P \subset N$. Es ist $R = V \cap P$ eine offene Umgebung von b , und nach Konstruktion gilt $R \cap f(M) = f(U)$. Nach (7.1.2) genügt es $f(U)$ als Untermannigfaltigkeit von R zu erweisen. Setzen wir $Q = F^{-1}R$, so haben wir einen Diffeomorphismus $F: Q \rightarrow R$, der $U \times 0$ bijektiv auf $f(U)$ abbildet. Da $U \times 0$ Untermannigfaltigkeit von $U \times W$ ist, so auch Q . Nun wenden wir (7.1.3) an.

Nach Voraussetzung hat $f: M \rightarrow f(M)$ eine stetige Umkehrabbildung. Die Umkehrung ist differenzierbar, da $f: M \rightarrow f(M)$ ein injektives (aus Dimensionsgründen also ein bijektives) Differential hat, und deshalb ein lokaler Diffeomorphismus ist. \square

(7.4) Folgerung. Sei M kompakt und $f: M \rightarrow N$ eine injektive Immersion. Dann ist f eine glatte Einbettung, da eine bijektive stetige Abbildung eines kompakten Raumes in einen hausdorffschen ein Homöomorphismus ist. \square

(7.5) Satz. Sei $f: M \rightarrow N$ glatt und $q \in f(M)$ ein regulärer Wert. Dann ist $A = f^{-1}(q)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von M ; ihre Kodimension ist gleich der Dimension von N . Für jedes $a \in A$ ist $T_a A$ der Kern von $T_a f$.

BEWEIS. Sei $a \in A$. Nach (3.4.3) ist f in geeigneten lokalen Koordinaten um a und $f(a)$ die Projektion auf einen Unterraum. Die Punkturbilder einer Projektion sind sicherlich Untermannigfaltigkeiten. Der Unterraum $T_a A \subset T_a M$ liegt im Kern von $T_a f$ und ist aus Dimensionsgründen gleich diesem Kern. \square

(7.6) Satz. Sei M eine glatte m -Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine Teilmenge. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) N ist eine k -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von M .
- (2) Zu jedem $a \in N$ gibt es eine Umgebung U von a in M und eine glatte Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$, die in U den konstanten Rang $m - k$ hat und für die $U \cap N = f^{-1}(0)$ ist.

BEWEIS. (1) \Rightarrow (2). Sei (U, h, V) eine an N angepaßte Karte von M . Sei $p: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ die Projektion auf die letzten $m - k$ Koordinaten. Dann ist $f = ph: U \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ eine Abbildung mit den in (2) genannten Eigenschaften.

(2) \Rightarrow (1). Es genügt nach (7.1.2), M als offene Teilmenge von \mathbb{R}^m anzunehmen. Dann verwenden wir (3.4). \square

(7.7) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Sei $f: M \rightarrow N$ eine bijektive glatte Abbildung. Das Differential habe konstanten Rang. Dann ist f ein Diffeomorphismus.
2. Es gibt injektive Immersionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, die kein Homöomorphismus auf das Bild sind.

8 Beispiele

Außerhalb des Nullpunktes hat $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$ ein von Null verschiedenes Differential. Deshalb ist $f^{-1}(c^2) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid c = \|x\|\} = S^n(c)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} . Wir nennen $S^n = S^n(1)$ die n -Sphäre. Die $S^n(c)$ sind alle untereinander diffeomorph (radiale Projektion). Die Untermannigfaltigkeit S^n ist diffeomorph zu der im zweiten Abschnitt durch Karten definierten Mannigfaltigkeit S^n . Zum Beweis zeigt man, daß die stereographischen Karten auch Karten für die Untermannigfaltigkeit S^n sind. Dazu benutzt man (5.1.1).

(8.1) Stiefel-Mannigfaltigkeiten. Sei $V_k(\mathbb{R}^n)$ die Menge der orthonormalen k -Tupel (v_1, \dots, v_k) von Vektoren $v_j \in \mathbb{R}^n$. Schreiben wir v_j als Zeilenvektor in eine Matrix, so ist $V_k(\mathbb{R}^n)$ eine Teilmenge des Vektorraumes $M = M(k, n; \mathbb{R})$ der reellen $k \times n$ -Matrizen. Sei $\text{Sym}(k; \mathbb{R}) = S$ die Menge der symmetrischen $k \times k$ -Matrizen. Die Abbildung $f: M \rightarrow S$, $A \mapsto A \cdot A^t$ hat $V_k(\mathbb{R}^n)$ als Urbild der Einheitsmatrix E . Das Differential von f an der Stelle E ist $X \mapsto XA^t + AX^t$. Die Matrix $X = \frac{1}{2}BA$, $B \in S$ hat das Bild B . Also ist E ein regulärer Wert von f und folglich $V_k(\mathbb{R}^n)$ eine Untermannigfaltigkeit von M . Übrigens ist $V_n(\mathbb{R}^n) = O(n)$.

Man nennt $V_k(\mathbb{R}^n)$ die *Stiefel-Mannigfaltigkeit* der orthonormierten k -Beine im \mathbb{R}^n . \diamond

(8.2) Matrizen. Sei $M(m, n)$ der Vektorraum der reellen $m \times n$ -Matrizen und $M(m, n; k)$ für $0 \leq k \leq \min(m, n)$ die Teilmenge der Matrizen vom Rang k . Dann ist $M(m, n; k)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $M(m, n)$ der Dimension $k(m + n - k)$.

BEWEIS. Wir schreiben eine Matrix $X \in M(m, n; k)$ in Kästchenform $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mit einer (k, k) -Matrix A . Da $X \mapsto \det(A)$ stetig ist, erkennen wir $U = \{X \in M(m, n) \mid \det(A) \neq 0\}$ als offene Teilmenge. Wegen

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

hat $X \in U$ genau dann den Rang k , wenn $D = CA^{-1}B$ ist. Die Abbildung

$$\varphi: U \rightarrow M(m - k, n - k), \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto D - CA^{-1}B$$

erfüllt $\varphi^{-1}(0) = U \cap M(m, n; k)$, und ihr Differential hat, wie durch Variation von D allein zu ersehen ist, überall den Rang $(m - k)(n - k)$. aus (5.5) sehen wir, daß $U \cap M(m, n; k)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von U ist. Durch Vertauschen von Zeilen und Spalten (das sind Diffeomorphismen) wird eine analoge Aussage für Umgebungen anderer Matrizen aus $M(m, n; k)$ bewiesen. \diamond

(8.3) Brieskorn-Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten im \mathbb{C}^{n+1} die Teilmenge $W^{2n-1}(d)$ der (z_0, \dots, z_n) , die den beiden Gleichungen

$$z_0^d + z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0, \quad |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 2$$

genügen ($d \geq 1$). Dadurch wird eine glatte Untermannigfaltigkeit bestimmt. Allgemeiner gilt: Seien $a(1), \dots, a(n) \in \mathbb{N}$. Dann wird durch die $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, die den Gleichungen

$$z_1^{a(1)} + \dots + z_n^{a(n)} = 0, \quad |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1$$

genügen, eine glatte Untermannigfaltigkeit definiert [17] [68].

Die $W^{2n-1}(d)$ haben bemerkenswerte Eigenschaften. Sind d und n ungerade, so sind sie zu S^{2n-1} homöomorph, aber im allgemeinen nicht diffeomorph. Milnor zeigte 1956, daß es auf der 7-Sphäre nicht-diffeomorphe differenzierbare Strukturen gibt [96]. Derartige differenzierbare Mannigfaltigkeiten werden *exotische Sphären* genannt. Diese Entdeckung war die Geburtsstunde der Differentialtopologie, die sich im anschließenden Jahrzehnt stürmisch entwickelte. Die Arbeit von Kervaire und Milnor [82], in der das Problem der differenzierbaren Strukturen auf Sphären weitgehend geklärt wurde, ist ein Höhepunkt der Topologie. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt sind allein die differenzierbaren Strukturen auf der 4-Sphäre ein Mysterium. Die Beispiele $W^{2n-1}(d)$ wurden von Brieskorn [17] gefunden (siehe dazu auch [66] und [67, Werke II, p. 70]). Die Brieskornschen Beispiele

haben wesentlich die geometrische Untersuchung der Singularitäten von Polynomen angeregt [102]. Auf den grundlegenden Arbeiten von Freedman [47] und Donaldson [41] aufbauend kann man zeigen, daß es überabzählbar viele differenzierbare Strukturen auf der topologischen Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^4 gibt ([135]; auch [84] für weitere Bemerkungen dazu.) Systematische Darstellungen der neueren Theorie der 4-Mannigfaltigkeiten findet man in [48], [42] und [?]. \diamond

(8.4) Verallgemeinerte Rotationsflächen. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^k \setminus 0 \rightarrow S^{k-1} \times]0, \infty[, \quad x \mapsto (\|x\|^{-1}x, \|x\|)$$

ist ein Diffeomorphismus. Daraus erhalten wir einen Diffeomorphismus $\mathbb{R}^k \setminus 0 \cong S^{k-1} \times \mathbb{R}$. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine glatte Untermannigfaltigkeit ($N \geq 1$). Wir sehen dann

$$M \times S^b \subset \mathbb{R}^N \times S^b = \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \times S^b \cong \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{b+1} \setminus 0 \subset \mathbb{R}^{N+b}.$$

Insbesondere hat (Induktion nach r) ein Produkt $S^{n(1)} \times \dots \times S^{n(r)}$ eine Einbettung in den \mathbb{R}^N , $N = 1 + n(1) + \dots + n(r)$. \diamond

(8.5) Der Torus. Die Fläche $S^1 \times S^1$ heißt Torus. Sie läßt sich durch eine Ringfläche als glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 realisieren: Sei $0 < b < a$. Durch Rotation um die z -Achse des Kreises vom Radius b um $(a, 0)$ in der (x, z) -Ebene entsteht eine zu $S^1 \times S^1$ diffeomorphe Untermannigfaltigkeit.

Seien r und s positive Zahlen, die der Gleichung $r^2 + s^2 = 1$ genügen. Dann wird $S^1 \times S^1$ durch $(\lambda, \mu) \mapsto (r\lambda, s\mu)$ in die Einheitssphäre $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ als glatte Untermannigfaltigkeit $\{(z, w) \mid |z| = r, |w| = s\}$ eingebettet.

Sei $p > 1$ eine natürliche Zahl. Dann ist $\{(z_0, z_1) \mid z_0^p = z_1^p, |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit von S^3 . \diamond

(8.6) Torus-Knoten. Wir betrachten im \mathbb{C}^2 die Teilmenge $T(p, q)$ der (z, w) , die den beiden Gleichungen $z^p - w^q = 0$ und $|z|^2 + |w|^2 = 1$ genügen. Seien p und q teilerfremde natürliche Zahlen und größer als 1. Setzen wir z und w in Polarkoordinaten an, $z = r \exp(i\phi)$, $w = s \exp(i\psi)$, so sind r und s als positive Zahlen für alle $(z, w) \in T(p, q)$ gleich. Demnach liegt $T(p, q)$ in dem Torus $T = \{(z, w) \mid |z| = r, |w| = s\}$ und wird durch $\{(re^{iqt}, se^{ipt}) \mid 0 \leq t < 2\pi\}$ parametrisiert. Läuft t von 0 nach 2π , so läuft der zugehörige Kurvenpunkt q -mal um den einen und p -mal um den anderen Faktor des Torus. Wird der Torus als Ringfläche im \mathbb{R}^3 realisiert (8.4), so sind derartige Kurven verknotet und heißen (p, q) -Torusknoten. \diamond

(8.7) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Ist Y eine glatte Untermannigfaltigkeit von Z und $X \subset Y$ ein Teilraum, so ist X genau dann eine glatte Untermannigfaltigkeit von Y , wenn X eine glatte Untermannigfaltigkeit von Z ist. Ist X glatte Untermannigfaltigkeit, so gibt es um jeden Punkt $x \in X$ eine Karte (U, φ, V) von Z , so daß sowohl $\varphi(U \cap X)$ als auch $\varphi(U \cap Y)$ aus V durch Schnitte mit linearen Unterräumen entstehen. (An $X \subset Y \subset Z$ *angepaßte*

Karten. Analog für Inklusionen $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_r$ von Untermannigfaltigkeiten.)

2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2x^3 + 3zx^2 + 3x - zy^2 - 2y = 1\}$ ist eine zu \mathbb{R}^2 diffeomorphe glatte Untermannigfaltigkeit. Betrachtet man die $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, die derselben Gleichung genügen, so erhält man eine glatte komplexe Untermannigfaltigkeit von \mathbb{C}^3 , die nicht zu \mathbb{C}^2 homöomorph ist, wohl aber zusammenziehbar [?].

3. Der Graph $G \subset \mathbb{R}^2$ der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist keine C^1 -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 wohl aber eine topologische C^0 -Untermannigfaltigkeit. Es gibt eine injektive C^∞ -Abbildung $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit dem Bild G .

4. Man betrachte die Mannigfaltigkeit $W^{2n-1}(2)$ aus (8.3). Indem man $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ in Real- und Imaginärteil $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$, zerlegt, wird $W^{2n-1}(2)$ durch

$$|x|^2 - |y|^2 + 2i\langle x, y \rangle = 0, \quad |x|^2 + |y|^2 = 2$$

beschrieben, also durch alle Paare x, y mit $|x| = |y| = 1$ und $\langle x, y \rangle = 0$.

9 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Ein Beispiel einer Mannigfaltigkeit mit Rand wird die n -dimensionale Vollkugel $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ sein. Diese Teilmenge ist durch eine Ungleichung definiert. Halbräume sind die einfachsten derartigen Teilmengen. Für eine von Null verschiedene lineare Abbildung $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichne $H(\lambda)$ den zugehörigen *Halbraum* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda(x) \geq 0\}$ und $\partial H(\lambda) = \text{Kern } \lambda$ seinen *Rand*. Typische Halbräume sind $\mathbb{R}_\pm^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \pm x_1 \geq 0\}$, und jeden anderen Halbraum des \mathbb{R}^n kann man durch einen linearen Automorphismus L des \mathbb{R}^n bijektiv auf \mathbb{R}_+^n abbilden; dabei gilt dann $L(\partial H(\lambda)) = \partial \mathbb{R}_+^n = 0 \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Wir brauchen glatte Abbildungen auf Halbräumen. Zu diesem Zweck vereinbaren wir: Ist $A \subset \mathbb{R}^m$ irgendeine Teilmenge, so heißt $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ *glatt*, wenn es zu jedem $a \in A$ eine offene Umgebung U von a in \mathbb{R}^m und eine glatte Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, die auf $U \cap A$ mit f übereinstimmt. Für pathologische A ist diese Vereinbarung problematisch, nicht aber für Halbräume. Das liegt an folgendem: Sei $H \subset \mathbb{R}^m$ ein Halbraum, $x \in \partial H$ und $\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt. Dann ist das Differential von φ in x wohldefiniert: Ist nämlich $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Erweiterung von $\varphi|_{U \cap H}$ auf eine offene Umgebung U von x in \mathbb{R}^m , so ist das Differential $D\Phi(x)$ unabhängig vom ausgewählten Φ .

Eine n -dimensionale *Mannigfaltigkeit mit Rand* ist ein Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis, bei dem jeder Punkt eine offene Umgebung U hat, die zu einer offenen Teilmenge eines Halbraumes von \mathbb{R}^n homöomorph ist. Ein Homöomorphismus $h: U \rightarrow V$ zwischen offenen Teilmengen $U \subset M$ und $V \subset H(\lambda)$, heißt *Karte um* $x \in U$ mit *Kartengebiet* U . Mit diesem Kartenbegriff können wir Begriffe aus dem ersten Abschnitt übertragen: glatt verbunden, Atlas, differenzierbare Struktur. Eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit Rand M ist demnach ein Paar, das aus einer n -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit mit Rand M und einer differenzierbaren Struktur (= einem maximalen C^∞ -differenzierbaren Atlas) auf M besteht. Statt Mannigfaltigkeit mit Rand sagen wir auch ∂ -Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen Mannigfaltig-

keiten mit Rand heißt *glatt*, wenn sie stetig ist und in den lokalen Koordinaten der Karten glatt.

Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, so ist der *Rand* ∂M die Teilmenge der Punkte, die bei wenigstens einer Karte auf den Rand des entsprechenden Halbraumes abgebildet werden. Das Komplement $M \setminus \partial M = \text{In}(M)$ ist das *Innere* von M . Falls x bei einer Karte auf den Rand eines Halbraumes abgebildet wird, so auch bei jeder anderen. Es gilt nämlich der Satz von der Invarianz des Randes:

(9.1) Notiz. Sei $\varphi: V \rightarrow W$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen $V \subset H(\lambda)$ und $W \subset H(\mu)$ von Halbräumen des \mathbb{R}^n . Dann gilt $\varphi(V \cap \partial H(\lambda)) = W \cap \partial H(\mu)$.

BEWEIS. Wir setzen $\partial V = V \cap \partial H(\lambda)$ und $\text{In}(V) = V \setminus \partial V$. Sei $x \in \text{In}(V)$. Dann gibt es eine offene Umgebung V_0 von x in \mathbb{R}^n , die in V enthalten ist. Nach dem Umkehrsatz der Differentialrechnung ist $\varphi(V_0)$ offen in \mathbb{R}^n . Außerdem ist $\varphi(V_0) \subset W$ und deshalb gilt $\varphi(V_0) \subset \text{In}(W)$, da $\partial W = \text{Rd}(W)$ ist. Es folgt $\varphi(\text{In}(V)) \subset \text{In}(W)$. Sei ψ die Umkehrung von φ und sei $x \in \partial V$. Wäre $\varphi(x) \in \text{In}(W)$, so wäre $x = \psi\varphi(x) \in \text{In}(V)$, nach dem eben Gezeigten; Widerspruch. Also induziert φ bijektive Abbildungen $\partial V \rightarrow \partial W$ und $\text{In}(V) \rightarrow \text{In}(W)$, die dann notwendig Diffeomorphismen sind. \square

(9.2) Notiz. Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist entweder $\partial M = \emptyset$ oder ∂M eine glatte $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit. Es ist $M \setminus \partial M$ eine glatte n -Mannigfaltigkeit mit leerem Rand.

BEWEIS. Sei $\partial M \neq \emptyset$. Die Behauptung über ∂M besagt genauer, daß die differenzierbare Struktur auf M in der folgenden Weise eine differenzierbare Struktur auf ∂M induziert. Man überzeugt sich leicht davon, daß M einen Atlas hat, der aus Karten (U, h, V) mit in \mathbb{R}_+^n offenen V besteht. Als Karten für ∂M nehmen wir die Einschränkungen $h: U \cap \partial M \rightarrow V \cap \partial \mathbb{R}_+^n$ solcher Karten, die dann einen glatten Atlas für ∂M bilden. Es ist $V \cap \partial \mathbb{R}_+^n$ offen in $0 \times \mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Als Karten für $M \setminus \partial M$ nehmen wir die Einschränkungen $h: U \cap (M \setminus \partial M) \rightarrow V \cap (\mathbb{R}_+^n \setminus \partial \mathbb{R}_+^n)$. Die letzte Menge ist offen in \mathbb{R}^n . \square

Formal kann eine Mannigfaltigkeit mit Rand einen leeren Rand haben. Dieser sprachliche Widerspruch sollte zu ertragen sein¹. Ist $\partial M = \emptyset$, so heißt M auch *Mannigfaltigkeit ohne Rand*, und dieser Begriff ist dann äquivalent zu dem in Abschnitt 1 definierten Begriff einer Mannigfaltigkeit.

Der Begriff einer Untermannigfaltigkeit läßt bei Mannigfaltigkeiten mit Rand verschiedene Deutungen zu. Wir behandeln zwei Fälle, in denen sich der Rand der Untermannigfaltigkeit in übersichtlicher Lage zum Rand der umfassenden Mannigfaltigkeit befindet.

Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit mit Rand. Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt *k-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit* (vom Typ 1) von M , wenn gilt: Zu

¹Es ist manchmal sogar zweckmäßig, die leere Menge als n -dimensionale Mannigfaltigkeit zuzulassen.

jedem $x \in N$ gibt es eine Karte (U, h, V) , $V \subset \mathbb{R}_+^n$ offen, von M um x mit der Eigenschaft $h(U \cap N) = V \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$. Solche Karten von M heißen N *angepaßt*. Es ist $V \cap (\mathbb{R}^k \times 0) \subset \mathbb{R}_+^k \times 0 = \mathbb{R}_+^k$ offen in \mathbb{R}_+^k . Ein Diffeomorphismus auf eine Untermannigfaltigkeit vom Typ 1 heißt *Einbettung vom Typ 1*. Zwei Folgerungen zieht man unmittelbar aus der Definition.

(9.3) Notiz. Sei $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit vom Typ 1 von M . Die Einschränkungen $h: U \cap N \rightarrow h(U \cap N)$ der an N angepaßten Karten bilden einen glatten Atlas für N , der N zu einer glatten Mannigfaltigkeit mit Rand macht. \square

(9.4) Notiz. Sei $N \subset M$ Untermannigfaltigkeit vom Typ 1 von M . Dann ist $N \cap \partial M = \partial N$ und ∂N ist Untermannigfaltigkeit von ∂M . \square

Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit ohne Rand. Eine Teilmenge $N \subset M$ ist eine k -dimensionale glatte *Untermannigfaltigkeit* (vom Typ 2) von M , wenn gilt: Zu jedem $x \in N$ gibt es eine Karte (U, h, V) von M um x mit der Eigenschaft $h(U \cap N) = V \cap (\mathbb{R}_+^k \times 0)$. Solche Karten heißen N *angepaßt*. Ein Diffeomorphismus auf eine Untermannigfaltigkeit vom Typ 2 heißt *Einbettung vom Typ 2*. Auch hier gilt die zu (9.3) analoge Aussage, und ∂N ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von M . Man kann natürlich auch Mischformen der Typen 1 und 2 betrachten.

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand und N eine ohne Rand. Durch Produktbildung von Karten wird $M \times N$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Es gilt $\partial(M \times N) = \partial M \times N$. Das Produkt zweier glatter Mannigfaltigkeiten mit nicht-leerem Rand ist aber nicht ohne besondere Vorkehrung eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand; das Problem ist die differenzierbare Struktur in einer Umgebung von $\partial M \times \partial N$. Dazu später mehr.

Ist $x \in \partial M$ und $(U, h, V) = k$ eine Karte um x mit in \mathbb{R}_+^n offenem V , so haben wir einen Isomorphismus $i_k: T_x(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$, wie im dritten Abschnitt erklärt wurde. Sei $i_k(w) = v = (v_1, \dots, v_n)$. Wir sagen, w *weist nach innen* (nach *außen*, ist *tangential* zu ∂M), wenn $v_1 > 0$ ($v_1 < 0$, $v_1 = 0$) ist. Man überlege sich, daß diese Disjunktion nicht von der Wahl der Karte abhängt. Das beruht auf Folgendem. Sei $f = (f_1, \dots, f_n)$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen von \mathbb{R}_+^n , der den Nullpunkt festläßt. Dann hat die Funktionalmatrix im Nullpunkt die Form

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ 0 & D_2 f_2 & \cdots & D_n f_2 \\ \vdots & & & \\ 0 & D_2 f_n & \cdots & D_n f_n \end{pmatrix}$$

mit positivem $D_1 f_1$ (darin ist D_i die i -te partielle Ableitung). Die Inklusion $j: \partial M \subset M$ ist glatt und $T_x j: T_x(\partial M) \rightarrow T_x(M)$ ist injektiv. Das Bild von $T_x j$ besteht aus den zu ∂M tangentialen Vektoren. Wir betrachten $T_x j$ meist als Inklusion.

Der nächste Satz zeigt insbesondere, daß D^n eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n vom Typ 2 ist.

(9.5) Satz. *Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit ohne Rand. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und $0 \in \mathbb{R}$ regulärer Wert von f . Dann ist $f^{-1}[0, \infty[$ glatte Untermannigfaltigkeit von M mit Rand $f^{-1}(0)$ vom Typ 2.*

BEWEIS. Wir haben zu zeigen, daß um jeden Punkt $x \in f^{-1}[0, \infty[$ eine dieser Menge angepaßte Karte existiert. Ist $f(x) > 0$, so ist x in der offenen Untermannigfaltigkeit $f^{-1}]0, \infty[$ enthalten, und deshalb gibt es sicher die gewünschten Karten. Sei also $f(x) = 0$. Dann wenden wir (3.6.3) an. \square

(9.6) Satz. *Sei $f: M \rightarrow N$ glatt und $y \in \text{Bild}f \cap (N \setminus \partial N)$ ein regulärer Wert für f und $f|_{\partial M}$. Dann ist $P = f^{-1}(y) \subset M$ eine glatte Untermannigfaltigkeit vom Typ 1 von M .*

BEWEIS. Wir führen mittels angepaßter Karten das Problem auf eine lokale Situation zurück. Sei also U offen in \mathbb{R}_+^m und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung, die $0 \in \mathbb{R}^n$ als regulären Wert von f und $f|_{\partial U}$ hat ($n \geq 1, m > n$).

Nach (4.5) ist $f^{-1}(0) \cap \text{In}(U)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\text{In}(U)$. Es bleibt deshalb nur zu zeigen, daß es um Punkte $x \in \partial U \cap f^{-1}(0)$ angepaßte Karten gibt. Da x ein regulärer Punkt von $f|_{\partial U}$ ist, hat die Jacobi-Matrix $(D_i f_j(x) \mid 2 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ den Rang n . Durch Vertauschung der Koordinaten x_2, \dots, x_m können wir deshalb erreichen und annehmen, daß die Matrix

$$(D_i f_j(x) \mid m - n + 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$$

den Rang n hat. Diese Vertauschung ist ein Diffeomorphismus von \mathbb{R}_+^m und deshalb für unsere Untersuchung schadlos. Unter der neuen Annahme hat

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}_+^m, \quad u \mapsto (u_1, \dots, u_{m-n}, f_1(u), \dots, f_n(u))$$

an der Stelle x ein bijektives Differential und liefert nach dem Umkehrsatz eine angepaßte Karte um x . (Nach Definition der Differenzierbarkeit von f läßt sich f glatt auf eine Umgebung von x in \mathbb{R}^m erweitern. Der Umkehrsatz wird auf eine damit gegebene Erweiterung Φ von φ angewendet. Die in \mathbb{R}_+^m liegenden Teile werden durch Φ aufeinander abgebildet.) \square

10 Verheftungen

Die Definition einer Mannigfaltigkeit mittels Karten kann auch so gelesen werden: Eine Mannigfaltigkeit entsteht durch Identifikation aus den Definitionsbereichen der lokalen Parametrisierungen. Identifiziert wird durch die Kartenwechsel. In ähnlicher Weise werden häufig Räume aus Teilen aufzubauen sein. Deshalb formalisieren wir hier derartige Prozesse.

Sei $(U_j \mid j \in J)$ eine Familie von Mengen. Für jedes Paar $(i, j) \in J \times J$ sei eine Teilmenge $U_i^j \subset U_i$ gegeben, sowie eine Bijektion $g_i^j: U_i^j \rightarrow U_j^i$. Es sollen folgende Axiome gelten:

$$(1) \quad U_j = U_j^j \text{ und } g_j^j = \text{id}.$$

(2) Für jedes Tripel $(i, j, k) \in J \times J \times J$ induziert g_i^j eine Bijektion

$$g_i^j: U_i^j \cap U_i^k \longrightarrow U_j^i \cap U_j^k,$$

und es gilt $g_j^k \circ g_i^j = g_i^k$ als Abbildung von $U_i^j \cap U_i^k$ nach $U_k^i \cap U_k^j$.

Wir nennen Familien (U_j, U_j^k, g_j^k) mit den genannten Eigenschaften eine Familie von *Klebedaten* oder ein *Klebedatum*.

Zu einem Klebedatum betrachten wir die disjunkte Summe $\coprod_{j \in J} U_j$ und darauf die Äquivalenzrelation

$$x \in U_i \sim y \in U_j \quad \text{sofern} \quad x \in U_i^j \quad \text{und} \quad g_i^j(x) = y.$$

Sei X die Menge der Äquivalenzklassen und $h_i: U_i \rightarrow X$ die Abbildung, die jedem $x \in U_i$ seine Klasse zuordnet. Dann gilt: h_i ist injektiv; setzen wir $U(i) = \text{Bild } h_i$, so ist $U(i) \cap U(j) = h_i(U_i^j)$.

Sei umgekehrt X Quotient von $\coprod_i U_i$ nach einer Äquivalenzrelation, so daß alle kanonischen Quotientabbildungen $h_i: U_i \rightarrow X$ injektive Abbildungen auf $U(i)$ sind. Wir setzen $U_i^j = h_i^{-1}(U(i) \cap U(j))$ und $g_i^j = h_j^{-1} \circ h_i: U_i^j \rightarrow U_j^i$. Dann sind die U_i, U_i^j, g_i^j ein Klebedatum.

(10.1) Notiz. In einem Klebedatum (U_i, U_i^j, g_i^j) seien die U_i topologische Räume, die $U_i^j \subset U_i$ offen und die $g_i^j: U_i^j \rightarrow U_j^i$ Homöomorphismen. Trage X die Quotienttopologie bezüglich der Restklassenabbildung $p: \coprod U_i \rightarrow X$. Dann gilt:

- (1) Die h_i sind Homöomorphismen auf offene Teilmengen von X .
- (2) Sind alle U_i Hausdorff-Räume, so ist X genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn $\gamma_i^j: U_i^j \rightarrow U_i \times U_j$, $x \mapsto (x, g_i^j(x))$ für alle $(i, j) \in J \times J$ eine abgeschlossene Einbettung ist.

Seien die U_i glatte n -Mannigfaltigkeiten und die g_i^j Diffeomorphismen. Dann ist X lokal euklidisch von der Dimension n . Ist X hausdorffsch mit abzählbarer Basis, so trägt X genau eine Struktur einer glatten n -Mannigfaltigkeit, bezüglich der die h_i glatte Einbettungen auf offene Untermannigfaltigkeiten sind. \square

Der einfachste Fall von (10.1) liegt vor, wenn nur zwei Mannigfaltigkeiten U_1, U_2 gegeben sind und $U_1 \supset V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \subset U_2$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilen ist. Dann ist $X = U_1 \cup_{\varphi} U_2$ der Raum, der aus $U_1 + U_2$ entsteht, indem $v \in V_1$ mit $\varphi(v) \in V_2$ identifiziert wird.

(10.2) Beispiel. Sei $U_1 = U_2 = \mathbb{R}^n$ und $U_1^2 = U_2^1 = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Ist $g_1^2 = \text{id}$, so entsteht ein Raum, der nicht hausdorffsch ist, der sogenannte \mathbb{R}^n mit „zwei Nullpunkten“. Ist $g_1^2(y) = y\|y\|^{-2}$, so ist das Resultat diffeomorph zu S^n . \diamond

11 Partition der Eins

Ein wichtiges Beweismittel der Topologie sind Partitionen der Eins. Eine Familie $(C_j \mid j \in J)$ eines Raumes X heißt *lokal endlich*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung hat, die nur endlich viele C_j trifft. Der *Träger* $\text{Tr}(t)$ von $t: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist die abgeschlossene Hülle von $t^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Eine Familie $T = (t_j: X \rightarrow \mathbb{R} \mid j \in J)$

von stetigen Funktionen heißt *lokal endlich*, wenn $(\text{Tr}(t_j) \mid j \in J)$ lokal endlich ist. Wir nennen T eine *Partition der Eins* oder *Teilung, Zerlegung der Eins*, wenn T lokal endlich ist, wenn alle t_j keine negativen Werte haben und wenn für alle $x \in X$ die Gleichung $\sum_{j \in J} t_j(x) = 1$ gilt. Eine Überdeckung $\mathcal{U} = (U_k \mid k \in K)$ von X heißt *numerierbar*, wenn es eine Partition der Eins $T = (t_j \mid j \in J)$ gibt, so daß zu jedem $j \in J$ ein $k \in K$ mit $\text{Tr}(t_j) \subset U_k$ existiert; T ist dann eine *Numerierung* von \mathcal{U} und der Überdeckung *untergeordnet*. Manchmal möchte man, daß die Numerierung dieselbe Indexmenge hat. Dazu wähle man eine Abbildung $J \rightarrow K, j \mapsto k(j)$ mit $\text{Tr}(t_j) \subset U_{k(j)}$. Sei $J(k) = \{j \in J \mid k(j) = k\}$ und $\sigma_k(x) = \sum_{j \in J(k)} t_j(x)$, wobei $\sigma_k(x) = 0$ falls $J(k) = \emptyset$ ist. Mit den $(\sigma_k \mid k \in K)$ hat man dann eine geeignete Partition der Eins.

Bislang haben wir nicht benutzt, daß Mannigfaltigkeiten eine abzählbare Basis haben. Diese Eigenschaft wird im Beweis des nächsten Satzes gebraucht. (Er gilt allgemein für lokal kompakte Hausdorff-Räume mit abzählbarer Basis.)

(11.1) Satz. *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Es gibt eine Folge kompakter Teilmengen $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ mit den Eigenschaften $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ und $A_{i-1} \subset A_i^\circ$. Eine solche Folge nennen wir eine kompakte Ausschöpfung von M .*

BEWEIS. Jeder Punkt $p \in M$ besitzt eine offene Umgebung U derart, daß \bar{U} kompakt ist, denn diese Aussage gilt ja, falls M eine offene Teilmenge eines euklidischen Raumes ist. Sei also $(W_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ eine offene Überdeckung von M durch Mengen W_λ mit kompaktem Abschluß. Sei $(U_i \mid i \in \mathbb{N})$ eine abzählbare Basis von M . Jedes W_λ ist dann Vereinigung von gewissen Mengen U_i . Diejenigen U_i , die in einem W_λ liegen, überdecken also M und haben kompakten Abschluß. Mithin gibt es eine abzählbare offene Überdeckung $(W_i \mid i \in \mathbb{N})$ von M durch Mengen mit kompaktem Abschluß. Mit einer solchen Überdeckung definieren wir die A_i induktiv durch $A_1 = \bar{W}_1$ und für $i > 1$ durch $A_i = \bigcup_{j=1}^{k(i)} \bar{W}_j$, wobei $k(i)$ die kleinste Zahl größer als i ist, für die A_{i-1} in $\bigcup_{j=1}^{k(i)} W_j$ enthalten ist. Eine solche Zahl gibt es, da A_{i-1} kompakt ist. Als endliche Vereinigung kompakter Mengen ist A_i kompakt. Nach Konstruktion hat die Folge die weiteren gewünschten Eigenschaften. \square

(11.2) Satz. *Sei M eine n -Mannigfaltigkeit und $(U_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung von M . Dann gibt es einen Atlas $(V_k, h_k, B_k \mid k \in \mathbb{N})$ von M mit den folgenden Eigenschaften:*

- (1) *Jede Menge V_k ist in einer Menge U_j enthalten.*
- (2) *$B_k = U_3(0)$. Die $h_k^{-1}U_1(0)$ überdecken M .*
- (3) *Jeder Punkt von M liegt nur in endlich vielen Kartenbereichen V_k .*

Ist M glatt, dann kann der Atlas aus der differenzierbaren Struktur von M gewählt werden. Für Mannigfaltigkeiten mit Rand hat man angepaßte Karten zu verwenden, also die $U_r(0)$ eventuell durch Schnitte mit Halbräumen zu ersetzen.

BEWEIS. Wir wählen eine Ausschöpfung nach (11.1). Zu jedem $x \in K_i = A_{i+1} \setminus A_i^\circ$ wählen wir eine in x zentrierte Karte der Form $(U_x, \varphi_x, U_3(0))$, so daß U_x in $A_{i+2}^\circ \setminus A_{i-1}$ enthalten ist ($A_0 = A_{-1} = \emptyset$) sowie in einer Menge der

Form U_j . Davon wählen wir endlich viele, so daß die Urbilder $\varphi_x^{-1}(U_1(0))$ das kompakte K_i überdecken. Insgesamt bilden die so für jedes i gewählten Karten eine abzählbare Familie mit den genannten Eigenschaften. (Im Falle einer kompakten Mannigfaltigkeit braucht man natürlich nur endlich viele Karten.) \square

(11.3) Satz. *Jede offene Überdeckung $(U_j \mid j \in J)$ einer glatten Mannigfaltigkeit ist numerierbar durch eine abzählbare glatte Partition der Eins aus Funktionen mit kompaktem Träger. Mannigfaltigkeiten sind parakompakt.*

BEWEIS. Die Funktion $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda(t) = 0$ für $t \leq 0$, $\lambda(t) = \exp(-t^{-1})$ für $t > 0$, ist glatt. Für $\varepsilon > 0$ ist $\varphi_\varepsilon(t) = \lambda(t)(\lambda(t) + \lambda(\varepsilon - t))^{-1}$ ebenfalls glatt, und es gilt $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$, $\varphi_\varepsilon(t) = 0 \Leftrightarrow t \leq 0$, $\varphi_\varepsilon(t) = 1 \Leftrightarrow t \geq \varepsilon$. Durch $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi_\varepsilon(\|x\| - r)$ schließlich wird eine glatte Abbildung definiert, die $0 \leq \psi(x) \leq 1$, $\psi(x) = 1 \Leftrightarrow \|x\| \leq r$, $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow \|x\| \geq r + \varepsilon$ erfüllt.

Wir wählen einen Atlas nach (11.2), verwenden die Funktionen ψ für $r = 1$ und $\varepsilon = 1$ und definieren ψ_i durch $\psi \circ h_i$ auf V_i und als Null auf dem Komplement. Dann bilden die $\sigma_k = s^{-1}\psi_k$ mit $s = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m$ eine glatte, lokal endliche Partition der Eins, die $(U_j \mid j \in J)$ untergeordnet ist. Die beteiligten Funktionen haben kompakten Träger. \square

(11.4) Notiz. *Seien C_0 und C_1 abgeschlossene disjunkte Mengen der glatten Mannigfaltigkeit M . Dann gibt es eine glatte Funktion $\varphi: M \rightarrow [0, 1]$, die auf C_j nur den Wert j annimmt.*

BEWEIS. Wir wenden den vorigen Satz auf die Überdeckung durch die $U_j = M \setminus C_j$ an. \square

(11.5) Notiz. *Sei A abgeschlossen in der glatten Mannigfaltigkeit M und U eine offene Umgebung von A in M . Sei $f: U \rightarrow [0, 1]$ glatt. Dann gibt es eine glatte Abbildung $F: M \rightarrow [0, 1]$, die auf A mit f übereinstimmt.*

BEWEIS. Sei (φ_0, φ_1) eine Partition der Eins, die $(U, M \setminus A)$ untergeordnet ist. Wir setzen $F(x) = \varphi_0(x)f(x)$ für $x \in U$ und $F(x) = 0$ sonst. \square

(11.6) Satz. *Es gibt eine glatte eigentliche Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.*

BEWEIS. Eine Abbildung heißt hier *eigentlich*, wenn das Urbild einer kompakten Menge kompakt ist. Wir wählen eine abzählbare Partition der Eins $(\tau_k \mid k \in \mathbb{N})$ mit kompakten Trägern der τ_k . Damit setzen wir $f = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \tau_k: M \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $x \notin \bigcup_{j=1}^n \text{Tr}(\tau_j)$, so ist $1 = \sum_{j \geq 1} \tau_j(x) = \sum_{j > n} \tau_j(x)$ und deshalb $f(x) = \sum_{j > n} j \tau_j(x) > n$. Also ist $f^{-1}[-n, n]$ in $\bigcup_{j=1}^n \text{Tr}(\tau_j)$ enthalten und folglich kompakt. \square

Wir geben nun eine typische Anwendung der Partitionen der Eins, die alsbald auch in allgemeinerer Form für Mannigfaltigkeiten bewiesen wird.

(11.7) Satz. *Sei $A \subset U_0 \subset U \subset \mathbb{R}^n$ mit offenen Mengen U_0 und U und einer in U abgeschlossenen Menge A . Sei $f: U \rightarrow W$ eine stetige Abbildung in eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^k$, deren Einschränkung auf U_0 glatt ist. Zu jeder stetigen Funktion $\varepsilon: U \rightarrow]0, \infty[$ gibt es eine glatte Abbildung $g: U \rightarrow W$, so daß*

- (1) $\|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon(x)$ für alle $x \in U$.
 (2) $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$.

BEWEIS. Falls $W \neq \mathbb{R}^k$ ist, so betrachten wir die positive stetige Funktion $\varepsilon_1(x) = \min(\varepsilon(x), \frac{1}{2}d(f(x), \mathbb{R}^k \setminus W))$. (Hier bezeichnet $d(x, Z)$ den Abstand des Punktes x von der Menge Z bezüglich der Metrik d .) Erfüllt dann $g: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Ungleichung (1) des Satzes, so liegt das Bild von g in W . Es genügt deshalb, den Fall $W = \mathbb{R}^k$ zu betrachten.

Wegen der Stetigkeit von f und ε gibt es zu jedem $p \in U \setminus A$ eine offene Umgebung U_p von p in $U \setminus A$, so daß $\|f(x) - f(p)\| \leq \varepsilon(x)$ für alle $x \in U_p$. Sei $\tau_0, \tau_p \mid p \in U \setminus A$ eine glatte Partition der Eins, die $U_0, U_p \mid p \in U \setminus A$ untergeordnet ist. Dann wird durch $g(x) = \tau_0(x)f(x) + \sum_{p \in U \setminus A} \tau_p(x)f(p)$ eine glatte Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ definiert. Wegen $\text{Tr}(\tau_p) \subset U_p \subset U \setminus A$ gilt $g(a) = f(a)$ für $a \in A$. Es ist $g(x) - f(x) = \sum_{p \in U \setminus A} \tau_p(x)(f(p) - f(x))$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|g(x) - f(x)\| &\leq \sum_{p \in U \setminus A} \tau_p(x) \|f(p) - f(x)\| = \sum_{p \in U \setminus A, x \in U_p} \tau_p(x) \|f(p) - f(x)\| \\ &\leq \sum \tau_p(x) \varepsilon(x) \leq \varepsilon(x). \end{aligned}$$

Damit hat g die im Satz behaupteten Eigenschaften. \square

12 Eindimensionale Mannigfaltigkeiten

Wir benutzen nun die voranstehenden Begriffsbildungen, um die eindimensionalen Mannigfaltigkeiten zu klassifizieren.

(12.1) Satz. *Eine zusammenhängende eindimensionale glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand ist diffeomorph zu \mathbb{R} oder zu S^1 .*

Einzelne Beweisschritte formulieren wir als Lemma. Zunächst eine Vorbereitung. Sei M eine zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit. Da M eine abzählbare Basis hat, gibt es einen Atlas aus Karten (U_j, h_j, V_j) , $j \in J$ mit den folgenden Eigenschaften: J ist abzählbar; V_j ist ein offenes Intervall; für $i \neq j$ ist $U_i \cap U_j$ von U_i und U_j verschieden. Es ist nützlich zu bemerken, daß durch geeignete Normierung V_j als ein beliebiges offenes Intervall gewählt werden kann.

Ist $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, so ist $h_i(U_i \cap U_j) = V_i^j$ eine nichtleere offene Teilmenge des Intervalls V_i . Diese Menge ist deshalb eine disjunkte Vereinigung von offenen Teilintervallen. Ist $a < b < c$, so nennen wir b ein inneres und c ein randständiges Ende des Teilintervalls $]b, c[$ von $]a, c[$.

(12.2) Lemma. *Kein Teilintervall von V_i^j hat einen zweipunktigen Rand in V_i . Es besteht folglich V_i^j höchstens aus zwei Teilintervallen, die jeweils an den Enden von V_i liegen.*

BEWEIS. Es ist $U_i \cup U_j$ homöomorph zu dem Raum Z , der aus $V_i + V_j$ durch die Identifizierung $g_i^j = h_j h_i^{-1}: V_i^j \rightarrow V_j^i$ entsteht. Nach Voraussetzung ist Z

hausdorffsch. Enthielte nun V_i^j innere Teilintervalle (also solche mit zweipunkti-
gem Rand), so wäre im Widerspruch zu (6.1) das Bild von $V_i^j \rightarrow V_i \times V_j, x \mapsto$
 $(x, g_i^j(x))$ nicht abgeschlossen. \square

Ebenso sieht man:

(12.3) Lemma. *Die Abbildung h_i^j bildet jede Komponente von V_i^j diffeomorph
auf eine Komponente von V_j^i so ab, daß ein inneres Ende einem randständigen
entspricht und umgekehrt.* \square

(12.4) Lemma. *Besteht V_i^j und damit auch V_j^i aus zwei Komponenten, so ist
 $M = U_i \cup U_j$ und M ist kompakt.*

BEWEIS. Ist $U_i \cup U_j$ kompakt, so ist wegen des Zusammenhangs von M schon
 $M = U_i \cup U_j$, da $U_i \cup U_j$ dann sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Seien
 $K_i \subset U_i$ kompakte Teilmengen, so daß $h_i(K_i)$ ein abgeschlossenes Intervall ist,
das beide Komponenten von V_i^j trifft. Dann ist wegen (12.4) $M = K_1 \cup K_2$, also
 M kompakt. Wir können übrigens K_i so wählen, daß $K_1 \cap K_2$ aus zwei Punkten
besteht, und sehen daraus leicht, daß M jedenfalls homöomorph zu S^1 ist, als
Quotient zweier Intervalle mit identifizierten Endpunkten. \square

(12.5) Lemma. *Sei $\alpha: J \rightarrow J$ ein monoton wachsender Diffeomorphismus von
 $J =]0, 1[$. Sei $0 < \varepsilon < 1$ gegeben. Dann gibt es $\eta \in]\varepsilon, 1[$ und einen Diffeomor-
phismus $\delta: J \rightarrow J$, der für $x \leq \varepsilon$ mit α übereinstimmt und für $x \geq \eta$ die Identität
ist.*

BEWEIS. Sei $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\lambda(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $\lambda(x) = \exp(-x^{-1})$ für
 $x > 0$ definiert. Das ist bekanntlich eine für $x > 0$ streng monoton wachsende
 C^∞ -Funktion. Für $a < b$ bilden wir damit

$$\psi_{a,b}(x) = 1 - \frac{\lambda(x-a)}{\lambda(x-a) + \lambda(b-x)}.$$

Sei $0 < M < 1$ und $\varepsilon < \zeta < 1$ so gewählt, daß für $x < \zeta$ die Ungleichung
 $\alpha(x) < M$ gilt. Sei $\eta = \psi_{\varepsilon, \zeta}$. Dann ist

$$\beta(x) = \alpha(x)\eta(x) + M(1 - \eta(x))$$

eine C^∞ -Funktion, die für $x \leq \varepsilon$ mit α übereinstimmt, für $x \geq \zeta$ konstant gleich
 M ist und für $x < \zeta$ streng monoton wachsend. Sei $\max(\zeta, M) < \eta < 1$. In
analoger Weise verschafft man sich eine Funktion γ , die für $x \leq \varepsilon$ Null ist, für
 $x \geq \eta$ gleich $x - M$ und für $x \geq \varepsilon$ streng monoton wachsend. Die Funktion
 $\delta = \beta + \gamma$ hat die gewünschten Eigenschaften. \square

(12.6) Lemma. *Habe V_i^j nur eine Komponente. Sei nach geeigneter Normie-
rung $V_i =]0, 2[$, $V_j =]1, 3[$ und $V_i^j =]1, 2[$. Dann gibt es einen Diffeomorphismus
 $\Psi: U_i \cup U_j \rightarrow]0, 3[$, der auf U_i mit h_i übereinstimmt.*

BEWEIS. Es ist $U_i \cap U_j$ vermöge h_i, h_j diffeomorph zu $W =]0, 2[\cup_\varphi]1, 3[$ mit
 $\varphi = g_i^j$. Es genügt also, einen Diffeomorphismus $W \rightarrow]0, 3[$ zu finden, der auf

$]0, 2[$ die Identität ist. Wenn man irgendeinen Diffeomorphismus $\alpha: W \rightarrow]0, 3[$ hat, der $]0, 2[$ auf sich abbildet, so setzt man ihn nach (12.7) mit einem Diffeomorphismus zusammen, der auf $]0, 2[$ mit α^{-1} übereinstimmt. Es genügt also α zu finden. Dazu wählen wir nach (12.6) einen monoton wachsenden Diffeomorphismus $\Phi:]1, 2[\rightarrow]1, 2[$, der auf $]1, 1 + \varepsilon[$ mit φ^{-1} übereinstimmt und auf $]2 - \eta, 2[$ die Identität ist. Sei $\Phi_2:]1, 3[\rightarrow]1, 3[$ die Erweiterung von Φ durch die Identität und $\Phi_1:]0, 2[\rightarrow]0, 2[$ die Erweiterung von $\Phi\varphi$ durch die Identität. Dann faktorisiert $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ über einen Diffeomorphismus $\alpha:]0, 2[\cup_\varphi]1, 3[\xrightarrow{\cong}]0, 3[$, wie gewünscht. \square

Sei M nicht kompakt. Nach der Beweismethode des letzten Lemmas argumentieren wir durch Induktion nach der Größe von J . Angenommen U_1, \dots, U_k seien Kartenbereiche, für die wir einen Diffeomorphismus

$$\varphi_k: W_k = U_1 \cup \dots \cup U_k \rightarrow]a, a + k + 1[$$

haben. Falls damit M noch nicht ausgeschöpft ist, gibt es eine weitere Karte, sagen wir U_{k+1} , so daß $C = U_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset$ (bei geeigneter Indizierung). Falls etwa C bei φ_k auf das obere Ende von $]a, a + k + 1[$ abgebildet wird, so können wir nach der Überlegung des letzten Lemmas φ_k zu einem Diffeomorphismus φ_{k+1} von $W_k \cup U_{k+1}$ mit $]a, a + k + 2[$ erweitern. Das erledigt den Fall nicht kompakter M induktiv.

Ist M kompakt, so können wir von einem endlichen J ausgehen. Durch wiederholte Anwendung des letzten Lemmas erreichen wir dann wie im nicht kompakten Fall schließlich eine Situation, in der M nach Art von (5.4) aus zwei Karten entsteht. Es bleibt zu zeigen, daß der Diffeomorphietyp von M dann eindeutig bestimmt ist. Indem wir zunächst von den beiden Paaren von Teilintervallen nur eines identifizieren und (12.8) anwenden, sehen wir, daß M aus $]0, 3[$ dadurch entsteht, daß $]0, 1[$ mit $]2, 3[$ durch Identifikation mit einem monoton wachsenden Diffeomorphismus ω entsteht. Es bleibt zu zeigen, daß das Resultat diffeomorph zum Standardfall $\omega(x) = x + 2$ ist. Zu diesem Zweck wendet man die Methode von Lemma (12.7) wiederum geeignet an. Wir bemerken, daß ein analoger Beweis auch die topologische Version von (12.3) liefert.

Aus den Normalformen entnimmt man ferner, daß jede eindimensionale Mannigfaltigkeit einen Atlas hat, dessen Kartenwechsel affine Abbildungen sind (also sehr spezielle Diffeomorphismen).

(12.7) Satz. *Eine kompakte zusammenhängende 1-Mannigfaltigkeit mit Rand ist diffeomorph zu $[0, 1]$.*

2 Mannigfaltigkeiten II

1 Einbettungen

In diesem Abschnitt beweisen wir den Einbettungssatz von Whitney (Beweis nach (1.6)):

(1.1) Satz. *Eine glatte n -Mannigfaltigkeit besitzt eine glatte Einbettung in den \mathbb{R}^{2n+1} als abgeschlossene Untermannigfaltigkeit.*

Wir beginnen damit, eine kompakte n -Mannigfaltigkeit in irgendeinen euklidischen Raum einzubetten. Sodann zeigen wir, daß durch Parallelprojektions die Einbettungsdimension auf $2n + 1$ gesenkt werden kann (Prinzip der allgemeinen Lage). Durch beweistechnische Kunstgriffe behandeln wir dann nichtkompakte Mannigfaltigkeiten. Zum Schluß betten wir ∂ -Mannigfaltigkeiten ein.

Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^t$ eine glatte Abbildung einer n -Mannigfaltigkeit M . Seien endlich viele Karten $(U_j, \phi_j, U_3(0))$ gegeben ($j \in \{1, \dots, k\}$). Wir wählen eine glatte Funktion $\tau: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, so daß $\tau(x) = 0$ falls $\|x\| \geq 2$ und $\tau(x) = 1$ falls $\|x\| \leq 1$ ist. Dann ist $\sigma_j: M \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\sigma_j(x) = 0$ falls $x \notin U_j$ und $\sigma_j(x) = \tau\phi_j(x)$ falls $x \in U_j$, eine glatte Funktion auf M . Damit definieren wir

$$\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^t \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times \dots \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^N$$

(k Faktoren $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) durch

$$\Phi(x) = (f(x); \sigma_1(x), \sigma_1(x)\phi_1(x); \dots; \sigma_k(x), \sigma_k(x)\phi_k(x)),$$

wobei $\sigma_j(x)\phi_j(x)$ als Null zu lesen ist, wenn $\phi_j(x)$ nicht definiert ist. Ihr Differential hat auf $W_j = \phi_j^{-1}(U_1(0))$ den Rang n , denn Φ hat auf W_j ein in $V_j = \{(z; a_1, x_1; \dots; a_k, x_k) \mid a_j \neq 0\}$ gelegenes Bild, und die Zusammensetzung von $\Phi|_{W_j}$ mit $V_j \rightarrow \mathbb{R}^n, (z; a_1, x_1; \dots) \mapsto a_j^{-1}x_j$ ist ϕ_j . Nach Konstruktion ist Φ auf $W = \bigcup_{j=1}^k W_j$ injektiv, denn aus $\Phi(a) = \Phi(b)$ folgt zunächst für alle j die Gleichheit $\sigma_j(a) = \sigma_j(b)$, und dann folgt $\phi_i(a) = \phi_i(b)$ für ein i und damit $a = b$. Ferner ist Φ auf dem Komplement aller $\phi_j^{-1}U_2(0)$ gleich f zusammengesetzt mit der Inklusion $\mathbb{R}^t \subset \mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^N$. Ist also f auf der offenen Menge U eine (injektive) Immersion, so ist Φ auf $U \cup W$ eine (injektive) Immersion. Ist speziell M kompakt, so können wir die vorstehenden Betrachtungen auf ein beliebiges f anwenden und $M = W$ erreichen. Das liefert:

(1.2) Notiz. *Eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit besitzt eine glatte Einbettung in einen euklidischen Raum.* \square

Der Beweis von (1.1) sagt nichts über die für eine Einbettung nötige Dimension des euklidischen Raumes aus. Wir werden zeigen, daß man immer mit der Dimension $2n + 1$ auskommt (*Einbettungssatz von Whitney*).

Ist eine Einbettung in irgendeinen euklidischen Raum gewonnen, so läßt sich daraus manchmal durch eine Parallelprojektion eine Einbettung in kleinere euklidische Räume erhalten. Die Beweismethode benutzt das Prinzip der allgemeinen Lage.

Sei $\mathbb{R}^{q-1} = \mathbb{R}^{q-1} \times 0 \subset \mathbb{R}^q$. Für $v \in \mathbb{R}^q \setminus \mathbb{R}^{q-1}$ betrachten wir die Projektion $p_v: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{q-1}$ in Richtung v , das heißt, für $x = x_0 + \lambda v$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^{q-1}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $p_v(x) = x_0$. Wir werden im folgenden nur Einheitsvektoren $v \in S^{q-1}$ verwenden. Sei $M \subset \mathbb{R}^q$. Wir entfernen die Diagonale D und betrachten $\sigma: M \times M \setminus D \rightarrow S^{q-1}$, $(x, y) \mapsto N(x - y)$ mit der Normierung auf Einheitslänge N .

(1.3) Notiz. Genau dann ist $\varphi_v = p_v|_M$ injektiv, wenn v nicht im Bild von σ liegt.

BEWEIS. Aus $\varphi_v(x) = \varphi_v(y)$, $x \neq y$ und $x = x_0 + \lambda v$, $y = y_0 + \mu v$ folgt $x - y = (\lambda - \mu)v \neq 0$, also $v = \pm N(x - y)$. Es gilt $\sigma(x, y) = -\sigma(y, x)$. \square

Sei nun M eine glatte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^q . Wir verwenden das Einheitssphärenbündel

$$STM = \{(x, v) \mid v \in T_x M, \|v\| = 1\} \subset M \times S^{q-1}$$

und die Projektion auf den zweiten Faktor $\tau = \text{pr}_2|_{STM}: STM \rightarrow S^{q-1}$. Auf $TM \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ betrachte man die Funktion $(x, v) \mapsto \|v\|^2$. Sie hat 1 als regulären Wert mit dem Urbild STM , was STM als glatte Untermannigfaltigkeit von TM erweist.

(1.4) Notiz. Genau dann ist φ_v eine Immersion, wenn v nicht im Bild von τ liegt.

BEWEIS. Genau dann ist φ_v eine Immersion, wenn für alle $x \in M$ der Kern von $T_x p_v$ mit $T_x M$ den Schnitt Null hat. Das Differential von p_v ist wiederum p_v . Also ist $0 \neq z = p_v(z) + \lambda v \in T_x M$ genau dann im Kern von $T_x p_v$, wenn $z = \lambda v$ und damit v ein Einheitsvektor in $T_x M$ ist. \square

(1.5) Satz. Sei M eine glatte kompakte n -Mannigfaltigkeit. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ eine glatte Abbildung, die auf einer Umgebung der kompakten Teilmenge $A \subset M$ eine Einbettung ist. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Einbettung $g: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, die auf A mit f übereinstimmt und $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ für $x \in M$ erfüllt.

BEWEIS. Sei f auf der offenen Umgebung U von A eine Einbettung und sei $V \subset U$ eine kompakte Umgebung von A . Die Konstruktion aus dem Anfang des Abschnittes wird mit Kartenbereichen U_j , die in $M \setminus V$ enthalten sind, durchgeführt, so daß die W_j die Menge $M \setminus U$ überdecken. Dann wird Φ auf einer Umgebung von $M \setminus U$ eine Einbettung und

$$\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \oplus \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^q, \quad x \mapsto (f(x), \Psi(x))$$

eine Einbettung, die auf V mit f übereinstimmt (bis auf die anschließende Inklusion $\mathbb{R}^{2n+1} \subset \mathbb{R}^q$). Für $2n < q - 1$ hat σ ein nirgendsdichtes Bild und für

$2n-1 < q-1$ gilt dasselbe für τ , denn man bildet dann jeweils eine Mannigfaltigkeit kleinerer Dimension ab (ein leichter Spezialfall des Satzes von Sard). Es gibt deshalb in jeder Umgebung von $w \in S^{q-1}$ Vektoren v , so daß $p_v \circ \Phi = \psi_v$ eine injektive Immersion, wegen der Kompaktheit von M also eine Einbettung ist. Nach Konstruktion stimmt Φ_v auf V mit f überein. Indem wir Ψ eventuell durch $s\Psi$ (mit kleinem s) ersetzen, können wir $\|f(x) - \Phi(x)\| \leq \varepsilon/2$ erreichen. Es läßt sich f als Zusammensetzung von Φ mit Projektionen $\mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{q-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ entlang der Einheitsvektoren $(0, \dots, 1)$ schreiben. Alle genügend kleinen Veränderung dieser Projektionen machen aus Φ eine Abbildung g mit $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$, und unter diesen finden wir nach dem Satz von Sard welche, für die g eine Einbettung ist. \square

Aus den voranstehenden Überlegungen entnimmt man, daß für Immersionen eine Dimension weniger gebraucht wird. Wir notieren:

(1.6) Satz. *Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ eine glatte Abbildung einer kompakten Mannigfaltigkeit. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Immersion $h: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, die $\|h(x) - f(x)\| < \varepsilon$ für alle $x \in M$ erfüllt. Ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ eine glatte Einbettung, so liegen die Vektoren $v \in S^{2n}$, für die die Projektion $p_v \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ eine Immersion ist, dicht in S^{2n} .* \square

BEWEIS von (1.1). Sei $h: M \rightarrow [0, \infty[$ glatt und eigentlich. Wir setzen $U_i = h^{-1}]i - \frac{1}{4}, i + \frac{5}{4}[$ und $K_i = h^{-1}]i - \frac{1}{3}, i + \frac{4}{3}[$. Dann ist U_i offen, K_i kompakt und $\overline{U}_i \subset K_i$. Nach dem Verfahren von (1.4) gibt es glatte $s_i: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, die auf einer Umgebung von \overline{U}_i eine Einbettung sind und außerhalb von K_i gleich Null. Indem wir eventuell mit einem Diffeomorphismus von \mathbb{R}^{2n+1} zusammensetzen, können wir annehmen, daß alle s_i ein in $D = D^{2n+1}$ gelegenes Bild haben. Wir setzen f_j als die Summe der s_i mit $i \equiv j \pmod{2}$ und $f = (f_0, f_1, h): M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R} = V$. Nach Konstruktion ist $f(M) \subset D \times D \times \mathbb{R} = K \times \mathbb{R}$. Sei $f(x) = f(y)$; dann ist $h(x) = h(y)$; es gibt also ein i mit $x, y \in U_i$; weil dort s_i injektiv ist, folgt $x = y$. Also ist f eine Einbettung, mit abgeschlossenem Bild, da f mit h eigentlich ist. Wieder nach dem Verfahren von (1.4) gibt es eine Projektion $p: V \rightarrow H$ auf einen $2n+1$ -dimensionalen Unterraum H , so daß $p \circ f$ eine injektive Immersion ist. Ferner kann p so gewählt werden, daß der Kern von p mit dem Kern der Projektion $q: V \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1}$ den Schnitt Null hat. Wir behaupten, daß $p \circ f$ eigentlich ist. Sei $C \subset H$ kompakt. Dann ist $(p \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}p^{-1}(C) \subset (K \times \mathbb{R}) \cap p^{-1}(C) = (q, p)^{-1}(K \times C)$ kompakt, da die lineare Inklusion (q, p) eigentlich ist. \square

(1.7) Satz. *Eine kompakte glatte n -Mannigfaltigkeit B mit Rand M besitzt eine glatte Einbettung vom Typ 1 in D^{2n+1} .*

BEWEIS. Sei $j: M \rightarrow S^{2n}$ eine Einbettung. Wir benutzen die Existenz eines Kragens (12.9), das heißt eines Diffeomorphismus $k: M \times [0, 1[\rightarrow U$ auf eine offene Umgebung U von M in B . Sei $l = (l_1, l_2)$ die Umkehrung von k . Damit

erweitern wir j zu einer stetigen Abbildung $f: B \rightarrow D^{2n+1}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \max(0, 1 - 2l_2(x))j(l_1(x)) & x \in U \\ 0 & x \notin U. \end{cases}$$

Auf $k(M \times [0, \frac{1}{2}[[$ ist f eine glatte Einbettung. Wie im Beweis von (1.4) approximieren wir f durch eine glatte Einbettung $g: B \rightarrow D^{2n+1}$, die auf $k(M \times [0, \frac{1}{4}[[$ mit f übereinstimmt und $B \setminus M$ in das Innere von D^{2n+1} abbildet. Das Bild von g ist dann eine Untermannigfaltigkeit vom Typ 1 von D^{2n+1} . \square

2 Tangentialbündel

Die Gesamtheit der Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit wird zum Tangentialbündel zusammengefaßt. Das Tangentialbündel ist ein typisches und wichtiges Beispiel eines Vektorraumbündels.

Eine n -dimensionale reelle *Vektorraumschar* über B besteht aus einer stetigen Abbildung $p: E \rightarrow B$ zusammen mit der Struktur eines n -dimensionalen reellen Vektorraumes auf jeder Faser $p^{-1}(b) = E_b$, die aber im folgenden nicht weiter notiert wird. Eine *Bündelkarte* (U, φ) über dem *Basisgebiet* U für eine derartige Schar besteht aus einer offenen Menge $U \subset B$ und einem Homöomorphismus $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ der Form $e \mapsto (p(e), \varphi_2(e))$, so daß die Faserabbildungen $p^{-1}(b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $e \mapsto \varphi_2(e)$ für alle $b \in U$ lineare Isomorphismen sind. Es gilt $\text{pr}_1 \circ \varphi = p$; man sagt deshalb, φ ist eine Abbildung über U . Eine Menge von Bündelkarten heißt *Bündelatlas*, wenn die zugehörigen Basisgebiete B überdecken.

Ein n -dimensionales reelles *Vektorraumbündel* über B mit *Totalraum* E ist eine n -dimensionale reelle Vektorraumschar $p: E \rightarrow B$ über B , die einen Bündelatlas besitzt. Analog werden komplexe Vektorraumbündel definiert.

Ein Vektorraumbündel $p: E \rightarrow B$ heißt *glatt*, wenn p eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten ist und es einen Bündelatlas aus Karten (U, φ) mit Diffeomorphismen φ gibt. In diesem Fall ist p eine Submersion.

Das *triviale* n -dimensionale Bündel über B ist $\text{pr}_1: B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$. Eine Bündelkarte mit Basisgebiet U wird auch (*lokale*) *Trivialisierung* des Bündels über U genannt.

Sind (U, φ) und (V, ψ) zwei Bündelkarten von $p: E \rightarrow B$, so haben wir den *Kartenwechsel*

$$\psi\varphi^{-1}: (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n, \quad (x, v) \mapsto (x, g_x(v)).$$

Es ist $g_x \in GL(n, \mathbb{R})$, und $g: U \cap V \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, $x \mapsto g_x$ ist stetig (glatt im Falle eines glatten Bündels).

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Sei TM die disjunkte Vereinigung der Tangentialräume $T_p(M)$ für $p \in M$. Einen Punkt in $T_p(M) \subset TM$ schreiben wir der Deutlichkeit halber in der Form (p, v) mit $v \in T_p(M)$. Wir haben dann

die Projektion $\pi_M: TM \rightarrow M$, $(p, v) \mapsto p$. Zu jeder Karte $k = (U, h, V)$ der n -Mannigfaltigkeit M definieren wir mit Hilfe der universellen Morphismen i_k eines Tangentialraums Bündelkarten

$$\varphi_k: TU = \bigcup_{p \in U} T_p(M) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n, \quad (p, v) \mapsto (p, i_k(v)).$$

Das Verheftungsprinzip des achten Abschnitts liefert:

(2.1) Satz. *Es gibt genau eine Struktur eines glatten n -dimensionalen Vektorraumbündels auf $\pi_M: TM \rightarrow M$, für die alle φ_k glatte Bündelkarten sind. Insbesondere ist damit TM eine glatte $2n$ -Mannigfaltigkeit und π_M eine Submersion. \square*

Das durch diesen Satz gewonnene Bündel heißt *Tangentialbündel* von M . Allgemein kann man analog Vektorraumbündel aus Klebedaten von Bündelkarten gewinnen. So entsteht das *duale Tangentialbündel* oder *Kotangentialbündel* T^*M aus den Dualräumen $T_p^*(M)$ von $T_p(M)$. Verheftet wird jetzt mit den dualen Abbildungen der Differentiale der Kartenwechsel.

Eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ induziert eine glatte, fasernweise lineare Abbildung $Tf: TM \rightarrow TN$ über f , die auf $T_p(M)$ gleich $T_p f$ ist; es gilt also $f \circ \pi_M = \pi_N \circ Tf$. Fasernweise lineare Abbildungen zwischen Vektorraumbündeln heißen *Bündelmorphismen*.

Ist $p: E \rightarrow B$ ein Vektorraumbündel, so heißt eine Abbildung $s: U \rightarrow E$ mit $p \circ s = \text{id}(U)$ ein *Schnitt* von p über U . Wir definieren: Ein glattes *Vektorfeld auf M* ist ein glatter Schnitt von $\pi_M: TM \rightarrow M$. Ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, so ist $T_p f \in T_p^*M$, und durch $p \mapsto T_p f$ wird ein glatter Schnitt des Kotangentialbündels geliefert, der oft mit $df: M \rightarrow T^*M$ bezeichnet wird.

(2.2) Notiz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^q$ eine glatte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist*

$$TM = \{(x, v) \mid x \in M, v \in T_x M\} \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$$

eine $2n$ -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit.

BEWEIS. Zum Beweis schreibe man M lokal als $h^{-1}(0)$ mit einer Abbildung $h: U \rightarrow \mathbb{R}^{q-n}$, deren Differential überall den Rang $q - n$ hat. Dann ist lokal TM durch das Urbild der Null von

$$U \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{q-n} \times \mathbb{R}^{q-n}, \quad (u, v) \mapsto (h(u), Dh(u)(v))$$

beschrieben, und diese Abbildung hat überall den Rang $2(q - n)$, was man am besten durch Betrachtung der Einschränkungen auf $U \times 0$ und $u \times \mathbb{R}^q$ erkennt. \square

Eine *Riemannsche Metrik* auf einem Vektorraumbündel $p: E \rightarrow B$ ist eine Familie s_b von Skalarprodukten auf den Fasern E_b , die stetig (glatt) von b abhängen. Letzteres bedeutet: Ist $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ eine Bündelkarte und t_b das vermöge φ von E_b auf \mathbb{R}^n übertragene Skalarprodukt, das bezüglich der Standardbasis durch die positiv definite, symmetrische Matrix $P(b)$ beschrieben wird, so hängt $P(b)$ stetig (glatt) von $b \in U$ ab. Sind die s^j Riemannsche Metriken des Bündels

über Mengen $(U_j \mid j \in J)$ einer offenen Überdeckung von B und ist (τ_j) eine untergeordnete Partition der Eins, so ist $\sum_j \tau_j(b) s_b^j$ eine Riemannsche Metrik auf $p: E \rightarrow B$. Eine Riemannsche Metrik auf dem Tangentialbündel TM liefert einen Bündelisomorphismus $TM \rightarrow T^*M$. Ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, so wird der zugehörige Schnitt $df: M \rightarrow T^*M$ in das *Gradientenfeld* $\text{grad}(f): M \rightarrow TM$ transformiert. Eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer glatten Riemannschen Metrik ist eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit*.

3 Normalenbündel

Sei M eine m -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ der Kodimension k . Wir setzen $N(M) = \{(x, v) \mid x \in M, v \perp T_x M\} \subset M \times \mathbb{R}^n$.

(3.1) Notiz. $N(M)$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $M \times \mathbb{R}^n$, und die Projektion $N(M) \rightarrow M$ ist ein glattes Vektorraumbündel.

BEWEIS. Ist $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung, so ist die Transponierte A^t bezüglich des üblichen Skalarproduktes durch $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^t w \rangle$ definiert. Es gilt: Ist A surjektiv, so ist A^t injektiv, und es gilt $\text{Bild}(A^t) = (\text{Kern } A)^\perp$ sowie $A \cdot A^t \in GL(k, \mathbb{R})$.

Wir definieren M lokal durch Gleichungen. Sei also $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Submersion und $\varphi^{-1}(0) = U \cap M = W$. Wir setzen $N(M) \cap (W \times \mathbb{R}^n) = N(W)$. Für die glatten Abbildungen

$$\begin{aligned} \Phi: W \times \mathbb{R}^n &\rightarrow W \times \mathbb{R}^k, & (x, v) &\mapsto (x, T_x \varphi(v)) \\ \Psi: W \times \mathbb{R}^k &\rightarrow W \times \mathbb{R}^n, & (x, v) &\mapsto (x, (T_x \varphi)^t(v)) \end{aligned}$$

erkennt man mit dem Zitat aus der linearen Algebra

$$N(W) = \text{Bild } \Psi, \quad T(W) = \text{Kern } \Phi.$$

Die Zusammensetzung $\Phi\Psi$ ist ein Diffeomorphismus; sie hat nämlich die Gestalt $(w, v) \mapsto (w, g_w(v))$ mit einer glatten Abbildung $W \rightarrow GL(k, \mathbb{R}), w \mapsto g_w$ und deshalb die glatte Umkehrung $(w, v) \mapsto (w, g_w^{-1}(v))$. Deshalb ist Ψ eine Einbettung mit dem Bild $N(W)$ und $\Psi^{-1}|N(W)$ eine glatte Bündelkarte. \square

Das Bündel $N(M) \rightarrow M$ heißt *Normalenbündel* der Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$.

(3.2) Notiz. Die abtragende Abbildung $a: N(M) \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, v) \mapsto x + v$ hat in allen Punkten $(x, 0) \in N(M)$ ein bijektives Differential.

BEWEIS. Sei $N_x M = T_x M^\perp$. Wegen $M \subset \mathbb{R}^n$ fassen wir $T_x M$ als Unterraum von \mathbb{R}^n auf. In $T_{(x,0)}(M \times \mathbb{R}^n) = T_x M \times \mathbb{R}^n$ ist $T_{(x,0)}N(M)$ der Unterraum $T_x M \times N_x M$. Das Differential $T_{(x,0)}a$ ist auf den Unterräumen $T_x M$ und $N_x M$ die Identität. Somit können wir dieses Differential als die Abbildung $(u, v) \mapsto u + v$, also im wesentlichen als die Identität ansehen. \square

(3.3) Satz. *Sei $f: X \rightarrow Y$ ein lokaler Homöomorphismus. Sei $A \subset X$ und sei $f: A \rightarrow f(A) = B$ ein Homöomorphismus. Jede Umgebung von B in Y enthalte eine parakompakte Umgebung. Dann gibt es eine offene Umgebung U von A in X , die durch f homöomorph auf eine offene Umgebung V von B in Y abgebildet wird. \square*

BEWEIS. Sei $x \in X$ und $y = s(x)$. Wir wählen offene Umgebungen U_x von y in U und V_x von x in N , so daß f einen Homöomorphismus $U_x \rightarrow V_x$ vermittelt. Die Umkehrung ist ein Schnitt s_x von f über V_x . Wegen $s(x) = s_x(x)$ stimmen beide Schnitte auf einer Umgebung von x in X überein.

Nach dieser Vorbemerkung wählen wir eine Familie $(V_j \mid j \in J)$ offener Mengen $V_j \in N$, die X überdecken, mit Schnittens $s_j: V_j \rightarrow U$ von f , so daß $s_j|_{V_j \cap X} = s|_{V_j \cap X}$. Durch eventuelle Verkleinerung von V_j können wir erreichen, daß die Familie $(V_j \mid j \in J)$ lokal endlich ist, indem wir zum Beispiel eine untergeordnete Partition der Eins (τ_j) wählen und die V_j durch $\tau_j^{-1}]0, 1]$ ersetzen.

Sei $V = \cup_{j \in J} V_j$. Es gibt eine offene Überdeckung $(W_j \mid j \in J)$ von V mit $\overline{W}_j \subset V_j$ für alle $j \in J$. Zum Beispiel sind die \overline{W}_j die Träger einer Partition der Eins, die (V_j) untergeordnet ist. Sei

$$W = \{x \in W \mid x \in \overline{W}_i \cap \overline{W}_j \Rightarrow s_i(x) = s_j(x)\}.$$

Dann ist $X \subset W$. Wir definieren einen stetigen Schnitt s auf W dadurch, daß wir s auf \overline{W}_j gleich s_j setzen; nach Konstruktion ist dadurch s wohldefiniert, und die Stetigkeit folgt wegen der lokalen Endlichkeit.

Wir zeigen: W ist eine Umgebung von X , und $s(W^\circ)$ ist offen. Wir wählen dazu eine offene Umgebung Q von $s(x)$, $x \in X$, die bei f auf eine offene Umgebung $f(Q) \subset V$ von x homöomorph abgebildet wird. Sodann wählen wir eine offene Umgebung A von x in V mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) $A \subset f(Q)$.
- (2) A trifft nur endlich viele \overline{W}_j , etwa $\overline{W}_{j(1)}, \dots, \overline{W}_{j(k)}$.
- (3) $x \in \overline{W}_{j(1)} \cap \dots \cap \overline{W}_{j(k)}$.
- (4) $A \subset V_{j(1)} \cap \dots \cap V_{j(k)}$.
- (5) $s_{j(t)}(A) \subset Q$, $1 \leq t \leq k$.

Eine derartige Wahl ist möglich: Wegen der lokalen Endlichkeit von (\overline{W}_j) ist $\{j \in J \mid x \in \overline{W}_j\}$ endlich; sei $\{j(1), \dots, j(k)\}$ diese Menge. Sei ebenso x in $V_{j(1)}, \dots, V_{j(k)}, V_{j(k+1)}, \dots, V_l$ enthalten. Dann ist

$$A = f(Q) \cap V_{j(1)} \cap \dots \cap V_{j(k)} \cap (V \setminus \overline{W}_{j(k+1)}) \cap \dots \cap (V \setminus \overline{W}_{j(l)})$$

eine offene Umgebung von x in V mit den Eigenschaften (1) – (4). Wegen der Stetigkeit von s_i ist $s_i^{-1}(Q)$ eine offene Umgebung von x . Also läßt sich durch Verkleinerung von A auch $A \subset s_{j(t)}^{-1}(Q)$ erreichen.

Sei $y \in A$. Für $1 \leq a, b \leq k$ gilt dann $s_{j(a)}(y) = s_{j(b)}(y)$, denn wegen (5) haben beide Seiten bei f dasselbe Bild, und f ist injektiv. Also liegt A in W . Siehe Aufgabe 1 zur Abrundung. \square

(3.4) Notiz. Sei $\Phi: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung eines lokal kompakten Raumes in einen Hausdorff-Raum. Sei Φ auf der kompakten Menge $A \subset X$ injektiv. Zu jedem $a \in A$ gebe es eine Umgebung U_a von a in X , auf der Φ injektiv ist. Dann gibt es eine kompakte Umgebung V von A in X , die durch Φ eingebettet wird.

BEWEIS. Die Koinzidenzmenge $K = \{(x, y) \in X \times X \mid \Phi(x) = \Phi(y)\}$ ist in $X \times X$ abgeschlossen, da Y ein Hausdorff-Raum ist. Sei $D(B)$ die Diagonale von $B \subset X$. Ist Φ auf U_a injektiv, so ist $(U_a \times U_a) \cap K = D(U_a)$. Also ist nach unseren Voraussetzungen $D(X)$ offen in K und folglich $W = X \times X \setminus (K \setminus D(X))$ offen in $X \times X$. Nach Voraussetzung ist $A \times A$ in W enthalten. Da $A \times A$ kompakt und X lokal kompakt ist, gibt es eine kompakte Umgebung V von A , so daß $V \times V$ in W enthalten ist. Dann ist $\Phi|_V$ injektiv und als Abbildung eines kompakten in einen hausdorffschen Raum eine Einbettung. \square

4 Approximation

Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Sei $A \subset M$ abgeschlossen. Sei $N \subset \mathbb{R}^p$ Untermannigfaltigkeit; wir geben N die durch diese Einbettung induzierte Metrik.

(4.1) Satz. Sei $f: M \rightarrow N$ stetig und $f|_A$ glatt. Sei $\delta: M \rightarrow]0, \infty[$ stetig. Dann gibt es eine glatte Abbildung $g: M \rightarrow N$, die auf A mit f übereinstimmt und $\|g(x) - f(x)\| < \delta(x)$ für alle $x \in M$ erfüllt.

BEWEIS. Wir behandeln zunächst den Fall $N = \mathbb{R}$. Weil f bei $x \in A$ glatt ist, gibt es definitionsgemäß eine offene Umgebung U_x von x und eine glatte Funktion $f_x: U_x \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $U_x \cap A$ mit f übereinstimmt. Nach Wahl von f_x verkleinern wir U_x , so daß für $y \in U_x$ immer $\|f_x(y) - f(y)\| < \delta(y)$ gilt.

Sei nun $x \in M \setminus A$. Wir wählen eine offene Umgebung U_x von x in $M \setminus A$, so daß für $y \in U_x$ immer $\|f(y) - f(x)\| < \delta(y)$ gilt. Wir definieren $f_x: U_x \rightarrow \mathbb{R}$ in diesem Fall durch $f_x(y) = f(x)$.

Sei $(\tau_x \mid x \in M)$ eine glatte Partition der Eins, die $(U_x \mid x \in M)$ untergeordnet ist. Die Funktion $g(y) = \sum_{x \in M} \tau_x(y) f_x(y)$ hat die im Satz verlangte Eigenschaft.

Aus dem Fall $N = \mathbb{R}$ erhält man unmittelbar den Fall $N = \mathbb{R}^p$. Der allgemeine Fall wird darauf zurückgeführt. Sei zu diesem Zweck U eine offene Umgebung von N in \mathbb{R}^p und $r: U \rightarrow N$ eine glatte Retraktion. Wir zeigen sogleich:

(4.2) Lemma. Es gibt eine stetige Funktion $\varepsilon: M \rightarrow]0, \infty[$ mit den Eigenschaften:

- (1) Für alle $x \in M$ ist $U_x = U_{\varepsilon(x)}(f(x)) \subset U$.
- (2) Für alle $x \in M$ ist der Durchmesser von $r(U_x)$ kleiner als $\delta(x)$.

Dieses Lemma angenommen, wenden wir den Satz auf $N = \mathbb{R}^p$ und ε statt δ an. Das liefert uns eine Funktion $g_1: M \rightarrow \mathbb{R}^p$, die nach den Eigenschaften von ε ein in U gelegenes Bild hat. Dann hat $g = r \circ g_1$ die im Satz verlangten Eigenschaften. \square

BEWEIS von (4.2). Wir betrachten die Situation zunächst lokal. Sei $x \in M$ fixiert. Wir wählen ein $\gamma(x) > 0$ und eine Umgebung W_x von x , so daß für $y \in W_x$ immer $\delta(x) \geq 2\gamma(x)$ ist. Sei

$$V_x = r^{-1}(U_{\gamma(x)/2}(f(x)) \cap N).$$

Der Abstand $\eta(x) = d(f(x), \mathbb{R}^p \setminus V_x)$ ist größer als Null. Wir verkleinern W_x zur Umgebung Z_x , so daß für $y \in Z_x$ immer $\|f(x) - f(y)\| < \frac{1}{4}\eta(x)$ ist.

Die Funktion $f|_{Z_x}$ erfüllt dann das Lemma mit der konstanten Funktion $\varepsilon = \varepsilon_x: y \mapsto \frac{1}{4}\eta(x)$. Sei nämlich $y \in Z_x$ und $\|z - f(y)\| < \frac{1}{4}\eta(x)$, das heißt $z \in U_y$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung $\|z - f(x)\| < \frac{1}{2}\eta(x)$, also nach unserer Wahl von $\eta(x)$,

$$z \in V_x \subset U, \quad r(z) \in U_{\gamma(x)/2}(f(x)).$$

Sind $z_1, z_2 \in U_y$, so liefert die Dreiecksungleichung

$$\|r(z_1) - r(z_2)\| < \gamma(x) \leq \frac{1}{2}\delta(x).$$

Also ist der Durchmesser von $r(U_y)$ kleiner als $\delta(y)$.

Nach dieser lokalen Betrachtung wählen wir eine Partition der Eins $(\tau_x \mid x \in M)$, die $(Z_x \mid x \in M)$ untergeordnet ist. Damit definieren wir $\varepsilon: M \rightarrow]0, \infty[$ durch $\varepsilon(x) = \sum_{a \in M} \frac{1}{4}\tau_a(x)\eta(a)$. Diese Funktion hat die gewünschten Eigenschaften. \square

(4.3) Satz. *Sei $f: M \rightarrow N$ stetig. Zu gegebener stetiger Abbildung $\delta: M \rightarrow]0, \infty[$ gibt es eine stetige Abbildung $\varepsilon: M \rightarrow]0, \infty[$ mit der Eigenschaft: Jede stetige Abbildung $g: M \rightarrow N$ mit $\|g(x) - f(x)\| < \varepsilon(x)$ und $f|_A = g|_A$ ist homotop zu f mittels einer Homotopie $F: M \times [0, 1] \rightarrow N$, so daß $F(a, t) = f(a)$ für $(a, t) \in A \times [0, 1]$ und $\|F(x, t) - f(x)\| < \delta(x)$ für $(x, t) \in M \times [0, 1]$.*

BEWEIS. Wir wählen $r: U \rightarrow N$ und $\varepsilon: M \rightarrow]0, \infty[$ wie in (4.1) und (4.2). Für jedes $(x, t) \in M \times [0, 1]$ ist dann

$$H(x, t) = t \cdot g(x) + (1 - t) \cdot f(x) \in U_{\varepsilon(x)}(f(x)).$$

Durch $F(x, t) = rH(x, t)$ wird eine Homotopie mit den gewünschten Eigenschaften gegeben. \square

(4.4) Satz. (1) *Sei $f: M \rightarrow N$ stetig und $f|_A$ glatt. Dann ist f homotop relativ A zu einer glatten Abbildung. Ist f eigentlich und N in \mathbb{R}^p abgeschlossen, so ist f eigentlich homotop relativ A zu einer glatten Abbildung.*

(2) *Seien $f_0, f_1: M \rightarrow N$ glatte Abbildungen. Sei $f_t: M \rightarrow N$ eine Homotopie, die auf $B = M \times [0, \varepsilon[\cup M \times]1 - \varepsilon, 1] \cup A \times [0, 1]$ glatt ist. Dann gibt es eine glatte Homotopie g_t von f_0 nach f_1 , die auf $A \times [0, 1]$ mit f übereinstimmt. Ist f_t eine eigentliche Homotopie und ist N in \mathbb{R}^p abgeschlossen, so kann g_t als eigentliche Homotopie gewählt werden.*

BEWEIS. (1) Wir wählen δ und ε nach (4.3) und wenden darauf (4.1) an. Dann liefert (4.3) eine geeignete Homotopie. Ist f eigentlich, δ beschränkt und gilt

$\|g(x) - f(x)\| < \delta(x)$, so ist auch g eigentlich.

(2) Man betrachtet jetzt $M \times]0, 1[$ statt M und den darin gelegenen Teil von B statt A , verfährt aber sonst wie vordem. \square

5 Transversalität

Der Begriff der Transversalität formalisiert das Prinzip der allgemeinen Lage. Er ist von fundamentaler Bedeutung für die Differentialtopologie. Seine Wirkungskraft wurde erstmalig in der richtungweisenden Arbeit von Thom [?] dargelegt.

Seien $f: A \rightarrow M$ und $g: B \rightarrow N$ glatte Abbildungen. Damit bilden wir das Pullbackdiagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & B \\ \downarrow G & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

mit dem Raum $C = \{(a, b) \mid f(a) = g(b)\} \subset A \times B$. Ist $g: B \subset M$, so können wir C kanonisch mit $f^{-1}(B)$ identifizieren. Ist außerdem $f: A \subset M$, so ist $f^{-1}(B) = A \cap B$. Der Raum C ist auch das Urbild der Diagonale von $M \times M$ bei $f \times g$. Die Abbildungen f und g heißen *transvers* im Punkt $(a, b) \in C$, wenn

$$(5.1) \quad T_a f(T_a A) + T_b g(T_b B) = T_y M$$

ist, $y = f(a) = g(b)$. Sie heißen *transvers* zueinander, wenn diese Bedingung in allen Punkten von C erfüllt ist. Ist $g: B \subset M$ die Inklusion einer Untermannigfaltigkeit und gilt $f(a) = b$, so sagen wir, f sei *transvers* zu B im Punkt a , wenn

$$T_a f(T_a M) + T_b B = T_b M$$

ist. Gilt das für alle $a \in f^{-1}(B)$, so nennen wir f *transvers* zu B . Es ist zweckmäßig, diese Sprechweise auch dann zu verwenden, wenn C leer ist; das heißt, in diesem Fall nennen wir f und g transvers zueinander. Ist $\dim A + \dim B < \dim M$, so kann (5.1) niemals gelten. In diesem Fall sind also f und g genau dann transvers, wenn C leer ist. Eine Submersion f ist zu allen g transvers.

Ist $B = \{b\}$, so ist f genau dann transvers zu B , wenn b ein regulärer Wert von f ist. Wir führen den allgemeinen Fall auf diese Situation zurück.

Wir verwenden dazu eine Bemerkung aus der linearen Algebra: Sei $a: U \rightarrow V$ eine lineare Abbildung und $W \subset V$ ein Unterraum; genau dann gilt $a(U) + W = V$, wenn die Zusammensetzung von a mit der kanonischen Projektion $p: V \rightarrow V/W$ surjektiv ist. Damit führen wir Transversalität auf Regularität zurück.

Sei $B \subset M$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Sei $b \in B$ und $p: Y \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Abbildung mit regulärem Wert 0 einer offenen Umgebung Y von b in M , so daß $B \cap Y = p^{-1}(0)$ ist. Dann gilt:

(5.2) Notiz. Genau dann ist $f: A \rightarrow M$ in $a \in A$ transvers zu B , wenn a regulärer Wert von $p \circ f: f^{-1}(Y) \rightarrow Y \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist.

BEWEIS. Es ist T_bB der Kern von $T_b p$. Die Komposition von $T_a f: T_a A \rightarrow T_b M/T_b B$ mit dem durch $T_b: T_b M \rightarrow T_0 \mathbb{R}^k$ induzierten Isomorphismus $T_b M/T_b B \cong T_0 \mathbb{R}^k$ ist $T_a(p \circ f)$. Nun wenden wir die obige Bemerkung aus der linearen Algebra an. \square

(5.3) Notiz. Seien $f: A \rightarrow M$ und $f|_{\partial A}$ glatt und transvers zur Untermannigfaltigkeit B der Kodimension k von M . Seien B und M randlos. Dann ist $C = f^{-1}(B)$ leer oder eine Untermannigfaltigkeit vom Typ 1 von A der Kodimension k . Es gilt $T_a C = (T_a f)^{-1}(T_{f(a)} B)$. \square

Seien in der Situation der letzten Notiz $\nu(C, A)$ und $\nu(B, M)$ die Normalenbündel. Dann induziert Tf eine glatte Bündelabbildung $\nu(C, A) \rightarrow \nu(B, M)$; nach Definition der Transversalität ist nämlich $T_a f: T_a A/T_a C \rightarrow T_{f(a)}/T_{f(a)} B$ surjektiv und aus Dimensionsgründen bijektiv.

Aus (5.2) folgt übrigens, daß Transversalität eine „offene Bedingung“ ist: Ist $f: A \rightarrow M$ in a transvers zu B , so auch in allen Punkten einer geeigneten Umgebung von a , denn etwas Entsprechendes gilt für reguläre Punkte.

(5.4) Notiz. Seien $f: A \rightarrow M$ und $g: B \rightarrow M$ glatt und sei $y = f(a) = g(b)$. Genau dann sind f und g in (a, b) transvers, wenn $f \times g$ in (a, b) transvers zur Diagonale von $M \times M$ ist.

BEWEIS. Sei $U = T_a f(T_a A)$, $V = T_b g(T_b B)$, $W = T_y M$. Die Behauptung besagt, daß $U + V = W$ und $(U \oplus V) + D(W) = W \oplus W$ gleichwertige Relationen sind ($D(W)$ Diagonale). Eine kleine Umrechnung mittels linearer Algebra liefert diese Gleichwertigkeit. \square

(5.5) Folgerung. Seien f und g transvers. Dann ist C eine glatte Untermannigfaltigkeit von $A \times B$. Sei $c = (a, b) \in C$. Wir haben ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_c C & \xrightarrow{TF} & T_b B \\ \downarrow TG & & \downarrow Tg \\ T_a A & \xrightarrow{Tf} & T_y M. \end{array}$$

Es ist bikartesisch, das heißt $\langle Tf, Tg \rangle$ ist surjektiv und der Kern ist $T_c C$. Das Diagramm induziert demnach einen Isomorphismus der Kokerne von TG und Tg (und ebenso von TF und Tf). \square

(5.6) Korollar. Sei ein kommutatives Diagramm von glatten Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc} & & C & \xrightarrow{F} & B \\ & & \downarrow G & & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{h} & A & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

gegeben. Sei f transvers zu g und C wie oben. Dann ist h genau dann transvers zu G , wenn fh transvers zu g ist.

BEWEIS. Das gilt wegen der in (5.5) ausgesprochenen Isomorphie der Kokerne. \square

(5.7) Korollar. *Wir wenden die vorige Aussage auf das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc} & & M & \longrightarrow & \{s\} \\ & & \downarrow i_s & & \downarrow \\ W & \xrightarrow{f} & M \times S & \xrightarrow{\text{pr}} & S \end{array}$$

an und erhalten: f ist genau dann transvers zu $i_s: x \mapsto (x, s)$, wenn s ein regulärer Wert von $\text{pr} \circ f$ ist. \square

Sei $F: M \times S \rightarrow N$ glatt und $Z \subset N$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Seien S , Z und N randlos. Für $s \in S$ setzen wir $F_s: M \rightarrow N$, $x \mapsto F(x, s)$. Wir betrachten F als eine parametrisierte Familie von Abbildungen F_s . Dann gilt:

(5.8) Satz. *Seien $F: M \times S \rightarrow N$ und $\partial F = F|(\partial M \times S)$ transvers zu Z . Dann sind für alle $s \in S$ bis auf eine Nullmenge die Abbildungen F_s und ∂F_s beide transvers zu Z .*

BEWEIS. Nach (5.3) ist $W = F^{-1}(Z)$ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times S$ mit Rand $\partial W = W \cap \partial(M \times S)$. Sei $\pi: M \times S \rightarrow S$ die Projektion. Die Aussage des Satzes folgt mit dem Satz von Sard, wenn wir folgendes zeigen: Ist $s \in S$ regulärer Wert von $\pi: W \rightarrow S$, so ist F_s transvers zu Z , und ist $s \in S$ regulärer Wert von $\partial\pi: \partial W \rightarrow S$, so ist ∂F_s transvers zu Z . Diese Aussage ergibt sich aus (5.7). \square

(5.9) Satz. *Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $Z \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit. Seien Z und N randlos. Sei $C \subset M$ abgeschlossen und f beziehungsweise ∂f transvers zu Z in allen Punkten von C beziehungsweise $\partial M \cap C$. Dann gibt es eine glatte Abbildung $g: M \rightarrow N$, die zu f homotop ist, auf C mit f übereinstimmt und auf M und ∂M transvers zu Z ist.*

BEWEIS. Sei zunächst C leer. Wir benutzen: N ist diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit eines \mathbb{R}^k ; es gibt eine offene Umgebung U von N in \mathbb{R}^k und eine Submersion $r: U \rightarrow N$ mit $r|N = \text{id}$ (siehe ??). Sei $S = E^k \subset \mathbb{R}^k$ die offene Einheitskugel und

$$F: M \times S \rightarrow N, \quad (x, s) \mapsto r(f(x) + \varepsilon(x)s).$$

Darin ist $\varepsilon: M \rightarrow]0, \infty[$ eine nach (??) existierende glatte Funktion, so daß diese Vorschrift sinnvoll ist. Es ist $F(x, 0) = f(x)$. Wir behaupten: F und ∂F sind Submersionen. Zum Beweis betrachte man für festes x die Abbildung

$$S \rightarrow U_\varepsilon(f(x)), \quad s \mapsto f(x) + \varepsilon(x)s,$$

die als Einschränkung eines affinen Automorphismus von \mathbb{R}^k sicherlich eine Submersion ist. Die Zusammensetzung mit r ist dann ebenfalls eine Submersion.

Folglich sind F und ∂F Submersionen, da sogar die Einschränkungen auf alle $\{x\} \times S$ Submersionen sind.

Nach (5.8) sind also für fast alle $s \in S$ die Abbildungen F_s und ∂F_s transvers zu Z . Durch $M \times I \rightarrow N$, $(x, t) \mapsto F(x, st)$ wird eine Homotopie von F_s nach f gegeben.

Sei nun C beliebig. Es gibt eine offene Umgebung W von C in M , so daß f auf W und ∂f auf $W \cap \partial M$ zu Z transvers sind (Offenheit der Transversalität). Wir wählen eine Menge V , die $C \subset V^\circ \subset V \subset W^\circ$ erfüllt, sowie eine glatte Funktion $\tau: M \rightarrow [0, 1]$ mit $M \setminus W \subset \tau^{-1}(1)$, $V \subset \tau^{-1}(0)$. Ferner setzen wir $\sigma = \tau^2$. Dann ist $T_x \sigma = 0$, sofern $\tau(x) = 0$ ist. Die Abbildung F aus dem Anfang des Beweises modifizieren wir jetzt zu

$$G: M \times S \rightarrow N, \quad (x, s) \mapsto F(x, \sigma(x)s)$$

und behaupten: G ist transvers zu Z . Zum Beweis wählen wir ein $(x, s) \in G^{-1}(Z)$. Sei zunächst $\sigma(x) \neq 0$. Dann ist $S \rightarrow N$, $t \mapsto G(x, t)$ als Zusammensetzung des Diffeomorphismus $t \mapsto \sigma(x)t$ mit der Submersion $t \mapsto F(x, t)$ selbst eine Submersion und folglich G bei (x, s) regulär und also transvers zu Z .

Sei jetzt $\sigma(x) = 0$. Wir berechnen den Wert von $T_{(x,s)}G$ an der Stelle $(v, w) \in T_x M \times T_s S = T_x X \times \mathbb{R}^m$ wie folgt. Sei

$$m: M \times S \rightarrow M \times S, \quad (x, s) \mapsto (x, \sigma(x)s).$$

Dann ist

$$T_{(x,s)}m(v, w) = (v, \sigma(x)w + T_x \sigma(v)s).$$

Die Kettenregel, angewendet auf $G = F \circ m$, liefert

$$T_{(x,s)}G(v, w) = T_{m(x,s)}F \circ T_{(x,s)}m(v, w) = T_{(x,0)}F(v, 0) = T_x f(v),$$

da $\sigma(x) = 0$, $T_x \sigma = 0$ und $F(x, 0) = f(x)$ ist. Da $\sigma(x) = 0$ ist, so ist nach Wahl von W und τ zunächst f in x zu Z transvers, also — da $T_{(x,s)}G$ und $T_x f$ dasselbe Bild haben — auch G in (x, s) transvers zu Z . Analog schließt man für ∂G und beendet den Beweis wie im Fall $C = \emptyset$.

3 Vektorfelder und Flüsse

1 Vektorfelder und Flüsse

Vektorfelder werden geometrisch als Schnitte des Tangentialbündels definiert. Sie besitzen auch eine Interpretation als lineare Differentialoperatoren erster Ordnung (Richtungsableitungen). Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und identifizieren wir wie üblich $T(U) = U \times \mathbb{R}^n$, so ist ein Vektorfeld auf U durch seine zweite Komponente $X:U \rightarrow \mathbb{R}^n$ bestimmt. Das Vektorfeld ist glatt, wenn diese Abbildung glatt ist. Sei $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und sei $X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p)e_i$ die Darstellung als Linearkombination der Standardbasis. Dann ist $(T_p f)(X(p)) \in T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ die Zahl $\sum_{i=1}^n a_i(p)\partial f/\partial x_i(p)$. Der Vektor $X(p)$ ist durch seine Wirkung auf glatte Funktionen bestimmt. Aus diesem Grund bezeichnet man $X(p)$ als Differentialoperator $\sum_{i=1}^n a_i(p)\partial/\partial x_i$ und statt $(T_p f)(X(p))$ wird $X(p)f$ geschrieben, um $X(p)$ als Operator auf glatten Funktionen auszuweisen. Ist X glatt, so wird die glatte Funktion $p \mapsto X(p)f$ mit Xf bezeichnet. Diese Bezeichnung verwendet man dann überhaupt für glatte Vektorfelder X auf einer glatten Mannigfaltigkeit M und für glatte Funktionen $f:M \rightarrow \mathbb{R}$. Sind X und Y glatte Vektorfelder auf M , so ist die *Lie-Klammer* $[X, Y]$ das glatte Vektorfeld, das an der Stelle p auf eine Funktion f durch $X_p Y f - Y_p X f$ wirkt.

Sei X ein glattes Vektorfeld auf M . Eine *Integralkurve* von X mit *Anfangsbedingung* $p \in M$ ist eine glatte Abbildung $\alpha:J \rightarrow M$ eines offenen Intervalles $0 \in J \subset \mathbb{R}$, so daß $\alpha(0) = p$ und für alle $t \in J$ die Gleichung $\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$ gilt. Hierbei haben wir den Geschwindigkeitsvektor von α durch $\dot{\alpha}(t)$ bezeichnet. Der nächste Satz ist die globale Form des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen. Er wird durch Übertragung der lokalen Sätze [?] mittels Karten bewiesen. Die Übertragung benutzt wie üblich Strukturtransport. Sei $f:M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und $X:M \rightarrow TM$ ein glattes Vektorfeld. Dann ist $Y = Tf \circ X \circ f^{-1}:N \rightarrow TN$ ein glattes Vektorfeld auf N . Sei $\alpha:J \rightarrow M$ eine Integralkurve von X . Auf TJ haben wir das konstante Vektorfeld $\partial/\partial t$. Wir erhalten ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 TJ & \xrightarrow{T\alpha} & TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\
 \uparrow \frac{\partial}{\partial t} & & \uparrow X & & \uparrow Y \\
 J & \xrightarrow{\alpha} & X & \xrightarrow{f} & Y.
 \end{array}$$

Das linke Quadrat ist kommutativ, weil α Integralkurve ist, das rechte nach Definition von Y . Die Verkettung $f \circ \alpha$ ist eine Integralkurve von Y .

(1.1) Satz. *Sei X ein glattes Vektorfeld auf M . Es gibt eine offene Menge $D(X) \subset \mathbb{R} \times M$ und eine glatte Abbildung $\Phi:D(X) \rightarrow M$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- (1) $0 \times M \subset D(X)$.

- (2) Für jedes $p \in M$ ist $t \mapsto \Phi(t, p)$ eine Integralkurve von X mit Anfang p .
- (3) Ist $\alpha: J \rightarrow M$ eine Integralkurve mit Anfang p , so ist J enthalten in $D(X) \cap (\mathbb{R} \times p) =]a_p, b_p[$, und es gilt $\alpha(t) = \Phi(t, p)$ für $t \in J$.
- (4) Es gilt $\Phi(0, x) = x$ und $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$, sofern die linke Seite definiert ist (dann ist auch die rechte Seite definiert). Insbesondere gilt für jedes $t \in]a_p, b_p[$ die Gleichheit $]a_p - t, b_p - t[=]a_{\Phi(t, p)}, b_{\Phi(t, p)}[$.
- (5) Ist M kompakt, so ist $D(X) = \mathbb{R} \times M$. Allgemeiner gilt dies, wenn X kompakten Träger hat. \square

Die Abbildung Φ des letzten Satzes heißt der *Fluß* des Vektorfeldes X . Ist $D(X) = \mathbb{R} \times M$, so sagen wir, das Vektorfeld sei *global integrierbar*. Der Fluß $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ hat dann die Eigenschaften $\Phi(0, x) = x$ und $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$. Es handelt sich also um eine glatte Operation der additiven Gruppe \mathbb{R} auf M , auch glattes *dynamisches System* genannt. Umgekehrt besteht ein *glatter Fluß* auf M aus einer offenen Umgebung \mathcal{O} von $0 \times M$ in $\mathbb{R} \times M$ und einer glatten Abbildung $\Psi: \mathcal{O} \rightarrow M$ mit den Eigenschaften:

- (1) $\{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in \mathcal{O}\}$ ist immer ein offene Intervall $]a_x, b_x[$.
- (2) Für jedes $t \in]a_x, b_x[$ ist $]a_x - t, b_x - t[=]a_{\Psi(t, x)}, b_{\Psi(t, x)}[$.
- (3) $\Psi(0, x) = x$; und $\Psi(s, \Psi(t, x)) = \Psi(s + t, x)$ für alle $t \in]a_x, b_x[$ und $s + t \in]a_x, b_x[$.

Die *Flußlinie* durch $x \in M$ ist die Kurve $\alpha_x:]a_x, b_x[\rightarrow M, t \mapsto \Psi(t, x)$. Sei $X(x) = \dot{\alpha}_x(0)$. Damit erhalten wir ein glattes Vektorfeld X auf M , und α_x ist eine Integralkurve mit Anfang x . Der nach (1.1) zu X gehörende Fluß Φ erweitert Ψ auf einen eventuell größeren Definitionsbereich. In diesem Sinne entsprechen sich glatte Vektorfelder und maximale glatte Flüsse.

(1.2) Beispiel. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus 0$ operiert frei auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ durch $(\lambda, (x, y)) \mapsto (\lambda x, \lambda^{-1} y)$. Die Bahnen sind einmal die Hyperbeln $H_c = \{(x, y) \mid xy = c\}$, sofern $c \neq 0$ ist; die Menge $H_0 = \{(x, y) \mid xy = 0\}$ besteht dagegen aus zwei Bahnen $\mathbb{R}^* \times 0$ und $0 \times \mathbb{R}^*$. Die Differenzabbildung $t: C \rightarrow \mathbb{R}^*$ ist stetig. Die Projektion $p: \mathbb{R}^2 \setminus 0 \rightarrow N$ auf den Bahnenraum N ist ein \mathbb{R}^* -Prinzipalbündel im allgemeinen topologischen Sinn, aber N ist nicht hausdorffsch, vielmehr die Gerade mit zwei Nullpunkten. Ist $U = \{x \neq 0\}$ und $V = \{y \neq 0\}$, so haben wir \mathbb{R}^* -Bündelkarten $\varphi_U: U \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x, xy)$ und entsprechend für V . \diamond

(1.3) Beispiel. Eine Variante des vorigen Beispiels ist das dynamische System

$$\Phi: \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus 0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0, \quad (t, (x, y)) \mapsto (e^t x, e^{-t} y).$$

Durch dieselbe Formel wird auch eine Operation auf \mathbb{R}^2 definiert, der globale Fluß des Vektorfeldes $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, -y)$, das Gradientenfeld von $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$. Die Bahnen von Φ bestehen aus den Zusammenhangskomponenten der Bahnen der vorigen Operation, und der Orbitraum ist eine zweifache Überlagerung des vorigen Orbitraumes. \diamond

(1.4) Beispiel. $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz + y^2 = 1\}$, ein einschaliges Hyperboloid, trägt eine glatte freie \mathbb{R} -Operation

$$c \cdot (x, y, z) = (x, y + cx, z - 2cy - c^2x),$$

ein \mathbb{R} -Prinzipalbündel, und der Orbitraum ist wiederum die Gerade mit den zwei Nullpunkten. \diamond

Allgemeiner als (1.1.5) gilt: Eine Integralkurve von endlicher Lebensdauer verläßt jede kompakte Menge. Genauer:

(1.5) Notiz. Sei $\alpha:]a, b[\rightarrow M$ eine Integralkurve mit maximalem Definitionsintervall, sei $K \subset M$ kompakt und $b < \infty$. Dann gibt es $c < b$, so daß $\alpha(t) \notin K$ für alle $t > c$. \square

(1.6) Satz. Es gibt drei wesentlich verschiedene Typen von Integralkurven:

- (1) Die Integralkurve ist konstant. (Bahnkurve durch eine Nullstelle des Vektorfeldes.)
- (2) Die Integralkurve ist eine injektive Immersion.
- (3) Die Integralkurve α ist periodisch mit Definitionsintervall \mathbb{R} , das heißt es gibt ein $\tau > 0$, so daß $\alpha(s) = \alpha(t)$ genau dann, wenn $s - t \in \tau\mathbb{Z}$. Das Bild von α ist dann eine kompakte glatte Untermannigfaltigkeit von M , und α induziert einen Diffeomorphismus $\exp(2\pi it) \mapsto \alpha(\tau t)$ von S^1 mit dem Bild von α . \square

(1.7) Satz. Sei M eine glatte Untermannigfaltigkeit von N und $A \subset M$ eine in N abgeschlossene Teilmenge. Dann gibt es zu einem glatten Vektorfeld X auf M ein glattes Vektorfeld Y auf N , so daß $Y|_A = X|_A$ ist und Y im Komplement einer Umgebung von A in N Null ist.

BEWEIS. Durch Verwendung angepaßter Karten sieht man zunächst, daß sich X lokal um jeden Punkt von M auf eine Umgebung in N erweitern läßt. Ist $(U_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung von N , Y^j eine Erweiterung von $X|_{N \cap U_j}$ auf U_j und (τ_j) eine (U_j) untergeordnete glatte Partition der Eins, so ist durch $Y_p = \sum_j \tau_j(p) Y_p^j$ eine Erweiterung von X gegeben. Wir wenden das auf eine Überdeckung an, die aus $N \setminus A$ und einer offenen Überdeckung von A besteht. \square

(1.8) Satz. Es gibt glatte Vektorfelder X auf M , so daß für jedes $p \in \partial M$ der Vektor X_p nach innen weist.

BEWEIS. Aus der Definition einer Mannigfaltigkeit mit Rand entnimmt man leicht, daß zu jedem $p \in \partial M$ eine offene Umgebung $U(p)$ von p in M und ein glattes Vektorfeld $X(p)$ existiert, das entlang $U(p) \cap \partial M$ nach innen weist. Zu der Überdeckung $(U(p) \mid p \in \partial M)$, $U(0) = M \setminus \partial M$ wählen wir eine glatte Partition der Eins $(\tau(p))$. Dann hat $X = \sum_p \tau(p) X(p)$ die verlangten Eigenschaften. \square

Ein *Kragen* einer glatten ∂ -Mannigfaltigkeit M ist eine glatte Abbildung $k: \partial M \times [0, b[$, die ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von ∂M in M ist und $(x, 0)$ auf x abbildet ($0 < b \leq \infty$).

(1.9) Satz. *Eine glatte ∂ -Mannigfaltigkeit besitzt einen Kragen.*

BEWEIS. In Analogie zu (1.1) gilt: Sei X ein glattes Vektorfeld auf M , das entlang ∂M nach innen weist. Durch jeden Punkt $x \in \partial M$ gibt es eine maximale Integralkurve $k_x: [0, b_x[\rightarrow M$ mit Anfang x . Die Menge $d(X) = \{(x, t) \mid t \in [0, b_x[\}$ ist offen in $\partial M \times [0, \infty[$ und $\kappa: d(X) \rightarrow M, (x, t) \mapsto k_x(t)$ glatt. Die Abbildung κ hat in allen Punkten von $\partial M \times 0$ maximalen Rang. Nach dem Satz (9.4) gibt eine offene Umgebung U von $\partial M \times 0$ in $d(X)$, die durch κ auf eine offene Umgebung V von ∂M in M diffeomorph abgebildet wird.

Sei $\kappa: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus dieser Art. Ist ∂M kompakt, so gibt es $\varepsilon > 0$, so daß $\partial M \times [0, \varepsilon[\subset U$ ist. Durch $k(x, t) = \kappa(x, \varepsilon t)$ wird dann ein Kragen gegeben. Im allgemeinen Fall gibt es wenigstens eine glatte positive Funktion $\varepsilon: \partial M \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $\{(x, t) \mid 0 < t < \varepsilon(x)\} \subset U$ ist. Der Kragen wird dann durch $k(x, t) = \kappa(x, \varepsilon(x)t)$ gegeben. \square

(1.10) Bemerkung. Ist A eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von M und X ein Vektorfeld auf M , so daß $X|_A$ ein Vektorfeld auf A ist (das heißt $X(a) \in T_a(A) \subset T_a(M)$ für alle $a \in A$), so verläuft eine in A beginnende Integralkurve von X vollständig in A . Ist $X|_A$ global integrierbar, so muß man A nicht als abgeschlossen voraussetzen. \diamond

2 Differentialgleichungen zweiter Ordnung und Sprays

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit dem Tangentialbündel $\pi_M: TM \rightarrow M$. Ein Vektorfeld $\xi: TM \rightarrow TTM$ heißt *Differentialgleichung zweiter Ordnung* oder *Vektorfeld zweiter Ordnung* auf M , wenn $T\pi_M \circ \xi = \text{id}(TM)$ ist. Ein Vektorfeld ξ zweiter Ordnung heißt *Spray* auf M , wenn für alle $s \in \mathbb{R}$ und $v \in TM$ die Gleichheit $\xi(sv) = Ts(s\xi(v))$ besteht. Hierin ist mit s auch die glatte Abbildung $s: TM \rightarrow TM$ bezeichnet, die jeden Tangentialvektor mit dem Skalar s multipliziert, und Ts ist deren Differential.

Sei $\varphi: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. Jedem Vektorfeld ξ auf TM wird durch $\eta = T\varphi \circ \xi \circ T\varphi^{-1}$ ein Vektorfeld η auf TN zugeordnet. Durch Einsetzen der Definitionen verifiziert man:

(2.1) Notiz. *η ist genau dann ein Vektorfeld zweiter Ordnung (ein Spray), wenn dieses für ξ gilt.* \square

Ist $U \subset M$ eine offene Teilmenge, so erhält man aus ξ durch Einschränkung $\xi: TU \rightarrow TTU$, und die Eigenschaft zweiter Ordnung oder Spray zu sein geht dabei nicht verloren. Wir können uns deshalb einen Spray auf M in lokalen Karten ansehen.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann identifizieren wir wie üblich

$$TU = U\mathbb{R}^n, \quad TTU = (U \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

In dieser Darstellung hat ein Vektorfeld ξ auf TU die Form

$$(x, v) \mapsto (x, v, f(x, v), g(x, v)).$$

Durch Einsetzen der Definitionen erhält man:

(2.2) Notiz. ξ ist genau dann von zweiter Ordnung, wenn $f(x, v) = v$ ist. Und ξ ist genau dann ein Spray, wenn außerdem für alle $s \in \mathbb{R}$ und $(x, v) \in U \times \mathbb{R}^n$ die Gleichung $g(x, sv) = s^2g(x, v)$ gilt. \square

Die letzte Bedingung ist trivialerweise erfüllt, wenn $g = 0$ ist. Also gibt es jedenfalls lokal immer Sprays. Lokal gegebene Sprays lassen sich mit einer Partition der Eins zusammensetzen. Das geschieht wie folgt.

Der geometrische Sinn der Sprays erhellt durch ihre Integralkurven.

(2.3) Satz. Ein glattes Vektorfeld ξ auf TM ist genau dann ein Vektorfeld zweiter Ordnung, wenn für jede maximale Integralkurve $\beta_v:]a_v, b_v[\rightarrow TM$ mit Anfangswert $v \in TM$ und Projektion $\alpha_v = \pi_m \circ \beta_v$ gilt $\dot{\alpha}_v = \beta_v$.

BEWEIS. Sei β_v eine Integralkurve; das bedeutet $\xi(v) = T_0\beta_v(\partial/\partial t)$. Wir wenden $T\pi$ an und erhalten mit der Kettenregel

$$T_v\pi_M(\xi(v)) = T_v\pi_M T_0\beta_v(\partial/\partial t) = T_0(\pi_M\beta_v)(\partial/\partial t) = T_0(\alpha_v)(\partial/\partial t) = \beta_v(0) = v,$$

wobei die vorletzte Gleichung die im Satz genannte Bedingung benutzt.

Sei umgekehrt $T\pi_M \circ \xi = \text{id}$ und β_v die Integralkurve mit Anfang v . Dann rechnen wir

$$T_s\alpha_v(\partial/\partial t) = T_{\beta_v(s)}\pi T_s\beta_v(\partial/\partial t) = T_{\beta_v(s)}\pi(\xi(\beta_v(s))) = \beta_v(s).$$

Die erste Gleichheit ist die Definition von α , die zweite die Integralkurvendefinition und die dritte die Voraussetzung über ξ . \square

(2.4) Satz. Sei ξ ein glattes Vektorfeld zweiter Ordnung auf M . Genau dann ist ξ ein Spray, wenn die Kurven α_v folgende Eigenschaften haben:

- (1) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und alle $v \in TM$ gilt: $st \in]a_v, b_v[$ genau dann, wenn $t \in]a_{sv}, b_{sv}[$.
- (2) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und alle $v \in TM$ mit $st \in]a_v, b_v[$ ist $\alpha_v(st) = \alpha_{sv}(t)$.

BEWEIS. Seien die genannten Eigenschaften der Integralkurven vorausgesetzt. Aus $\alpha_{sv}(t) = \alpha_v(st)$ folgt durch Ableitung nach t die Gleichung $\beta_{sv}(t) = s\beta_v(st)$ und durch nochmalige Ableitung $\dot{\beta}_{sv}(t) = Ts(s\dot{\beta}_v(st))$ unter Benutzung der Kettenregel. Wir setzen darin $t = 0$ und erhalten $\xi(sv) = Ts(s\xi(v))$ wie gewünscht.

Sei umkehrt ξ ein Spray. Wir betrachten die Kurve $\gamma_v: t \mapsto s\beta_v(st)$ für alle t , für die $st \in]a_v, b_v[$. Dann gilt

$$\dot{\gamma}_v(t) = Ts(s\dot{\beta}_v(st)) = Ts(s\xi(\beta_v(st))) = \xi(s\beta_v(st)) = \xi(\gamma_v(t)).$$

Die Gleichheiten gelten wegen: Kettenregel, Integralkurve, Voraussetzung über ξ , Definition von γ . Die Rechnung zeigt, daß γ_v eine Integralkurve von ξ mit Anfang $\gamma_v(0) = s\beta_v(0) = sv$ ist. Ebenso ist β_{sv} eine solche Integralkurve. Wegen der Eindeutigkeit von Integralkurven gilt also $\beta_{sv}(t) = s\beta_v(st)$. Also ist für alle t mit $st \in]a_v, b_v[$ auch $t \in]a_{sv}, b_{sv}[$. Ist $s \neq 0$, so wenden wir dasselbe Argument

mit $1/s$ an und erhalten die umgekehrte Inklusion. Für $s = 0$ entsteht kein Problem. Die für die β -Kurven hergeleitete Gleichung liefert durch Projektion $\alpha_v(st) = \alpha_{sv}(t)$ wie gewünscht. \square

3 Die Exponentialabbildung eines Sprays

Sei $p: E \rightarrow M$ ein glattes Vektorraumbündel. Darin haben wir den *Nullschnitt*, $i: M \rightarrow E$, der $x \in M$ den Nullvektor $i(x) \in E_x = p^{-1}(x)$ zuordnet. Es gilt $pi = \text{id}(M)$, und i ist eine glatte Einbettung, die wir im weiteren oft als Inklusion ansehen; auch bezeichnen wir die Untermannigfaltigkeit $M = i(M)$ als Nullschnitt von E . Wir bestimmen $TE|M$, die Einschränkung von TE auf den Nullschnitt. Darin haben wir zwei Sorten von Tangentialvektoren: Die horizontalen in Richtung von M und die Vertikalen in Richtung von E_x . Daraus gewinnen wir eine Zerlegung des Bündels in eine Whitney-Summe.

Zunächst haben wir das Differential $Ti: TM \rightarrow TE$ mit einem Bild in $TE|M$. Da i eine Einbettung ist, so ist Ti ein faserweise injektiver Bündelmorphismus. Wir haben ferner einen Bündelmorphismus $j: E \rightarrow TE|M$; er ordnet $v \in E_x$ den Geschwindigkeitsvektor zur Zeit $t = 0$ der Kurve $t \mapsto tv$ in E_x zu. (Zu $\mu: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, $(t, v) \mapsto tv$ gehört $\dot{\mu}: \mathbb{R} \times E \rightarrow TE$.)

(3.1) Notiz. $\langle j, Ti \rangle: E \oplus TM \rightarrow TE|M$ ist ein Bündelisomorphismus. \square

Diese Überlegungen wenden wir auf das Bündel $\pi_M: TM \rightarrow M$ an und erhalten einen kanonischen Isomorphismus $TM \oplus TM \cong TTM|M$. Darin haben die beiden TM allerdings verschiedene Bedeutung: Der erste Summand besteht aus den *vertikalen* Tangentialvektoren, der zweite aus den *horizontalen*.

Sei nun ξ ein Spray auf M . Die Menge $\mathcal{O}(\xi) = \{v \in TM \mid 1 \in]a_v, b_v[\}$ ist eine offene Umgebung des Nullschnittes. Die *Exponentialabbildung* des Sprays ist

$$\exp_\xi: \mathcal{O}(\xi) \rightarrow M, \quad v \mapsto \alpha_v(1).$$

Auf dem Nullschnitt ist \exp_ξ die Identität. Nach den Vorbemerkungen ist dann $T\mathcal{O}(\xi)|M \cong TM \oplus TM$. Mit dieser Gleichsetzung gilt:

(3.2) Notiz. Das Differential von \exp_ξ am Nullschnitt ist

$$T_x \exp_\xi: T_x \mathcal{O}(\xi) = T_x M \oplus T_x M \rightarrow T_x M, \quad (v, w) \mapsto v + w.$$

BEWEIS. Da $\exp_\xi|_M = \text{id}(M)$ ist, gilt auf dem horizontalen Teil $(0, w) \mapsto w$. Auf dem vertikalen Teil haben wir

$$t \mapsto tv \mapsto \exp_\xi(tv) = \alpha_{tv}(1) = \alpha_v(t)$$

mit der Ableitung $\dot{\alpha}_v(0) = v$ an der Stelle $t = 0$; also gilt $(v, 0) \mapsto v$. \square

(3.3) Notiz. $(\pi, \exp_\xi): \mathcal{O}(\xi) \rightarrow M \times M$ hat am Nullschnitt das Differential $T_x M \oplus T_x M \rightarrow T_x M \oplus T_x M$, $(v, w) \mapsto (w, v + w)$.

BEWEIS. Wegen (3.2) haben wir nur noch zu bedenken, daß $T\pi_M$ die Form $(v, w) \mapsto w$ hat, da π_M auf den Fasern konstant ist und auf dem horizontalen Teil die Identität. \square

Wegen (3.3) und (??) gibt es eine offene Umgebung $U(\xi) \subset \mathcal{O}(\xi)$ des Nullschnittes, die bei (π, \exp) diffeomorph auf eine offene Umgebung $W(\xi) \subset M \times M$ der Diagonale abgebildet wird. Durch Verkleinerung können wir $U(\xi)$ noch eine ansprechende Form geben. Dazu versehen wir TM mit einer Riemannschen Metrik $\langle -, - \rangle$ und wählen eine glatte Funktion $\varepsilon: M \rightarrow]0, \infty[$, so daß

$$T^\varepsilon(M) = \{v \in T_x M \mid \|v\| < \varepsilon(x)\}$$

in $U(\xi)$ liegt. Dann ist $\pi_M: T^\varepsilon(M) \rightarrow M$ ein Bündel, dessen Fasern offene Kugeln um den Fasernullpunkt sind.

4 Normalenbündel und tubulare Umgebungen

Sei $i: A \subset M$ die Inklusion einer glatten Untermannigfaltigkeit. Das Differential $T_i: TA \rightarrow TM|_A$ ist ein injektiver Bündelmorphismus. Wie üblich fassen wir dabei $T_a A$ als Unterraum von $T_a M$ auf. Wir fixieren eine Riemannsche Metrik auf M und bilden damit das orthogonale Komplement $N_a A = (T_a A)^\perp$ von $T_a A$ in $T_a M$. Wir erhalten daraus das Unterbündel NA von $TM|_A$, genannt das *Normalenbündel* der Untermannigfaltigkeit. Bis auf Isomorphie ist das Normalenbündel unabhängig von der Riemannschen Metrik, da es isomorph zum Quotientenbündel der Inklusion $TA \rightarrow TM|_A$ ist. Wir haben eine direkte Zerlegung $TM|_A = NA \oplus TA$ von Bündeln, die faserweise die direkte Zerlegung $T_a M = N_a A \oplus T_a A$ in Unterräume ist.

Sei ξ ein Spray auf M und $\exp: \mathcal{O} \rightarrow M$ seine Exponentialabbildung. Dann ist $\mathcal{O} \cap NA$ eine offene Umgebung des Nullschnittes $A \subset \mathcal{O} \cap NA \subset TA$. Bezüglich der Zerlegung

$$T_a \mathcal{O} = T_a M \oplus T_a M$$

in den vertikalen und horizontalen Anteil ist

$$T_a|(\mathcal{O} \cap NA) = N_a A \oplus T_a A.$$

Da $T_a \exp$ auf beiden Summanden die Identität ist (14.2), so ist das Differential der Einschränkung

$$t = \exp|_{\mathcal{O} \cap NA}: \mathcal{O} \cap NA \rightarrow M$$

auf den Summanden $N_a A$ und $T_a A$ die Inklusion dieser Unterräume in $T_a M$. Wir können deshalb das Differential von t am Nullschnitt im wesentlichen als Identität ansehen. Da $t: A \rightarrow M$ die Inklusion ist, so gibt es nach (??) eine offene Umgebung U von A in $\mathcal{O} \cap NA$, die durch t auf eine offene Umgebung V von A in M eingebettet wird.

(4.1) Lemma. *Sei U eine offene Umgebung des Nullschnittes in einem glatten Vektorraumbündel $q: E \rightarrow A$. Dann gibt es eine faserweise Einbettung $\sigma: E \rightarrow$*

U , die in einer Umgebung des Nullschnittes die Identität ist (Schrumpfung von E).

BEWEIS. Wir wählen eine Riemannsche Metrik auf E . Es gibt eine glatte Funktion $\varepsilon: A \rightarrow]0, \infty[$, so daß

$$U_{\varepsilon(a)}(a) = \{x \in E_a \mid \|x\| < \varepsilon(a)\} \subset U$$

ist. Sei $\varphi_\eta:]0, \infty[\rightarrow [0, \eta[$ ein Diffeomorphismus, der auf $[0, \eta/2[$ die Identität ist und glatt von η abhängt. Wir setzen $\sigma(v) = \varphi_{\varepsilon(qv)}(\|v\|)\|v\|^{-1}v$. \square

Eine *Tubenabbildung* einer glatten Untermannigfaltigkeit $A \subset M$ ist eine glatte Einbettung $t: NA \rightarrow M$ auf eine offene Menge $U \subset M$, die auf dem Nullschnitt die Identität ist. Wir nennen eine Umgebung U von A in M , die auf diese Weise entsteht, eine *tubulare Umgebung* Umgebung von A in M . Die Bündelprojektion wird durch die Tubenabbildung in eine glatte Retraktion $r: U \rightarrow M$ transportiert, und die Fasern dieser Retraktion sind alle diffeomorph zu einem euklidischen Raum. Wir sprechen von einer *partiellen* Tubenabbildung, wenn sie nur eine offene Umgebung des Nullschnittes von NA diffeomorph auf eine offene Umgebung von A in M abbildet. Durch Schrumpfung läßt sich aber daraus eine global definierte Tubenabbildung gewinnen. Eine Tubenabbildung heie *streng*, wenn ihr Differential am Nullschnitt eine weitere Bedingung erfüllt, die wir jetzt erläutern. Das Differential von t , eingeschränkt auf $TNA|_A$, ist ein Bündelmorphismus

$$TNA|_A \rightarrow TM|_A.$$

Diesen setzen wir mit der Inklusion

$$NA \rightarrow NA \oplus TA \cong TNA|_A$$

und der Projektion

$$TM|_A \rightarrow NA = (TM|_A)/TA$$

zusammen. Ergibt sich dann die Identität, so heißt t streng. Analog für partielle Tubenabbildungen. Durch den Schrumpfungsprozeß (4.1) ndert sich diese Eigenschaft nicht.

(4.2) Satz. *Jede glatte Untermannigfaltigkeit $A \subset M$ besitzt eine strenge Tubenabbildung.*

BEWEIS. Wir haben am Anfang des Abschnittes gesehen, daß die Exponentialabbildung eines Sprays durch Einschränkung immer eine partielle Tubenabbildung liefert, die dann durch Schrumpfung zu einer globalen verbessert werden kann. Nach Konstruktion ist sie streng. \square

Indem wir mit einer Tubenabbildung die Bündelprojektion transportieren, erhalten wir:

(4.3) Notiz. *Eine glatte Untermannigfaltigkeit A von M ist glatter Retrakt einer offenen Umgebung.* \square

Sei $A \subset M$ eine glatte Untermannigfaltigkeit und $q: E \rightarrow A$ ein glattes Vektorraumbündel. Sei $\tau: E \rightarrow M$ eine Einbettung von E auf eine offene Teilmenge U von M , die auf dem Nullschnitt die Inklusion ist. In diesem Fall bezeichnen wir τ auch als Tubenabbildung. In der Tat ist E isomorph zum Normalenbündel. Das Differential von τ liefert nämlich einen glatten Bündelisomorphismus $T\tau TE|_A \rightarrow TU|_A$, der die Unterbündel TA identisch abbildet und deshalb einen Isomorphismus $E \rightarrow NA$ der Quotientenbündel induziert.

(4.4) Normalenbündel des Nullschnitts. Sei $q: E \rightarrow A$ ein glattes Vektorraumbündel. Wir haben die Inklusion des Nullschnittes $i: A \rightarrow E$ als glatte Untermannigfaltigkeit. Deren Normalenbündel ist E , denn wir hatten ja eine direkte Zerlegung $TE|_A = E \oplus TA$ hergestellt und damit ein direktes Komplement von TA gewonnen. Eine strenge Tubenabbildung ist in diesem Fall die Identität von E . \diamond

(4.5) Normalenbündel der Diagonale. Das Normalenbündel der Diagonale $M = D(M) \subset M \times M$ einer glatten Mannigfaltigkeit ist isomorph zum Tangentialbündel TM . Denn $T_{(x,x)}D(M)$ ist die Diagonale von $T_x M \times T_x M = T_{(x,x)}(M \times M)$, und das Bündel $0 \oplus TM$ ist ein direktes Komplement des Diagonalbündels. \diamond

4 Isotopien

1 Isotopien

Seien $h_0, h_1: M \rightarrow N$ glatte Einbettungen. Eine *Isotopie* von h_0 nach h_1 ist eine glatte Abbildung $H: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ mit den Eigenschaften:

- (1) $h_0(x) = H(x, 0)$, $h_1(x) = H(x, 1)$ für alle $x \in M$.
- (2) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $H_t: M \rightarrow N$, $x \mapsto H(x, t)$ eine glatte Einbettung.
- (3) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $H_t = H_0$ für $t < \varepsilon$ und $H_t = H_1$ für $t > 1 - \varepsilon$.

Gibt es eine derartige Isotopie, so heißen h_0 und h_1 *isotop*. Ist H eine Isotopie von h_0 nach h_1 und K eine Isotopie von h_1 nach h_2 , so ist die durch

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & t \leq 1/2 \\ K(x, 2t - 1) & t \geq 1/2 \end{cases}$$

erklärte Abbildung glatt und deshalb eine Isotopie von h_0 nach h_2 . Das liefert die Transitivität für die Aussage: „Isotop“ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der glatten Einbettungen $M \rightarrow N$.

Die Definition einer Isotopie wurde technisch so gefaßt, daß die Glattheit der soeben verwendeten Abbildung L klar ist. In Analogie zum Homotopiebegriff würde man vielleicht erwarten, eine Isotopie von h_0 nach h_1 als eine glatte Abbildung $h: M \times [0, 1] \rightarrow N$ zu definieren, die für jedes t eine Einbettung h_t liefert. Ist aber h eine glatte Abbildung dieser Art und $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine glatte Funktion, die für $t < \varepsilon$ Null und für $t > 1 - \varepsilon$ Eins ist, so ist $(x, t) \mapsto h(x, \varphi(t))$ eine Isotopie im Sinne der Definition. Ebenso können wir mit jeder Abbildung $M \times J \rightarrow N$, $[0, 1] \subset J$ verfahren. Wir verwenden diese Bemerkung im weiteren meist ohne besonderen Hinweis.

Eine *Diffeotopie* der glatten Mannigfaltigkeit N ist eine glatte Abbildung $D: N \times \mathbb{R} \rightarrow N$, so daß $D_0 = \text{id}(N)$ und D_t für alle t ein Diffeomorphismus ist.

Seien $h_0, h_1: M \rightarrow N$ glatte Einbettungen. Eine Diffeotopie D von N heißt *ambient Isotopie* von h_0 nach h_1 , wenn

$$h: M \times \mathbb{R} \rightarrow N, \quad (x, t) \mapsto D(h_0(x), t) = D_t(h_0(x))$$

eine Isotopie von h_0 nach h_1 ist. Wir sagen in diesem Fall auch, die *Isotopie* h werde durch die Diffeotopie D mitgeführt. Auch hier kommt es nur auf die Einschränkung $D|_{N \times [0, 1]}$ an. „Ambient isotop“ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Einbettungen.

(1.1) Beispiel. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Einbettung, die den Nullpunkt erhält. Dann ist f isotop zum Differential $Df(0)$. Zum Beweis schreiben wir $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$ mit glatten Funktionen $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dabei ist $Df(0): v \mapsto$

$\sum_{i=1}^n v_i g_i(0)$. Eine Isotopie wird durch

$$(x, t) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i g_i(tx) = \begin{cases} t^{-1} f(tx) & t > 0 \\ Df(0) & t = 0 \end{cases}$$

definiert.

Sind h_0 und h_1 ambient isotop und ist $h_0(M) \subset N$ abgeschlossen, so ist auch $h_1(M) \subset N$ abgeschlossen. Daraus erkennt man leicht, daß nicht jede der soeben konstruierten Isotopien durch eine Diffeotopie mitgeführt wird. \diamond

(1.2) Satz. *Je zwei strenge Tubenabbildungen sind isotop als strenge Tubenabbildungen.*

BEWEIS. (1) Der Beweis verallgemeinert die Idee des vorigen Beispiels. Dazu verschaffen wir uns zunächst geeignete Umstände. Sei M glatte m -Untermannigfaltigkeit der glatten n -Mannigfaltigkeit N . Seien f_0 und f_1 Tubenabbildungen. Wir setzen zunächst voraus: Zu jedem $p \in M$ gibt es Kartenbereiche U und V von M um p , über denen $E(\nu)$ trivial ist, derart daß $f_0(E(\nu)|U) \subset f_1(E(\nu)|V)$ erfüllt ist. Dann sind f_0 und f_1 streng isotop.

Wegen der Voraussetzung ist $f_0(E(\nu)) \subset f_1(E(\nu))$. Wir betrachten deshalb $\varphi = f_1^{-1} f_0: E(\nu) \rightarrow E(\nu)$ und zeigen, daß φ streng isotop zur Identität ist. Die Isotopie ψ_t , $t \in [0, 1]$ wird für $t > 0$ durch $\psi_t(v) = t^{-1} \varphi(tv)$ gegeben, und ψ_0 ist natürlich die Identität. Für jedes t ist ψ_t eine glatte Einbettung auf eine offene Umgebung, die den Nullschnitt festläßt. Wir zeigen, daß ψ_t streng ist und ψ glatt. Wegen der Voraussetzung können wir φ in geeigneten lokalen Koordinaten nämlich als Abbildung

$$\varphi: U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow V \times \mathbb{R}^{n-m}, \quad (x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$$

mit $f(x, 0) = x$, $g(x, 0) = 0$ schreiben. Es gibt eine Darstellung

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{n-m} y_i g_i(x, y)$$

mit glatten Funktionen $g_i: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, die überdies $g_i(x, 0) = \frac{\partial g}{\partial y_i}(x, 0)$ erfüllen. Daraus sehen wir, daß

$$(x, y, t) \mapsto \psi_t(x, y) = \left(f(x, ty), \sum_i y_i g_i(x, ty) \right)$$

glatt in x, y, t ist. Die Ableitung am Nullschnitt erfüllt

$$\frac{\partial \psi_t}{\partial y_i}(x, 0) = g_i(x, 0).$$

Da f_0 und f_1 streng sind, ist die Matrix mit den Zeilen $g_i(x, 0)$ die Einheitsmatrix ist. Also ist auch ψ_t streng.

(2) Wir zeigen nun, daß man die Zusatzvoraussetzung aus (1) erfüllen kann. Sei

$E(\nu)$ über dem Kartenbereich V um p trivial. Dann ist $f_1(E(\nu)|V)$ eine offene Umgebung von $V \subset M \subset N$ in N . Sei $W \subset E(\nu)$ eine offene Umgebung von $p \in M$, so daß $f_0(W) \subset f_1(E(\nu)|V)$. In W wählen wir eine Menge der Form $E(\nu, \eta)|U$, $\eta > 0$ mit einem Kartenbereich U , über dem $E(\nu)$ trivial ist. Mit einer glatten Partition der Eins verschafft man sich nun eine positive glatte Funktion $\varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}$, so daß für alle (U, η) wie eben $\varepsilon(x) < \eta$ für $x \in U$. Aus $E(\nu, \varepsilon)$ erhalten wir durch Schrumpfung von f_0 eine geeignete Tubenabbildung. Das Argument unter (1) zeigt, daß Schrumpfung nicht die strenge Isotopieklasse verändert.

Einbettungen werden als geometrisch gleichwertig angesehen, wenn sie ambient isotop sind. Eine glatte Einbettung $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *Knoten* im \mathbb{R}^3 . Die zugehörige ambiente Isotopieklasse heißt der *Knotentyp* von f . Das Komplement des Bildes ist der *Knotenaußenraum*, und seine Fundamentalgruppe heißt die *Knotengruppe*. Die Knotentheorie ist die Untersuchung der Knotentypen. Isotope Knoten sind immer ambient isotop. Die Frage nach der Bestimmung der ambienten Isotopieklassen von Einbettungen $M \rightarrow N$ könnte man das allgemeine Knotenproblem nennen.

(1.3) Satz. *Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit ohne Rand einer Dimension größer als 1. Seien $\{y_1, \dots, y_n\}$ und $\{z_1, \dots, z_n\}$ Teilmengen von M . Dann gibt es einen zur Identität diffeotopen Diffeomorphismus $h: M \rightarrow M$ mit $h(y_i) = z_i$ für $1 \leq i \leq n$. Die Diffeotopie läßt sich außerhalb einer kompakten Menge als konstant annehmen.*

BEWEIS. Sei $n = 1$, $y_1 = y$, $z_1 = z$. Die Möglichkeit, y und z vermöge eines h zu verbinden, definiert eine Äquivalenzrelation auf M . Wenn wir zeigen, daß die Äquivalenzklassen offen sind, so folgt die Behauptung in diesem Fall wegen des Zusammenhangs von M . Um die Offenheit zu zeigen, genügt es, eine lokale Situation $M = \mathbb{R}$ zu betrachten. Wir zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ und für jedes $z \in \mathbb{R}$ mit $\|z\| < \delta$ eine Diffeotopie h_t von \mathbb{R} , die $h_1(0) = z$ erfüllt und für $\|y\| \geq \varepsilon$ konstant ist. Für $k = 1$ konstruieren wir eine solche Isotopie in der Form $h_t(x) = x + t\rho(x)z$ mit glattem $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\rho(0) = 1$ und Träger in $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Die Ableitung von h_t ist positiv, sofern $|t\rho'(x)z| < 1$ ist für $|z| < \delta$. Da h_t beschränkt von der Identität abweicht, also eigentlich ist und eine injektive Immersion, ist h_t eine Einbettung.

Für $k > 1$ kann man zunächst durch Rotation annehmen, daß z die Form $z = (z_1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}$ hat. Sei $\sigma: \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow [0, 1]$ eine glatte Funktion mit $\sigma(0) = 1$ und Träger in $D_\eta(0)$. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{k-1}$ setzen wir $h_t(x, y) = (x + t\sigma(y)\rho(x)z_1, y)$. Wegen des Falls $k = 1$ ist h_t ein Diffeomorphismus von $\mathbb{R} \times \{y\}$ für jedes y . Durch Betrachtung der Funktionalmatrix sieht man dann, daß h_t eine Immersion ist und als bejektive Abbildung ein Diffeomorphismus ist. Die Diffeotopie ist für $|x| \geq \varepsilon$ oder $\|y\| \geq \eta$ konstant.

Für $n > 1$ führen wir den Beweis durch Induktion nach n . Es gibt eine Diffeotopie k_t von $N = M \setminus \{y_n, z_n\}$ mit $k_1(y_i) = z_i$ für $i < n$ und $k_0 = \text{id}$, weil wegen $\dim M > 1$ auch N zusammenhängend ist. Da k_t außerhalb einer kompakten Menge stationär ist, so sind alle k_t in einer Umgebung von y_n und z_n

die Identität. Deshalb kann k_t zu einer Isotopie k_t von M mit $k_0 = \text{id}$ erweitert werden. Analog gibt es eine Diffeotopie l_t von $M \setminus \{y_1, \dots, y_{n-1}, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ mit $l_0 = \text{id}$, $l_1(y_n) = z_n$, die in einer Umgebung von y_i und z_i für $i < n$ die Identität ist. Die Diffeotopie $l_t \circ k_t$ leistet das Gewünschte. \square

Wir werden im folgenden Diffeotopien durch Integration geeigneter Vektorfelder erhalten. Dazu ist es zweckmäßig, Isotopien als „Film“ zu betrachten. Sei $h: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Der *Film* von h ist die glatte Abbildung

$$h^\#: M \times \mathbb{R} \rightarrow N \times \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto (h_t(x), t).$$

Da $h^\#(M \times t) \subset N \times t$ ist, nennen wir $h^\#$ *höhererhaltend*. Ist h eine Isotopie, so ist $h^\#$ jedenfalls eine höhererhaltende injektive Immersion. Wir nennen h *strikt*, wenn $h^\#$ sogar eine Einbettung ist.

(1.4) Beispiel. Sei $D: N \times \mathbb{R} \rightarrow N$ eine Diffeotopie. Dann ist der Film $D^\#$ ein Diffeomorphismus (da jedenfalls eine bijektive Immersion). Ist umgekehrt ein höhererhaltender Diffeomorphismus dieses Typs gegeben und ist $D_0 = \text{id}(N)$, so ist $\text{pr}_1 \circ D^\# = D$ eine Diffeotopie von N . \diamond

(1.5) Notiz. Eine Isotopie $h: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$, die außerhalb einer kompakten Menge K von M konstant ist, ist strikt.

BEWEIS. Da $h^\#$ eine injektive Immersion ist, genügt es zu zeigen, daß $h^\#$ eine topologische Einbettung ist.

Sei $U \subset M$ offen und relativ kompakt und h_t außerhalb von U konstant. Dann ist $h_0|_{M \setminus U}$ ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge von $h_0(M)$, also auch $h_0 \times \text{id} = h^\#: (M \setminus U) \times [0, 1] \rightarrow N \times [0, 1]$ ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge von $h^\#(M \times [0, 1])$. Wegen Injektivität und Kompaktheit ist auch $h^\#: \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow N \times [0, 1]$ ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge. Insgesamt ist demnach $h^\#$ ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge von Bild $h^\#$. \square

Ein Vektorfeld X auf $M \times \mathbb{R}$ können wir in seine beiden Komponenten bezüglich der direkten Zerlegung $T_{(x,t)}(M \times \mathbb{R}) = T_x M \times T_t \mathbb{R}$ zerspalten. Wir erhalten dann aus X zwei Vektorfelder auf $M \times \mathbb{R}$, die wir in naheliegender Weise als die M - und die \mathbb{R} -Komponente von X bezeichnen. (Analog für beliebige Produkte $M_1 \times M_2$.) Insbesondere haben wir auf $M \times \mathbb{R}$ das konstante Vektorfeld, dessen M -Komponente Null ist und dessen \mathbb{R} -Komponente $\frac{\partial}{\partial t}$.

(1.6) Notiz. Sei Z ein glattes Vektorfeld auf $N \times \mathbb{R}$, dessen \mathbb{R} -Komponente gleich $\frac{\partial}{\partial t}$ ist.

(1) Sei Z global integrierbar. Dann gilt für den zugehörigen Fluß Φ

$$\Phi_t(N \times \{s\}) \subset N \times \{s + t\}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

und

$$D: N \times \mathbb{R} \rightarrow N, \quad (x, t) \mapsto \text{pr}_1 \circ \Phi_t(x, 0) = D_t(x)$$

ist eine Diffeotopie von N .

(2) Hat Z außerhalb einer kompakten Menge $C = K \times [c, d]$ die N -Komponente Null, so ist Z global integrierbar und D außerhalb K konstant.

BEWEIS. (1) Sei $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow N \times \mathbb{R}$ die Integralkurve durch (y, s) . Dann ist $\beta = \text{pr}_2 \circ \alpha$ die Integralkurve von $\frac{\partial}{\partial t}$ durch s , und deshalb gilt $\beta(t) = s + t$. Das zeigt die erste Inklusion.

Jedenfalls ist D glatt und $D(y, 0) = \text{pr}_1 \circ \Phi_0(y, 0) = \text{pr}_1(y, 0) = y$. Ferner ist D_t ein Diffeomorphismus, denn ein glattes Inverses ist $y \mapsto \text{pr}_1 \circ \Phi_{-t}(y, t)$ gegeben.

(2) Sei $\alpha:]a, b[\rightarrow N \times \mathbb{R}$ eine maximale Integralkurve. Ist $b < \infty$, so gibt es ein $t_0 \in]a, b[$, so daß für $t \geq t_0$ gilt $\alpha(t) \notin C$. Solange eine Integralkurve nicht in C verläuft, hat sie aber die Form $t \mapsto (x_0, s_0 + t)$. Daraus entnimmt man einen Widerspruch zu $b < \infty$. \square

(1.7) Satz. Sei $h: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ eine technische Isotopie, die außerhalb einer kompakten Menge $K \subset M$ konstant ist. Dann gibt es eine Isotopie D von N , die h mitführt und die außerhalb einer kompakten Menge konstant ist.

BEWEIS. Wir erhalten D nach der Methode von (1.5). Nach (1.4) ist h strikt und deshalb $P = h^\#(M \times \mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit. Das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial t}$ wird durch den Diffeomorphismus $h^\#$ zu einem Vektorfeld X auf P transportiert. Die \mathbb{R} -Komponente von X auf P ist $\frac{\partial}{\partial t}$. Die Menge $N_0 = h^\#(K \times [0, 1])$ ist kompakt in P . Sei N_1 eine kompakte Umgebung von N_0 . Gesucht ist eine Erweiterung Y von P auf $N \times \mathbb{R}$ mit \mathbb{R} -Komponente $\frac{\partial}{\partial t}$, die außerhalb von $N_1 \times [0, 1]$ die N -Komponente Null hat. Mit diesem Y können wir (1.5) anwenden. Die resultierende Diffeotopie führt h mit. Das Vektorfeld Y wird mittels Partition der Eins aus geeigneten lokalen Daten komponiert. Außerhalb von $N_0 \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ wählen wir dazu das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial t}$. Auf $N_1^\circ \times]0, 1[$ konstruieren wir eine Erweiterung von X ; das ist möglich, weil der Anteil von P darin eine Untermannigfaltigkeit ist (12.4). Diese beiden Stücke werden mittels Partition der Eins verheftet. \square

(1.8) Satz. Seien k_0 und k_1 Kragen von M . Sei ∂M kompakt und K eine kompakte Umgebung von ∂M in M . Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Diffeotopie D von M , die auf $\partial M \cup (M \setminus K)$ konstant ist und $D_1 k_0(x, s) = k_1(x, s)$ für $0 \leq s < \varepsilon$ erfüllt.

BEWEIS. Das Vektorfeld $\partial/\partial t$ auf $\partial M \times [0, 1[$ wird durch k_0 und k_1 in Vektorfelder transportiert, die auf einer Umgebung von ∂M in M erklärt sind und auf dem Durchschnitt U dieser Umgebungen X_0 und X_1 heißen mögen. Damit definieren wir auf U die Felder $X_\lambda = (1 - \lambda)X_0 + \lambda X_1$, die entlang ∂M sämtlich nach innen weisen. Nach dem Beweis von (11.6) erhalten wir aus X_λ Kragen k_λ . Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß die Kragen k_λ , $\lambda \in [0, 1]$ auf $\partial M \times [0, 2\varepsilon]$ definiert sind und

$$k: (\partial M \times [0, 2\varepsilon]) \times [0, 1] \rightarrow M, \quad (x, s, \lambda) \mapsto k_\lambda(x, s)$$

eine glatte Isotopie (der Einschränkungen) von k_0 nach k_1 ist und ein Bild in K° hat.

Es gibt eine Diffeotopie von K° , die $k|(\partial M \times [0, \varepsilon]) \times [0, 1]$ mitführt und außerhalb einer kompakten Menge von K° konstant ist. Wir können sie außerhalb von K° konstant zu einer Diffeotopie von M fortsetzen. Letztere hat die gewünschten Eigenschaften. \square

(1.9) Beispiel. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist

$$h_t:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto ((x^{-1}t^2 - x)^2, (x^{-1}t^2 - x)t)$$

eine Einbettung. Ist $t \neq 0$, so ist $t^{-1} \circ \text{pr}_2 \circ h_t: x \mapsto x^{-1}t^2 - x$ ein Diffeomorphismus $]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$; und im Fall $t = 0$ ist $\text{pr}_1 \circ h_t: x \mapsto x^2$ eine Einbettung mit dem Bild $]0, \infty[$. Folglich ist h_t eine glatte Isotopie. Es gilt für den Film

$$h^\#(\sqrt{1+t^2} - 1, t) = (4, 2t, t), \quad t \neq 0.$$

Bei $t \rightarrow 0$ konvergiert dieser Wert gegen $(4, 0, 0)$ im Bild von $h^\#$. Dagegen konvergiert $(\sqrt{1+t^2} - 1, t)$ nicht in $]0, \infty[\times \mathbb{R}$. Demnach ist $h^\#$ keine Einbettung und die Isotopie nicht strikt. Das Bild P von $h^\#$ ist auch keine Untermannigfaltigkeit. Es ist nämlich P die Teilmenge von

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz^2 = y^2\},$$

die durch $z \neq 0, x \geq 0$ und $z = 0, x > 0$ herausgeschnitten wird. Der Schnitt von P mit der Ebene $\{x = a^2 > 0\}$ besteht aus den beiden Geraden $\{(a^2, \pm at, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, und $P \cap \{x > 0\}$ besteht aus zwei sich entlang der positiven x -Achse transvers schneidenden Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^3 . \diamond

2 Eigentliche Submersionen

In den nächsten beiden Abschnitten wenden wir ebenfalls Flüsse von Vektorfeldern an. Zunächst zeigen wir, daß eigentliche Submersionen lokal triviale Abbildungen sind.

(2.1) Satz. *Sei $f: M \rightarrow J$ eine eigentliche glatte Submersion auf ein offenes Intervall J von \mathbb{R} . Dann gibt es einen Diffeomorphismus $\Phi: Q \times J \rightarrow M$, so daß $f \circ \Phi$ die Projektion auf J ist.*

BEWEIS. Es gibt ein glattes Vektorfeld X auf M , so daß $T_p f(X_p) = X_p f$ für alle $p \in M$ gleich 1 ist. (Zum Beweis wählen wir eine Riemannsche Metrik auf M , bilden damit das Gradientenfeld von f und dividieren an jeder Stelle durch das Normquadrat des Feldvektors.) Sei Ψ der Fluß von X . Wir fixieren $\sigma \in J$ und setzen $Q = f^{-1}(\sigma)$. Sei $x \in Q$ und $\alpha: I \rightarrow M$ die maximale Integralkurve von X mit Anfang $\alpha(\sigma) = x$. Da $f \circ \alpha$ nach Wahl von X die konstante Ableitung 1 hat, gilt $f\alpha(t) = t$. Da f eigentlich ist und eine Integralkurve mit endlichem Definitionsintervall jede kompakte Menge verläßt (siehe (12.2)), ist $I = J$. Mittels Ψ können wir α in der Form $\alpha(t) = \Psi(t - \sigma, x)$ schreiben. Es gilt $f\Psi(t, x) =$

$f(x) + t$. Der Definitionsbereich von Ψ ist also $\{(t, x) \mid t - f(x) \in J\} \subset \mathbb{R} \times M$. Wir haben die glatte Abbildung

$$\Phi: Q \times J \rightarrow M, \quad (x, t) \mapsto \Psi(t - \sigma, x),$$

für die auch $f \circ \Phi = \text{pr}_J$ gilt. Um sie als Diffeomorphismus zu erweisen, genügt es zu zeigen, daß für jedes $t \in J$ die Faser $\text{pr}_J^{-1}(t) = Q \times \{t\} \cong Q = f^{-1}(\sigma)$ diffeomorph auf $f^{-1}(t)$ abgebildet wird. Es handelt sich um

$$x \in f^{-1}(\sigma) \mapsto \Psi(t - \sigma, x) \in f^{-1}(t).$$

Der inverse Diffeomorphismus ist aber $y \mapsto \Psi(\sigma - t, y)$, nach der Grundeigenschaft (12.1.4) eines Flusses. \square

Wir bemerken, daß die Eigentlichkeit von f nur dazu benutzt wurde, um das maximale Definitionsintervall einer Integralkurve zu bestimmen. Es gibt nicht-eigentliche Submersionen mit kompakten Fasern.

(2.2) Notiz. Sei $f: M \rightarrow N$ eine Submersion. Alle Fasern $f^{-1}(y)$ seien kompakt und zusammenhängend. Dann ist f eigentlich.

BEWEIS. Wir fixieren $y_0 \in N$. Da $f^{-1}(y_0)$ kompakt ist, gibt es eine kompakte Umgebung V dieser Menge. Wir zeigen: Es gibt eine kompakte Umgebung W von y_0 , deren Urbild $f^{-1}(W)$ in V liegt. Angenommen, für jede kompakte Umgebung A von y_0 sei der Schnitt mit dem Rand $f^{-1}(A) \cap \text{Rd}(V) \neq \emptyset$. Wegen

$$\bigcap_A f^{-1}(A) \cap \text{Rd}(V) = f^{-1}(y_0) \cap \text{Rd}(V) = \emptyset$$

und der Kompaktheit von $\text{Rd}(V)$ ist ein Schnitt von endlich vielen der Mengen $f^{-1}(A) \cap \text{Rd}(V)$ leer, was nicht sein kann. Also gibt es A_0 mit $f^{-1}(A_0) \cap \text{Rd}(V) = \emptyset$. Da $f^{-1}(a)$ zusammenhängend ist, folgt aus $f^{-1}(a) \cap \text{Rd}(V) = \emptyset$, daß $f^{-1}(a)$ entweder in V° oder in $M \setminus V$ enthalten ist. Da f eine Submersion ist, so ist $f(V)$ eine Umgebung von y_0 , und für $a \in f(V)$ ist $f^{-1}(a) \cap V \neq \emptyset$. Also ist $W = A_0 \cap f(V)$ eine geeignete Umgebung. Als abgeschlossene Teilmenge von V ist $f^{-1}(W)$ kompakt. Jeder Punkt von N hat also eine kompakte Umgebung mit kompaktem Urbild. Daraus folgt aber nun sofort, daß kompakte Mengen in N überhaupt kompakte Urbilder haben. \square

(2.3) Satz. Sei $f: M \rightarrow U$ eine eigentliche Submersion. Darin sei $U = \prod_{j=1}^k J_j \subset \mathbb{R}^k$ ein Produkt offener Intervalle $J_j \subset \mathbb{R}$. Dann gibt es einen Diffeomorphismus $\Phi: Q \times U \rightarrow M$, so daß $f \circ \Phi$ die Projektion auf U ist.

BEWEIS. Induktion nach k . Der Fall $k = 1$ ist durch (2.1) erledigt. Sei f_j die j -te Komponente von f . Wir wählen ein glattes Vektorfeld X_1 auf M , das bei Tf_1 auf $\partial/\partial t_1$ abgebildet wird und bei Tf_j für $j > 1$ auf Null. (Zur Existenz: Mittels einer Riemannschen Metrik haben wir das orthogonale Komplement zum Kernbündel von Tf ; die Fasern dieses Komplementes werden bei Tf isomorph

abgebildet; das Vektorfeld X_1 habe Werte in diesem Komplement; dadurch und durch die genannten Bedingungen ist es eindeutig bestimmt.) Die Integralkurve α von X_1 durch $x \in f^{-1}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ mit Anfang $\alpha(\sigma_1) = x$ hat J_1 als maximales Definitionsintervall. Sei $Q_1 = f_1^{-1}(\sigma_1)$. Wie im Beweis von (2.2) erhalten wir aus dem Fluß von X_1 einen Diffeomorphismus $\Phi_1: Q_1 \times J_1 \rightarrow M$, so daß $f_1 \circ \Phi_1$ die Projektion auf J_1 ist. Auf $(f_2, \dots, f_k)|_{Q_1}$ wenden wir nun die Induktionsvoraussetzung an. \square

(2.4) Folgerung. *Eine eigentliche Submersion $f: M \rightarrow N$ ist eine lokal triviale Abbildung.* (Faserungssatz von Ehresmann) \square

5 Transformationsgruppen

1 Quotienten

Wir geben Bedingungen an, unter denen ein Quotientraum einer Mannigfaltigkeit eine glatte Struktur trägt, mit der die Quotientabbildung eine Submersion wird.

(1.1) Satz. *Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit. Sei $C \subset M \times M$ der Graph einer Äquivalenzrelation R auf M , das heißt $C = \{(x, y) \mid x \sim y\}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (1) *Die Menge der Äquivalenzklassen $N = M/R$ besitzt die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit, mit der die Quotientabbildung $p: M \rightarrow N$ eine Submersion ist.*
- (2) *C ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $M \times M$ und $\text{pr}_1: C \rightarrow M$ ist eine Submersion.*

BEWEIS. (1) \Rightarrow (2). Da N hausdorffsch ist, so ist die Diagonale $D \subset N \times N$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Da $p \times p$ mit p ebenfalls eine Submersion ist, so ist $(p \times p)^{-1}(D) = C$ als Urbild einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit bei einer Submersion eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit.

Sei $(x, y) \in C$. Sei V eine offene Umgebung von $p(x)$ in N und $s: V \rightarrow M$ ein lokaler Schnitt von p mit $sp(x) = y$. Dann ist $\tau: p^{-1}(V) \rightarrow C$, $z \mapsto (z, sp(z))$ eine glatte Abbildung mit den Eigenschaften $\tau(x) = (x, y)$ und $\text{pr}_1 \circ \tau = \text{id}$. Also ist pr_1 in einer Umgebung von (x, y) eine Submersion.

(2) \Rightarrow (1). Mit den folgenden Aussagen (A) und (B) konstruieren wir eine glatte Struktur auf N .

(A) *Zu jedem $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung U und eine retraktive Submersion $u: U \rightarrow S$ auf eine Untermannigfaltigkeit S von U , so daß gilt*

$$C \cap (U \times U) = \{(z_1, z_2) \in U \times U \mid u(z_1) = u(z_2)\}.$$

(B) *Zu jedem Punkt $(x, y) \in C$ gibt es eine offene Umgebung U von x in M und eine glatte Abbildung $s: U \rightarrow M$ mit $s(x) = y$ und: $u \in U \Rightarrow u \sim s(u)$.*

Sei (U, u, S) nach (A) gewählt. Die linke Seite der Gleichheit ist die Einschränkung der Äquivalenzrelation auf U . Es gibt deshalb eine Bijektion $\bar{u}: p(U) \rightarrow S$ mit $\bar{u} \circ p = u$. Die glatte Struktur auf N soll so definiert werden, daß \bar{u} ein Diffeomorphismus ist. Sei dazu (V, v, T) ein zweites Datum gemäß (A). Sei

$$x = p(a) = p(b) \in p(U) \cap p(V), \quad a \in U, b \in V.$$

Nach (B) und der Stetigkeit von s gibt es offene Umgebungen $U_0 \subset U$ von a , $V_0 \subset V$ von b und eine glatte Abbildung $s: U_0 \rightarrow V_0$ mit $s(a) = b$ und $s(z) \sim z$ für alle $z \in U_0$. Daraus folgt

$$p(U_0) \subset p(V_0) \subset p(U) \cap p(V).$$

Es ist $U_0^* = u(U_0)$ eine in $\bar{u}(p(U) \cap p(V))$ enthaltene offene Umgebung von $\bar{u}(x)$, da u eine offene Abbildung ist. Also ist $\bar{u}(p(U) \cap p(V))$ offen in S . Wir zeigen, daß $\bar{v} \circ \bar{u}^{-1}$ glatt ist. Da $u: U_0 \rightarrow U_0^*$ eine Submersion ist, gibt es (nach eventueller Verkleinerung von U_0) einen glatten Schnitt $t: U_0^* \rightarrow U_0$ dieser Abbildung, und $\bar{v} \circ \bar{u}^{-1}|_{U_0^*} = v \circ s \circ t$ ist glatt.

Damit haben wir die Verheftungseigenschaften (6.1) nachgewiesen, das heißt: Es gibt genau eine Topologie auf N , in der die $p(U)$ offen und die $\bar{u}: p(U) \rightarrow S$ Homöomorphismen sind. Nach Konstruktion ist p eine stetige, offene Abbildung. Dann ist auch $p \times p$ offen, also $(p \times p)(M \times M \setminus C) = N \times N \setminus D$ offen, also N hausdorffsch. Ist allgemein \mathcal{B} eine Basis von X und $f: X \rightarrow Y$ eine stetige, surjektive, offene Abbildung, so ist $\{f(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ eine Basis von Y . Also hat N eine abzählbare Basis.

Die glatte Struktur auf N wird dadurch festgelegt, daß die $\bar{u}: p(U) \rightarrow S$ Diffeomorphismen sind. Daraus sieht man, daß p eine Submersion ist.

BEIWEIS von (B). Sei $(x, y) \in C$. Da $\text{pr}_1: C \rightarrow M$ eine Submersion ist, gibt es eine offene Umgebung U von x in M und eine glatte Abbildung $\sigma: U \rightarrow C$ mit $\sigma(x) = (x, y)$ und $\text{pr}_1 \circ \sigma = \text{id}(U)$. Mit $s = \text{pr}_2 \circ \sigma$ gilt (B). \square

BEWEIS von (A). Wir unterteilen den Beweis in mehrere Schritte.

(i) Da C die Diagonale von $M \times M$ enthält, hat C eine Dimension $m + n$, $0 \leq m \leq n$. (Bedeutung: Eine Äquivalenzklasse ist m -dimensional, und S wird $(n - m)$ -dimensional sein.) Sei $x \in M$ fixiert. Da C eine Untermannigfaltigkeit von $M \times M$ der Kodimension $n - m$ ist, gibt es nach (4.7) eine offene Umgebung U_0 von x in M und eine Abbildung $f: U_0 \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ von konstantem Rang $n - m$ derart, daß $C \cap (U_0 \times U_0) = \{(z, z') \in U_0 \times U_0 \mid f(z, z') = 0\}$ ist. (Die Abbildung f interpretieren wir so: Für jedes $z \in U_0$ ist $\{z' \mid f(z, z') = 0\}$ die Äquivalenzklasse von z in U_0 . Wir suchen eine Untermannigfaltigkeit S , die jede Klasse genau einmal transvers schneidet. Das stellen wir zunächst für die Klasse von x sicher, und dann folgern wir das Gewünschte für alle genügend benachbarten Klassen.)

(ii) Wir behaupten, daß $f_l: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, $z \mapsto f(x, z)$ im Punkt x ein surjektives Differential hat. Um das einzusehen, beachten wir, daß die Diagonale Δ_x von $T_x U_0 \times T_x U_0$ in $T_{(x,x)} C$ liegt, da C die Diagonale von M enthält. Da $T_{(x,x)} f$ surjektiv ist und $T_{(x,x)} C$, also auch Δ_x , im Kern von $T_{(x,x)} f$ liegt, wird eine surjektive Abbildung

$$T_x f_l: T_x U_0 \cong (T_x U_0 \times T_x U_0) / \Delta_x \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}, \quad v \mapsto (0, v) \mapsto T_{(x,x)} f(0, v)$$

geliefert. Ebenso hat auch $f_r: z \mapsto f(z, x)$ im Punkt x ein surjektives Differential.

(iii) Wir wählen nach (3.6.3) eine glatte Abbildung $g: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $g(x) = 0$, so daß

$$F = (f_l, g): U_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m, \quad z \mapsto (f(x, z), g(z))$$

U_0 (nach eventueller Verkleinerung) diffeomorph auf eine offene Menge abbildet.

(iv) Sei $h: U_0 \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$, $(z, z') \mapsto (f(z, z'), g(z'))$. Die partielle Abbildung $F = h(x, ?): z' \mapsto h(x, z')$ hat im Punkt x nach (iii) ein bijektives Differential. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es offene Umgebungen W und W' von x in U_0 und eine glatte Abbildung $u: W \rightarrow W'$, so daß

$$\{(z, z') \in W \times W' \mid f(z, z') = 0, g(z') = 0\} = \{(z, u(z)) \mid z \in W\}$$

ist. Nach Wahl von g und U_0 in (iii) ist $B = g^{-1}(0) \subset U_0$ eine Untermannigfaltigkeit, und u ist nach Konstruktion eine Abbildung $u: W \rightarrow W' \cap B$, die in der Klasse von z eine Punkt $u(z) \in B$ liefert. (Nach (iii) schneiden sich B und die Klasse von x im Punkt x transvers. Wir haben im wesentlichen u gefunden, müssen aber noch Definitionsbereich und Bildbereich mengentheoretisch geeignet arrangieren.)

(v) Wir zeigen: Das Differential $T_x u: T_x W \rightarrow T_x(W' \cap B)$ ist surjektiv. Denn zunächst einmal gilt wegen $h(z, u(z)) = 0$ die Relation

$$T_x u = -T_x h(x, ?)^{-1} \circ T_x h(? , x).$$

Da $h(? , x)$ bis auf eine Nullkomponente gleich f_r ist, so ist der Rang von $T_x h(? , x)$ gleich dem Rang von $T_x f_r$, also gleich $n - m$, und das ist auch die Dimension von $T_x(W' \cap B)$ und der Rang von $T_x u$.

(vi) Durch Verkleinerung von W wird (iv) nicht gestört. Wir wählen daher W so klein, daß $u: W \rightarrow W' \cap B$ konstanten Rang hat. Sei $T = u(W)$ und $z \in T \cap W \subset W' \cap B = u(W) \cap W \subset u(W) \subset W'$. Dann gilt $(z, z) \in W \times W'$ und deshalb $u(z) = z$. Sei $U = u^{-1}(T \cap W)$ und $S = U \cap T$. Wir zeigen: $u(U) \subset S$. Sei nämlich $z \in U$. Dann gilt zunächst

$$u(z) \in u(U) = u(u^{-1}(T \cap W)) \subset T \cap W$$

und nach dem schon Gezeigten also $u(u(z)) = u(z) \in T \cap W$, das heißt $u(z) \in u^{-1}(T \cap W) = U$; ferner gilt $u(z) \in T \cap W$ und deshalb insgesamt $u(z) \in U \cap T = S$.

Wir haben damit eine offene Umgebung U von x in M gefunden und eine submersive Retraktion $u: U \rightarrow S$ auf eine Untermannigfaltigkeit S von U , so daß

$$C \cap (U \times S) = \{(z, u(z)) \mid z \in U\}.$$

(vii) Sei $(z_1, z_2) \in C \cap (U \times U)$. Dann ist $(z_1, u(z_1)) \in C$ und $(z_2, u(z_2)) \in C$. Da C eine Äquivalenzrelation ist, so folgt $(u(z_1), u(z_2)) \in C \cap (S \times S)$ und demnach $u(z_1) = u(z_2)$. Damit sehen wir $C \cap (U \times U) = \{(z_1, z_2) \in U \times U \mid u(z_1) = u(z_2)\}$. Somit ist (A) nachgewiesen und der Beweis des Satzes beendet. \square

In Schritt (i) – (vi) wurde nur benutzt, daß C eine Untermannigfaltigkeit ist, die die Diagonale enthält.

Setzt man in (7.1.2) C nicht als abgeschlossen voraus, so kann man immer noch glatt verbundene Karten konstruieren. Es wird dann N lokal euklidisch, glatt, mit abzählbarer Basis; um die Hausdorff-Eigenschaft sicherzustellen, muß C noch abgeschlossen sein.

2 Transformationsgruppen

Eine *Liesche Gruppe* ist ein Tripel (M, \mathcal{D}, m) , das aus einer glatten Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{D}) und einer Gruppenstruktur $m: M \times M \rightarrow M, (x, y) \mapsto xy$ auf M besteht; diese Daten sollen die folgenden Axiome erfüllen: Die Multiplikation m und der Übergang zum Inversen $i: g \rightarrow g^{-1}$ sind glatt.

Standardbeispiele sind die allgemeinen linearen Gruppen $GL(n, \mathbb{R})$ und $GL(n, \mathbb{C})$ sowie die klassischen Untergruppen $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ und $SU(n)$. Die Formeln für die Matrizenmultiplikation und das Inverse einer Matrix zeigen, daß m und i glatt sind. Es gilt $SO(2) \cong U(1) \cong S^1$, als Liesche Gruppen betrachtet. Darin bezeichnet S^1 die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag 1. Mit G und H ist auch das direkte Produkt $G \times H$ eine Liesche Gruppe. Eine zum n -fachen Produkt $S^1 \times \cdots \times S^1$ isomorphe Gruppe wird als n -dimensionaler Torus bezeichnet. Die Quaternionen der Norm 1 liefern die Struktur einer Lieschen Gruppe auf der Sphäre S^3 . Eine abzählbare Gruppe mit diskreter Topologie wird als nulldimensionale Liesche Gruppe angesehen.

Es gibt andere Möglichkeiten, lokale Parametrisierungen der Matrizengruppen zu erhalten. Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$, so kann die matrizenwertige Exponentialreihe

$$\exp(A) = E + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots$$

gebildet werden. Es ist $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{R})$ und \exp ist differenzierbar. Das Differential im Nullpunkt ist die Identität. Deshalb bildet \exp eine geeignete Umgebung U des Nullpunktes diffeomorph auf eine Umgebung V der Einheitsmatrix ab. Damit ist eine lokale Parametrisierung von $GL(n, \mathbb{R})$ in der Umgebung des neutralen Elementes gewonnen. Sie hat verschiedene nützliche Eigenschaften. Für jedes A wird durch $\varphi_A: \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), t \mapsto \exp(tA)$ ein Homomorphismus von Lieschen Gruppen gegeben. Er heißt *Einparameter-Untergruppe* von $GL(n, \mathbb{R})$. Nicht immer ist φ_A injektiv, und auch wenn φ_A injektiv ist, so ist die Abbildung nicht notwendig eine topologische Einbettung. Die Exponentialabbildung ist auch mit den diversen Untergruppen verträglich. Zum Beispiel liegt das Bild von φ_A genau dann in $O(n)$, wenn $A^t + A = 0$ ist (A schiefssymmetrisch).

Man kann zeigen [30] oder [18, p. 28]:

(2.1) Satz. *Eine abgeschlossene Untergruppe einer Lieschen Gruppe ist eine Untermannigfaltigkeit und mit der induzierten Struktur eine Liesche Gruppe. \square*

Eine *glatte Operation* einer Lieschen Gruppe G auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine glatte Abbildung $G \times M \rightarrow M, (g, x) \mapsto gx$, die eine Gruppenoperation ist (hier: Linksoperation). Wir nennen M eine (glatte) G -Mannigfaltigkeit, wenn M mit einer derartigen G -Operation versehen ist. Wir wenden auf diese Situation die allgemeine Terminologie der Transformationsgruppen an.

Sei M eine glatte G -Mannigfaltigkeit. Die Abbildung $l_g: x \mapsto gx$ ist die Linkstranslation mit g . Sie ist ein Diffeomorphismus, die Linkstranslation mit g^{-1} ist das Inverse. Ein Punkt $x \in M$ hat die Standgruppe $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$. Wir

fassen G selbst als G -Mannigfaltigkeit auf, die Operation wird durch Gruppenmultiplikation von links gegeben. Die Abbildung $\beta: G \rightarrow M, g \mapsto gx$ ist dann eine glatte G -Abbildung. Ihr Bild ist die Bahn $B = Gx$ durch x . Algebraisch induziert β eine bijektive G -äquivalente Mengenabbildung $\bar{\beta}: G/G_x \rightarrow B$. Die Frage liegt nahe, ob diese Bijektion in sinnvoller Weise zu einem Diffeomorphismus verbessert werden kann. Wir notieren zunächst:

Die Abbildung β hat konstanten Rang. Das folgt aus der Äquivarianz. Seien nämlich $L_g: G \rightarrow G$ und $l_g: M \rightarrow M$ die Linkstranslationen mit g . Dann gilt $l_g \circ \beta = \beta \circ L_g$, und da L_g und l_g Diffeomorphismen sind, zeigt die Kettenregel, daß $T_e\beta$ und $T_g\beta$ denselben Rang haben.

(2.2) Notiz. Sei B eine glatte Untermannigfaltigkeit von M . Dann gilt:

- (1) $\beta: G \rightarrow B$ ist eine Submersion.
- (2) $G_x = \beta^{-1}(x)$ ist eine abgeschlossene Liesche Untergruppe von G .
- (3) Es gibt genau eine glatte Struktur auf G/G_x , so daß die Restklassenabbildung $G \rightarrow G/G_x$ eine Submersion ist. Die induzierte Abbildung $\bar{\beta}$ ist ein Diffeomorphismus.

BEWEIS. Hätte β irgendwo einen Rang, der kleiner als die Dimension von B ist, so hätte β überall kleineren Rang. Das widerspricht aber dem Satz von Sard. Wir übertragen nun vermöge der Bijektion $\bar{\beta}$ die glatte Struktur von B auf G/G_x . Die Eindeutigkeit der glatten Struktur folgt aus (3.9). Als Urbild eines regulären Wertes ist G_x eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. \square

Wegen des voranstehenden Resultates werden uns die Gruppen G_x als Liesche Untergruppen geliefert; wir müssen nicht den Satz (2.1) anwenden.

(2.3) Darstellungen. Sphären. Eine *Darstellung* der Lieschen Gruppe G auf einem reellen Vektorraum V ist eine glatte Operation von G auf V , deren Linkstranslationen lineare Abbildungen sind. Die *Standarddarstellung* von $GL(n, \mathbb{R})$ auf dem \mathbb{R}^n ist die Matrizenmultiplikation $(A, v) \mapsto Av$. Die Einschränkungen auf Untergruppen bezeichnen wir ebenfalls als Standarddarstellung. Die Einheitsvektoren bilden eine Bahn unter der $SO(n)$ - und $O(n)$ -Operation. Die Standgruppen des Einheitsvektors e_n unter der $O(n)$ -Operation ist kanonisch isomorph zu $O(n-1)$. Wir erhalten damit aus dem Vorhergehenden einen $O(n)$ -äquivalenten Diffeomorphismus $S^{n-1} \cong O(n)/O(n-1)$. Wir haben ebenso die Standarddarstellung von $GL(n, \mathbb{C})$ auf \mathbb{C}^n . Damit erhalten wir äquivalente Diffeomorphismen $S^{2n-1} \cong U(n)/U(n-1) \cong SU(n)/SU(n-1)$. \diamond

(2.4) Stiefel-Mannigfaltigkeiten. Auf dem Vektorraum $(\mathbb{R}^n)^p$ der p -Tupel von Vektoren $x_j \in \mathbb{R}^n$ operiert $GL(n, \mathbb{R})$ von rechts durch Matrizenmultiplikation. Die offene Teilmenge $S_p(\text{bbr}^n)$ der linear unabhängigen p -Tupel ist eine Bahn: Die Stiefel-Mannigfaltigkeit der p -Beine im \mathbb{R}^n . Die Standgruppe Δ_p der Standard-Einheitsvektoren (e_1, \dots, e_p) ist die Menge der Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} E_p & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$$

mit der $p \times p$ -Einheitsmatrix E_p , also eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Wir erhalten einen $GL(n, \mathbb{R})$ -äquivarianten Diffeomorphismus $GL(n, \mathbb{R})/\Delta_p \rightarrow S(p, \mathbb{R}^n)$. \diamond

Wir erinnern an einige Begriffe der mengentheoretischen Topologie. Ist X ein G -Raum, so haben wir die Menge X/G der Bahnen. Vermöge der Quotientabbildung $p: X \rightarrow X/G$, die jedem Element seine Bahn zuordnet wird, der Bahnraum mit der Quotienttopologie versehen. Da p offen ist, so ist X/G genau dann hausdorffsch, wenn der Graph der Relation

$$C = C(X) = \{(x, gx) \mid x \in X, g \in G\}$$

in $X \times X$ abgeschlossen ist. Die Operation ist frei, wenn alle Standgruppen G_x nur aus dem neutralen Element bestehen. In diesem Fall ist

$$\Theta: G \times X \rightarrow C, \quad (g, x) \mapsto (x, gx)$$

eine bijektive stetige Abbildung. Sie ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn die Differenzabbildung

$$t: C \rightarrow G, \quad (x, gx) \mapsto g$$

stetig ist; die Umkehrabbildung ist nämlich $(x, y) \mapsto (t(x, y), x)$. Die freie Operation heißt *eigentlich* heißt, wenn C abgeschlossen in $X \times X$ ist und wenn t stetig ist. Ist G kompakt und X hausdorffsch, so ist eine freie Operation *eigentlich*.

(2.5) Satz. *Sei M eine freie eigentliche glatte G -Mannigfaltigkeit. Dann trägt der Orbitraum M/G eine glatte Struktur, so daß die Orbitabbildung $p: M \rightarrow M/G$ eine Submersion ist.*

BEWEIS. Wir verifizieren die Voraussetzungen (2) des Quotientsatzes (7.1). Wir haben also zu zeigen, daß C eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist und pr_1 eine Submersion. Wir zeigen, daß die eben genannte Abbildung Θ eine glatte Einbettung ist. Dazu genügt es nach (4.3), sie als Immersion zu erweisen. Das Differential

$$T_{(g,x)}\Theta: T_g G \times T_x M \rightarrow T_x M \times T_{gx} M$$

zerlegen wir gemäß der beiden Faktoren

$$T_{(g,x)}\Theta(u, v) = T_g\Theta(?, x)u + T_x\Theta(g, ?)v.$$

Darin ist die erste Komponente von $T_g\Theta(?, x)u$ Null, da die erste Komponente dieser Partialabbildung konstant ist. Ist also $T_{(g,x)}\Theta(u, v) = 0$, so ist die Komponente von $T_x\Theta(g, ?)v$ in $T_x M$ gleich Null; diese Komponente ist aber v . Es bleibt zu zeigen, daß $T_g f: T_g(G) \rightarrow T_{gx} M$ injektiv ist, wenn $f: G \rightarrow M, g \mapsto gx$ ist. Da die Operation frei ist, so ist f injektiv. Aus der G -Äquivarianz von f folgt, daß f konstanten Rang hat, wie wir eben gesehen haben. Eine injektive Abbildung von konstantem Rang hat nach dem Rangsatz ein injektives Differential. Damit ist die erste Voraussetzung des Quotientsatzes nachgewiesen. Die zweite gilt, weil $\text{pr}_1 \circ \Theta = \text{pr}_2$ zeigt, daß pr_1 eine Submersion ist. \square

(2.6) Notiz. Sei H eine abgeschlossene Liesche Untergruppe einer Lieschen Gruppe G . Dann ist die H -Operation $H \times G \rightarrow G$, $(h, g) \mapsto hg$ auf der Mannigfaltigkeit G eigentlich. Insbesondere trägt der homogene Raum $H \backslash G$ eine glatte Struktur, so daß die Restklassenabbildung $G \rightarrow H \backslash G$ eine Submersion ist. Die Rechtsoperation von G auf $H \backslash G$ durch Rechtstranslation ist glatt.

BEWEIS. Die Menge C ist in diesem Falle das Urbild von H bei der Submersion $t: G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto x^{-1}y$. Wir können also (2.1) anwenden. Die Glattheit der G -Operation auf $H \backslash G$ folgt mit der universellen Eigenschaft (3.8) einer glatten Quotientabbildung. \square

(2.7) Linsenräume. Die zyklische Gruppe $G = \mathbb{Z}/m \subset S^1$ operiere auf \mathbb{C}^n durch

$$\mathbb{Z}/m \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad (\zeta, (z_1, \dots, z_n)) \mapsto (\zeta^{r_1} z_1, \dots, \zeta^{r_n} z_n).$$

Seien r_1, \dots, r_n teilerfremd zu m . Die Einheitssphäre wird dann eine freie G -Mannigfaltigkeit $S(r_1, \dots, r_n)$, und der Orbitraum $L(r_1, \dots, r_n)$ heißt *Linsenraum*. \diamond

(2.8) Projektive Räume. Die kompakte Gruppe $S^1 \subset \mathbb{C}$ operiert durch skalare Multiplikation auf der Einheitssphäre $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ frei und eigentlich. Der Orbitraum ist der komplexe projektive Raum $\mathbb{C}P^n$. Ebenso operiert $G = \{\pm 1\}$ auf S^n durch skalare Multiplikation und hat $\mathbb{R}P^n$ als Orbitraum. \diamond

(2.9) Graßmann-Mannigfaltigkeiten. Auf $S_p(\mathbb{R}^n)$ operiert $GL(p, \mathbb{R})$ frei von links durch Matrizenmultiplikation. Zwei p -Tupel liegen genau dann in derselben Bahn, wenn sie denselben Unterraum aufspannen. Demnach ist die Orbitmenge $GL(p, \mathbb{R}) \backslash S_p(\mathbb{R}^n)$ die Menge $G_p(\mathbb{R}^n)$ der p -dimensionalen Unterräume des \mathbb{R}^n . Ist die Operation auch eigentlich? Wir nehmen einen anderen Standpunkt ein. Auf $G_p(\mathbb{R}^n)$ werde eine rechte $GL(n, \mathbb{R})$ -Operation so definiert, daß die kanonische Abbildung

$$\pi: S(p, \mathbb{R}^n) \rightarrow G(p, \mathbb{R}^n), \quad (x_1, \dots, x_p) \mapsto \langle x_1, \dots, x_p \rangle$$

eine $GL(n, \mathbb{R})$ -Abbildung wird. Die Standgruppe D_p von $\langle e_1, \dots, e_p \rangle$ besteht aus den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R}), \quad A \in GL(p, \mathbb{R})$$

die wiederum eine abgeschlossene Untergruppe bilden. Damit können wir die Graßmann-Mannigfaltigkeit $G_p(\mathbb{R}^n)$ als die $GL(n, \mathbb{R})$ -Mannigfaltigkeit $GL(n, \mathbb{R})/D_p$ definieren. \diamond

3 Struktur der Bahnen

Wir geben Bedingungen an, unter denen die Bahnen einer glatten Operation Untermannigfaltigkeiten sind.

(3.1) Satz. *Sei M eine glatte G -Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

- (1) *Eine Bahn $C \subset M$ ist genau dann eine glatte Untermannigfaltigkeit, wenn C als Teilraum lokal abgeschlossen ist.*
- (2) *Ist die Bahn C lokal abgeschlossen und $x \in C$, so gibt es auf G/G_x genau eine glatte Struktur, so daß die Orbitabbildung $G \rightarrow G/G_x$ eine Submersion ist. Die Abbildung $G/G_x \rightarrow C, gG_x \mapsto gx$ ist ein Diffeomorphismus. Die G -Operation auf G/G_x ist glatt.*
- (3) *Ist die Operation eigentlich, so gelten (1) und (2) für jede Bahn.*

BEWEIS. (1) Wegen Äquivarianz hat $\beta: G \rightarrow M, g \mapsto gx$ konstanten Rang. Nach dem Rangsatz gibt es deshalb eine offene Umgebung U von e , so daß $\beta(U)$ eine Untermannigfaltigkeit von M ist. Da C lokal abgeschlossen im lokal kompakten Raum M ist, so ist C lokal kompakt und deshalb $\beta: G \rightarrow C$ nach einem Satz der mengentheoretischen Topologie (??) eine offene Abbildung. Es gibt also eine offene Menge W in M , so daß $C \cap W = \beta(U)$ ist. Folglich ist C eine Untermannigfaltigkeit in einer Umgebung von x und wegen Äquivarianz deshalb auch global.

(2) Da C lokal abgeschlossen ist, so hat C als Untermannigfaltigkeit eine glatte Struktur. Wegen der Äquivarianz hat $\beta: G \rightarrow C$ konstanten Rang. Nach dem Rangsatz ist dann β eine Submersion, da sonst nach dem Beweis von (1) $\beta(G)$ eine Untermannigfaltigkeit kleinerer Dimension wäre. Wir übertragen nun die glatte Struktur von C auf G/G_x .

(3) Ist die Operation eigentlich und frei, so sind die Bahnen sogar abgeschlossen. Die Abbildung

$$G \times \{x\} \xrightarrow{\subset} G \times M \xrightarrow{\Theta} M \times M$$

hat nämlich $\{x\} \times C$ als Bild. Da die Operation eigentlich ist, ist Θ ein Homöomorphismus. Also ist $\{x\} \times C$ als Bild der abgeschlossenen Menge $G \times \{x\}$ abgeschlossen, und diese Menge liegt in $\{x\} \times M$. Auch für den allgemeineren Begriff von eigentlich sind die Bahnen abgeschlossen. \square

4 Scheibendarstellungen

In diesen Abschnitt beschreiben wir die lokale Struktur glatter Operationen und die tubularen Umgebungen von Bahnen.

(4.1) Satz. *Sei M eine glatte G -Mannigfaltigkeit. Sei $x \in M$ und G_x kompakt. Dann gibt es eine G_x -äquivalente Karte $(W, \psi, T_x M)$, die in x zentriert ist.*

BEWEIS. Wir gehen von einer beliebigen in x zentrierten Karte $(U, \varphi, T_x M)$ aus. Die Orbitabbildung $p: M \rightarrow M/H$ ist abgeschlossen, da $H = G_x$ kompakt ist. Also ist $W = M \setminus p^{-1}p(M \setminus U)$ offen, H -invariant und in U enthalten. Wir verwenden das invariante normierte Integral auf H : Das ist eine lineare Abbildung $\int: C(H, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int f(h) dh$ auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen $H \rightarrow \mathbb{R}$, die die konstante Funktion 1 auf 1 abbildet und die Invarianzeigenschaft

$\int f(hu) dh = \int f(uh) dh = \int f(h) dh$ für alle $u \in H$ hat. Wir bilden damit

$$\psi: W \rightarrow T_x M, \quad z \mapsto \int_H h^{-1} \cdot \varphi(hz) dh$$

mit der H -Operation $(h, v) \mapsto h \cdot v$ auf $T_x M$, die durch das Differential der Gruppenoperation auf M gegeben ist. Wegen der Invarianz des Integrals ist diese Abbildung H -äquivariant. Nach eventueller Verkleinerung von W kann ψ als Karte verwendet werden. Zum Beweis zeigen wir, daß das Differential im Punkt x bijektiv ist. Unsere ursprüngliche Karte φ wählen wir zu diesem Zweck so, daß $T_x \varphi = \text{id}(T_x M)$ ist. Wir behaupten: Das Differential von ψ ist dann ebenfalls die Identität. Das folgt durch „Differentiation unter dem Integral“, weil $z \mapsto h \cdot \varphi(hz)$ bei x als Differential die Identität hat. \square

(4.2) Folgerung. *Sei G kompakt. Dann ist die Fixpunktmenge M^G eine glatte Untermannigfaltigkeit.*

BEWEIS. In einer Umgebung von $x \in M^G$ ist M nach dem vorigen Satz G -diffeomorph zu einer Darstellung V . In einer Darstellung ist aber die Fixpunktmenge ein linearer Unterraum, so daß wir eine an die Fixpunktmenge angepaßte Karte erhalten. \square

Sei $G_x = H$ kompakt. Der Orbit C durch x sei eine Untermannigfaltigkeit. Dann ist $T_x C$ ein H -stabiler Unterraum von $T_x M$. Sei V ein H -stabiles Komplement von $T_x C$ in $T_x M$. Ein derartiges Komplement ist als H -Darstellung bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Wir nennen V die *Scheibendarstellung* von M in x .

Sei $\varphi: U \rightarrow T_x M$ eine H -äquivariante Karte mit Umkehrung ψ . Die Abbildung

$$\tilde{\tau}: G \times V \rightarrow M, \quad (g, v) \mapsto g\psi(v)$$

faktorisiert wegen der Äquivarianz von ψ über den Orbitraum $G \times_H V$. Da H kompakt ist, so ist $G \times_H V$ in kanonischer Weise eine glatte G -Mannigfaltigkeit und die durch $\tilde{\tau}$ induzierte Abbildung $\tau: G \times_H V \rightarrow M$ eine glatte G -Abbildung.

Allgemein nennen wir eine G -Operation auf der Mannigfaltigkeit *eigentlich*, wenn jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung V hat, so daß $\{g \in G \mid gV \cap V \neq \emptyset\}$ relativ kompakt ist. (Wenn man M/G als hausdorffsch voraussetzt, so entspricht das dem allgemeinen Begriff einer eigentlichen Operation.)

Wir wählen ein H -invariantes Skalarprodukt auf V und setzen

$$V(\varepsilon) = \{v \in V \mid \|v\| < \varepsilon\}.$$

(4.3) Satz. *Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $\tau: G \times_H V(\varepsilon) \rightarrow M$ eine Einbettung auf eine offene Umgebung von C ist (äquivariante Tubenabbildung).*

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, daß τ in allen Punkten des Nullschnittes ein bijektives Differential hat. Das folgt daraus, daß die Relationen

$$T_{(e,0)} \tilde{\tau}(T_e G \times \{0\}) = T_x C, \quad T_{(e,0)} \tilde{\tau}(\{e\} \times V) = V$$

bestehen und τ eine G -Abbildung zwischen gleichdimensionalen Mannigfaltigkeiten ist. Zu jeder kompakten Menge $L \subset G/H$ gibt es deshalb ein $\epsilon > 0$, so daß τ die Teilmenge $p^{-1}(L) \times_H V(\epsilon)$ einbettet. Da die Operation eigentlich ist, gibt es ein $\eta > 0$, so daß

$$\{g \in G \mid g\psi(V(\eta)) \cap \psi(V(\eta)) \neq \emptyset\}$$

in einer kompakten Teilmenge K liegt. Wir wählen eine offene Umgebung W von eH in G/H mit kompaktem Abschluß und ϵ mit $0 < \epsilon < \eta$, so daß $p^{-1}(W) \supset KH$ und $p^{-1}(W) \times_H V(\epsilon)$ bei τ eingebettet wird. Wir behaupten, daß dann sogar $G \times_H V(\epsilon)$ eingebettet wird. Wegen der Äquivarianz hat nämlich τ überall bijektives Differential, ist also eine offene Abbildung. Es genügt deshalb, die Injektivität von τ zu zeigen. Aus $g_1\psi(v_1) = g_2\psi(v_2)$ folgt aber $g_2^{-1}g_1\psi(v_1) = \psi(v_2)$, also $k = g_2^{-1}g_1 \in K$. Die Punkte (k, v_1) und (e, v_2) liegen in $p^{-1}(W) \times V(\epsilon)$. Es folgt $k \in H$ und $kv_1 = v_2$, und deshalb repräsentieren (g_1, v_1) und (g_2, v_2) in $G \times_H V(\epsilon)$ dasselbe Element. \square

(4.4) Beispiel. Die Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$ operiert auf der oberen Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ durch

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Die Standgruppe des Elementes i ist durch die Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ai + b = i(ci + d)$, $a = d$, $b = -c$, $ad - bc = a^2 + b^2 = 1$, also durch die $A \in SO(2)$ gegeben. Die induzierte Bijektion $SL(2, \mathbb{R})/SO(2) \cong H$ ist ein Diffeomorphismus. Also operiert $SL(2, \mathbb{R})$ eigentlich auf H .

Sei $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{R})$ diskret. Eine solche Gruppe heißt auch *Fuchssche Gruppe*. Der Orbitraum $\Gamma \backslash H$ ist in kanonischer Weise eine Riemannsche Fläche. Die Menge der Punkte mit nichttrivialer Standgruppe ist diskret. Die Standgruppen sind zu Untergruppen von $SO(2)$ konjugiert, also endliche zyklische Gruppen. Man kann zeigen, daß in geeigneten lokalen Koordinaten die Standgruppe wie eine Drehung operiert. Es ist $H \rightarrow \Gamma \backslash H$ eine verzweigte Überlagerung im Sinne der Funktionentheorie. \diamond

5 Der Satz vom Hauptorbit

In diesem Abschnitt beweisen wir einige qualitative Aussagen über die Orbitstruktur glatter G -Mannigfaltigkeiten. Die Gruppe G sei kompakt.

(5.1) Satz. *Eine kompakte G -Mannigfaltigkeit M hat endlichen Orbittyp, das heißt, es gibt nur endlich viele Konjugationsklassen von Isotropiegruppen.*

BEWEIS. Induktion nach der Dimension von M . Für $\dim M = 0$ ist Sachlage klar. Wegen der Kompaktheit hat M immer eine endliche Überdeckung von Mengen der Form $G \times_H V$ mit orthogonalen H -Darstellungen V . Die Einheitskugel SV hat eine kleiner Dimension als M und nach Induktionsvoraussetzung endlichen H -Orbittyp.

Die Standgruppe von $(u, v) \in G \times_H V$ ist die Menge der $g \in G$, so daß für ein $h \in H$ die Relation $(gu, v) = (uh, h^{-1}v)$ besteht. Das bedeutet $h \in H_v$ und $g \in uH_v u^{-1}$. Eine Standgruppe von $G \times_H V$ ist daher G -konjugiert zu einer H -Standgruppe von V . Die H -Standgruppen von V sind aber H sowie die Standgruppen von V . \square

(5.2) Satz vom Hauptorbit. *Sei M/G zusammenhängend. Dann gelten:*

- (1) *Es gibt genau einen Isotropietyp (H) von M , so daß das Orbitbündel $M_{(H)}$ in M offen und dicht ist.*
- (2) *Der Raum $M_{(H)}/G$ ist zusammenhängend.*
- (3) *Für jeden Isotropietyp (K) gilt $(H) \leq (K)$.*
- (4) *M^H schneidet jeden Orbit.*

Der durch den voranstehenden Satz bestimmte Orbittyp (H) heißt *Hauptorbit* von M und $M_{(H)}$ das zugehörige *Hauptorbitbündel*.

BEWEIS. Induktion nach $\dim M$. Ist $\dim M = 0$, so ist M/G als zusammenhängender Raum ein Punkt, und M besteht aus einer einzigen Bahn. Für diese gelten offenbar die Aussagen des Satzes.

Sei nun $\dim M \geq 1$. Wir betrachten zunächst eine Mannigfaltigkeit der Form $G \times_H V$. Da $(G \times_H SV)/G \cong SV/H$ ist, so ist im Falle eines unzusammenhängenden Orbitraumes von $G \times_H SV$ notwendig $\dim V = 1$ und V die triviale H -Darstellung. Dann ist aber $G \times_H V \cong G/H \times \mathbb{R}$ und der Satz für diesen Raum richtig.

Andernfalls ist also der Orbitraum von $G \times_H SV$ zusammenhängend und nach Induktionsvoraussetzung die Aussage des Satzes für diese Mannigfaltigkeit und die H -Mannigfaltigkeit SV richtig. Sei $K \subset H$ und (K) der Hauptorbit von SV . Dann gilt entweder $0 \in V_{(K)}$, also $H = K$, oder $V_{(K)} \cong SV_{(K)} \times]0, \infty[$.

Im ersten Fall ist $SV_{(H)} = SV^H$; und weil $SV_{(H)}$ in SV dicht ist, so gilt $SV = SV^H$; das heißt aber, die Darstellung V ist trivial. Für $G \times_H V \cong G/H \times V$ ist dann aber der Satz richtig.

Im zweiten Fall ist

$$(G \times_H V)_{(K)} = G \times_H V_{(K)},$$

und weil $V_{(K)}$ offen und dicht in $V \setminus 0$ und V ist, so ist $(G \times_H V)_{(K)}$ offen und dicht in $G \times_H V$. Es ist

$$(G \times_H V)_{(K)}/G \cong V_{(K)}/H \cong SV_{(K)} \times]0, \infty[$$

zusammenhängend. Da zwei offene und dichte Mengen einen nichtleeren Schnitt haben, so kann es höchstens einen Orbittyp (H) geben, für den die erste Aussage des Satzes gilt. Also gelten die ersten beiden Aussagen für K statt H für $M = G \times_H V$. Damit ist dieser Fall erledigt.

Wir überdecken nun M mit G -Mengen, die von der Form $G \times_H V$ für gewisse H und V sind. Haben zwei solche G -Mengen einen nichtleeren Schnitt, so auch deren Hauptorbitbündel als offene und dichte Teilmengen, weshalb die zugehörigen Orbittypen gleich sind. Da M/G zusammenhängend ist, so folgt,

daß alle Hauptorbittypen dieser Teilmengen gleich sind. Die Vereinigung ihrer Hauptorbitbündel ist dann offen und dicht in M .

Da die Vereinigung zusammenhängender Mengen mit nichtleerem Schnitt wieder zusammenhängend ist, so ist $M_{(H)}/G$ zusammenhängend.

Sei nun K irgendeine Isotropiegruppe, $K = G_x$. Sei U eine zu $G \times_K V$ isomorphe Umgebung der Bahn Gx . Wegen der Dichtigkeit gibt es einen in U gelegenen Hauptorbit. Da dieser sich vermöge $G \times_K V \rightarrow G/K$ äquivariant nach G/K abbilden läßt, so gilt $(H) \leq (K)$. Es folgt $G/K^H \neq \emptyset$, also $(Gx)^H \neq \emptyset$, also $M^H \cap Gx \neq \emptyset$. \square

(5.3) Satz. *Sei H Isotropiegruppe der G -Mannigfaltigkeit M .*

- (1) *Das Orbitbündel $M_{(H)}$ ist eine Untermannigfaltigkeit (mit, eventuell, Komponenten verschiedener Dimension).*
- (2) *Die abgeschlossene Hülle $\overline{M}_{(H)}$ enthält nur kleinere Orbits, das heißt solche, die eine Abbildung $G/H \rightarrow G/K$ zulassen.*
- (3) *Der Teilraum $M_{(H)}$ ist offen in seiner abgeschlossenen Hülle.*

BEWEIS. (1) Es genügt eine lokale Betrachtung, also die Untersuchung von $M = G \times_H V$. Es ist $G_{(g,v)} = gH_v g^{-1}$, also $(G_{(g,v)}) = (H)$ genau dann, wenn $H_v = H$ ist und $v \in V^H$. Es ist

$$(G \times_H V)_{(H)} = G \times_H V^H \subset G \times_H V$$

ein glattes Unterbündel, also eine glatte Untermannigfaltigkeit.

(2) Ist $z \in M$ und $K = G_z$, so gibt es eine Umgebung W der Form $G \times_K W$ von z , und in einer solchen Umgebung gilt $(G_y) \leq (K)$ für alle $y \in W$.

Ist $z \in \overline{M}_{(H)}$, so gibt es in W Punkte y mit $(G_y) = (H)$. Also gilt $(H) \leq (G_z)$.

(3) Sei $x \in M_{(H)}$ und U eine Umgebung mit $(G_y) \leq (H)$ für $y \in U$. Ist $z \in U \cap \overline{M}_{(H)}$, so gilt also $(H) \leq (G_z) \leq (H)$; mithin ist $U \cap \overline{M}_{(H)} \subset M_{(H)}$, das heißt $M_{(H)}$ ist offen in seiner abgeschlossenen Hülle. \square

(5.4) Satz. *Sei M/G zusammenhängend. Hat ein zu G/U isomorpher Orbit kleinere Dimension als der Hauptorbit, so hat $M_{(U)}$ mindestens die Kodimension 2 in M .*

BEWEIS. Induktion nach $\dim M$. Ist $\dim M = 0$, so ist $M_{(U)} = \emptyset$. Für den Induktionsschritt genügt es, $M = G \times_H V$ zu betrachten. Wie schon früher gezeigt, gilt

$$(G \times_U V)_{(U)} \cong G \times_U V^U \cong G/U \times V^U.$$

Wir haben also zu zeigen, daß V^U mindestens die Kodimension 2 in V hat. Wir betrachten die U -Mannigfaltigkeit SV . Wäre $SV = \emptyset$, also $\dim V = 0$, so wäre $M = G/U$ und (U) der Hauptisotropietyp. Sei $\dim SV = n$, also $\dim G/U = n - 1 = \dim M - 1$. Dann muß der Hauptorbit die Dimension n haben, und M würde aus einem einzigen Orbit bestehen.

Also können wir annehmen, daß $\dim V \geq 2$ ist. Dann sind SV und SV/U zusammenhängend. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf die U -Mannigfaltigkeit SV an. Die Fixpunkte SV^U hat kleinere Dimension als die

Hauptorbits: Andernfalls wären alle Orbits in SV also in V 0-dimensional. Die G -Orbits von $G \times_U V$ hätten also die Dimension von G/U , im Widerspruch zur Annahme über U (und der Dichtigkeit der Hauptorbits, beim Übergang von allgemeinen M zu $G \times_U V$). Also können wir auf SV^U die Induktionsvoraussetzung anwenden: $\dim SV^U \leq \dim SV - 2$. \square

Ein Orbit mit kleinerer Dimension als der Hauptorbit heie *singulär*; ein vom Hauptorbit verschiedener mit derselben Dimension *exzeptionell*.

(5.5) Satz. *Die kompakte Liegruppe G operiere glatt und effektiv auf der zusammenhängenden n -Mannigfaltigkeit M . Dann gilt*

$$\dim G \leq \frac{1}{2}n(n+1).$$

BEWEIS. Induktion nach n . Ist $n = 0$, so ist M ein Punkt, also $M = G/G$, also $G = \{e\}$, da die Operation effektiv ist.

Wir setzen G als zusammenhängend voraus, denn die Komponente von e operiert effektiv und hat dieselbe Dimension.

Sei G/H Hauptorbit, also $\dim G \leq n + \dim H$. Falls H effektiv auf einer zusammenhängenden k -Mannigfaltigkeit mit $k \leq n - 1$ operiert, so folgt mittels Induktionsvoraussetzung die Behauptung.

Es ist $k = \dim G/H \leq n$, und G operiert effektiv auf G/H . Würde nämlich $g \in G$ trivial auf G/H operieren, so trivial auf dem Hauptorbitbündel, also (Dichtigkeit und Stetigkeit) überhaupt trivial. Deshalb operiert die Komponente H_0 von e von H effektiv auf G/H und auf einem Hauptorbit der H_0 -Mannigfaltigkeit G/H . Dieser Hauptorbit ist zusammenhängend. Falls die Dimension dieses Hauptorbits kleiner als k ist, sind wir fertig.

Andernfalls ist $H_0eH = G/H$, und G/H ist ein Punkt, also $G = \{e\}$ wegen der Effektivität. \square

(5.6) Beispiel. Die Gruppe $SO(n+1)$ hat die Dimension $(n+1)n/2$. Sie operiert effektiv auf S^n und $\mathbb{R}P^n$. (Man kann zeigen, daß es keine anderen Beispiele für diesen Extremfall gibt.) \diamond

6 Bündel

1 Prinzipalbündel. Faserbündel

Freie eigentliche glatte Operationen haben oft die Erscheinungsform eines sogenannten Prinzipalbündels. Sei E eine glatte G -Mannigfaltigkeit und $p: E \rightarrow B$ eine glatte Abbildung. Diese Daten bilden ein glattes G -Prinzipalbündel, wenn gilt:

- (1) Für $x \in E$ und $g \in G$ gilt $p(gx) = p(x)$.
- (2) Zu jedem $b \in B$ gibt es eine offene Umgebung U und einen G -Diffeomorphismus $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow G \times U$, genannt *Bündelkarte*, so daß $\text{pr}_2 \circ \varphi = p$. Dabei operiert G auf $G \times U$ durch Linkstranslation auf dem ersten Faktor $(g, (h, x)) \mapsto (gh, x)$.

Aus der Existenz der Bündelkarten folgt: Die Operation auf E ist frei (weil auf $G \times U$ frei), p ist eine Submersion (weil $\text{pr}: G \times U \rightarrow U$ eine ist), p induziert einen Homöomorphismus $\bar{p}: E/G \rightarrow B$ (weil p und die Orbitabbildung offen sind) und die Differenzabbildung ist stetig (weil sie für $G \times U$ stetig ist). Da wir den Orbitraum als hausdorffsch vorausgesetzt haben, erhalten wir insgesamt:

(1.1) Notiz. *Ist $p: E \rightarrow B$ ein glattes G -Prinzipalbündel, so operiert G frei und eigentlich auf E .* \square

(1.2) Satz. *Sei M eine freie eigentliche glatte G -Mannigfaltigkeit. Dann ist die Orbitabbildung $p: M \rightarrow M/G$ ein G -Prinzipalbündel.*

BEWEIS. Wegen (8.3) müssen wir nur noch die Existenz von Bündelkarten zeigen. Sei $s: U \rightarrow M$ ein lokaler glatter Schnitt von p über der offenen Menge $U \subset M/G$. Dann sind $\psi: G \times U \rightarrow p^{-1}(U)$, $(g, u) \mapsto gs(u)$ und $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow G \times U$, $x \mapsto (t(sp(x)), x, p(x))$ zueinander inverse G -Diffeomorphismen. Hierbei ist $t: C \rightarrow G$ die nach dem letzten Abschnitt zu einer eigentlichen Operation gehörende Differenzabbildung. \square

Nach diesem Satz können wir also freie eigentliche glatte G -Mannigfaltigkeiten mit glatten G -Prinzipalbündeln identifizieren.

(1.3) Notiz. *Sei $p: E \rightarrow B$ ein glattes G -Prinzipalbündel, jetzt aber mit Rechtsoperation, und F eine glatte G -Mannigfaltigkeit mit Linksoperation. Dann ist die G -Operation*

$$G \times (E \times F) \rightarrow E \times F, \quad (g, x, y) \mapsto (xg^{-1}, gy)$$

eigentlich. Wir bezeichnen den Orbitraum der Operation auf $E \times F$ mit $E \times_G F$. Die Projektion $q: E \times_G F \rightarrow B$ ist lokal trivial mit typischer Faser F .

BEWEIS. Sei $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ eine Bündelkarte. Dann haben wir Diffeomorphismen

$$q^{-1}(U) \cong p^{-1}(U) \times_G F \cong (U \times G) \times_G F \cong U \times F,$$

die mit den Abbildungen auf U verträglich sind. Das ist mit der lokalen Trivialität gemeint. Da B und F hausdorffsch sind, folgert man, daß auch $E \times_G F$ hausdorffsch ist. Die Stetigkeit der Differenzabbildung für $E \times F$ folgt unmittelbar aus derjenigen für E . \square

Wir nennen $q: E \times_G F \rightarrow B$ das zum G -Prinzipalbündel $p: E \rightarrow B$ assoziierte Faserbündel mit *typischer Faser* F und *Strukturgruppe* G . Ist speziell F eine Darstellung von G , so entstehen auf diese Weise die sogenannten Vektorraumbündel. Diesen Gesichtspunkt werden wir im nächsten Abschnitt beim Tangentialbündel antreffen.

Das Tangentialbündel TM einer glatten n -Mannigfaltigkeit M entsteht als assoziiertes Bündel aus einem $GL(n, \mathbb{R})$ -Prinzipalbündel $r_M: P(M) \rightarrow M$, dem sogenannten *Rahmenbündel*. Als Menge ist

$$P(M) = \coprod_{p \in M} \text{Iso}(\mathbb{R}^n, T_p M).$$

Darin ist $\text{Iso}(\mathbb{R}^n, T_p M)$ die Menge der linearen Isomorphismen der beteiligten Vektorräume. Zu jeder Karte $k = (U, h, V)$ von M wird eine Bündelkarte

$$\varphi_k: P(U) = \coprod_{p \in U} \text{Iso}(\mathbb{R}^n, T_p M) \rightarrow U \times \text{Aut}(\mathbb{R}^n), \quad (p, \alpha) \mapsto (p, i_k \circ \alpha)$$

von r_M definiert. Diese Abbildung ist $\text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ -äquivariant, wenn $\text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ auf $\text{Iso}(\mathbb{R}^n, T_p M)$ von rechts durch Verkettung operiert. Die Kartenwechsel sind glatt, sie haben nämlich die Form $(p, \beta) \mapsto (p, i_l \circ i_k^{-1} \circ \beta)$, sind also die Linksmultiplikation mit der Jacobi-Matrix. Wir können daher durch Verheftung $P(M)$ zu einer glatten $\text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ -Mannigfaltigkeit machen, und die Projektion $(p, \alpha) \mapsto p$ ist dann ein glattes $\text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ -Prinzipalbündel. Die kanonischen Bijektionen

$$\text{Iso}(\mathbb{R}^n, T_p M) \times_{\text{Aut}(\mathbb{R}^n)} \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M, \quad (\beta, v) \mapsto \beta(v)$$

schließen sich zu einem Diffeomorphismus

$$P(M) \times_{\text{Aut}(\mathbb{R}^n)} \mathbb{R}^n \cong T(M)$$

zusammen. Diese Art, das Tangentialbündel als assoziiertes Faserbündel zu betrachten, hat den Vorteil, daß viele weitere mit der Mannigfaltigkeit verbundene Bündel auf dieselbe Weise entstehen. Man verwendet dann andere $\text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ -Darstellungen anstelle der Standarddarstellung. Solche Darstellungen erhält man zum Beispiel aus der Standarddarstellung durch Prozesse der linearen Algebra: Duale Darstellung, äußere Potenzen und so weiter. Die duale Darstellung liefert das Kotangentialbündel.

2 Unterbündel. Quotientbündel

Seien $\xi: E(\xi) \rightarrow B$ und $\eta: E(\eta) \rightarrow C$ reelle Vektorraumbündel. Ein *Bündelmorphismus* $\xi \rightarrow \eta$ ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{\Phi} & E(\eta) \\ \downarrow \xi & & \downarrow \eta \\ B & \xrightarrow{\varphi} & C \end{array}$$

mit einer Abbildung Φ , die Fasern linear in Fasern abbildet. Wir sagen, der Morphismus liegt *über* φ ; falls $\varphi = \text{id}(B)$ ist, so sprechen wir von einem Morphismus (einer Abbildung) *über* B . Bildet Φ Fasern bijektiv ab, so heißt der Morphismus *Bündelabbildung*. Eine Bündelabbildung über B ist ein Isomorphismus von Vektorraumbündeln, das heißt, die Umkehrabbildung ist wiederum eine Bündelabbildung, wie mit Hilfe lokaler Trivialisierungen gezeigt wird. Eine Sequenz $\xi_1 \xrightarrow{\alpha} \xi_2 \xrightarrow{\beta} \xi_3$ von Bündelmorphismen über B heißt *exakt* an der Stelle ξ_2 , wenn über jedem Punkt von B eine exakte Sequenz von Vektorräumen (nämlich Fasern) vorliegt. Ein Bündelmorphismus $\alpha: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ hat über jedem Punkt der Basis B einen Rang: den Rang der zugehörigen Faserabbildung. Die Redeweise „ α hat konstanten Rang“ ist damit klar.

Eine Teilmenge $E' \subset E$ eines Bündels $p: E \rightarrow B$ heißt *Unterbündel* von p , wenn es einen Atlas aus Bündelkarten $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ (genannt *angepaßte Bündelkarten*) so gibt, daß $\varphi(E' \cap p^{-1}(U)) = U \times (\mathbb{R}^k \times 0)$ ist.

(2.1) Satz. *Sei $\alpha: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ ein Bündelmorphismus über B von konstantem Rang. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (1) *Kern $\alpha = \bigcup_{b \in B} \text{Kern } \alpha_b \subset E(\xi_1)$ ist zusammen mit der Projektion auf B ein Vektorraumbündel.*
- (2) *Bild $\alpha = \bigcup_{b \in B} \text{Bild}(\alpha_b) \subset E(\xi_2)$ ist zusammen mit der Projektion auf B ein Vektorraumbündel.*
- (3) *Es werde $\text{Kokern } \alpha = \bigcup_{b \in B} E(\xi_2)_b / \text{Bild } \alpha_b$ mit der Quotienttopologie von $E(\xi_2)$ aus versehen. Mit der kanonischen Projektion auf B ist $\text{Kokern } \alpha$ ein Vektorraumbündel.*

BEWEIS. Fraglich ist in allen drei Fällen nur die Existenz der Bündelkarten. Um diese nachzuweisen, genügt es, Morphismen α zwischen trivialen Bündeln $\alpha: B \times \mathbb{R}^m \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$ zu betrachten.

Zu (1). Wir fixieren $b \in B$, setzen $K = \text{Kern } \alpha_b$, $L = \text{Bild } \alpha_b$ und wählen Projektionsoperatoren $q: \mathbb{R}^m \rightarrow K$ und $p: \mathbb{R}^n \rightarrow L$. Die Abbildung

$$\gamma_x = (p\alpha_x, q): \mathbb{R}^m \rightarrow L \oplus K$$

ist für $x = b$ ein Isomorphismus. Weil α_x konstanten Rang hat, gibt es eine Umgebung U von b , so daß für $x \in U$ sowohl γ_x ein Isomorphismus ist als auch

γ_x den Kern von α_x isomorph auf K abbildet. Da der Übergang zum Inversen bei linearen Abbildungen stetig ist, haben wir einen Homöomorphismus

$$U \times \mathbb{R}^m \rightarrow U \times (L \oplus K), (x, v) \mapsto (x, \gamma_x(v)),$$

der den Unterraum $\bigcup_{x \in U} \text{Kern } \alpha_b$ homöomorph auf $U \times K$ abbildet.

Zu (2). Sei $i: L \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Inklusion, so daß $\alpha_b i$ die Inklusion von L ist und sei $j: J \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Inklusion eines Komplementes von L . Dann argumentieren wir wie unter (1) mit

$$\langle \alpha_x i, j \rangle: L \oplus J \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Zu (3). Aus (2) erhalten wir lokal einen Bündelmorphismus $U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U \times J$ mit dem Kern Bild α . Er induziert einen Isomorphismus des Kokerns mit dem trivialen Bündel $U \times J \rightarrow U$. \square

Bündel vom Typ Kern α und Bild α bezeichnen wir als Unterbündel. Ein Bündel $\xi: E(\xi) \rightarrow B$ heißt *Unterbündel* des Bündels $\eta: E(\eta) \rightarrow B$, wenn $E(\xi) \subset E(\eta)$, $\xi = \eta|E(\xi)$ und Bündelkarten für η existieren, die die Fasern von ξ jeweils auf einen festen Untervektorraum abbilden. Ist speziell $E(\xi_1) \subset E(\xi_2)$ ein Unterbündel, so haben wir nach (2.1) (3) das *Quotientbündel* ξ_2/ξ_1 zur Verfügung. Ist α glatt, so sind die im Satz konstruierten Bündel ebenfalls glatt. Die Totalräume der Unterbündel Kern α und Bild α sind dann jeweils glatte Untermannigfaltigkeiten der umfassenden Totalräume, und Kokern α ist eine Quotientmannigfaltigkeit von $E(\xi_2)$.

Zu einem Bündel $\xi: E(\xi) \rightarrow B$ und einer stetigen Abbildung $f: C \rightarrow B$ gibt es das durch f von ξ *induzierte Bündel* $f^*\xi$ über C . Es ist

$$E(f^*\xi) = \{(c, e) \in C \times E(\xi) \mid f(c) = \xi(e)\},$$

und die Projektionen von $E(f^*\xi)$ auf die Faktoren liefern eine Bündelabbildung

$$(2.2) \quad \begin{array}{ccc} E(f^*\xi) & \xrightarrow{F} & E(\xi) \\ \downarrow & & \downarrow \xi \\ C & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Das Diagramm (2.2) ist ein Pullback in der Kategorie der topologischen Räume. Sind f und ξ glatt, so ist das induzierte Bündel glatt. Ist $f: C \subset B$, so kann $E(f^*\xi)$ als die *Einschränkung* $\xi|C = (\xi: \xi^{-1}(C) \rightarrow C)$ gewonnen werden. Kategorientheoretisch ist das induzierte Bündel bis auf Isomorphie eindeutig dadurch bestimmt, daß (2.2) als Pullback postuliert wird. Wie immer ist das Induzieren transitiv, das heißt, es gilt $g^*(f^*\xi) \cong (fg)^*\xi$. Weil eine Bündelabbildung über der Identität ein Isomorphismus ist, gilt:

(2.3) Satz. *Eine Bündelabbildung $(\Phi, \varphi): \xi \rightarrow \eta$ induziert einen kanonischen Isomorphismus von Bündeln $\xi \cong \varphi^*\eta$.* \square

Sind $\xi: E(\xi) \rightarrow B$ und $\eta: E(\eta) \rightarrow C$ Vektorraumbündel, so ist das kartesische Produkt $\xi \times \eta: E(\xi) \times E(\eta) \rightarrow B \times C$ ein Vektorraumbündel, das *Produktbündel*.

Ist $B = C$ und $d: B \rightarrow B \times B$, $b \mapsto (b, b)$ die Diagonale, so heißt $d^*(\xi \times \eta) = \xi \oplus \eta$ die *Whitney-Summe* von ξ und η . Die Faser von $\xi \oplus \eta$ über b ist die direkte Summe der Fasern $\xi_b \oplus \eta_b$. Ist ξ gegeben, so heißt η ein *Inverses* von ξ , falls $\xi \oplus \eta$ isomorph zu einem trivialen Bündel ist.

Sei $f: M \rightarrow N$ eine Immersion von glatten Mannigfaltigkeiten. Das Differential $Tf: TM \rightarrow TN$ läßt sich über einen fasernweise injektiven Bündelmorphismus $i: TM \rightarrow f^*TN$ und die kanonische Abbildung $f^*TN \rightarrow N$ faktorisieren. Das Quotientenbündel, das heißt der Kokern von i , heißt *Normalenbündel* der Immersion. Ist $M \subset N$ speziell eine Untermannigfaltigkeit, so können wir TM als Unterbündel der Einschränkung $TN|_M$ auffassen und das Normalenbündel als Quotientenbündel erhalten. Statt eines Quotientenbündels kann man auch das orthogonale Komplement nehmen. Die folgenden Überlegungen zeigen, daß dabei im wesentlichen dasselbe herauskommt.

Eine *Riemannsche Metrik* auf einem Vektorraumbündel ξ ist eine stetige Abbildung $b: E(\xi \oplus \xi) \rightarrow \mathbb{R}$, die auf jeder Faser ein Skalarprodukt $b(x)$ auf $E(\xi)_b$ ist. Hat ξ eine Riemannsche Metrik und ist $\alpha: \eta \rightarrow \xi$ ein fasernweise injektiver Bündelmorphismus über B , so kann man als Kokern(α) das fasernweise gebildete orthogonale Komplement ζ von Bild α nehmen. Man hat deshalb einen Isomorphismus $\xi \cong \eta \oplus \zeta$. Eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit* ist eine glatte Mannigfaltigkeit zusammen mit einer glatten Riemannschen Metrik auf ihrem Tangentialbündel.

Ein Bündel $\xi: E(\xi) \rightarrow B$ heißt *numerierbar*, wenn es eine offene Überdeckung $(U_j \mid j \in J)$ von B gibt, so daß ξ über U_j trivial ist, und zu $(U_j \mid j \in J)$ eine untergeordnete Partition der Eins $(\tau_j \mid j \in J)$ existiert, wenn also ξ über den Mengen einer numerierbaren Überdeckung trivialisiert werden kann.

(2.4) Satz. *Jedes numerierbare Bündel hat eine Riemannsche Metrik.*

BEWEIS. Ein triviales Bündel hat eine Riemannsche Metrik; sei etwa b_j eine auf $\xi|_{U_j}$. Dann ist $\sum_j \tau_j b_j$ eine Riemannsche Metrik auf ξ . Die Summe steht dabei abkürzend für das Skalarprodukt $\sum \tau_j(x) b_j(x)$ auf der Faser über x , mit der üblichen Vereinbarung „Null mal undefiniert = Null“. Man beachte, daß die Menge der Skalarprodukte eine konvexe Teilmenge im Vektorraum aller Bilinearformen ist. \square

(2.5) Notiz. *Sei ξ Unterbündel eines Bündels η mit Riemannscher Metrik. Dann ist das fasernweise gebildete orthogonale Komplement ξ^\perp ein Unterbündel, und die kanonische Abbildung $\xi^\perp \rightarrow \eta/\xi$ ist ein Bündelisomorphismus.* \square

3 Weiteres zu Vektorraumbündeln

(3.1) Satz. *S^k besitzt genau dann ein Vektorfeld ohne Nullstellen, wenn k ungerade ist.* \square

Allgemein kann man fragen, wieviele stetige Vektorfelder X_1, \dots, X_r eine Mannigfaltigkeit hat, die an jedem Punkt linear unabhängig sind. Wir behandeln

dieses Problem wiederum für die Sphäre. Das oben angegebene Vektorfeld kann als Multiplikation mit $i \in \mathbb{C}$ in einem komplexen Vektorraum angesehen werden. Feinere Methoden der linearen Algebra liefern linear unabhängige Vektorfelder.

Eine bilineare Abbildung $\mu: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heie *orthogonale Multiplikation*, wenn für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ die Gleichheit $|\mu(x, y)| = |x||y|$ gilt. Wir nennen μ *normiert*, wenn $\mu(e_k, y) = y$ für $e_k = (0, \dots, 0, 1)$ gilt. Mit der orthogonalen Abbildung $\alpha: v \mapsto \mu(e_k, v)$ ist $\nu(x, y) = \mu(x, \alpha^{-1}(y))$ eine normierte orthogonale Multiplikation. Ist $\mu: \mathbb{H} \times \mathbb{H}^t \rightarrow \mathbb{H}^t$ die Skalarmultiplikation im Standardvektorraum über den Quaternionen \mathbb{H} , so ist μ eine orthogonale Multiplikation.

(3.2) Satz. *Ist $\mu: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Multiplikation, so gibt es $k - 1$ Vektorfelder auf S^{n-1} , die an jeder Stelle ein orthonormales $(k - 1)$ -Bein bilden.*

BEWEIS. Wir können μ als normiert annehmen. Dann bilden

$$\mu(e_1, y), \dots, \mu(e_{k-1}, y), y = \mu(e_k, y)$$

ein Orthonormalsystem. Also sind die $y \mapsto \mu(e_j, y)$ für $1 \leq j \leq k - 1$ die gewünschten Vektorfelder. \square

Durch Verwendung der Quaternionen erhält man so zum Beispiel drei linear unabhängige Vektorfelder auf den Sphären S^{4n-1} .

Bilineare Abbildungen $\mu: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\mu(e_k, y) = y$ entsprechen umkehrbar eindeutig den $(k - 1)$ -Tupeln linearer Abbildungen $\alpha_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vermöge der Zuordnung $\alpha_j(y_j) = \mu(e_j, y)$. Man verifiziert:

(3.3) Hilfssatz. *Genau dann ist μ eine normierte orthogonale Multiplikation, wenn das System $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ die folgenden Eigenschaften hat:*

- (1) *Die α_j sind orthogonal.*
- (2) *Für alle j gilt $\alpha_j^2 = -\text{id}$.*
- (3) *Für $i \neq j$ gilt $\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0$.* \square

Die Eigenschaften (2) und (3) treten in der Theorie der Clifford-Algebren auf. Die Clifford-Algebra C_k über \mathbb{R} ist eine \mathbb{R} -Algebra mit Einselement, die von Elementen e_1, \dots, e_k erzeugt wird, die den Relationen $e_i^2 = -1, e_i e_j + e_j e_i = 0$ für $i \neq j$ genügen. Als \mathbb{R} -Vektorraum hat C_k die Dimension 2^k . Eine Basis besteht aus dem Einselement sowie den $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_t}$ mit $i_1 < \dots < i_t, t \leq k$. Moduln über C_k sind demnach reelle Vektorräume V zusammen mit einem System linearer Abbildungen $e_j: V \rightarrow V$, die $e_j^2 = -\text{id}$ und $e_i e_j + e_j e_i = 0$ erfüllen. Man kann für einen solchen Modul auch immer ein Skalarprodukt finden, so daß die e_j orthogonale Abbildungen werden; ist nämlich $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ irgendein Skalarprodukt, so ist

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{\sigma} b(\sigma(v), \sigma(w))$$

ein Skalarprodukt mit den gewünschten Eigenschaften, wenn σ alle Elemente $\pm 1, \pm e_{i_1} \dots e_{i_t}$ durchläuft. Wir können deshalb sagen:

(3.4) Notiz. *Es gibt genau dann eine normierte orthogonale Multiplikation $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, wenn \mathbb{R}^n ein Modul über der Clifford-Algebra C_{k-1} ist.* \square

Die Clifford-Algebren sind isomorph zu Algebren von (n, n) -Matrizen $K(n)$ über einem Körper $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Es gilt (siehe ATIYAH – BOTT – SHAPIRO [1963] und den folgenden Text)

(3.5)

k	1	2	3	4
C_k	$\mathbb{C}(1)$	$\mathbb{H}(1)$	$\mathbb{H}(1) \oplus \mathbb{H}(1)$	$\mathbb{H}(2)$
c_k	2	4	4	8
k	5	6	7	8
C_k	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
c_k	8	8	8	16

und allgemein

$$(3.6) \quad C_{k+8} \cong C_k \otimes C_8; \quad c_{k+8} = 16c_k.$$

Man bezeichnet (2.8) als ‘‘Periodizität’’. Sie bedeutet im Zusammenhang mit (2.7), daß bei Addition von 8 zum Index k die Zeilenzahl in den Matrizenalgebren mit 16 zu multiplizieren ist, also zum Beispiel

$$C_9 = \mathbb{C}(16), \quad C_{11} = \mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16).$$

Da die Clifford-Algebren halbeinfach sind, ist jeder Modul direkte Summe von irreduziblen Moduln. Für $k \equiv 3 \pmod{4}$ hat C_k bis auf Isomorphie zwei irreduzible Moduln derselben Dimension, sonst nur einen. Sei c_k die Dimension eines irreduziblen C_k -Moduls. Die Werte von c_k sind ebenfalls in (2.7) und (2.8) angegeben. Aus (2.4) und diesen Informationen über die Clifford-Algebren entnimmt man induktiv:

(3.7) Satz. *Sei $n = 2^{c(n)} 16^{d(n)} u$ mit $0 \leq c(n) \leq 3$ und ungeradem u . Damit bilde man $\rho(n) = 2^{c(n)} + 8d(n)$. Dann besitzt S^{n-1} mindestens $\rho(n) - 1$ orthonormale Vektorfelder.* \square

Ein berühmter Satz von ADAMS [1962] besagt, daß S^{n-1} nicht $\rho(n)$ linear unabhängige Vektorfelder hat.

Eine Abbildung $\text{pr}: X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X$ wird als *triviales* Vektorraumbündel bezeichnet. Allgemeiner heißt ein Vektorraumbündel $\xi: E \rightarrow X$ *trivial*, wenn es zu einem Bündel der Form $X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X$ isomorph ist. Ein *Isomorphismus* zwischen Vektorraumbündeln $\xi_i: E_i \rightarrow X$ über X ist dabei eine stetige Abbildung $\alpha: E_1 \rightarrow E_2$ mit $\xi_2 \alpha = \xi_1$ — die also Fasern in Fasern abbildet — und die auf jeder Faser ein linearer Isomorphismus ist. (Dann ist α ein Homöomorphismus und die Umkehrung von demselben Typ.) Mit diesen Begriffen können wir mitteilen:

(3.8) Satz. *Das Tangentialbündel TS^n ist genau für $n = 0, 1, 3, 7$ trivial.* \square

(2.10) ist ein Spezialfall des Satzes von Adams, wurde aber schon früher bewiesen. Siehe dazu und den Zusammenhang mit reellen Divisionsalgebren den Artikel von HIRZEBRUCH in EBBINGHAUS et al. [1983].

Eine Mannigfaltigkeit M mit trivialem Tangentialbündel heißt *parallelisierbar*. Dieser Begriff geht auf STIEFEL [1936] zurück, der zeigte, daß alle orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten parallelisierbar sind. Dem Wort liegt folgende Problematik zugrunde: Vektoren in verschiedenen Tangentialräumen lassen sich zunächst ihrer Lage nach nicht vergleichen. Im euklidischen Raum jedoch kann dieser Vergleich durch Parallelverschiebung bewirkt werden. Hat man allgemeiner eine Trivialisierung $\alpha: TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ eines Tangentialbündels, so kann diese zum Vergleich mit Standardvektoren des \mathbb{R}^n verwendet werden. Es gibt viele Trivialisierungen eines trivialen Bündels. Ist β eine weitere Trivialisierung, so hat $\beta\alpha^{-1}: M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ die Form $(x, v) \mapsto (x, t_x(v))$, wobei $t_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein linearer Automorphismus ist. In dieser Weise entsprechen die Trivialisierungen den stetigen Abbildungen $t: M \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, wenn eine einmal gegeben ist. Die moderne Differentialgeometrie benutzt im Begriff des "Zusammenhangs", den Vergleich von Tangentialräumen als grundlegenden Strukturbegriff.

(3.9) Satz. *Eine Liesche Gruppe G ist parallelisierbar.*

BEWEIS. Sei $T_e(G) := L(G)$ der Tangentialraum im neutralen Element. Die Gruppenmultiplikation wird benutzt, um ihn zu transportieren. Sei $l_g: G \rightarrow G$, $x \mapsto gx$ die Linkstranslation mit g , ein Diffeomorphismus. Durch

$$G \times L(G) \rightarrow T(G), (g, v) \mapsto T(l_g)(v)$$

wird ein Diffeomorphismus und eine Trivialisierung von $T(G)$ beschrieben. \square

(3.10) Bemerkung. Man kann im vorstehenden Satz auch die Rechtstranslationen verwenden. Dann erhält man im allgemeinen eine andere Trivialisierung.

(3.11) Das Möbiusband. Das einfachste nichttriviale Bündel ist ein Geradenbündel über S^1 , das man sich als das berühmte Möbiusband vorstellen kann (MÖBIUS 1858 [Werke II], p. 484). Formal kann es definiert werden als $E = S^1 \times_G \mathbb{R}$, wobei $G = \mathbb{Z}/2 = \{\pm 1\}$ auf S^1 und \mathbb{R} durch $(\lambda, z) \mapsto \lambda z$ operiert. Es ist also assoziiert zu dem $\mathbb{Z}/2$ -Prinzipalbündel $q: S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^2$ ($S^1 \subset \mathbb{C}$ betrachtet). Wäre das Bündel trivial, so gäbe es einen Schnitt $s: S^1 \rightarrow E$, der nirgendwo der Nullvektor ist, also nach (1.5) eine Abbildung $\sigma: S^1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, die $\sigma(-z) = -\sigma(z)$ erfüllt. Letzteres führt aber mit dem Zwischenwertsatz der Analysis leicht zu einem Widerspruch.

In analoger Weise stellt man für alle $n \geq 1$ ein nicht-triviales Geradenbündel $S^n \times_G \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}P^n = S^n/G$ her.

(3.12) Tautologische Bündel. Ein Vektorraumbündel ist eine stetige Familie von Vektorräumen. Das wird besonders deutlich durch das sogenannte *tautologische Bündel* über einer Grassmannschen Mannigfaltigkeit belegt. Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und $G_k(V)$ die Grassmannsche Mannigfaltigkeit der k -dimensionalen Unterräume von V (siehe I.5)

$$E(\gamma_k) = \{(x, v) \mid x \in G_k(V), v \in x\} \subset G_k(V) \times V.$$

Wir haben die Projektion $\gamma_k: E(\gamma_k) \rightarrow G_k(V)$, und die Faser über dem Element $x \in G_k(V)$ ist der Unterraum x — deshalb: tautologisch. Es bleibt zu zeigen, daß γ_k lokal trivial ist. Zu diesem Zweck erinnern wir an das $O(k)$ -Bündel $p: V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$ aus dem letzten Abschnitt. Die Abbildung

$$V_k(\mathbb{R}^n) \times_{O(k)} \mathbb{R}^n \rightarrow E(\gamma_k),$$

$$(v_1, \dots, v_k), (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto (\langle v_1, \dots, v_k \rangle, \sum \lambda_j v_j)$$

ist ein auf den Fasern linearer Homöomorphismus, siehe (3.1.1). Damit ist das tautologische Bündel als ein assoziiertes Faserbündel geschrieben.

Über den komplexen Grassmann-Mannigfaltigkeiten gibt es ebenso ein komplexes tautologisches Bündel.

Über dem komplexen projektiven Raum hat man die folgenden komplexen Geradenbündel. Sei $H: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ das Hopfsche S^1 -Prinzipalbündel (siehe II(13.8)). Sei $\mathbb{C}(-k)$ der Vektorraum \mathbb{C} zusammen mit der S^1 -Operation $S^1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $(\lambda, z) \mapsto \lambda^{-k}z$. Daraus erhält man ein assoziiertes komplexes Geradenbündel

$$H(k) = S^{2n+1} \times_{S^1} \mathbb{C}(-k) \rightarrow \mathbb{C}P^n.$$

Der Raum $H(k)$ entsteht also aus $S^{2n+1} \times \mathbb{C}$ durch die Äquivalenzrelation $(x, z) \sim (x\lambda, \lambda^k z)$. Das tautologische Bündel über $\mathbb{C}P^n = G_1(\mathbb{C}^{n+1})$ ist $H(-1)$. Durch

$$S^{2n+1} \times_{S^1} \mathbb{C}(1) \rightarrow E(\gamma_1), (x, u) \mapsto ([x], ux)$$

wird ein Isomorphismus gegeben.

Der komplex-analytischen Situation besser angepaßt, läßt sich $H(k)$ auch als $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \times_{\mathbb{C}^*} \mathbb{C}(-k)$ beschreiben. Die Abbildung

$$\sigma: \mathbb{C}^n \setminus 0 \times_{\mathbb{C}^*} \mathbb{C}(-1) \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \sigma((x_1, \dots, x_n), u) = (x_1 u, \dots, x_n u)$$

ist von grundlegender Bedeutung für die algebraische Geometrie. Sie hat die folgenden Eigenschaften:

- (1) Die Fasern von $H(-1)$ werden auf die Geraden durch den Nullpunkt abgebildet.
- (2) Der Nullschnitt E , das heißt die Menge aller Nullvektoren in den Fasern, ist eine zu $\mathbb{C}P^{n-1}$ isomorphe Untermannigfaltigkeit von $H(-1)$ und gleich dem Urbild $\sigma^{-1}(0)$.
- (3) σ liefert einen Diffeomorphismus $H(-1) \setminus E \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus 0$.

Man bezeichnet σ als *Hopfschen σ -Prozeß*, HOPF [1955], oder als *Aufblasen des Nullpunktes* von \mathbb{C}^n .

Die Schnitte des Bündels $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \times_{\mathbb{C}^*} \mathbb{C}(-k) \rightarrow \mathbb{C}P^n$ entsprechen nach (1.5) den Abbildungen $h: \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Homogenitätseigenschaft $h(\lambda x) = \lambda^k h(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$. Die homogenen Polynome vom Grad k liefern keine Funktion auf $\mathbb{C}P^n$, wohl aber einen Schnitt im Bündel $H(k)$. Aus diesem Grunde haben wir auch $H(k)$ nicht etwa als $H(-k)$ bezeichnet, wie es nach der formalen Definition vielleicht zunächst nahegelegen hätte. In der algebraischen

Geometrie wird $H(k)$ oft durch $\mathcal{O}(k)$ bezeichnet. Aus der Konstruktion von $H(k)$ ist klar, daß $H(k)$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist und die lokalen Trivialisierungen holomorph sind. Deshalb ist $H(k)$ ein holomorphes Vektorraumbündel über $\mathbb{C}P^n$. Die homogenen Polynome vom Grad k liefern holomorphe Schnitte von $H(k)$. Es ist bemerkenswert, daß es keine anderen holomorphen Schnitte gibt. Um das zu beweisen, benutzt man, daß sich eine holomorphe Abbildung $h: \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}$ für $n \geq 1$ holomorph auf \mathbb{C}^{n+1} fortsetzen läßt (siehe etwa GRAUERT–FRITSCH [1976], p. 33). Die Betrachtung der Taylor-Reihe im Nullpunkt liefert dann zusammen mit der Bedingung $h(\lambda x) = \lambda^k h(x)$, daß h ein homogenes Polynom vom Grad k ist.

Die (Varietät) Mannigfaltigkeit

$$H(-k) = (\mathbb{C}^n \setminus 0) \times_{\mathbb{C}^*} \mathbb{C}(k), \quad k > 0$$

läßt sich als komplexe Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ schreiben. Die Abbildung

$$(\mathbb{C}^n \setminus 0) \times \mathbb{C}(k) \rightarrow \mathbb{C}^n \times P(\mathbb{C}^n), (x_1, \dots, x_n), z \mapsto (x_1^k z, \dots, x_n^k z), [x_1, \dots, x_n]$$

läßt sich über den Orbitraum $H(-k)$ faktorisieren. Die resultierende Abbildung sei $\iota: H(-k) \rightarrow \mathbb{C}^n \times P(\mathbb{C}^n)$.

(3.13) Satz. ι ist eine holomorphe Einbettung auf die Untermannigfaltigkeit, die durch

$$\{(y_1, \dots, y_n), [x_1, \dots, x_n] \mid x_i^k y_j = x_j^k y_i\} = \tilde{H}(-k)$$

definiert wird.

BEWEIS. Bild ι liegt sicherlich in dieser Teilmenge. Die Bedingungen $x_i^k y_j = x_j^k y_i$ besagen nach dem Determinanten-Kriterium für den Rang einer Matrix, daß (x_1^k, \dots, x_n^k) und (y_1, \dots, y_n) linear abhängig sind. Es gibt also ein $z \in \mathbb{C}$ mit $y_j = z x_j^k$, das heißt ι hat die angegebene Menge als Bild.

Ist $\iota((x_i), z) = \iota((u_i), t)$, so gibt es $\lambda \in \mathbb{C}^*$ mit $x_i = \lambda u_i$. Aus $x_i^k z = u_i^k t = \lambda^k u_i^k z$ folgt für $u \neq 0$ auch $t \neq 0$ und $t = \lambda^k z$. Also ergibt sich, daß ι injektiv ist.

Die angegebene Menge ist eine Untermannigfaltigkeit. Auf der Karte $x_j = 1$ folgt aus $x_i^k y_j = y_i$, daß sich die y_i durch die y_j und x_i ausrechnen lassen ($i \neq j$). Es handelt sich also um den Graphen einer Abbildung.

Man kann auch $\tilde{H}(-k)$ in natürlicher Weise zu einem Geradenbündel über $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ machen und zeigen, daß ι ein Bündelisomorphismus wird. (Kanonische Einbettung in das triviale Bündel.) \square

Wenn man das projektive Bündel $(\mathbb{C}^n \setminus 0) \times_{\mathbb{C}^*} \mathbb{P}^1(k)$, definiert durch die Äquivalenzrelation

$$(x_1, \dots, x_n), [u, v] \sim (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), [\lambda^{-k} u, v]$$

betrachtet, so kann man es durch

$$\iota: (x_1, \dots, x_n), [u, v] \mapsto [x_1^k u, \dots, x_1^k v], [x_1, \dots, x_n]$$

nach $P(\mathbb{C}^{n+1}) \times P(\mathbb{C}^n)$ einbetten auf die Untermannigfaltigkeit, die durch die Gleichungen

$$\{[y_1, \dots, y_{n+1}], [x_1, \dots, x_n] \mid x_i^k y_j = x_j^k y_i, 1 \leq i, j \leq n\}$$

beschrieben wird. Es enthält das projektive Bündel $H(-k)$ als die Teilmenge der $(x_1, \dots, x_n), [u, 1]$ und $H(k)$ als die Teilmenge der $(x_1, \dots, x_n), [1, v]$. Damit wird auch $H(k)$ jedenfalls nach $P(\mathbb{C}^{n+1}) \times P(\mathbb{C}^n)$ eingebettet.

4 Bestimmung von Tangentialbündeln

In diesem Abschnitt beschreiben wir, wie sich Tangentialbündel wichtiger Mannigfaltigkeiten konstruieren lassen.

Zunächst betrachten wir Orbiträume glatter, freier, eigentlicher Operationen $G \times M \rightarrow M$ einer Lieschen Gruppe G auf der Mannigfaltigkeit M . Nach I.5 hat M/G genau eine differenzierbare Struktur, so daß die Orbitabbildung $p: M \rightarrow M/G$ eine Submersion ist.

Ist M irgendeine glatte G -Mannigfaltigkeit, so erhält man über das Differential der Linkstranslationen eine Operation auf dem Tangentialbündel

$$G \times TM \rightarrow TM, (g, v) \mapsto (Tl_g)v.$$

Diese Operation ist glatt und die Bündelprojektion äquivariant. Mit dieser Operation wird $TM \rightarrow M$ ein glattes G -Vektorraumbündel; darunter verstehen wir allgemein ein glattes Vektorraumbündel $\xi: E \rightarrow M$ mit differenzierbaren Operationen von G auf E und M , so daß ξ äquivariant ist und jede Linkstranslation $l_g: E \rightarrow E$ Fasern linear in Fasern abbildet.

(4.1) Satz. *Sei $\xi: E \rightarrow M$ ein glattes G -Vektorraumbündel. Die Operation von G auf M sei frei und eigentlich. Dann ist die Abbildung der Orbiträume $\xi/G: E/G \rightarrow M/G$ ein glattes Vektorraumbündel.*

BEWEIS. Die Operation auf E ist frei. Hat M die Form $G \times U$ mit der Linksoperation von G auf dem Faktor U und ist $\xi_0: E_0 \rightarrow U$ die Einschränkung des Bündels ξ auf $\{e\} \times U$, so ist $\text{id} \times \xi_0: G \times E_0 \rightarrow G \times U$ ein G -Vektorraumbündel und $G \times E_0 \rightarrow E$, $(g, x) \mapsto gx$ ein Bündelisomorphismus. Folglich ist in diesem Fall $E/G \rightarrow M/G$ diffeomorph zu $E_0 \rightarrow U$, also ein Vektorraumbündel. Im allgemeinen Fall wird M von offenen G -Mengen überdeckt, die G -diffeomorph zu Mengen der Form $G \times U$ sind. Es folgt, daß ξ/G lokal trivial ist. \square

Die Orbitabbildung von Basis und Totalraum liefern ist eine Bündelabbildung $\xi \rightarrow \xi/G$. Wir kehren zum Tangentialbündel zurück. Das Differential von p ist ein Morphismus $Tp: TM \rightarrow T(M/G)$, der über die Orbitabbildung $TM \rightarrow (TM)/G$ faktorisiert und einen Morphismus $q: (TM)/G \rightarrow T(M/G)$ über M/G induziert. In jedem Fall ist q fasernweise surjektiv. Ist G diskret, so haben M und M/G dieselbe Dimension. Deshalb ist q ein Isomorphismus.

(4.2) Satz. *Operiert die diskrete Gruppe G frei und eigentlich auf M , so induziert die Orbitabbildung $M \rightarrow M/G$ einen Bündelisomorphismus von $(TM)/G$ mit $T(M/G)$. \square*

Mit dem letzten Satz ist zum Beispiel gesagt, wie das Tangentialbündel des projektiven Raumes $\mathbb{R}P^n$ aus dem von S^n entsteht. Wir haben früher einen kanonischen Isomorphismus $TS^n \oplus \varepsilon \cong (n+1)\varepsilon$ angegeben. Operiert $\mathbb{Z}/2$ auf $TS^n \oplus \varepsilon$ durch das Differential der antipodischen Abbildung auf TS^n und trivial auf ε , so geht diese Operation bei dem genannten Isomorphismus in $S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, $(x, v) \mapsto (-x, -v)$ über. Wir betrachten die Orbiträume und erhalten

$$(4.3) \quad T(\mathbb{R}P^n) \oplus \varepsilon \cong (n+1)\gamma$$

mit dem tautologischen Geradenbündel γ über $\mathbb{R}P^n$. Damit haben wir das stabile Tangentialbündel von $\mathbb{R}P^n$ bestimmt. Analog verfährt man im Komplexen und erhält für das komplexe(!) Tangentialbündel die Relation

$$(4.4) \quad T(\mathbb{C}P^n) \oplus \varepsilon_{\mathbb{C}} \cong (n+1)\gamma$$

mit dem komplexen trivialen Bündel $\varepsilon_{\mathbb{C}}$ und dem tautologischen Bündel γ .

Im allgemeinen hat $q: (TM)/G \rightarrow T(M/G)$ einen Kern, der nach Abschnitt 3 ein Bündel $K \rightarrow M/G$ mit Faserdimension $\dim G$ ist. Wir werden sehen, daß das Kernbündel zum Prinzipalbündel $M \rightarrow M/G$ assoziiert ist. Zu seiner Beschreibung benötigen wir die *adjungierte Darstellung* einer Lieschen Gruppe. Sei $L(G) = T_e(G)$ der Tangentialraum im neutralen Element. Die Operation durch Konjugation

$$c: G \times G \rightarrow G, (g, x) \mapsto gxg^{-1} =: c_g(x)$$

hat $e \in G$ als Fixpunkt und liefert über das Differential eine Operation

$$\text{Ad}: G \times L(G) \rightarrow L(G), (g, v) \mapsto (Tc_g)v.$$

Damit ist eine Darstellung von G gegeben, die adjungierte Darstellung von G genannt wird. Sie enthält weitreichende infinitesimale Information über die Gruppenmultiplikation und spielt eine wesentliche Rolle in der Strukturtheorie der Lieschen Gruppen.

(4.5) Satz. *Das Kernbündel $K \rightarrow M/G$ von $q: (TM)/G \rightarrow T(M/G)$ ist isomorph zu dem assoziierten Bündel $M \times_G L(G) \rightarrow M/G$.*

BEWEIS. Damit die Formulierung des Satzes mit früheren Bezeichnungen im Einklang ist, gehen wir von einer Rechtsoperation von G auf M aus. Wir konstruieren eine Abbildung $k: TM \rightarrow M \times L(G)$ wie folgt. Sei $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2): p^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ ein G -Diffeomorphismus über der in M/G offenen Menge U (eine Bündelkarte des Prinzipalbündels). Sei $x \in p^{-1}(U)$, $v \in T_x M$ und $\varphi(x) = (u, g)$. Wir setzen

$$k(v) = (x, Tl_g^{-1} \circ T\varphi_2(v)).$$

Man bestätigt, daß k wohldefiniert ist und mit der G -Operation verträglich. Deshalb wird ein Bündelmorphismus

$$\kappa: (TM)/G \rightarrow M \times_G L(G)$$

induziert. Die beiden Abbildungen q und κ zusammen liefern einen Isomorphismus

$$(TM)/G \rightarrow T(M/G) \oplus (M \times_G L(G)),$$

wie man fasernweise nachrechnet. Deutlicher: Eine Umkehrabbildung $j: M \times L(G) \rightarrow TM$ von k wird folgendermaßen gegeben. Sei $\mu: M \times G \rightarrow M$ die Operation. Dann sei $j(x, v) := T_{(x,e)}\mu(0, v)$ für $(0, v) \in T_{(x,e)}(M \times G) = T_x M \times L(G)$. Das Bild von j ist im Kern von $T(p): TM \rightarrow T(M/G)$ enthalten. \square

Wir können den letzten Satz auch so formulieren: Es gibt eine exakte Sequenz von Bündeln

$$0 \rightarrow M \times_G L(G) \rightarrow (TM)/G \rightarrow T(M/G) \rightarrow 0.$$

Für TM selbst erhält man die darüber liegende exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M \times L(G) \xrightarrow{j} TM \rightarrow p^*T(M/G) \rightarrow 0.$$

Wir betrachten speziell eine Liesche Gruppe G und eine abgeschlossene Untergruppe H . Die adjungierte Darstellung $L(G)$ hat dann den H -invarianten Unterraum $L(H)$. Deshalb steht uns die H -Darstellung $L(G)/L(H)$ zur Verfügung.

(4.6) Satz. *Es gibt einen kanonischen Diffeomorphismus von G -Vektorraumbündeln $T(G/H) \cong G \times_H (L(G)/L(H))$.*

BEWEIS. Wir haben den Bündelisomorphismus $\lambda: G \times L(G) \rightarrow T(G)$, $(g, v) \mapsto Tl_g(v)$ von Räumen mit Linksoperation von G . Das Differential der Rechtstranslation Tr_h wird durch λ in die Abbildung $(g, v) \mapsto (gh, \text{Ad}(h^{-1})v)$ transportiert. Deshalb induziert λ einen Isomorphismus $\Lambda: G \times_H L(G) \rightarrow T(G)/H$, wobei $L(G)$ durch Restriktion als H -Darstellung gewertet wird. Setzen wir Λ mit der kanonischen Abbildung $q: T(G)/H \rightarrow T(G/H)$ zusammen, so wird $G \times_H L(H)$ auf Null abgebildet. Aus Dimensionsgründen erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow G \times_H L(H) \xrightarrow{j} G \times_H L(G) \xrightarrow{q \circ \Lambda} T(G/H) \longrightarrow 0,$$

und es ist klar, daß der Kokern von j zu $G \times_H (L(G)/L(H))$ isomorph ist. \square

(4.7) Beispiel. (Graßmannsche Mannigfaltigkeiten) Wir können den Tangentialraum von $GL(n, \mathbb{R})$ im neutralen Element mit dem Vektorraum $M_n(\mathbb{R})$ aller $(n \times n)$ -Matrizen identifizieren. Die adjungierte Darstellung wird dann durch

$$GL(n, \mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), (A, X) \mapsto AXA^{-1}$$

beschrieben (Aufgabe 2). Die orthogonale Gruppe $O(n)$ hat als $T_E O(n) = LO(n)$ den Unterraum aller schiefsymmetrischen (n, n) -Matrizen. Um das Tangentialbündel der Graßmannschen Mannigfaltigkeit

$$G_k(\mathbb{R}^{n+k}) \cong O(n+k)/O(k) \times O(n)$$

mittels (6.6) zu bestimmen, müssen wir $LO(n+k)/LO(k) \times LO(n)$ als $O(k) \times O(n)$ -Darstellung beschreiben. Der Unterraum aller Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} O & A \\ -A^t & O \end{pmatrix}, \quad A \in M(n, k)$$

wird isomorph auf $LO(n+k)/LO(k) \times LO(n)$ abgebildet. Die Operation von $(C, D) \in O(k) \times O(n)$ auf einer Matrix dieser Form wird durch Ersetzen von A durch CAD^{-1} gegeben. Begrifflich läßt sich diese Darstellung durch den Vektorraum $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ beschreiben, auf dem $\text{Aut}(\mathbb{R}^n) \times \text{Aut}(\mathbb{R}^k)$ durch $((f, g), h) \mapsto fhg^{-1}$ operiert.

Indem man jedem Unterraum sein orthogonales Komplement zuordnet, erhält man einen Diffeomorphismus $G_k(\mathbb{R}^{n+k}) \cong G_n(\mathbb{R}^{k+n})$. Deshalb kann man die tautologischen Bündel γ_k und γ_n beide als Bündel über $G_k(\mathbb{R}^{k+n})$ ansehen. In der Version $O(n+k)/O(k) \times O(n)$ sind diese Bündel assoziiert zu den $O(k)$ - bzw. $O(n)$ -Prinzipalbündeln, die der Projektion der zugehörigen Stiefel-Mannigfaltigkeiten assoziiert sind (siehe Abschnitt 1). Indem wir die voranstehende Diskussion des Tangentialbündels übersetzen, erhalten wir die folgende Aussage.

(4.8) Satz. *Seien γ_k und γ_n die tautologischen Bündel über $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$. Dann ist das Tangentialbündel $TG_k(\mathbb{R}^{n+k})$ kanonisch isomorph zum Bündel $\text{Hom}(\gamma_n, \gamma_k)$. Der Isomorphismus ist mit der Operation von $O(n+k)$ (und sogar $GL(n+k, \mathbb{R})$) verträglich. Analoges gilt für komplexe Graßmannsche Mannigfaltigkeiten. \square*

Wir verbinden die Ergebnisse (6.3) und (6.8). Das Bündel $\gamma_n \oplus \gamma_1$ ist trivial, also gilt $\gamma_n^* \oplus \gamma_1^* \cong (n+1)\varepsilon$. Wir bilden das Tensorprodukt mit γ_1 und erhalten wegen $\gamma_1^* \otimes \gamma_1 \cong \varepsilon$ und $\text{Hom}(\xi, \eta) \cong \xi^* \otimes \eta$ einen Isomorphismus $\text{Hom}(\gamma_n, \gamma_1) \oplus \varepsilon \cong (n+1)\gamma_1$.

Der Totalraum eines glatten Vektorraumbündels $\xi: E \rightarrow M$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wie sieht TE aus? Über E gibt es zwei kanonische Bündel:

- (1) ξ^*TM , das induzierte Tangentialbündel.
- (2) ξ^*E , das von sich selbst induzierte Bündel.

(4.9) Satz. *Das Tangentialbündel TE ist isomorph zu $\xi^*TM \oplus \xi^*E$.*

BEWEIS. Da $\xi: E \rightarrow M$ eine Homotopieäquivalenz ist, mit dem Nullschnitt $s: M \rightarrow E$ als Inversem, genügt es nach dem Homotopiesatz für Bündel zu zeigen, daß $TE|_M$ zu $TM \oplus E$ isomorph ist. Dieser Isomorphismus ist sogar kanonisch. Da $\xi s = \text{id}$ ist, so ist $Ts: TM \rightarrow TE|_M$ ein Bündelmonomorphismus.

Eine Einbettung $j: E \rightarrow TE|M$ beruht darauf, daß sich der Tangentialraum des Vektorraums $E_x = \xi^{-1}(x)$ mit E_x kanonisch identifizieren läßt. Ist $v \in E_x$ und $\alpha_v: \mathbb{R} \rightarrow E$, $t \mapsto tv$, so ist $j(v) = \dot{\alpha}_v(0)$, der Geschwindigkeitsvektor der Kurve α_v zur Zeit $t = 0$.

Statt α_v kann man auch $\alpha_{u,v}: t \mapsto u + tv$ für $u, v \in E_x$ betrachten und mittels $(u, v) \mapsto \dot{\alpha}_{u,v}(0)$ eine kanonische Einbettung von ξ^*E nach TE erhalten. Der Summand ξ^*TM läßt sich dagegen nicht kanonisch nach TE einbetten. \square

Insbesondere kann man das Tangentialbündel $T(TM)$, das *doppelte Tangentialbündel* von M , betrachten. Die Einschränkung auf den Nullschnitt ist dann $TM \oplus TM$, wobei etwa der erste Summand die Tangentialvektoren der Basis und der zweite die der Fasern umfaßt. Da ein Bündel $\xi \oplus \xi$ immer orientierbar ist (und sogar eine komplexe Struktur besitzt), ist TM eine orientierbare Mannigfaltigkeit.

5 Orientierung

Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. Geordnete Basen b_1, \dots, b_n und c_1, \dots, c_n heißen *gleichorientiert*, wenn die Determinante der Basiswechsellmatrix positiv ist. „Gleichorientiert“ eine Äquivalenzrelation. Eine *Orientierung* von V ist eine Äquivalenzklasse von gleichorientierten Basen. Wir geben eine Orientierung durch einen Repräsentanten an, also durch eine geordnete Basis. Die *Standard-Orientierung* des \mathbb{R}^n wird durch die Standardbasis e_1, \dots, e_n , die Zeilen der Einheitsmatrix, gegeben. Ist V ein komplexer Vektorraum mit der komplexen Basis v_1, \dots, v_n , so ist $v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n$ eine Orientierung des zugrunde liegenden reellen Vektorraumes, die von der Wahl der komplexen Basis unabhängig ist und deshalb Standard-Orientierung heißt.

Sei $0 \rightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{j} W \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von reellen Vektorräumen. Sei P ein Komplement von $i(U)$ in V , also ein Unterraum, der bei j isomorph abgebildet wird. Ist u_1, \dots, u_m eine Basis von U und w_1, \dots, w_n eine Basis von W und p_1, \dots, p_n eine Basis von P mit $j(p_k) = w_k$, so wird V durch $p_1, \dots, p_n, u_1, \dots, u_m$ eine Orientierung aufgeprägt, die nur von den Orientierungen von U und W abhängt, nicht aber von der Wahl von P . Diese *Sequenz-Orientierung* wurde aus folgendem Grund gewählt: Sei $p: E \rightarrow B$ eine Submersion mit Faser $F = p^{-1}(b)$. Sie liefert eine kurze exakte Sequenz $T_e(F) \rightarrow T_e(E) \rightarrow T_{p(e)}B$, und die Sequenz-Orientierung bedeutet: Erst die Basis, dann die Faser. Die exakte Sequenz $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ heißt *orientiert*, wenn U, V, W orientiert sind und die Orientierungen in der eben genannten Weise miteinander verbunden sind. Sind zwei der Vektorräume orientiert, so gibt es genau eine Orientierung des verbleibenden, die die exakte Sequenz zu einer orientierten macht. In einer direkten Summe $U \oplus W$ wird die *Summen-Orientierung* durch $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ gegeben, die kanonische Sequenz $0 \rightarrow W \rightarrow U \oplus W \rightarrow U \rightarrow 0$ ist dann sequenz-orientiert. Die Summenorientierung ist assoziativ. Ist $o(V)$ eine Orientierung von V , so schreiben wir die entgegengesetzte (also die „Okzidentierung“) als $-o(V)$. Sind $o(U)$ und

$o(V)$ gegeben und ist $o(U \oplus V)$ die Summen-Orientierung, so gilt (in plausibler Notation)

$$o(V \oplus U) = (-1)^{\dim V \cdot \dim U} o(U \oplus V).$$

Die letzte Relation ist im Fall $U = V$ mit Vorsicht (und Nachsicht) zu behandeln. Es sei betont, daß Orientierungen Vereinbarungen sind, und, wie auch sonst, sind Vereinbarungen wertlos, wenn sie nicht eingehalten werden. Ein linearer Isomorphismus $f: U \rightarrow V$ zwischen orientierten Vektorräumen heißt *orientierungstreu*, wenn die Orientierung u_1, \dots, u_n von U in die Orientierung fu_1, \dots, fu_n von V abgebildet wird.

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Ein differenzierbarer Atlas heißt *orientierend*, wenn je zwei Karten orientiert verbunden sind; sie heißen *orientiert verbunden*, wenn die Jacobi-Matrix des Kartenwechsels überall positive Determinante hat. Gibt es einen orientierenden Atlas für M , so wird M *orientierbar* genannt. Eine *Orientierung* von M wird festgelegt, indem ein orientierender Atlas ausgewählt wird. Die zugehörigen Karten mögen (und alle damit orientiert verbundenen) *positiv* bezüglich der Orientierung heißen. Ist ein orientierender Atlas gegeben und (U, φ, V) mit offenem $V \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte daraus, so wird durch den Diffeomorphismus

$$T_u \varphi: T_u M = T_u U \rightarrow T_{\varphi(u)} V = \mathbb{R}^n$$

und die Standardbasis des \mathbb{R}^n der Tangentialraum $T_u U$ eindeutig orientiert, indem $T_u \varphi$ als orientierungstreu postuliert wird. Zwei orientierende Atlanten definieren genau dann dieselbe Orientierung von M , wenn sie alle $T_u M$ gleichartig orientieren, wenn ihre Vereinigung also ein orientierender Atlas ist. Mit diesen Vereinbarungen können nur für Mannigfaltigkeiten positiver Dimension Orientierungen definiert werden. Eine Orientierung einer nulldimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine Funktion $\epsilon: M \rightarrow \{\pm 1\}$.

Oft wird eine Orientierung einer Mannigfaltigkeit dadurch spezifiziert, daß Orientierungen für alle $T_x M$ festgelegt werden. Es ist dann zu zeigen, daß diese Orientierungen lokal zusammenpassen, das heißt, durch eine geeignete Karte um x jeweils in dieselbe Orientierung des \mathbb{R}^n überführt werden. Wir zeigen:

(5.1) Notiz. *Eine Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn ihr Tangentialbündel orientierbar ist.*

BEWEIS. Die Bündelkarten, die aus einem orientierenden Atlas von M hervorgehen, bilden einen orientierenden Bündelatlas. Sei umgekehrt ein orientierender Bündelatlas gegeben. Wir können dann alle Karten von M betrachten, so daß die zugehörigen Bündelkarten orientiert mit dem gegebenen Bündelatlas verbunden sind. Diese bilden einen orientierenden Atlas von M . Falls nämlich zunächst eine Karte von M nicht diese Eigenschaft hat, so setzen wir mit einem orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus des \mathbb{R}^n zusammen. \square

Seien M und N orientiert. Ein Diffeomorphismus $f: M \rightarrow N$ ist *orientierungstreu*, wenn $T_x f$ für alle x die Orientierung erhält. Ist M zusammenhängend und $T_x f$ orientierungstreu für ein x so für alle.

(5.2) Notiz. Sei $D_t: M \rightarrow M$ eine Diffeotopie. Dann sind alle D_t orientierungstreu.

BEWEIS. Zum Beweis betrachten wir den Diffeomorphismus $D: M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto (D_t(x), t)$. Er ist orientierungstreu. Wir berechnen sein Differential und entnehmen daraus die Behauptung. \square

Für das Produkt gilt kanonisch

$$T_{(x,y)}(M \times N) \cong T_x M \oplus T_y N.$$

Damit wird die *Produkt-Orientierung* festgelegt. Produkte orientierungstreuer (= positiver) Karten sind orientierungstreu. Ist N ein Punkt, so ist die Projektion $M \times N \cong M$ orientierungstreu, wenn $\epsilon(N) = 1$ ist, sonst nicht.

Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist $x \in \partial M$, so gibt es eine direkte Zerlegung

$$T_x M = N_x \oplus T_x(\partial M).$$

Sei $n_x \in N_x$ ein nach außen weisender Vektor. Die *Rand-Orientierung* von $T_x(\partial M)$ wird durch eine Basis v_1, \dots, v_{n-1} definiert, für die n_x, v_1, \dots, v_{n-1} die gegebene Orientierung von M ist. Mit der Rand-Orientierung von ∂M , der Standard-Orientierung von \mathbb{R}_- und der Produkt-Orientierung von $\mathbb{R}_- \times \partial M$ ist ein Kragen $k: \mathbb{R}_- \times \partial M \rightarrow M$ orientierungstreu.

(5.3) Beispiel. In \mathbb{R}_-^n erhält $\partial \mathbb{R}_-^n = 0 \times \mathbb{R}_-^{n-1}$ die durch e_2, \dots, e_n gegebene Standard-Orientierung. Orientierungstreue Karten werden deshalb mit \mathbb{R}_-^n gebildet. \diamond

(5.4) Beispiel. Wird $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ als Rand von D^2 aufgefaßt und trägt D^2 die Standard-Orientierung des \mathbb{R}^2 , so ist ein orientierender Vektor von $T_x S^1$ in der Rand-Orientierung Geschwindigkeitsvektor einer gegen den Uhrzeiger laufenden Bewegung auf S^1 , und diesen Drehsinn bezeichnet man üblicherweise als den positiven. Für eine Untermannigfaltigkeit mit Rand $M \subset \mathbb{R}^2$, orientiert durch die Standard-Orientierung des \mathbb{R}^2 , wird eine Randkomponente durch die Rand-Orientierung so mit einem Durchlaufsinne versehen, daß M „zur linken Seite“ liegt. Ist $B \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand und bestimmt v_1, v_2 die Rand-Orientierung, so weist das Kreuzprodukt $v_1 \times v_2$ nach außen. \diamond

(5.5) Beispiel. Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und N eine ohne Rand. Die Formeln

$$o(\partial(M \times N)) = o(\partial M \times N), \quad o(\partial(N \times M)) = (-1)^{\dim N} o(N \times \partial M)$$

zeigen, wie Rand- und Produkt-Orientierungen zusammenhängen. \diamond

(5.6) Beispiel. Das Einheitsintervall $I = [0, 1]$ wird mit der Standard-Orientierung des \mathbb{R}^1 versehen. Da der nach außen weisende Vektor im Punkt 0 die negative Orientierung liefert, ist deshalb die Orientierung von ∂I durch

$\epsilon(0) = -1$, $\epsilon(1) = 1$ festzulegen. Analog verfährt man bei einer beliebigen eindimensionalen Mannigfaltigkeit.

Es ist $\partial(I \times M) = 0 \times M \cup 1 \times M$. Die Rand-Orientierung ist also auf $0 \times M \cong M$ die negative und auf $1 \times M \cong M$ die ursprüngliche, wenn $I \times M$ die Produkt-Orientierung erhält. \diamond

Ist M orientiert, so bezeichnen wir die entgegengesetzt orientierte Mannigfaltigkeit mit $-M$. Das führt zum Beispiel zu der suggestiven Formel

$$\partial(I \times M) = 1 \times M - 0 \times M.$$

Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten und A das Urbild eines regulären Wertes $y \in N$. Wir haben eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow T_a A \xrightarrow{(1)} T_a M \xrightarrow{(2)} T_y N \rightarrow 0$$

mit der Inklusion (1) und dem Differential $T_a f$ bei (2). Dadurch wird nach unseren früheren Vereinbarungen über exakte Sequenzen eine Orientierung von $T_a A$ und, wie man zeigt, eine von A festgelegt, die wir in solchen Fällen immer verwenden wollen und *Urbild-Orientierung* nennen.

(5.7) Beispiel. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_i) \mapsto \sum x_i^2$ und $S^{n-1} = f^{-1}(1)$. Die Urbild-Orientierung ist gleich der Rand-Orientierung. \diamond

Allgemeiner betrachten wir transverse Urbilder. Sei $F: M \rightarrow N$ glatt, $B \subset N$ eine glatte Untermannigfaltigkeit, F zu B transvers und $f: A = F^{-1}(B) \rightarrow B$ die Einschränkung von F . Dann haben wir ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_a A & \longrightarrow & T_a M & \longrightarrow & T_a M / T_a A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow T_a f & & \downarrow T_a F & & \downarrow \varphi & & \\ 0 & \longrightarrow & T_b B & \longrightarrow & T_b N & \xrightarrow{(1)} & T_b N / T_b B & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Nach unseren Konventionen bestimmen die Orientierungen von B und N eine von $T_b N / T_b B$. Es werde φ als orientierungstreu postuliert. Die obere Zeile orientiert dann A . Das liefert die *Urbild-Orientierung* von A . Falls B ein Punkt ist, sei (1) orientierungstreu. Dann ergibt sich die früher festgelegte Orientierung.

Ist M eine Mannigfaltigkeit mit Rand und $F|_{\partial M}$ ebenfalls transvers zu B , so ist A eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial A = (F|_{\partial M})^{-1}(B) = \partial M \cap F^{-1}(B)$. Wir haben damit zwei Orientierungen von ∂A zur Verfügung: Die Rand-Orientierung und die Urbild-Orientierung. Es gilt:

(5.8) Satz. $\partial(F^{-1}(B)) = (-1)^k (F|_{\partial M})^{-1}(B)$, mit $k = \dim N - \dim B$.

BEWEIS. Wir betrachten die Inklusionen des Diagrammes

$$\begin{array}{ccc} T_a A & \subset & T_a M \\ \cup & & \cup \\ T_a \partial A & \subset & T_a \partial M. \end{array}$$

Ist $\nu \in T_a M$ ein bezüglich A nach außen weisender Vektor, so auch bezüglich M . Sei ν, v_2, \dots, v_m die Urbild-Orientierung von $A = F^{-1}(B)$, wobei v_i aus $T_a \partial A$ gewählt sind. Sei w_1, \dots, w_k aus $N_a \subset T_a \partial M$ eine Basis des Komplements N_a von $T_a \partial A$ in $T_a \partial M$. Dann ist w_1, \dots, w_k auch eine Basis des Komplements von $T_a A$ in $T_a M$. Definitionsgemäß ist dann $w_1, \dots, w_k, \nu, v_2, \dots, v_m$ die Orientierung von M , und deshalb liefert $w_1, \dots, w_k, v_2, \dots, v_m$ das $(-1)^k$ -fache der Rand-Orientierung $o(\partial M)$. Folglich liefert v_2, \dots, v_m das $(-1)^k$ -fache der Urbild-Orientierung von $(F|_{\partial M})^{-1}(B)$. Dagegen ist v_2, \dots, v_m die Rand-Orientierung von $\partial(F^{-1}(B))$. \square

Sei A nulldimensional und kompakt und durch $\epsilon: A \rightarrow \{\pm 1\}$ orientiert. Wir setzen $e(A) = \sum_{a \in A} \epsilon(a)$.

(5.9) Satz. *Sei B eine eindimensionale orientierte kompakte Mannigfaltigkeit. Trägt ∂B die Rand-Orientierung, so gilt $e(\partial B) = 0$.*

BEWEIS. Eine Komponente von B mit nicht-leerem Rand ist diffeomorph zu $[0, 1]$, und für $[0, 1]$ ist die Aussage wegen (5.6) klar. \square

Seien A und B glatte Untermannigfaltigkeiten von M mit transversalem Schnitt und seien A , B und M orientiert. Dann ist auch $A \cap B$ orientierbar, und es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Orientierung festzulegen. Sei $c \in A \cap B$ und

$$N_c A \oplus T_c A = T_c M = N_c B \oplus T_c B.$$

Dann ist

$$N_c A \oplus N_c B \oplus T_c(A \cap B) = T_c M.$$

Die Orientierungen von A , B und M legen Orientierungen von $N_c A$ und $N_c B$ fest und die letzte Gleichung damit eine Orientierung $o(A \cap B; A, B)$ von $A \cap B$. Gehen wir ebenso von B, A aus, so ergibt sich

$$(5.10) \quad o(A \cap B; A, B) = (-1)^{(dM-dA)(dM-dB)} o(B \cap A; B, A)$$

mit der Abkürzung $dA = \dim(A)$. Ist $A \cap B$ nulldimensional, so erhält jeder Schnittpunkt ein Vorzeichen, und wir nennen die Summe der Vorzeichen

$$s(A, B) = e(o(A \cap B; A, B))$$

die *Schnittzahl* von (A, B) in M . Wegen (5.10) gilt dann

$$s(A, B) = (-1)^{dA \cdot dB} s(B, A).$$

Wegen (5.1) beschäftigen wir uns nun genauer mit Orientierungen von Vektorraumbündeln.

Schon in VI.1 haben wir Orientierungen von Bündeln definiert. Wir erinnern daran. Eine *Orientierung* eines reellen n -dimensionalen Vektorraumbündels $\xi: E \rightarrow B$ ist eine Familie von Orientierungen aller Fasern ξ_b mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt um jeden Punkt eine (*orientierungstreu* genannte) Bündelkarte $\varphi: \xi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, die die Orientierung von ξ_b für $b \in U$ in die Standard-Orientierung des \mathbb{R}^n transportiert ($n \geq 1$). Falls ξ eine Orientierung besitzt, heißt ξ *orientierbar*.

Sei ξ orientiert. Die Kartenwechsel aller orientierungstreuen Bündelkarten haben faserweise positive Determinante und liefern deshalb ein $GL(n, \mathbb{R})_+$ -Prinzipalbündel, zu dem ξ assoziiert ist. Ein Vektorraumbündel ist genau dann orientierbar, wenn es zu einem $GL(n, \mathbb{R})_+$ -Prinzipalbündel vermöge der Darstellung $GL(n, \mathbb{R})_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(A, x) \mapsto Ax$ assoziiert ist.

Die n -te äußere Potenz $\Lambda^n \xi$ eines n -dimensionalen Bündels ξ ist ein Geradenbündel.

(5.11) Satz. *Das numerierbare n -dimensionale Bündel ξ ist genau dann orientierbar, wenn $\Lambda^n \xi$ trivial ist.*

BEWEIS. Aus einer Bündelkarte $\varphi: \xi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ von ξ erhalten wir eine induzierte Bündelkarte

$$\varphi^{(n)}: (\Lambda^n \xi)^{-1}(U) \rightarrow U \times \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$$

von $\Lambda^n \xi$. Durch Zurückziehen des Elementes $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ in jede Faser wird ein Schnitt s_U von $\Lambda^n \xi$ über U geliefert. Ist ξ orientiert, so unterscheiden sich zwei aus orientierungstreuen Karten entstehende Schnitte s_U und s_V über $U \cap V$ multiplikativ um eine positive Funktion. Ist $(U_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung von B , numeriert durch die Partition der Eins $(\tau_j \mid j \in J)$, und ist s_j ein Schnitt von $\Lambda^n \xi$ über U_j zu einer orientierungstreuen Bündelkarte, so ist $s = \sum_{j \in J} \tau_j s_j$ ein überall von Null verschiedener Schnitt, der $\Lambda^n \xi$ als trivial erweist.

Ist umgekehrt $\Lambda^n \xi$ trivial, so wählen wir einen Schnitt $s: B \rightarrow E(\Lambda^n \xi)$ ohne Nullstellen. Das Element $s(b)$ liefert dann in jeder Faser eine Orientierung und diese Orientierungen bestimmen eine Orientierung von ξ . \square

Die multiplikative Gruppe \mathbb{R}_+^* operiert durch faserweise Skalarmultiplikation auf $E_0(\Lambda^n \xi)$, dem Komplement des Nullschnittes in $E(\Lambda^n \xi)$. Die Bündelprojektion $E_0(\Lambda^n \xi) \rightarrow B$ induziert eine Abbildung $q: \text{Or}(\xi) \rightarrow B$ des Orbitraumes $\text{Or}(\xi)$ dieser Operation nach B , die eine zweifache Überlagerung von B ist, die wir *Orientierungsüberlagerung* von ξ nennen. Wir notieren:

(5.12) Satz. *Genau dann ist ξ orientierbar, wenn die Orientierungsüberlagerung trivial ist. Die Schnitte von $\text{Or}(\xi) \rightarrow B$ entsprechen der Orientierung von ξ .* \square

In einer Whitney-Summe $\zeta = \xi \oplus \eta$ ist mit zwei Bündel auch das dritte orientierbar. Eine Orientierung von zweien bestimmt eindeutig eine des dritten, indem wir faserweise wie bei Vektorräumen vorgehen.

Ist $q: X \rightarrow B$ eine zweifache Überlagerung, so liefert die Vertauschung der Blätter eine Operation von $G = \mathbb{Z}/2$ auf X , die q zu einem G -Prinzipalbündel macht. Ist $Q: E \rightarrow X$ das durch q von q induzierte Bündel, so hat Q einen kanonischen Schnitt s , der nach der universellen Eigenschaft des Pullbacks der Identität von X entspricht. (Das gilt für beliebige Prinzipalbündel.) Ist B eine glatte Mannigfaltigkeit und q die Orientierungsüberlagerung, so ist X selbst eine

glatte Mannigfaltigkeit und q eine Submersion. Durch das Differential von q wird die Orientierungsüberlagerung von X in diejenige von B abgebildet. Deshalb ist in diesem Fall $Q: E \rightarrow X$ isomorph zur Orientierungsüberlagerung von X . Da Q trivial ist, ist X orientierbar.

Sei $q: X \rightarrow B$ eine triviale zweifache Überlagerung. Die Gruppe Γ operiere auf X und B durch Automorphismen von q , und zwar lokal trivial auf B . Dann ist $q/\Gamma: X/\Gamma \rightarrow B/\Gamma$ eine zweifache Überlagerung. Sie ist genau dann trivial, wenn die Operation von Γ die Blätter nicht vertauscht. Ist $\xi: E \rightarrow B$ ein Γ -Vektorraumbündel mit freier, lokal trivialer Γ -Operation auf B , so induziert die Bündelabbildung $E \rightarrow E/\Gamma$ einen Morphismus von $\text{Or}(\xi)$ nach $\text{Or}(\xi/\Gamma)$ und $\text{Or}(\xi)/\Gamma$ ist isomorph zu $\text{Or}(\xi/\Gamma)$. Ist ξ orientierbar, so ist folglich ξ/Γ genau dann orientierbar, wenn Γ orientierungstreu auf ξ operiert. Wir heben dieses Ergebnis für Mannigfaltigkeiten hervor. Im folgenden Satz benutzen wir zusätzlich den Isomorphismus $(TM)/\Gamma \cong T(M/\Gamma)$.

(5.13) Satz. *Die diskrete Gruppe Γ operiere frei, eigentlich und glatt auf der orientierbaren Mannigfaltigkeit M . Dann ist M/Γ genau dann orientierbar, wenn Γ orientierungstreu operiert.* \square

Insbesondere sehen wir, daß $\mathbb{R}P^n$ genau dann orientierbar ist, wenn n ungerade ist. Die antipodische Involution auf TS^n wird nämlich nach Addition des trivialen $\mathbb{Z}/2$ -Bündels $S^n \times \mathbb{R} \rightarrow S^n$ wie im Beweis von (11.3) in das Bündel $S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S^n$ mit Involution $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ überführt. Also ist die antipodische Involution auf S^n und \mathbb{R}^{n+1} gleichzeitig orientierungstreu.

Um Orbitmannigfaltigkeiten nach positiv-dimensionalen Lieschen Gruppen G zu untersuchen, gehen wir von der Gleichung

$$T(M/G) \oplus M \times_G L(G) \cong (TM)/G$$

des Satzes (11.5) aus. Operiert G orientierungstreu auf M , ist also $(TM)/G$ orientierbar, so ist M/G genau dann orientierbar, wenn $M \times_G L(G)$ orientierbar ist (siehe dazu Aufgabe 1).

Die Frage nach der Orientierbarkeit läßt sich auch auf der Ebene der klassifizierenden Räume behandeln.

Ein numerierbares n -dimensionales reelles Vektorraumbündel $\xi: E \rightarrow B$ ist zu einem $O(n)$ -Prinzipalbündel assoziiert und durch eine klassifizierende Abbildung $f: B \rightarrow BO(n)$ bestimmt. Eine Orientierung von ξ ist durch die Wahl eines $SO(n)$ -Prinzipalbündels gegeben, zu dem ξ assoziiert ist. Das Prinzipalbündel wird aus den Kartenwechseln orientierungstreuer Bündelkarten wie in Abschnitt VI.3 konstruiert. Sei

$$p: BSO(n) \rightarrow BO(n)$$

die kanonische Abbildung, die zu der Inklusion $SO(n) \rightarrow O(n)$ gehört. Sie läßt sich als die Orbitabbildung $EO(n)/SO(n) \rightarrow EO(n)/O(n)$ gewinnen und ist ein Prinzipalbündel mit Strukturgruppe $O(n)/SO(n) \cong \mathbb{Z}/2$, eine zweifache Überlagerung, nämlich die Orientierungsüberlagerung des universellen n -dimensionalen Vektorraumbündels über $BO(n)$. Die Orientierungsüberlagerung

von ξ wird durch f von der Überlagerung p induziert und p selbst hat eine klassifizierende Abbildung $q: BO(n) \rightarrow B\mathbb{Z}/2$. Die klassifizierende Abbildung der Orientierungsüberlagerung von ξ liefert ein Element

$$w_1(\xi) \in [B, B(\mathbb{Z}/2)] = [B, K(\mathbb{Z}/2, 1)] = H^1(B; \mathbb{Z}/2)$$

und wird erste *Stiefel-Whitney-Klasse* von ξ genannt. (Wir benutzen hier die Gleichung $B(\mathbb{Z}/2) = K(\mathbb{Z}/2, 1)$ aus VI.2 und die homotopische Definition der Kohomologie durch Eilenberg-MacLane-Räume. Siehe auch das Kapitel über charakteristische Klassen.) Wegen $\mathbb{Z}/2 \cong O(1)$ ist $w_1(\xi)$ auch das klassifizierende Element von $\Lambda^n \xi$. In dieser Terminologie ist also ein Bündel genau dann orientierbar, wenn seine erste Stiefel-Whitney Klasse gleich Null ist. Die Orientierungen des durch $f: B \rightarrow BO(n)$ gegebenen Bündels entsprechen den Abbildungen $F: B \rightarrow BSO(n)$, die $p \circ F = f$ erfüllen, die also f hochheben. Zu diesen Aussagen vergleiche man VI.2, wo ein Faserbündel $BO(n) \rightarrow B(O(n)/SO(n))$ mit Faser $BSO(n)$ konstruiert wird, und die zugehörige exakte Homotopiesequenz einer Faserung.

Eine *Volumenform* auf einer glatten n -Mannigfaltigkeit ist ein Schnitt $M \rightarrow \Lambda^n TM^*$ ohne Nullstellen. Da ein Bündel genau dann trivial ist, wenn dieses für sein duales Bündel der Fall ist, so sehen wir: M hat genau dann eine Volumenform, wenn M orientierbar ist.

Ist η ein komplexes Vektorraumbündel und $\xi = \eta_{\mathbb{R}}$ das zugrundeliegende reelle Bündel, so trägt ξ eine kanonische Orientierung, nämlich durch die kanonische Orientierung in jeder Faser. Aus der Gleichheit $SO(2) = U(1)$ folgt: Ein zweidimensionales reelles Bündel ξ ist genau dann orientierbar, wenn es zu einem Bündel der Form $\eta_{\mathbb{R}}$ isomorph ist.

7 Bordismus

1 Bordismus

Der intuitive Sinn einer Homologietheorie läßt sich wohl am einfachsten mit Hilfe von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und der Bordismus-Relation erläutern. Dieser Abschnitt ist der Definition von Bordismus-Homologietheorien gewidmet.

Die Beziehung zwischen Mannigfaltigkeiten und ihren Rändern ist für die Topologie von grundsätzlicher Bedeutung. Formalisiert wird diese Beziehung im Begriff des Bordismus. Obgleich in den ersten Arbeiten von Poincaré [?] zur algebraischen Topologie der Bordismusbegriff implizit in der Definition der Homologie vorkommt, wird eigentlich erst durch Thom [?] die Bordismustheorie etabliert. Thom spricht von „cobordism“. Er war nur an den Mannigfaltigkeiten an sich interessiert. Später haben Conner und Floyd [?] mit Hilfe der Thomschen cobordism-Relation eine Homologietheorie definiert und auch die zugehörige Kohomologietheorie betrachtet. Um die Terminologie an die Homologietheorie anzugleichen, ist dann die Vorsilbe „co“ weggelassen worden.

Wir definieren in diesem Abschnitt die Thomsche Bordismus-Relation und konstruieren in Anlehnung an Conner und Floyd die zugehörige Homologietheorie. Mannigfaltigkeiten seien im folgenden immer glatt.

Sei X ein topologischer Raum. Eine n -dimensionale *singuläre Mannigfaltigkeit* in X ist ein Paar (B, F) , das aus einer kompakten n -dimensionalen Mannigfaltigkeit B und einer stetigen Abbildung $F: B \rightarrow X$ besteht. Die singuläre Mannigfaltigkeit $\partial(B, F) = (\partial B, F|_{\partial B})$ heißt *Rand* von (B, F) . Ist $\partial B = \emptyset$, so heißt (B, F) *geschlossen*.

Man spricht von singulären Mannigfaltigkeiten, weil selbst wenn X eine Mannigfaltigkeit ist, F im allgemeinen keine Einbettung ist, das Bild $F(B)$ also Singularitäten hat. Die Terminologie ist historisch bedingt und aus der kombinatorischen Topologie entstanden („singuläre Simplexe“).

Ein *Nullbordismus* der geschlossenen singulären Mannigfaltigkeit (M, f) in X ist ein Tripel (B, F, φ) , das aus einer singulären Mannigfaltigkeit (B, F) in X und einem Diffeomorphismus $\varphi: M \rightarrow \partial B$ besteht, so daß $(F|_{\partial B}) \circ \varphi = f$ ist. Gibt es einen Nullbordismus von (M, f) , so heißt (M, f) *nullbordant*.

Sind (M_1, f_1) und (M_2, f_2) singuläre Mannigfaltigkeiten in X gleicher Dimension, so bezeichnen wir mit $(M_1, f_1) + (M_2, f_2)$ die singuläre Mannigfaltigkeit $(f_1, f_2): M_1 + M_2 \rightarrow X$, wobei $(f_1, f_2)|_{M_i} = f_i$ ist. Mit „Plus“ ist hier die disjunkte Summe gemeint. Wir nennen (M_1, f_1) und (M_2, f_2) *bordant*, wenn $(M_1, f_1) + (M_2, f_2)$ nullbordant ist. Ein Nullbordismus von $(M_1, f_1) + (M_2, f_2)$ wird *Bordismus* zwischen (M_1, f_1) und (M_2, f_2) genannt. Der Rand ∂B eines Bordismus (B, F, φ) zwischen (M_1, f_1) und (M_2, f_2) besteht also aus einer disjunkten Summe $\partial_1 B + \partial_2 B$, und φ zerfällt in zwei Diffeomorphismen $\varphi_i: M_i \rightarrow \partial_i B$.

(1.1) Satz. „Bordant“ ist eine Äquivalenzrelation.

BEWEIS. Ist (M, f) gegeben, so setzen wir $B = M \times I$ und $F = f \circ \text{pr}: M \times I \rightarrow M \rightarrow X$. Dann ist $\partial B = M \times 0 + M \times 1$ kanonisch diffeomorph zu $M + M$, und (B, F) ist ein Bordismus zwischen (M, f) und (M, f) . Die Symmetrie der Relation folgt unmittelbar aus der Definition. Sei $(B, F, \varphi_i: M_i \rightarrow \partial_i B)$ ein Bordismus zwischen (M_1, f_1) und (M_2, f_2) und $(C, G, \psi_i: M_i \rightarrow \partial_i C)$ einer zwischen (M_2, f_2) und (M_3, f_3) . Es werde in $B + C$ das Stück $\partial_2 B$ mit $\partial_2 C$ vermöge $x \sim \psi_2 \varphi_2^{-1}(x)$ für $x \in \partial_2 B$ identifiziert. Das Resultat D trägt eine glatte Struktur, bezüglich der die kanonischen Abbildungen $B \rightarrow D \leftarrow C$ Einbettungen sind (siehe I.7). Die Abbildung $(F, G): B + C \rightarrow X$ läßt sich wegen

$$(F|_{\partial_2 B}) \circ \varphi_2 = f_2 = (G|_{\partial_2 C}) \circ \psi_2$$

über die Quotientabbildung $B + C \rightarrow D$ mittels H faktorisieren. Demnach ist $(D, H, (\varphi_1, \psi_3))$ ein Bordismus von (M_1, f_1) nach (M_3, f_3) . \square

Sei $[M, f]$ die Bordismenklasse von (M, f) und $N_n(X)$ die Menge der Bordismenklassen n -dimensionaler geschlossener singulärer Mannigfaltigkeiten in X . In der Menge $N_n(X)$ definieren wir eine assoziative und kommutative Verknüpfung durch $[M, f] + [N, g] = [M + N, (f, g)]$. Die Wohldefiniertheit ist leicht einzusehen.

(1.2) Satz. $(N_n(X), +)$ ist eine abelsche Gruppe. Jedes Element hat die Ordnung höchstens 2.

BEWEIS. Die Klasse einer nullbordanten Mannigfaltigkeit dient als Nullelement, zum Beispiel die konstante Abbildung $S^n \rightarrow X$. (Es ist an dieser Stelle zweckmäßig, auch die leere Menge als n -dimensionale Mannigfaltigkeit zuzulassen!) Für jedes (M, f) ist $(M + M, (f, f))$ nullbordant, also gilt $[M, f] + [M, f] = 0$. \square

Ist P ein Punkt, so gibt es genau eine Abbildung $M \rightarrow P$. Diese kann man selbstverständlich einfach weglassen. Dann wird man auf die ursprünglich von Thom untersuchten Bordismengruppen N_n n -dimensionaler Mannigfaltigkeiten geführt.

Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ induziert einen Homomorphismus

$$N_n(f) = f_*: N_n(X) \rightarrow N_n(Y), \quad [M, g] \mapsto [M, fg].$$

Damit wird $N_n(-)$ ein Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen. Der Funktor ist homotopieinvariant: Sind f und g homotop, so ist $N_n(f) = N_n(g)$. Ist nämlich $F: X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von f nach g , so ist $(M \times I, F \circ (h \times \text{id}))$ ein Bordismus zwischen $[M, fh]$ und $[M, gh]$. Falls X leer ist, betrachten wir $N_n(X)$ als die Nullgruppe.

(1.3) Beispiel. Eine nulldimensionale kompakte Mannigfaltigkeit M ist eine endliche Menge von Punkten. Also läßt sich ein nulldimensionales (M, f) als eine Familie (x_1, \dots, x_r) von Punkten aus X auffassen. Punkte $x, y \in X$ sind genau dann bordant, wenn sie in derselben Wegekomponente liegen. Also ist $N_0(X)$ isomorph zum freien $\mathbb{Z}/2$ -Vektorraum über der Menge $\pi_0(X)$ der Wegekomponenten von X . \diamond

(1.4) Beispiel. Sei $h: K \rightarrow L$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt $[L, g] = [K, gh]$.

BEWEIS. Man betrachtet den Bordismus $g \circ \text{pr}: L \times I \rightarrow X$; auf dem Randteil $L \times 1$ verwenden wir den kanonischen Diffeomorphismus zu L , auf dem Randteil $L \times 0$ setzen wir den kanonischen Diffeomorphismus zu L mit h zusammen. Dieses Beispiel erlaubt es uns meist, statt mit einer zu ∂B diffeomorphen Mannigfaltigkeit mit ∂B selbst zu arbeiten. \square

Gewisse formale Eigenschaften der Funktoren $N_n(-)$ machen diese zu einer Homologietheorie. Wir definieren Homologietheorien im nächsten Abschnitt axiomatisch. Hier sollen die relevanten Eigenschaften der Bordismenfunktoren bereitgestellt werden.

Sei X Vereinigung der offenen Teilmengen X_0 und X_1 . Wir konstruieren einen Homomorphismus

$$\partial: N_n(X) \rightarrow N_{n-1}(X_0 \cap X_1).$$

Sei $[M, f] \in N_n(X)$. Die Mengen $M_i = f^{-1}(X \setminus X_i)$ sind dann disjunkte abgeschlossene Teilmengen von M . Dafür gilt:

(1.5) Lemma. *Es gibt eine differenzierbare Funktion $\alpha: M \rightarrow [0, 1]$ mit den Eigenschaften:*

- (1) $M_i \subset \alpha^{-1}(i)$ für $i \in \{0, 1\}$.
- (2) $\frac{1}{2}$ ist regulärer Wert von α .

BEWEIS. Da M ein kompakter metrischer Raum ist, gibt es eine stetige Funktion $\gamma: M \rightarrow [0, 1]$, so daß $\gamma^{-1}(j)$ eine Umgebung von M_j ist. Da γ in einer Umgebung von $M_0 \cup M_1$ differenzierbar ist, gibt es nach (??) eine differenzierbare Abbildung α , die (1) erfüllt. Sie hat in beliebiger Umgebung von $\frac{1}{2}$ reguläre Werte. Indem man einen geeigneten Diffeomorphismus $I \rightarrow I$ nachschaltet, kann $\frac{1}{2}$ als regulärer Wert erzwungen werden. \square

Wir nennen eine Abbildung α mit den in (1.5) genannten Eigenschaften eine *trennende Funktion* für (M, f) . Ist α eine trennende Funktion, so ist $M_\alpha = \alpha^{-1}(\frac{1}{2})$ eine geschlossene Untermannigfaltigkeit von M der Dimension $n - 1$ (oder leer), und f induziert durch Einschränkung $f_\alpha: M_\alpha \rightarrow X_0 \cap X_1$.

Ist $t \neq 0, 1$ irgendein anderer regulärer Wert von α , so sind $\alpha^{-1}(t)$ und $\alpha^{-1}(\frac{1}{2})$ vermöge $\alpha^{-1}[\frac{1}{2}, t]$ bordant. Die Auswahl des Wertes $\frac{1}{2}$ ist also unwesentlich. Unter $[M_\alpha, f_\alpha]$ verstehen wir deshalb ein mit irgendeinem regulären Wert t von α gebildetes $M_\alpha = \alpha^{-1}(t)$.

(1.6) Lemma. *Sei $[K, f] = [L, g] \in N_n(X)$ und seien α, β trennende Funktionen für $(K, f), (L, g)$. Dann ist $[K_\alpha, f_\alpha] = [L_\beta, g_\beta]$.*

BEWEIS. Sei (B, F) ein Bordismus zwischen (K, f) und (L, g) . Es gibt eine differenzierbare Funktion $\gamma: B \rightarrow [0, 1]$ mit den Eigenschaften:

$$\gamma|_K = \alpha, \quad \gamma|_L = \beta, \quad F^{-1}(X \setminus X_j) \subset \gamma^{-1}(j).$$

Wir wählen einen regulären Wert t für γ und $\gamma|_{\partial B}$ und erhalten in $\gamma^{-1}(t)$ einen Bordismus zwischen einem K_α und einem L_β . \square

Mit Lemma (1.6) erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$(1.7) \quad \partial: N_n(X) \rightarrow N_{n-1}(X_0 \cap X_1), \quad [M, f] \mapsto [M_\alpha, f_\alpha].$$

Sie ist offenbar ein Homomorphismus. Wir bezeichnen mit $j^\nu: X_0 \cap X_1 \rightarrow X_\nu$ und $k^\nu: X_\nu \rightarrow X$ die Inklusionen. Dann gilt:

(1.8) **Satz.** *Die folgende Sequenz ist exakt.*

$$\dots \xrightarrow{\partial} N_n(X_0 \cap X_1) \xrightarrow{j} N_n(X_0) \oplus N_n(X_1) \xrightarrow{k} N_n(X) \xrightarrow{\partial} \dots$$

Darin ist $j(x) = (j_*^0(x), j_*^1(x))$ und $k(y, z) = k_*^0 y - k_*^1 z$. Die Sequenz endet mit $\xrightarrow{k} N_0(X) \rightarrow 0$.

BEWEIS. (1) Exaktheit an der Stelle $N_{n-1}(X_0 \cap X_1)$. Sei $[M, f] \in N_n(X)$ gegeben. Dann wird M durch M_α in die Teile $B_0 = \alpha^{-1}[0, \frac{1}{2}]$ und $B_1 = \alpha^{-1}[\frac{1}{2}, 1]$ mit gemeinsamem Rand M_α zerlegt. Durch f wird B_0 nach X_1 abgebildet, so daß $j_*^1 \partial[M, f]$ durch B_0 in $N_{n-1}(X_1)$ als Nullelement erkannt wird. Damit ist $j \circ \partial = 0$ gezeigt.

Ist umgekehrt $j(K, f) = 0$, so gibt es singuläre Mannigfaltigkeiten (B_i, F_i) in X_i mit $\partial B_0 = K = \partial B_1$ und $F_0|K = f = F_1|K$. Man identifiziert B_0 und B_1 längs K zu M ; die Abbildungen F_0 und F_1 schließen sich dann zu $F: M \rightarrow X$ zusammen. Auf M gibt es eine trennende Funktion α mit $M_\alpha = K$; mit Kragen von K in B_0 und B_1 erhält man eine Einbettung $K \times [0, 1] \subset M$, die $K \times \{\frac{1}{2}\}$ identisch auf $K \subset M$ abbildet; und dann wählt man α so, daß $\alpha(k, t) = t$ ist für $k \in K$, $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}$. Nach Konstruktion ist $\partial[M, F] = [K, f]$.

(2) Exaktheit an der Stelle $N_n(X_0) \oplus N_n(X_1)$. Nach Definition ist $k \circ j = 0$. Sei $x_i = [M_i, f_i] \in N_n(X_i)$ gegeben. Ist $k(x_0, x_1) = 0$, so gibt es einen Bordismus (B, F) zwischen $(M_0, k^0 f_0)$ und $(M_1, k^1 f_1)$. Wir wählen eine differenzierbare Funktion $\psi: B \rightarrow [0, 1]$ mit den Eigenschaften:

(1) $F^{-1}(X \setminus X_i) \cup M_i \subset \psi^{-1}(i)$ für $i = 0, 1$.

(2) ψ hat den regulären Wert $\frac{1}{2}$.

Sei $(N, f) = (\psi^{-1}(\frac{1}{2}), F|_{\psi^{-1}(\frac{1}{2})})$. Dann ist $(\psi^{-1}[0, \frac{1}{2}], F|_{\psi^{-1}[0, \frac{1}{2}]})$ ein Bordismus zwischen (N, f) und (M_1, f_1) in X_1 ; entsprechendes gilt für (M_0, f_0) . Daraus sieht man $j[N, f] = (x_0, x_1)$.

(3) Exaktheit an der Stelle $N_n(X)$. Es gilt $\partial \circ k = 0$, weil man zu $(M_0, k^0 f_0) + (M_1, k^1 f_1)$ eine trennende Funktion $\alpha: M_0 + M_1 \rightarrow [0, 1]$ finden kann, für die $\alpha^{-1}(\frac{1}{2})$ leer ist.

Sei umgekehrt α eine trennende Funktion für (M, f) in X und (B, f) ein Nullbordismus von (M_α, f_α) in $X_0 \cap X_1$. Wir zerteilen M längs M_α in die beiden Mannigfaltigkeiten $B_1 = \alpha^{-1}[0, \frac{1}{2}]$ und $B_0 = \alpha^{-1}[\frac{1}{2}, 1]$ mit $\partial B_1 = M_\alpha = \partial B_0$. Sodann identifizieren wir B und B_0 bzw. B und B_1 längs $M_\alpha = K$ und erhalten

$$(M_i, f_i) = (B_i \cup_K B, (f|_{B_i}) \cup F) \text{ in } X_i.$$

Wenn wir zeigen, daß in $N_n(X)$ die Gleichung $[M_0, f_0] + [M_1, f_1] = [M, f]$ gilt, so ist damit die Exaktheit gezeigt. Zum Beweis der Gleichheit identifizieren wir in

$M_0 \times I + M_1 \times I$ jeweils in $M_0 \times 1$ und $M_1 \times 1$ die Teile $B \times 1$. Die resultierende Mannigfaltigkeit $L = (M_0 \times I) \cup_{B \times 1} (M_1 \times I)$ hat den Rand $(M_0 + M_1) + M$. Eine geeignete Abbildung $F: L \rightarrow X$ wird durch $(f_0, f_1) \circ \text{pr}_1: (M_0 + M_1) \times I \rightarrow X$ induziert. Für die differenzierbare Struktur auf L siehe ??.

Wir definieren nun relative Bordismengruppen $N_n(X, A)$ für Raumpaare (X, A) . Elemente von $N_n(X, A)$ werden durch Abbildungen $f: (M, \partial M) \rightarrow (X, A)$ einer kompakten n -Mannigfaltigkeit M repräsentiert. Wir nennen wiederum $(M, \partial M; f)$ eine singuläre Mannigfaltigkeit in (X, A) . Die Bordismenrelation ist in diesem Fall etwas komplizierter. Ein *Bordismus* zwischen (M_0, f_0) und (M_1, f_1) ist ein Paar (B, F) mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) B ist eine kompakte $(n+1)$ -Mannigfaltigkeit mit Rand.
- (2) ∂B ist Vereinigung dreier Untermannigfaltigkeiten mit Rand M_0, M_1 und M' , wobei $\partial M' = \partial M_0 + \partial M_1$, $M_i \cap M' = \partial M_i$.
- (3) $F|_{M_i} = f_i$.
- (4) $F(M') \subset A$.

Wir nennen (M_0, f_0) und (M_1, f_1) *bordant*, wenn es einen Bordismus zwischen ihnen gibt. Den Nachweis, daß eine Äquivalenzrelation vorliegt, führt man mit Hilfe von (?). Die Summe wird wieder durch disjunkte Vereinigung induziert. Jedes Element in $N_n(X, A)$ hat höchstens die Ordnung 2. Eine stetige Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, das heißt $f: X \rightarrow Y$ mit $f(A) \subset B$, induziert einen Homomorphismus $N_n(f) = f_*: N_n(X, A) \rightarrow N_n(Y, B)$ wie im absoluten Fall durch Nachschalten. Sind f_0 und f_1 als Abbildungen von Raumpaaren homotop, so gilt $N_n(f_0) = N_n(f_1)$. Die Zuordnung $[M, f] \mapsto [\partial M, f|_{\partial M}]$ induziert einen Homomorphismus $\partial: N_n(X, A) \rightarrow N_{n-1}(A)$. Ist $A = \emptyset$, so ist $N_n(X, \emptyset) = N_n(X)$.

(1.9) Seien $i: A \subset X$ und $j: X = (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ die Inklusionen. Dann ist die folgende Sequenz exakt.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial} & N_n(A) & \xrightarrow{i_*} & N_n(X) & \xrightarrow{j_*} & N_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \dots \\ & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & N_0(A) & \xrightarrow{i_*} & N_0(X) & \xrightarrow{j_*} & N_0(X, A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Zum Beweis benötigen wir:

(1.10) Lemma. Sei M eine geschlossene n -Mannigfaltigkeit und $V \subset M$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Ist $f: M \rightarrow X$ eine Abbildung, die $M \setminus V$ nach A abbildet, so gilt $[M, f] = [V, f|_V]$ in $N_n(X, A)$.

BEWEIS. Wir betrachten $F: M \times I \rightarrow X$, $(x, t) \mapsto f(x)$. Dann ist $\partial(M \times I) = M \times \partial I$ und $V \times 1 \cup M \times 0$ eine Untermannigfaltigkeit von $\partial(M \times I)$, deren Komplement bei F nach A abgebildet wird. Die Definition der Bordismenrelation liefert die Behauptung. \square

BEWEIS von (1.9). (1) Exaktheit bei $N_n(A)$. Unmittelbar aus den Definitionen folgt $i_* \circ \partial = 0$. Sei (B, F) in X ein Nullbordismus von $f: M \rightarrow A$. Dann gilt

$$\partial[B, F] = [M, f].$$

(2) Exaktheit bei $N_n(X)$. Sei $[M, f] \in N_n(A)$ gegeben. Wählen wir $V = \emptyset$ in (1.10), so folgt $[M, f] = 0$ in $N_n(X, A)$. Damit ist $j_*i_* = 0$ gezeigt.

Sei $j_*[M, f] = 0$. Ein Nullbordismus von $[M, f]$ in (X, A) ist ein Bordismus von (M, f) in X zu (K, g) mit $g(K) \subset A$. Ein solcher Bordismus zeigt $i_*[K, g] = [M, f]$.

(3) Exaktheit bei $N_n(X, A)$. Unmittelbar aus den Definitionen folgt $\partial \circ i_* = 0$. Sei $\partial[M, f] = 0$. Sei $[B, F]$ ein Nullbordismus von $(\partial M, f|_{\partial M})$. Wir identifizieren (M, f) und (B, f) längs ∂M und erhalten (C, g) . Hilfssatz (1.10) zeigt $j_*[C, g] = [M, f]$. \square

Eine grundlegende Eigenschaft der relativen Gruppen ist der *Ausschneidungssatz*. Ein Beweis mittels singulärer Mannigfaltigkeiten ist möglich. Wir verweisen jedoch auf die axiomatischen Untersuchungen zur Homologie, wo gezeigt wird, wie er aus den anderen Eigenschaften folgt.

(1.11) Satz. *Die Inklusion $i: (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ induziert einen Isomorphismus $i_*: N_n(X \setminus U, A \setminus U) \cong N_n(X, A)$, sofern $\bar{U} \subset A^\circ$.* \square

Der Bordismus-Begriff läßt sich auf Mannigfaltigkeiten mit zusätzlicher Struktur erweitern. Wichtig sind insbesondere orientierte Mannigfaltigkeiten.

Seien M_0 und M_1 geschlossene glatte orientierte n -Mannigfaltigkeiten. Ein *orientierter Bordismus* zwischen M_0, M_1 ist eine glatte kompakte orientierte $(n+1)$ -Mannigfaltigkeit B mit orientiertem Rand ∂B zusammen mit einem orientierungstreuen Diffeomorphismus $\varphi: M_1 - M_0 \rightarrow \partial B$. Hier sind die Konventionen über die Rand-Orientierung aus (??) zu beachten. Mit $M_1 - M_0$ ist die disjunkte Summe der Mannigfaltigkeiten M_1 und M_0 gemeint, wobei M_1 die ursprüngliche und $-M_0$ die entgegengesetzte Orientierung trägt. Mit diesen Konventionen bestätigt man wie für (1.1), daß „orientiert bordant“ eine Äquivalenzrelation ist (siehe dazu Aufgabe 3.). Analog behandelt man singuläre orientierte Mannigfaltigkeiten und definiert damit eine Bordismengruppe $\Omega_n(X)$. Natürlich hat jetzt nicht mehr jedes Element die Ordnung 2. Für einen Punkt P gilt $\Omega_0(P) = \mathbb{Z}$, $\Omega_i(P) = 0$ für $1 \leq i \leq 3$. Die Aussage über Ω_1 folgt, weil S^1 ein orientierter Rand ist; die bekannte Klassifikation der orientierten Flächen als Sphäre mit Henkeln zeigt, daß orientierte Flächen orientierte Ränder sind. Es ist eine bemerkenswerte Tatsache, daß auch $\Omega_3(P) = 0$ ist: Jede orientierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist ein orientierter Rand; für einen Beweis dieses Satzes von Rohlin siehe [?]; er folgt auch aus [?] und [?].

Die exakten Sequenzen (1.8) und (1.9) sowie Satz (1.11) gelten entsprechend für die Ω -Gruppen. In der Definition des Randoperators $\partial: \Omega_n(X, A) \rightarrow \Omega_{n-1}(A)$ verwendet man die Randorientierung.

Die Berechnung der Thomschen Bordismenringe N_* und Ω_* gehört zu den großen Leistungen der algebraischen Topologie. Wir geben dazu zwei Ergebnisse an: N_* ist ein Polynomring über $\mathbb{Z}/2$ mit einem Erzeugenden u_i in jeder Dimension $i \neq 2^j - 1$, und $\Omega \otimes \mathbb{Q}$ ist ein Polynomring über \mathbb{Q} in Elementen, die durch die komplexen projektiven Räume $\mathbb{C}P^{2n}$ repräsentiert werden.

(1.12) Aufgaben und Ergänzungen.

1. $\Omega_0(X)$ ist kanonisch isomorph zur freien abelschen Gruppe über $\pi_0(X)$.
2. Indem man zwei orientierten singulären Mannigfaltigkeiten ihr Produkt mit Produktorientierung zuordnet und ?? beachtet, erhält man eine bilineare Abbildung

$$\Omega_m(X, A) \times \Omega_n(Y, B) \rightarrow \Omega_{m+n}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y).$$

(Analog im nicht-orientierten Fall.) Insbesondere erhält man für einen Punkt P und $\Omega_n = \Omega_n(P)$ eine Verknüpfung $\Omega_m \times \Omega_n \rightarrow \Omega_{m+n}$. Damit wird $\Omega_* = (\Omega_n)$ ein graduierter Ring. Als Spezialfall der Produktbildung wird $\Omega_*(X, A)$ ein graduierter Modul über Ω_* .

3. Seien M_1 und M_2 orientierte ∂ -Mannigfaltigkeiten, die entlang einer Komponente $N_i \subset \partial M_i$ vermöge eines Diffeomorphismus $\varphi: N_1 \rightarrow N_2$ zu M verheftet werden. Es gibt eine Orientierung auf M , bezüglich der die kanonischen Einbettungen $M_i \rightarrow M$ orientierungstreu sind, sofern φ bezüglich der Rand-Orientierungen auf den N_i die Orientierung umkehrt.

Ein Kragen $\kappa:]-\infty, 0] \times \partial M \rightarrow M$ einer orientierten Mannigfaltigkeit M ist orientierungstreu, wenn $]-\infty, 0] \subset \mathbb{R}$ die Standard-Orientierung, ∂M die Rand-Orientierung und $]-\infty, 0] \times \partial M$ die Produkt-Orientierung trägt.

Um die Transitivität der Bordismenrelation nachzuweisen, muß man beim Identifizieren zweier orientierter Bordismen die Orientierung so definieren, daß die beiden ursprünglichen Bordismen orientierte Untermannigfaltigkeiten des neuen Bordismus werden. Nach den obigen Bemerkungen ist das möglich.

2 Der Satz von Pontrjagin und Thom

In diesem Abschnitt leiten wir einen fundamentalen Zusammenhang zwischen Mannigfaltigkeiten und Homotopiemengen her (2.6).

Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $B \subset N$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Seien B und N randlos und M kompakt. Wir setzen voraus, daß f und $f|\partial M$ transvers zu B sind. Dann ist $A = f^{-1}(B)$ eine Untermannigfaltigkeit vom Typ 1 in M . Wir wählen strenge Tubenabbildungen $t_\xi: E(\xi) \rightarrow M$ für A in M mit Bild U und $t_\eta: E(\eta) \rightarrow N$ für B in N mit Bild V . Wir versehen ξ mit einer Riemannschen Metrik und setzen $D(\xi, \varepsilon)$ für das Bündel der ε -Zellen und \bar{U}_ε für das Bild von $D(\xi, \varepsilon)$ bei t_ξ . Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, daß $f(\bar{U}_\varepsilon) \subset V$ ist. Unter allen diesen Voraussetzungen gilt:

(2.1) Satz. *Es gibt eine Homotopie f_t von $f = f_1$ nach $h = f_0$ und ein $\varepsilon > 0$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- (1) $h|\bar{U}_\varepsilon$ entspricht vermöge t_ξ und t_η der Einschränkung auf $D(\xi, \varepsilon)$ einer Bündelabbildung $E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ über $f: A \rightarrow B$.
- (2) Die Homotopie ist auf A und auf $M \setminus U$ konstant.
- (3) Für alle $t \in I$ gilt $f_t^{-1}(N \setminus B) = M \setminus A$.

BEWEIS. Wir setzen $\varphi = t_\eta \circ f \circ t_\xi^{-1}: D(\xi, \varepsilon) \rightarrow E(\eta)$. Wir haben die kanonische Homotopie von φ zu einer Bündelabbildung Φ , der Ableitung in Richtung der

Fasern (also die von $T\varphi$ zwischen den Normalenbündeln induzierte Bündelabbildung), gegeben durch

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} t^{-1}\varphi(tx) & x \in D(\xi, \varepsilon), t > 0 \\ \Phi(x) & t = 0. \end{cases}$$

Wegen der vorausgesetzten Transversalität von f gilt für genügend kleine ε und das ε -Sphärenbündel immer $\varphi_t(S(\xi, \varepsilon)) \subset E(\eta) \setminus B$. (Für $t > 0$ ergibt sich das aus der Konstruktion von φ_t und für $t = 0$ gilt das, weil φ_0 eine Bündelabbildung ist; $\varepsilon > 0$ kann hier beliebig sein. Die Homotopie ist im übrigen sogar glatt.) Mit $\delta > \varepsilon$ bilden wir $L = t_\xi(D(\xi, \delta) \setminus D(\xi, \varepsilon)^\circ)$. Wir betrachten die durch

$$g_t = \begin{cases} t_\eta \circ \varphi_t \circ t_\xi^{-1} & \text{auf } t_\xi S(\xi, \varepsilon) \\ f & \text{auf } t_\xi S(\xi, \delta) \end{cases}$$

definierte Homotopie $g_t: t_\xi S(\xi, \varepsilon) + t_\xi S(\xi, \delta) \rightarrow N \setminus B$ für genügend kleines δ . Diese Homotopie läßt sich zu einer Homotopie $g_t: L \rightarrow N \setminus B$ von f erweitern, da $t_\xi S(\xi, \varepsilon) + t_\xi S(\xi, \delta) \subset L$ eine Kofaserung ist. Da g_t auf $t_\xi S(\xi, \delta)$ konstant ist, kann g_t zu einer konstanten Homotopie auf dem Komplement von U_δ in M erweitert werden. Die resultierende Homotopie f_t hat die gewünschten Eigenschaften. \square

Sei $\xi: E \rightarrow B$ ein glattes Vektorraumbündel über der geschlossenen Mannigfaltigkeit B . Dann ist E ein lokal kompakter Hausdorff-Raum. Seine Einpunkt-Kompaktifizierung werde mit $M(\xi) = E \cup \{\infty\}$ bezeichnet und *Thom-Raum* von ξ genannt. Der Nullschnitt $B \rightarrow E$ liefert auch eine Einbettung $B \rightarrow M(\xi)$.

(2.2) Lemma. *Der Raum $M(\xi) \setminus B$ ist auf den Grundpunkt ∞ zusammenziehbar.*

BEWEIS. Der Raum $M(\xi)$ ist homöomorph zu $M = D(\xi, 1)/S(\xi, 1)$, denn $D(\xi, 1) \setminus S(\xi, 1)$ ist homöomorph zu $E(\xi)$ (Schrumpfung) und M ist eine Einpunkt-Kompaktifizierung. In dem Modell $M \setminus B$ ist $(x, t) \mapsto (1-t)x + t\|x\|^{-1}x$ eine Kontraktion. \square

(2.3) Lemma. *Sei Y eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Mannigfaltigkeit Q . Je zwei Abbildungen $f_0, f_1: Q \rightarrow M(\xi) \setminus B$, die auf Y übereinstimmen, sind homotop relativ Y .*

BEWEIS. Aus der Voraussetzung erhalten wir eine Abbildung $h: Q \times \partial I \cup Y \times I \rightarrow M(\xi) \setminus B$. Wir müssen h auf $Q \times I$ erweitern. Da der Bildraum zusammenziehbar ist, so ist h homotop zur konstanten Abbildung, die offenbar erweitert werden kann. Wir benutzen nun, daß $Q \times \partial I \cup Y \times I \subset Q \times I$ eine Kofaserung ist. \square

Sei Q eine kompakte Mannigfaltigkeit. Wir sagen, die glatte Abbildung $g: Q \rightarrow M(\xi)$ habe *Normalform*, wenn gilt:

- (1) Es gibt eine Untermannigfaltigkeit $M \subset Q$ und dazu eine strenge Tubenabbildung t mit $t(E(\nu)) = U$ des Normalenbündels $\nu: E(\nu) \rightarrow M$ mit dem in Q offenen Bild U .

(2) Es ist $U = g^{-1}E$ und $M = g^{-1}B$.

(3) Die Verkettung $(g|U)t: E(\nu) \rightarrow U \rightarrow E$ ist eine Bündelabbildung über g . Unter diesen Bedingungen ist $g(Q \setminus U) = \{\infty\}$ und g transvers zu B .

(2.4) Satz. *Jede stetige Abbildung $f: Q \rightarrow M(\xi)$ ist homotop zu einer Abbildung in Normalform.*

BEWEIS. Wir ändern zunächst f so homotop zu g ab, daß g und $g|\partial Q$ transvers zu $B \subset M(\xi)$ sind.

Wir haben dann die glatte Untermannigfaltigkeit $M = g^{-1}(B) \subset Q$. Wir betrachten $W = g^{-1}(E)$ als Untermannigfaltigkeit und wählen eine strenge Tubenabbildung $t: E(\nu) \rightarrow W$ mit Bild U . Nach (2.1) können wir nach einer weiteren Homotopie annehmen, daß g auf dem Bild $D \subset U$ eines Zellenbündels $D(\nu, \varepsilon)$ einer Bündelabbildung

$$\Phi = gt: E(\nu) \rightarrow E(\xi)$$

entspricht. Wir definieren damit $h: Q \rightarrow M(\xi)$ durch Φt^{-1} auf U und als konstante Abbildung mit Wert ∞ sonst. Dann ist h eine stetige Abbildung in Normalform.

Die Abbildungen g und h stimmen auf D überein. Sie bilden beide $Q \setminus D^\circ$ nach $M(\xi) \setminus B$ ab und stimmen auf dem Sphärenbündelrand S von D überein. Nach (2.3) sind sie also homotop. \square

Wir geben eine etwas andere Beschreibung der Abbildungen in Normalform. Man bildet die Quotientabbildung $Q \rightarrow Q/(Q \setminus U)$. Das Bild $Q/(Q \setminus U)$ ist eine Einpunkt-Kompaktifizierung U^c von U . Die Tubenabbildung t liefert einen Homöomorphismus $t^{-1}: U^c \rightarrow E(\nu)^c = M(\nu)$. Die Bündelabbildung $\Phi: E(\nu) \rightarrow E(\xi)$ liefert $M(\Phi): M(\nu) \rightarrow M(\xi)$. Insgesamt erhalten wir also

$$h_{M,\Phi}: Q \rightarrow Q/(Q \setminus U) = U^c \rightarrow M(\nu) \rightarrow M(\xi).$$

Eine Konstruktion dieser Art heißt *Pontrjagin-Thom-Konstruktion*.

Mit Hilfe der Pontrjagin-Thom-Konstruktion erhalten wir eine Beschreibung der Homotopiemenge $[Q, M(\xi)]$ durch geeignete Bordismenklassen von Mannigfaltigkeiten.

Sei weiterhin $E(\xi) \rightarrow B$ ein glattes Vektorraumbündel über der geschlossenen Mannigfaltigkeit B . Sei ferner Q ebenfalls eine geschlossene Mannigfaltigkeit. Eine ξ -Struktur auf einer Untermannigfaltigkeit M von Q ist eine Bündelabbildung $f: \nu \rightarrow \xi$ des Normalenbündels ν von M in Q nach ξ . Das Paar (M, f) heißt dann ξ -Untermannigfaltigkeit von Q . Zwei ξ -Untermannigfaltigkeiten (M_0, f_0) und (M_1, f_1) heißen ξ -bordant, wenn es eine ξ -Untermannigfaltigkeit (W, F) von $Q \times [0, 1]$ vom Typ 1 mit Rand

$$V_0 \times 0 \cup V_1 \times 1 = W \cap (Q \times \{0, 1\})$$

gibt, deren ξ -Struktur f_0 und f_1 erweitert. Wir sagen dann, (W, F) sei ein ξ -Bordismus zwischen (M_0, f_0) und (M_1, f_1) . Zum letzteren bemerken wir, daß $\nu(W, Q \times [0, 1])|_{M_i}$ kanonisch mit $\nu(M_i, Q)$ identifiziert werden kann.

(2.5) Notiz. ξ -bordant ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der ξ -Untermannigfaltigkeiten von Q . \square

Wir bezeichnen die Menge der ξ -Bordismenklassen mit $L(Q, \xi)$. Der Hauptsatz dieses Abschnittes bestimmt diese Menge als die Homotopiemenge $[Q, M(\xi)]$. Wir konstruieren zueinander inverse Abbildungen zwischen diesen Mengen. Sei $h: Q \rightarrow M(\xi)$ eine stetige Abbildung. In der Homotopieklasse von h gibt es eine zu B transverse Abbildung g ; sei $M_g = g^{-1}(B)$. Das Differential von g liefert eine Bündelabbildung $\alpha_g: \nu \rightarrow \xi$, und (M_g, α_g) ist damit eine ξ -Untermannigfaltigkeit. Sind g_0 und g_1 zwei homotope und zu B transverse Abbildungen, so gibt es nach dem Transversalitätssatz eine zu B transverse Homotopie g_t zwischen ihnen. Deren Urbild liefert dann einen ξ -Bordismus zwischen den aus g_i konstruierten ξ -Untermannigfaltigkeiten. Somit erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung $\pi: [Q, M(\xi)] \rightarrow L(Q, \xi)$.

(2.6) Satz von Pontrjagin-Thom. Die vorstehend konstruierte Abbildung π ist eine Bijektion.

BEWEIS. Wir konstruieren eine Umkehrabbildung ρ . Sei $\alpha: \nu \rightarrow \xi$ eine glatte Bündelabbildung. Nach Wahl einer tubularen Umgebung $t: E(\nu) \rightarrow Q$ konstruieren wir daraus eine Pontrjagin-Thom-Abbildung $h_{M, \alpha}$, wie weiter oben beschrieben. Wir wollen $\rho[M, \alpha] = [h_{M, \alpha}]$ setzen und müssen dazu nachweisen, daß die Vorschrift wohldefiniert ist. Zu diesem Zweck wenden wir die Pontrjagin-Thom-Konstruktion auf einen ξ -Bordismus an und erhalten eine Homotopie zwischen den Pontrjagin-Thom-Abbildungen, die sich aus den beiden Randteilen des Bordismus ergeben.

Es ist $\pi\rho = \text{id}$. Das folgt direkt aus den Definitionen, da $h_{M, \alpha}$ eine zu B transverse Abbildung ist, deren Differential genau α induziert. Deshalb ist also ρ injektiv. Die Surjektivität folgt daraus, daß eine Abbildung in Normalform im Bild von ρ liegt. \square

Sei M eine geschlossene zusammenhängende $(n+k)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Der Satz von Pontrjagin-Thom läßt sich auf die Homotopiemenge $[M, S^n]$ anwenden, wenn man $S^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ als Thom-Raum des Bündels über einem Punkt ansieht. Man hat in diesem Falle Untermannigfaltigkeiten $A \subset M$ der Kodimension n zusammen mit einer Trivialisierung $\varphi: \nu(A, M) \rightarrow n\varepsilon$ des Normalenbündels zu betrachten sowie Bordismenklassen von solchen. Eine Trivialisierung eines Bündels wird auch *Rahmung* genannt. Wird ein Normalenbündel gerahmt, so sprechen wir von *Normalen-Rahmung*.

(2.7) Beispiel. Der Fall $k=0$ liefert einen neuen Zugang zum Satz von Hopf. Eine 0-Mannigfaltigkeit $A \subset M$ ist eine endliche Menge. Ist $P \in M$, so identifizieren wir $\nu(P, M)$ kanonisch mit dem Tangentialraum $T_P M$. Eine Rahmung ist in diesem Fall also nichts anderes als ein Isomorphismus $T_P M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei M orientiert. Für $\varphi: T_P M \rightarrow \mathbb{R}^n$ setzen wir $\varepsilon(\varphi) = +1$, wenn φ orientierungstreu ist, sonst $\varepsilon(\varphi) = -1$. Eine Untermannigfaltigkeit A mit Rahmung $\varphi = \{\varphi_a \mid a \in A\}$ erhält die Invariante $\varepsilon(A, \varphi) = \sum_{a \in A} \varphi(\varphi_a) \in \mathbb{Z}$. Der Satz von Hopf ist dann in

diesem Fall eine Konsequenz der Aussage: Zwei normalen-gerahmte Untermannigfaltigkeiten (A, φ) und (B, ψ) sind genau dann normalen-gerahmt bordant, wenn $\varepsilon(A, \varphi) = \varepsilon(B, \psi)$. In einer nicht-orientierbaren Mannigfaltigkeit M sind sie dagegen genau dann normalen-gerahmt bordant, wenn $|A| \equiv |B| \pmod{2}$ ist. \diamond

(2.8) Beispiel. Der Satz von Pontrjagin-Thom erlaubt eine geometrische Interpretation der Homotopiegruppen $\pi_{n+k}(S^n)$ und insbesondere des Freudenthalschen Einhängungssatzes. Nach (2.6) haben wir zunächst eine Bijektion $L(\mathbb{R}^{n+k}, k\varepsilon) \cong \pi_{n+k}(S^n)$. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rahmung $\varphi_\nu: \nu(M, \mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow k\varepsilon$ des Normalenbündels. Da wir einen kanonischen Isomorphismus $T(M) \oplus \nu(M) \rightarrow (n+k)\varepsilon$ haben, erhalten wir eine Rahmung

$$\varphi_\tau: TM \oplus k\varepsilon \rightarrow TM \oplus \nu M \rightarrow (n+k)\varepsilon.$$

Sei $\omega_n(k)$ die Bordismenmenge von geschlossenen n -Mannigfaltigkeiten mit Rahmung $TM \oplus k\varepsilon \rightarrow (n+k)\varepsilon$. Die Bordismenrelation ist darin wie folgt definiert: Sei W ein Bordismus zwischen M_0 und M_1 und sei $\Phi: TW \oplus (k-1)\varepsilon$ eine Rahmung. Es ist $\iota_0: TW|_{M_0} \cong TM_0 \oplus \varepsilon$, wobei die „positive Seite“ von ε dem nach innen gerichteten Normalenvektor entspricht. Analog erhalten wir $\iota_1: TW|_{M_1} \cong TM_1 \oplus \varepsilon$, wobei die „positive Seite“ jetzt nach außen weist. Wir erhalten dann Rahmungen

$$\varphi_i: TM_i \oplus \varepsilon \oplus (k-1)\varepsilon \rightarrow TW|_{M_i} \oplus (k-1)\varepsilon \xrightarrow{\Phi} (n+k)\varepsilon$$

von M_i . Wir sagen in diesem Fall: (W, Φ) ist ein gerahmter Bordismus zwischen (M_0, φ_0) und (M_1, φ_1) .

(2.9) Satz. Die Zuordnung $[M, \varphi_\nu] \mapsto [M, \varphi_\tau]$ ist eine wohldefinierte Abbildung $L(\mathbb{R}^{n+k}, k\varepsilon) \rightarrow \omega_n(k)$. Sie ist für $k > n+1$ bijektiv. \square

Die linke Seite geht von eingebetteten Mannigfaltigkeiten aus, während die rechte mit abstrakten Mannigfaltigkeiten arbeitet. Der Beweis der Bijektivität benutzt daher wesentlich den Whitney'schen Einbettungssatz. Der Freudenthalsche Einhängungssatz beruht in diesem Kontext auf dem nächsten Satz.

(2.10) Satz. Durch Addition eines trivialen Bündels wird eine Abbildung $\omega_n(k) \rightarrow \omega_n(k+1)$ induziert, die für $k \geq 2$ surjektiv und für $k \geq 3$ bijektiv ist. \square

Wir benutzen $\omega_1(k)$, um den Isomorphismus $\pi_{k+1}(S^k) \cong \mathbb{Z}/2$ für $k \geq 3$ zu beschreiben. Sei (A, φ) Repräsentant eines Elementes aus $\omega_1(k)$. Darin zerfällt A in die disjunkte Summe von zu S^1 diffeomorphen Teilen A_j . Sei φ_j die durch φ auf A_j gegebene Rahmung. Wir ordnen (A_j, φ_j) folgendermaßen ein Element $d(A_j, \varphi_j) \in \mathbb{Z}/2$ zu. Sei A diffeomorph zu S^1 . Sei $h: A \rightarrow S^1$ ein Diffeomorphismus. Indem wir S^1 als Rand von D^2 auffassen und $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ mit der Standardrahmung versehen, erhalten wir eine Standardrahmung σ von $TS^1 \oplus \varepsilon$, worin $1 \in \varepsilon$ nach außen weist. Damit erhalten wir eine Rahmung

$$\gamma: TA \oplus k\varepsilon \xrightarrow{Th \oplus \text{id}} TS^1 \oplus \varepsilon \xrightarrow{\sigma \oplus \text{id}} (k+1)\varepsilon.$$

Ist A durch φ gerahmt, so wird durch $\varphi: TA \oplus k\varepsilon \rightarrow (k+1)\varepsilon$ das Bündel TA orientiert. Wir wählen den Diffeomorphismus h so, daß die Komposition γ Orientierungserhaltend ist. Die Homotopieklasse von γ ist unabhängig vom gewählten h . Die gegebene Rahmung φ unterscheidet sich von der Standardrahmung um eine Abbildung

$$A \rightarrow GL^+(k+1, \mathbb{R}) \simeq SO(k+1, \mathbb{R}),$$

die mit der bis auf Homotopie eindeutigen Abbildung h^{-1} zusammengesetzt ein Element in

$$[S^1, SO(k+1, \mathbb{R})] \cong \pi_1 SO(k+1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2, \quad k \geq 2$$

liefert, das mit $d(A, \varphi) \in \mathbb{Z}/2$ bezeichnet werde. Besteht nun A aus mehreren Komponenten (A_j, φ_j) , so sei $d(A, \varphi)$ die Summe der $d(A_j, \varphi_j)$.

(2.11) Satz. *Durch $(A, \varphi) \mapsto d(A, \varphi)$ wird für $k \geq 2$ ein wohldefinierter Isomorphismus $d: \omega_1(k) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ induziert.* \square

3 Kohomologie von de Rham: Die höchste Dimension

Sei M eine glatte orientierte n -Mannigfaltigkeit. Sei $\Omega_c^k(M)$ der Vektorraum der glatten k -Formen auf M mit kompaktem Träger.

Den Kokern der äußeren Ableitung $d: \Omega_c^{n-1}(M) \rightarrow \Omega_c^n(M)$ bezeichnen wir mit $H_c^n(M)$ und nennen diesen Vektorraum die n -te *de Rham'sche Kohomologie-Gruppe* von M . Nach dem Satz von Stokes induziert die Integration von n -Formen eine lineare Abbildung

$$I_M = \int: H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

denn M hat keinen Rand und deshalb ist das Integral über eine exakte Form Null.

(3.1) Satz. *Sei M eine orientierte, zusammenhängende, glatte n -Mannigfaltigkeit. Dann ist $I_M: H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Isomorphismus.*

BEWEIS. Wir haben schon in (??) gezeigt, daß die Aussage im Fall $M = \mathbb{R}^n$ richtig ist. Wir reduzieren den allgemeinen Fall auf diesen Spezialfall.

Sei $i: U \rightarrow M$ eine Inklusion einer offenen Teilmenge. Eine Form $\omega \in \Omega_c^n(U)$ können wir als Form auf M ansehen, indem wir sie außerhalb ihres Trägers als Nullform fortsetzen. Dadurch wird eine Abbildung $i_\#: H_c^n(U) \rightarrow H_c^n(M)$ induziert, und es gilt $I_M \circ i_\# = I_U$. Ist $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine positive Karte, so folgt aus der Definition der Integration von Formen, daß $\omega \mapsto \varphi^*\omega$ einen Isomorphismus $\varphi^*: H_c^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_c^n(U)$ induziert, der $I_U \circ \varphi^* = I_{\mathbb{R}^n}$ erfüllt. Insbesondere ist I_U ein Isomorphismus, weil wir entsprechendes für \mathbb{R}^n wissen.

Seien $i: U \rightarrow M$, $j: V \rightarrow M$ offene Inklusionen, sei $U \cap V \neq \emptyset$, und seien U und V diffeomorph zu \mathbb{R}^n . Wir verwenden ferner die Inklusionen $k: U \cap V \rightarrow U$ und $l: U \cap V \rightarrow V$. Wir wissen schon, daß I_U und I_V Isomorphismen sind. Bezeichne allgemein $[\omega] \in H_c^n(M)$ die Kohomologie-Klasse einer Form $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Sei

$i_{\#}[\alpha] = [\omega]$. Es gibt sicherlich eine Form $\gamma \in \Omega_c^n(U \cap V)$ mit $I_{U \cap V}[\gamma] \neq 0$. Für diese Form ist dann $I_{U \cap V}[\gamma] = I_U \circ k_{\#}[\gamma] \neq 0$, also $k_{\#}[\gamma] \neq 0$, da I_U ein Isomorphismus ist. Da $H_c^n(U)$ eindimensional ist, so ist also $k_{\#}$ surjektiv. Sei γ so gewählt, daß $k_{\#}[\gamma] = [\alpha]$ ist und $[\beta] = l_{\#}[\gamma]$ gesetzt. Dann gilt wegen $i_{\#}k_{\#} = j_{\#}l_{\#}$ die Relation $j_{\#}[\beta] = [\omega]$. Also haben $i_{\#}$ und $j_{\#}$ dasselbe Bild.

Wir wählen nun eine lokal endliche Überdeckung von M durch offene Mengen $(U_j | j \in J)$, die zu \mathbb{R}^n diffeomorph sind. Es sei $(\tau_j | j \in J)$ eine untergeordnete glatte Partition der Eins. Ist $\omega \in \Omega_c^n(M)$, so ist $\omega = \sum \tau_j \omega$ im wesentlichen eine endliche Summe, da ω kompakten Träger hat.

Unser Ziel ist es zu zeigen, daß $H_c^n(M)$ höchstens eindimensional ist. Da es Formen ω mit $I_M[\omega] \neq 0$ gibt, ist dann I_M als Isomorphismus erkannt. Sei U_1 eine der Mengen U_j . Wir wählen $\alpha \in \Omega_c^n(U_1)$ mit $I_M[\alpha] = I_{U_1}[\alpha] \neq 0$. Es genügt zu zeigen: Zu jedem $j \in J$ gibt es ein $\lambda_j \in \mathbb{R}$, so daß $\lambda_j[\alpha] = [\tau_j \omega]$ in $H_c^n(M)$ ist. Dann ist

$$[\omega] = \sum [\tau_j \omega] = (\sum \lambda_j)[\alpha]$$

und $[\omega]$ als Vielfaches des fest gewählten Elementes $[\alpha]$ erkannt.

Nun besagt aber der Zusammenhang von M , daß wir zu jedem $j \in J$ eine endliche Folge $j_1, \dots, j_k \in J$ so auswählen können, daß

$$U_1 = U_{j_1}, U_{j_i} \cap U_{j_{i+1}} \neq \emptyset, U_{j_n} = U_j$$

($i = 1, \dots, n-1$). Nach den Vorüberlegungen haben dann für $\iota(j): U_j \subset M$ die Abbildungen $\iota(j_i)_{\#}$ alle dasselbe Bild, woraus die Existenz einer Relation $\lambda_j[\alpha] = [\tau_j \omega]$ folgt. \square

4 Der Abbildungsgrad

Eine Abbildung f zwischen Mannigfaltigkeiten heie *eigentlich*, wenn kompakte Mengen kompakte Urbilder haben. Sei $f: M \rightarrow N$ eine eigentliche glatte Abbildung zwischen orientierten n -Mannigfaltigkeiten. Das Zurückholen von Formen induziert eine lineare Abbildung $f^*: H_c^n(N) \rightarrow H_c^n(M)$, $[\omega] \mapsto [f^*\omega]$, weil das Zurückholen mit der äußeren Ableitung vertauschbar ist. Ist N zusätzlich zusammenhängend, so ist $I_M \circ f^* \circ I_N^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Multiplikation mit einer reellen Zahl $D(f)$, es gilt also die Gleichung

$$(4.1) \quad \int_M f^*\omega = D(f) \int_N \omega$$

für alle $\omega \in \Omega_c^n(N)$. Tatsächlich ist $D(f)$ eine ganze Zahl, wie (4.2) belegt. Wir nennen $D(f)$ den (*analytischen*) *Grad* der eigentlichen glatten Abbildung f .

Sei $y \in N$ ein regulärer Wert von f . Nach dem Satz von Sard gibt es immer reguläre Werte. Ist $f(x) = y$, so setzen wir $d(f, x, y) = 1$, wenn das Differential $T_x f$ die Orientierung erhält, andernfalls sei $d(f, x, y) = -1$. Wir nennen diese Zahl das Orientierungsverhalten von f bei x . Da f eigentlich ist, ist $P = f^{-1}(y)$ kompakt. Da y ein regulärer Wert ist, ist P diskret. Also ist P endlich und die

Summe $d(f, y) = \sum_{x \in P} d(f, x, y) \in \mathbb{Z}$ sinnvoll definiert. Falls $f^{-1}(y) = \emptyset$ ist, so setzen wir $d(f, y) = 0$. Mit diesen Definitionen gilt:

(4.2) Satz. *Es ist $D(f) = d(f, y)$.*

BEWEIS. Nach dem Umkehrsatz der Differentialrechnung gibt es paarweise disjunkte offene Kartenbereiche $U(x)$ um die Punkte $x \in f^{-1}(y) = P$, die bei f diffeomorph auf einen Kartenbereich V um y abgebildet werden. Wir setzen ferner voraus, daß V diffeomorph zu \mathbb{R}^n ist und wählen positive Parametrisierungen $\varphi_x: U(x) \leftarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi: V \leftarrow \mathbb{R}^n$. Sei ω eine Form mit kompaktem Träger in V und $\int_V \omega \neq 0$. Es gilt

$$\int_M f^* \omega = \sum_{x \in P} \int_{U(x)} f^* \omega, \quad \int_N \omega = \int_V \omega.$$

Nach Definition des Integrals ist

$$\int_{U(x)} f^* \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_x^* f^* \omega = \int_{\mathbb{R}^n} (f \varphi_x)^* \omega, \quad \int_V \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \psi^* \omega.$$

Diese beiden Integrale über \mathbb{R}^n unterscheiden sich um den Diffeomorphismus $\psi^{-1} \varphi_x$. Dessen Funktionaldeterminante ist genau dann überall positiv (bzw. negativ), wenn $d(f, x, y) = 1$ (bzw. $d(f, x, y) = -1$) ist. Nach dem Transformationsatz für Integrale ist deshalb

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \varphi_x)^* \omega = d(f, x, y) \int_{\mathbb{R}^n} \psi^* \omega.$$

Damit folgt die Behauptung.

Ist f nicht surjektiv, gibt es eine offene Menge V , die nicht im Bild von f liegt, denn andernfalls gäbe es zu $y \notin f(M)$ kompakte Umgebungen K_n mit $\bigcap_n K_n = \{y\}$ und $f^{-1}(K_n) \neq \emptyset$, und da f eigentlich ist, wäre der Schnitt dieser Urbilder nicht leer und y läge im Bild dieses Schnittes. Für eine Form ω mit Träger in V ist dann $f^* \omega$ die Nullform, und deshalb ist $D(f)$ in diesem Fall gleich Null. \square

Die Zahl $d(f, y)$ können wir, unabhängig von der Integrationstheorie für jeden regulären Wert definieren. Satz (4.2) enthält dann auch die interessante Aussage, daß diese Zahl nicht von der Wahl des regulären Wertes abhängt. Wir notieren einige unmittelbare Folgerungen aus den Definitionen.

(4.3) Satz. *Der Abbildungsgrad hat die folgenden Eigenschaften:*

- (1) *Ist $f: M \rightarrow N$ nicht surjektiv, so ist $D(f) = 0$.*
- (2) *Sei der Grad für $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow P$ definiert. Dann ist $D(g \circ f) = D(g)D(f)$.*
- (3) *Die Identität hat den Grad 1 und ein Diffeomorphismus den Grad ± 1 .*
- (4) *$D(f_1 \times f_2) = D(f_1)D(f_2)$, wenn für $f_j: M_j \rightarrow N_j$ die Grade definiert sind und die Produkte die Produktorientierung tragen.*

- (5) Wird die Orientierung einer der Mannigfaltigkeiten in die entgegengesetzte verwandelt, so ändert der Grad das Vorzeichen.
- (6) Ist $M = M_1 + M_2$ die disjunkte Summe orientierter offener Teile, so gilt $D(f) = D(f|M_1) + D(f|M_2)$. \square

(4.4) Beispiel. Die Abbildung $q_n: S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^n$ hat den Grad n . Für $n = 0$ gilt das, weil sie nicht surjektiv ist. Für $n > 0$ hat jeder Punkt n Urbilder mit dem Orientierungsverhalten 1. Für $n < 0$ kann man $q_n \circ q_{-n} = \text{id}$ benutzen. \diamond

(4.5) Satz. Sei B eine orientierte glatte $(n+1)$ -Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei $F: B \rightarrow N$ eigentlich und glatt und sei $f = F|_{\partial B}$. Dann ist $D(f) = 0$.

BEWEIS. Sei $\omega \in \Omega_c^n(N)$. Dann ist $d\omega = 0$. Nach dem Satz von Stokes gilt

$$D(f) \int_N \omega = \int_{\partial B} f^* \omega = \int_B df^* \omega = \int_B f^*(d\omega) = 0.$$

Es gibt ω mit $\int_N \omega \neq 0$. Damit folgt $D(f) = 0$. \square

Eine *eigentliche Homotopie* zwischen h_0 und h_1 ist eine eigentliche Abbildung $h: M \times [0, 1] \rightarrow N$ mit $h_0(x) = h(x, 0)$ und $h_1(x) = h(x, 1)$. Wir nennen dann h_0 und h_1 *eigentlich homotop*.

(4.6) Satz. Sei h eine eigentliche glatte Homotopie. Dann gilt $D(h_0)$ und $D(h_1)$.

BEWEIS. Wenden den vorstehenden Satz auf $B = M \times [0, 1]$ an und bedenken, daß $\partial B = M \times \{1\} - M \times \{0\}$ aus zwei Exemplaren M mit entgegengesetzter Orientierung besteht. \square

Der Abbildungsgrad läßt sich für stetige Abbildungen definieren. Die Zurückführung auf den Fall glatter Abbildungen geschieht durch den folgenden Approximationssatz, dessen Beweis wir einstweilen verschieben.

(4.7) Satz. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Jede eigentliche stetige Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist eigentlich homotop zu einer glatten Abbildung. Sind h_0 und h_1 eigentliche glatte Abbildungen, die als stetige Abbildungen eigentlich homotop sind, so sind sie auch glatt eigentlich homotop.

Wenn wir diesen Satz annehmen, so können wir den Grad einer stetigen eigentlichen Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen orientierten glatten n -Mannigfaltigkeiten mit zusammenhängendem N als den Grad einer zu f eigentlich homotopen glatten Abbildung h definieren. Wegen (4.6) und (4.7) hängt der Grad nicht vom gewählten h ab. Eigentlich homotope stetige Abbildungen haben denselben Grad.

Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und $a \notin \text{Bild}f$. Die *Umlaufzahl* $\text{Um}(f, a)$ von f bezüglich a wird als Grad der Abbildung

$$p_{f,a} = p_a: M \rightarrow S^n, \quad x \mapsto N(f(x) - a)$$

definiert, worin N die Normierungsabbildung $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$, $x \mapsto \|x\|^{-1}x$ ist. Ist f_t eine Homotopie mit $a \notin \text{Bild}f_t$ für alle t , so gilt $\text{Um}(f_t, a) = \text{Um}(f_0, a)$.

(4.8) Satz. Die Abbildung $f_A: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$, $x \mapsto Ax$ hat für alle $A \in GL(n+1, \mathbb{R})$ als $Um(f, 0)$ das Vorzeichen von $\det A$.

BEWEIS. Ist $w: [0, 1] \rightarrow GL(n, \mathbb{R}^{n+1})$ ein Weg, so ist $(x, t) \mapsto f_{w(t)}$ eine Homotopie. Der Raum $GL(n, \mathbb{R}^{n+1})$ hat zwei Wegekomponenten, repräsentiert durch die Einheitsmatrix und die Diagonalmatrix $D = \text{Dia}(1, \dots, 1, -1)$. In beiden Fällen rechnet man den Grad nach der Definition durch Zählen der orientierten Urbilder aus. \square

(4.9) Beispiel. Es gibt genau dann auf S^n ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen, wenn n ungerade ist. Sei F ein Vektorfeld ohne Nullstellen. Nach Normierung auf Einheitslänge können wir F als Abbildung $F: S^n \rightarrow S^n$ auffassen, bei der x immer orthogonal zu $F(x)$ ist. Durch

$$(x, t) \mapsto \cos \pi t \cdot x + \sin \pi t \cdot F(x)$$

erhalten wir eine Homotopie der antipodischen Abbildung $x \mapsto -x$ zur Identität. Die antipodische Abbildung hat den Grad $(-1)^{n+1}$. Soll dieser gleich dem Grad der Identität sein, so muß n ungerade sein. Ist $n = 2k - 1$, so ist $(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1})$ ein Vektorfeld ohne Nullstellen. \diamond

(4.10) Satz. Sei M orientierter Rand der kompakten Mannigfaltigkeit B . Sei $F: B \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ glatt und habe 0 als regulären Wert. Sei $f = F|_M$ und liege 0 nicht im Bild von f . Dann ist

$$Um(f, 0) = \sum_{x \in P} \epsilon(F, x), \quad P = F^{-1}(0),$$

wobei $\epsilon(F, x) \in \{\pm 1\}$ das Orientierungsverhalten des Differentials $T_x F: T_x B \rightarrow T_0 \mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet, das heißt, $\epsilon(F, x) = 1$ genau dann, wenn das Differential orientierungstreu ist.

BEWEIS. Es seien $D(x) \subset B \setminus \partial B$, $x \in P$, kleine disjunkte Vollkugeln um x in lokalen Koordinaten. Dann ist $G(x) = NF(x)$ auf $C = B \setminus \bigcup_{x \in P} D(x)$ definiert, und es gilt nach (4.5) $d(G|\partial B) = \sum_{x \in P} d(G|\partial D(x))$. Es genügt also, $d(G|\partial D(x)) = \epsilon(F, x)$ zu zeigen. Nach Einführen lokaler Koordinaten mittels einer positiven Karte um x kann man annehmen, daß $D(x) = D^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitszelle ist und $F: D^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ glatt mit $F^{-1}(0) = \{0\}$ und 0 als regulärem Wert. Durch

$$H(x, t) = \begin{cases} t^{-1}F(tx) & \text{für } t > 0 \\ DF(0)(x) & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

wird eine glatte Homotopie $H: S^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ definiert. Also ist $Um(F|S^n, 0) = Um(DF(0)|S^n, 0)$, und das ist gleich dem Vorzeichen von $\det DF(0)$. \square

(4.11) Brouwerscher Fixpunktsatz. Jede stetige Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ hat einen Fixpunkt.

BEWEIS. Im Fall $n = 1$ erschließt man die Behauptung leicht mit dem Zwischenwertsatz der elementaren Analysis. Sei deshalb $n > 1$. Angenommen, f hat keinen Fixpunkt. Dann ist

$$S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1}, \quad (x, t) \mapsto \frac{x - tf(x)}{\|x - tf(x)\|} = N(x - tf(x))$$

eine Homotopie der Identität zur Abbildung $g: x \mapsto N(x - f(x))$. Da f keinen Fixpunkt hat, definiert die Formel für g eine Abbildung auf D^n , und dann ist $(x, t) \mapsto g(tx)$ eine Homotopie von der konstanten Abbildung nach g . Alle diese Abbildungen haben denselben Grad. Aber eine konstante Abbildung hat den Grad Null, während die Identität den Grad eins hat. \square

5 Der Satz von Hopf

(5.1) Satz. *Sei M der orientierte Rand der kompakten, orientierten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit B . Habe $f: M \rightarrow S^n$ den Grad Null. Dann besitzt f eine Erweiterung auf B .*

BEWEIS. Die Inklusion $M \rightarrow B$ ist eine Kofaserung. Falls wir f erweitern können, so auch jede homotope Abbildung. Deshalb nehmen wir f als glatt an. Wir können $f: M \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zu einer glatten Abbildung $\phi: B \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ erweitern (Erweiterung nach Tietze-Urysohn und glatte Approximation). Nach dem Isotopiesatz (7.2) können wir annehmen, daß 0 ein regulärer Wert von ϕ ist und $\phi^{-1}(0)$ in einer offenen Menge $U \subset B \setminus \partial B$ enthalten ist, die diffeomorph zu \mathbb{R}^{n+1} ist. Sei $B_r \subset U$ der Teil, der zur Kugel $D_r \subset \mathbb{R}^{n+1}$ vom Radius r um den Nullpunkt diffeomorph ist; wir wählen r so, daß $\phi^{-1}(0) \subset B_r \setminus \partial B_r$ ist. Wegen Bordismeninvarianz des Grades haben f und $\phi|_{\partial B_r}$ dieselbe Umlaufzahl, und diese ist nach Voraussetzung Null. Deshalb ist $\phi|_{\partial B_r}$ nullhomotop und hat somit eine Erweiterung auf B_r . Wir benutzen diese Erweiterung, kombinieren sie mit $\phi|(B \setminus B_r^\circ)$ und erhalten eine Erweiterung von f . \square

Der folgende Satz geht in seiner kombinatorischen Form auf Hopf [?] zurück.

(5.2) Satz. *Sei M eine zusammenhängende orientierte geschlossene n -Mannigfaltigkeit. Dann liefert der Abbildungsgrad eine Bijektion $d: [M, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}$.*

BEWEIS. Seien $f_0, f_1: M \rightarrow S^n$ Abbildungen mit demselben Grad. Sie liefern zusammen eine Abbildung $M + (-M) \rightarrow S^n$ vom Grad Null. Nach dem letzten Satz hat diese Abbildung eine Erweiterung auf $M \times [0, 1]$. Das zeigt die Injektivität von d . Um die Surjektivität zu zeigen, muß man Abbildungen mit vorgeschriebenem Grad konstruieren. Eine Abbildung vom Grad 1 erhält man wie folgt. Man wähle eine Einbettung $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Man bilde $\psi(D^n)$ vermöge ψ^{-1} und eines Homöomorphismus $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ nach S^n ab und das Komplement von $\psi(D^n)$ auf den Grundpunkt $\{S^{n-1}\}$. Dann hat $0 \in D^n/S^{n-1}$ genau einen Urbildpunkt und ist ein regulärer Wert. Bei richtiger Wahl der Orientierungen hat f den Grad 1. Indem man mehrere disjunkte Zellen herausgreift und analog abbildet, kann man jeden Grad realisieren. Damit ist der Satz von Hopf bewiesen.

(Die konstruierten Abbildungen sind nur auf dem Urbild einer Nullumgebung glatt; trotzdem kann der Grad durch (9.3) berechnet werden, was auch durch die Übereinstimmung mit dem homologischen Grad erhellt.) \square

Sind M und N nicht notwendig orientierbare glatte geschlossene Mannigfaltigkeiten und ist $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, so wird der Grad modulo 2, in Zeichen $d_2(f) \in \mathbb{Z}/2$, als die Anzahl modulo 2 der Menge $f^{-1}(y)$ für einen regulären Wert y definiert. Sind f_0 und f_1 (glatt) homotop, so gilt $d_2(f_0) = d_2(f_1)$. Deshalb läßt sich eine Invariante $d_2: [M, N] \rightarrow \mathbb{Z}/2$ definieren. Der Satz von Hopf lautet in diesem Fall: Ist M nichtorientierbar, zusammenhängend, geschlossen und n -dimensional, so ist $d_2: [M, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}/2$ eine Bijektion. Ist B eine kompakte, unorientierbare, glatte, zusammenhängende ∂ -Mannigfaltigkeit der Dimension $n + 1$, so läßt sich eine stetige Abbildung $f: \partial B \rightarrow S^n$ genau dann auf B erweitern, wenn $d_2(f) = 0$ ist.

(5.3) Beispiel. Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$ teilerfremde komplexe Polynome vom Grad m, n . Die rationale Funktion $f: z \mapsto p(z)/q(z)$ kann als eine glatte (sogar holomorphe) Abbildung $f: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ angesehen werden (siehe Abschnitt 18). Ist $a = \max(m, n)$, so läßt sie sich in homogenen Koordinaten genauer als

$$[z, w] \mapsto [w^a p(z/w), w^a q(z/w)]$$

schreiben, denn $w^a p(z/w)$ ist nach Ausmultiplizieren ein homogenes Polynom vom Grad a . Ist $c \in \mathbb{C}$ so gewählt, daß $z \mapsto p(z) - cq(z)$ ein Polynom vom Grad a ist, so ist $[c, 1] \in \mathbb{C}P^1$ ein regulärer Wert von f . Da eine komplex-lineare Abbildung orientierungserhaltend ist, so hat folglich f den Grad a . Insbesondere hat ein Polynom vom Grad m als Abbildung von $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ auch den Grad m . \diamond

6 Der Abbildungsgrad

Seien M und N geschlossene, orientierte, glatte n -Mannigfaltigkeiten ($n \geq 1$). Sei N zusammenhängend. Wir ordnen jeder stetigen Abbildung $f: M \rightarrow N$ eine Zahl $d(f) \in \mathbb{Z}$, genannt *Grad von f* , zu, die nur von der Homotopieklasse von f abhängt.

Sei $y \in N$ ein regulärer Wert einer glatten Abbildung $f: M \rightarrow N$. Ist $f(x) = y$, so setzen wir $d(f, x, y) = 1$, wenn das Differential $T_x f$ die Orientierung erhält, andernfalls sei $d(f, x, y) = -1$. Damit bilden wir

$$d(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} d(f, x, y).$$

Wir zeigen, daß diese Zahl nicht von der Wahl des regulären Wertes abhängt und eine Invariante der Homotopieklasse von f ist.

Nach dem Umkehrsatz gibt es eine zusammenhängende offene Umgebung V von y und offene Umgebungen $U(x)$ von x , so daß

$$f^{-1}(V) = \coprod_{x \in f^{-1}(y)} U(x)$$

und $f: U(x) \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist. Daraus folgt die

(6.1) Notiz. *Es gibt eine offene Umgebung V von y , so daß alle $z \in V$ reguläre Werte sind und für sie die Gleichheit $d(f, y) = d(f, z)$ gilt.* \square

(6.2) Satz. *Sei B eine kompakte orientierte glatte Mannigfaltigkeit mit Rand M . Sei $F: B \rightarrow N$ glatt und y regulärer Wert von F und $F|_{\partial B} = f$. Dann ist $d(f, y) = 0$.*

BEWEIS. Sei $J = F^{-1}(y)$. Dann ist $J \subset B$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit vom Typ 1 von B und $\partial J = J \cap M = f^{-1}(y)$. Es trage J die Urbild-Orientierung und ∂J die induzierte Rand-Orientierung. Letztere ist eine Funktion $\epsilon: \partial J \rightarrow \{\pm 1\}$. Eine Komponente der kompakten 1-Mannigfaltigkeit J mit nichtleerem Rand ist diffeomorph zu $[0, 1]$. Daraus folgt

$$\sum_{x \in \partial J} \epsilon(x) = 0.$$

In unserem Fall verifiziert man aus den Definitionen

$$\epsilon(x) = (-1)^n d(f, x, y)$$

für jedes $x \in \partial J$. Damit folgt die Behauptung. \square

Aus diesem Satz erhalten wir die folgende Invarianzaussage.

(6.3) Folgerung. *Unter den Voraussetzungen von Satz (6.2) sei $\partial B = M_0 - M_1$. Sei $F|M_i = f_i$ gesetzt. Dann ist $d(f_0, y) = d(f_1, y)$.* \square

(6.4) Satz. *Seien $f_0, f_1: M \rightarrow N$ glatt homotop und sei y regulärer Wert von f_0 und f_1 . Dann ist $d(f_0, y) = d(f_1, y)$.*

BEWEIS. Sei $H: M \times I \rightarrow N$ eine glatte Homotopie von f_0 nach f_1 . Nach dem Satz von Sard (??) gibt es in jeder Umgebung von y reguläre Werte z von H , die auch regulär für $H|M \times \partial I$ sind. Die Behauptung folgt dann für z statt y aus (6.3) und damit wegen (6.1) auch für y . \square

(6.5) Satz. *Sind y und z reguläre Werte von f , so gilt $d(f, y) = d(f, z)$.*

BEWEIS. Sei $H: N \times I \rightarrow N$ eine glatte Diffeotopie der Identität nach f mit $h(z) = y$ (siehe 6, $n > 1$). Dann ist y regulärer Wert von hf . Es gilt $d(f, z) = d(hf, y)$. Es ist nämlich $f^{-1}(z) = (hf)^{-1}(y)$; die zugehörigen Summen sind gleich, weil $T_z h$ die Orientierung erhält (siehe ??). Jetzt wende man Satz (6.4) an. \square

Wir benutzen nun die in (??) bewiesenen Aussagen:

(6.6) Notiz. *Jede stetige Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist homotop zu einer glatten Abbildung. Sind f_0 und f_1 homotope glatte Abbildungen, so gibt es auch eine glatte Homotopie zwischen ihnen.* \square

(6.7) Definition des Grades. Wegen (6.5) ist die Zahl $d(f, y)$ von der Wahl des regulären Wertes y unabhängig. Wir setzen deshalb $d(f, y) = d(f)$ und nennen $d(f) \in \mathbb{Z}$ den *Grad* der glatten Abbildung f . Wegen (6.4) und (6.7) haben homotope glatte Abbildungen denselben Grad, und wegen (6.6) und (6.7) können wir den Grad einer stetigen Abbildung als Grad irgendeiner dazu homotopen glatten Abbildung eindeutig definieren. Damit haben wir den Grad als Abbildung $d: [M, N] \rightarrow \mathbb{Z}$ wie angekündigt erhalten. \diamond

(6.8) Satz. *Rechenregeln über den Abbildungsgrad.*

- (1) *Wird die Orientierung einer der Mannigfaltigkeiten M, N geändert, so ändert der Grad das Vorzeichen.*
- (2) *Es gilt $d(fg) = d(f)d(g)$, sofern die drei Grade definiert sind.*
- (3) *Seien M und N orientiert. Sei $t: M \times N \rightarrow N \times M$ die Vertauschung $(x, y) \mapsto (y, x)$. Die Produkte mögen die Produktorientierung tragen. Dann hat t den Grad $(-1)^{mn}$, $m = \dim M$, $n = \dim N$.*
- (4) *Ein Diffeomorphismus hat den Grad 1, wenn er orientierungstreu ist, und sonst den Grad -1 .*
- (5) *Für $f: M = M_1 + M_2 \rightarrow N$ gilt $d(f) = d(f|_{M_1}) + d(f|_{M_2})$.* \square

Der Abbildungsgrad ist eine wichtige, nützliche und vielseitig verwendbare Invariante, wie wir an einigen Beispielen belegen wollen. Insbesondere werden wir einen Satz von Hopf beweisen, der besagt, daß der Grad die Homotopieklassen charakterisiert, wenn N eine Sphäre ist.

(6.9) Beispiel. Sei $f: S^n \rightarrow S^n$, $x \mapsto Bx$ mit einer Matrix $B \in O(n+1)$. Dann gilt $d(f) = \det(B)$, falls beidemale dieselbe Orientierung von S^n verwendet wird. Zum Beweis fassen wir $T_x S^n \subset T_x \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ auf und f als Automorphismus des \mathbb{R}^{n+1} . Ein nach außen weisender Vektor wird durch $T_x f$ wieder auf einen solchen abgebildet. Das Orientierungsverhalten von $T_x f$ ist deshalb auf $T_x S^n$ und auf $T_x \mathbb{R}^{n+1}$ dasselbe. Zwei Abbildungen dieser Art sind genau dann homotop, wenn sie denselben Grad haben, da die Wegekomponeenten von $O(n+1)$ durch das Vorzeichen der Determinante charakterisiert werden. Insbesondere ist die antipodische Abbildung $A: S^n \rightarrow S^n$, $x \mapsto -x$ genau dann homotop zur Identität, wenn n ungerade ist. \diamond

Mit dem Standardmodell des Tangentialbündels von S^n können wir sagen: Eine stetige Abbildung $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ist ein stetiges *Vektorfeld* auf S^n , wenn für alle $x \in S^n$ gilt $v(x) \perp x$. Es ist dann $v(x)$ ein Tangentialvektor aus $T_x S^n$.

(6.10) Satz. *Die Sphäre S^n besitzt genau dann ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen, wenn n ungerade ist.*

BEWEIS. Sei $n = 2m - 1$. Dann ist

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}, x_{2m}) \mapsto (-x_2, x_1, \dots, -x_{2m}, x_{2m-1})$$

ein geeignetes Vektorfeld. Sei umgekehrt $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein stetiges Vektorfeld. Dann ist

$$S^n \times I \rightarrow S^n, (x, t) \mapsto \cos(\pi t) \cdot x + \sin(\pi t) \cdot \frac{v(x)}{|v(x)|}$$

eine Homotopie von der identischen zur antipodischen Abbildung und deshalb n ungerade. \square

Als nächstes definieren wir die Umlaufzahl. Sei weiterhin M eine zusammenhängende geschlossene orientierte n -Mannigfaltigkeit. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und $a \notin \text{Bild}f$. Die *Umlaufzahl* $\text{Um}(f, a)$ von f bezüglich a wird als Grad der Abbildung

$$p_{f,a} = p_a: M \rightarrow S^n: x \mapsto N(f(x) - a)$$

definiert, worin N die Normierungsabbildung $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n: x \mapsto \|x\|^{-1}x$ ist. Ist f_t eine Homotopie mit $a \notin \text{Bild}f_t$ für alle t , so gilt $\text{Um}(f_t, a) = \text{Um}(f_0, a)$.

(6.11) Beispiel. Die Abbildung $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0, x \mapsto Ax$ hat für alle $A \in GL(n+1, \mathbb{R})$ als $\text{Um}(f, 0)$ das Vorzeichen von $\det A$. Zum Beweis: Wegen I(3.10.1) ist $p_{f,0}$ homotop zu $S^n \rightarrow S^n, x \mapsto Bx$ für orthogonales B . Jetzt wende man (6.9) an. In diesem Fall charakterisiert die Umlaufzahl die Homotopieklasse. \diamond

(6.12) Satz. Sei M orientierter Rand der kompakten Mannigfaltigkeit B . Sei $F: B \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ glatt und habe 0 als regulären Wert. Sei $f = F|_M$ und liege 0 nicht im Bild von f . Dann ist

$$\text{Um}(f, 0) = \sum_{x \in P} \epsilon(F, x), \quad P = F^{-1}(0),$$

wobei $\epsilon(F, x) \in \{\pm 1\}$ das Orientierungsverhalten des Differentials $T_x F: T_x B \rightarrow T_0 \mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet, das heißt $\epsilon(F, x) = 1$ genau dann, wenn das Differential orientierungstreu ist.

BEWEIS. Es seien $D(x) \subset B \setminus \partial B, x \in P$, kleine disjunkte Vollkugeln um x in lokalen Koordinaten. Dann ist $G(x) := NF(x)$ auf $C := B \setminus \bigcup_{x \in P} D(x)$ definiert, und es gilt nach (9.3) und (9.8.5) $d(G|\partial B) = \sum_{x \in P} d(G|\partial D(x))$. Es genügt also, $d(G|\partial D(x)) = \epsilon(F, x)$ zu zeigen. Nach Einführen lokaler Koordinaten mittels einer positiven Karte um x kann man annehmen, daß $D(x) = D^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitszelle ist und $F: D^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ glatt mit $F^{-1}(0) = \{0\}$ und 0 als regulärem Wert. Durch

$$H(x, t) = \begin{cases} t^{-1}F(tx) & \text{für } t > 0 \\ DF(0)(x) & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

wird eine glatte Homotopie $H: S^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ definiert. Also ist $\text{Um}(F|S^n, 0) = \text{Um}(DF(0)|S^n, 0)$, und das ist nach (9.12) gleich dem Vorzeichen von $\det DF(0)$. \square

(6.13) Satz. Sei M der orientierte Rand der kompakten, orientierten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit B . Habe $f: M \rightarrow S^n$ den Grad Null. Dann besitzt f eine Erweiterung auf B .

BEWEIS. Die Inklusion ist eine Kofaserung (??). Falls iwr f erweitern können, so auch jede homotope Abbildung. Deshalb nehmen wir f als glatt an (??). In (??) haben wir gesehen, daß wir $f: S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zu einer glatten Abbildung $\phi: B \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ erweitern können. Nach dem Isotopiesatz (??) können wir annehmen, daß 0 ein regulärer Wert von ϕ ist und $\phi^{-1}(0)$ in einer offenen Menge $U \subset B \setminus \partial B$ enthalten ist, die diffeomorph zu \mathbb{R}^{n+1} ist. Sei $B_r \subset U$ der Teil, der zur Kugel $D_r \subset \mathbb{R}^{n+1}$ vom Radius r um den Nullpunkt diffeomorph ist; wir wählen r so, daß $\phi^{-1}(0) \subset B_r \setminus \partial B_r$ ist. Nach (6.4) haben f und $\phi|_{\partial B_r}$ dieselbe Umlaufzahl. Da die Umlaufzahl die Homotopieklasse einer Abbildung $S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ charakterisiert, ist $\phi|_{\partial B_r}$ nullhomotop und hat deshalb eine Erweiterung auf B_r . Wir benutzen diese Erweiterung und kombinieren sie mit $\phi|(B \setminus B_r^\circ)$ und erhalten eine Erweiterung von f . \square

Wir sind nun bereit, den folgenden Satz von Hopf [?] zu beweisen.

(6.14) Satz. *Sei M eine zusammenhängende orientierte geschlossene n -Mannigfaltigkeit. Dann ist der Abbildungsgrad $d: [M, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}$ eine Bijektion.*

BEWEIS. Seien $f_0, f_1: M \rightarrow S^n$ Abbildungen mit demselben Grad. Sie liefern zusammen eine Abbildung $M + (-M) \rightarrow S^n$ vom Grad Null. Nach dem letzten Satz hat diese Abbildung eine Erweiterung auf $M \times [0, 1]$. Das zeigt die Injektivität von d . Um die Surjektivität zu zeigen, muß man Abbildungen mit vorgeschriebenem Grad konstruieren. Eine Abbildung vom Grad 1 erhält man wie folgt. Man wähle eine Einbettung $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Man bilde $\psi(D^n)$ vermöge ψ^{-1} und eines Homöomorphismus $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ nach S^n ab und das Komplement von $\psi(D^n)$ auf den Grundpunkt $\{S^{n-1}\}$. Dann hat $0 \in D^n/S^{n-1}$ genau einen Urbildpunkt und ist ein regulärer Wert. Bei richtiger Wahl der Orientierungen erhält f den Grad 1. Indem man mehrere disjunkte Zellen herausgreift und analog abbildet, kann man jeden Grad realisieren. Damit ist der Satz von Hopf bewiesen. \square

(6.15) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Sind M und N nicht notwendig orientierbare glatte geschlossene Mannigfaltigkeiten und ist $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, so wird der Grad modulo 2, in Zeichen $d_2(f) \in \mathbb{Z}/2$, als die Anzahl modulo 2 der Menge $f^{-1}(y)$ für einen regulären Wert y definiert. Sind f_0 und f_1 (glatt) homotop, so gilt $d_2(f_0) = d_2(f_1)$. Deshalb läßt sich eine Invariante $d_2: [M, N] \rightarrow \mathbb{Z}/2$ definieren.
2. Ist M nicht orientierbar, zusammenhängend, geschlossen und n -dimensional, so ist $d_2: [M, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}/2$ eine Bijektion.
3. Ist B eine kompakte, unorientierbare, glatte, zusammenhängende ∂ -Mannigfaltigkeit der Dimension $n + 1$, so läßt sich eine stetige Abbildung $f: \partial B \rightarrow S^n$ genau dann auf B erweitern, wenn $d_2(f) = 0$ ist.
4. Seien X und Y topologische Räume. Der Verbund (Join) $X * Y$ von X und Y ist der Quotient von $X \times I \times Y$ nach der von $(x, 0, y) \sim (x', 0, y)$ und $(x, 1, y) \sim (x, 1, y')$ erzeugten Äquivalenzrelation. Durch

$$S^m \times I \times S^n \rightarrow S^{m+n+1}, \quad (x, t, y) \mapsto \sqrt{t} \cdot x + \sqrt{1-t} \cdot y$$

wird ein Homöomorphismus $S^m * S^n \cong S^{m+n+1}$ geliefert. Sind $f: X \rightarrow X'$ und $g: Y \rightarrow Y'$ gegeben, so wird durch $f \times \text{id}(I) \times g$ eine Abbildung $f * g: X * Y \rightarrow X' * Y'$ induziert. Haben $f: S^m \rightarrow S^m$ bzw. $g: S^n \rightarrow S^n$ den Grad a bzw. b , so hat $f * g$ den Grad ab .

5. Hat $f_i: M_i \rightarrow N_i$ den Grad d_i und tragen die $M_1 \times M_2$ und $N_1 \times N_2$ die Produkt-Orientierung, so hat $f_1 \times f_2$ den Grad $d_1 d_2$.

6. Sei M orientierter Rand der kompakten $(n+1)$ -Mannigfaltigkeit B . Eine Abbildung $f: M \rightarrow S^n$ läßt sich so zu $F: B \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ erweitern, daß $F^{-1}(0)$ höchstens ein Element enthält.

7. Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$ teilerfremde komplexe Polynome vom Grad m, n . Die rationale Funktion $f: z \mapsto p(z)/q(z)$ kann als eine glatte (sogar holomorphe) Abbildung $f: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ angesehen werden. Ist $a = \max(m, n)$, so läßt sie sich in homogenen Koordinaten genauer als

$$[z, w] \mapsto [w^a p(\frac{z}{w}), w^a q(\frac{z}{w})]$$

schreiben, denn $w^a p(z/w)$ ist nach Ausmultiplizieren ein homogenes Polynom vom Grad a . Ist $c \in \mathbb{C}$ so gewählt, daß $z \mapsto p(z) - cq(z)$ ein Polynom vom Grad a ist, so ist $[c, 1] \in \mathbb{C}P^1$ ein regulärer Wert von f . Da eine komplex-lineare Abbildung orientierungserhaltend ist, so hat folglich f den Grad a . Insbesondere hat ein Polynom vom Grad m als Abbildung von $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ auch den Grad m .

7 Der analytische Abbildungsgrad

Der Abbildungsgrad kann analytisch mit Hilfe der Integrationstheorie erhalten werden. Dazu gehen wir von einer orientierten glatten n -Mannigfaltigkeit M ohne Rand aus. Wir bezeichnen mit $\Omega_c^k(M)$ den Vektorraum der C^∞ -Differentialformen vom Grad k auf M mit kompaktem Träger. (Der Index c weist auf kompakte Träger hin.) Die äußere Ableitung von Formen liefert eine lineare Abbildung

$$(7.1) \quad d^k = d: \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M).$$

Bekanntlich gilt $d^{k+1} \circ d^k = 0$, und deshalb ist der Vektorraum

$$(7.2) \quad H_c^k(M) = \text{Kern } d^k / \text{Bild } d^{k-1}$$

definiert. Der Vektorraum $H_c^k(M)$ wird k -te Kohomologiegruppe von M im Sinne von de Rham genannt. Trotz der analytischen Definition handelt es sich um eine topologische Invariante von M . Die Übereinstimmung mit topologisch definierten Kohomologiegruppen wurde von de Rham [?] gezeigt.

Die Integration von n -Formen liefert eine lineare Abbildung

$$(7.3) \quad \int: \Omega_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \int_M \alpha.$$

Nach dem Satz von Stokes ist für eine $(n-1)$ -Form β das Integral $\int_M d\beta = 0$. Folglich induziert (7.3) eine lineare Abbildung

$$(7.4) \quad I_M = \int: H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Der nächste Satz ist die Grundlage für die analytische Definition des Grades.

(7.5) Satz. *Ist M eine zusammenhängende, orientierte, glatte n -Mannigfaltigkeit, so ist $\int: H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Isomorphismus.*

Wir beweisen den Satz später und ziehen zunächst einige Folgerungen. Ist $f: M \rightarrow N$ eine eigentliche glatte Abbildung zwischen orientierten n -Mannigfaltigkeiten, so induziert das Zurückholen von Formen eine lineare Abbildung

$$f^*: H_c^n(N) \rightarrow H_c^n(M), \quad [\omega] \mapsto [f^*\omega],$$

weil das Zurückholen mit der äußeren Ableitung vertauschbar ist. Sind M und N zusätzlich zusammenhängend, so gibt es wegen (7.5) eine reelle Zahl $D(f)$, für die

$$(7.6) \quad \int_M f^*\omega = D(f) \int_N \omega$$

für alle $\omega \in \Omega_c^n(N)$ gilt.

(7.7) Satz. *Für geschlossene Mannigfaltigkeiten ist $D(f)$ gleich dem im letzten Abschnitt definierten Grad von f .*

BEWEIS. Wir benutzen die Charakterisierung des Grades durch Urbilder regulärer Werte. Sei $y \in N$ regulärer Wert von f . Nach dem Umkehrsatz der Differentialrechnung gibt es disjunkte offene Kartenbereiche $U(x)$ um die Punkte $x \in f^{-1}(y) = P$, die bei f diffeomorph auf einen Kartenbereich V um y abgebildet werden. Wir setzen ferner voraus, daß V diffeomorph zu \mathbb{R}^n ist und wählen positive Karten $\varphi_x: U(x) \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\int_M f^*\omega = \sum_{x \in P} \int_{U(x)} f^*\omega, \quad \int_N \omega = \int_V \omega.$$

Nach Definition des Integrals ist

$$\int_{U(x)} f^*\omega = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_x^{-1})^* f^*\omega = \int_{\mathbb{R}^n} (f\varphi_x^{-1})^*\omega, \quad \int_V \omega = \int_{\mathbb{R}^n} (\psi^{-1})^*\omega.$$

Diese beiden Integrale über \mathbb{R}^n unterscheiden sich um den Diffeomorphismus $\psi f\varphi_x^{-1}$. Dessen Funktionaldeterminante ist genau dann überall positiv (negativ), wenn — mit den Bezeichnungen des letzten Abschnitts über das Orientierungsverhalten — $d(f, x, y) = 1$ ($d(f, x, y) = -1$) ist. Nach dem Transformationssatz

für Integrale ist deshalb

$$\int_{\mathbb{R}} (f\varphi_x^{-1})^* \omega = d(f, x, y) \int_{\mathbb{R}^n} (\psi^{-1})^* \omega.$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Beweis von (7.5). Wir reduzieren zunächst das Problem auf den Fall $M = \mathbb{R}^n$. (Zur Beweismethode vergleiche man die exakte Mayer-Vietoris-Sequenz der Homologietheorie.) Sei $i: U \rightarrow M$ eine Inklusion einer offenen Teilmenge. Eine Form $\omega \in \Omega_c^n(U)$ können wir als Form auf M ansehen, indem wir sie außerhalb ihres Trägers als Nullform fortsetzen. Dadurch wird eine Abbildung $i_{\#}: H_c^n(U) \rightarrow H_c^n(M)$ induziert, und es gilt $I_M \circ i_{\#} = I_U$. Ist $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus (eine positive Karte), so folgt aus der Definition der Integration von Formen, daß $\omega \mapsto \varphi^* \omega$ einen Isomorphismus $\varphi^*: H_c^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_c^n(U)$ induziert, der $I_U \circ \varphi^* = I_{\mathbb{R}^n}$ erfüllt. Insbesondere ist $H_c^n(U) \cong \mathbb{R}$, wenn wir entsprechendes für \mathbb{R}^n wissen.

Seien $i: U \rightarrow M$, $j: V \rightarrow M$ offene Inklusionen, sei $U \cap V \neq \emptyset$, und seien U und V diffeomorph zu \mathbb{R}^n . Wir verwenden ferner die Inklusionen $k: U \cap V \rightarrow U$ und $l: U \cap V \rightarrow V$. Wir setzen voraus (Fall \mathbb{R}^n), daß I_U und I_V Isomorphismen sind. Sei $[\omega] \in H_c^n(M)$ die Kohomologie-Klasse einer Form $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Sei $i_{\#}[\alpha] = [\omega]$. Es gibt sicherlich eine Form $\gamma \in \Omega_c^n(U \cap V)$ mit $I_{U \cap V}[\gamma] \neq 0$. Für diese Form ist dann $I_{U \cap V}[\gamma] = I_U \circ k_{\#}[\gamma] \neq 0$, also $k_{\#}[\gamma] \neq 0$, da I_U ein Isomorphismus ist. Da $H_c^n(U)$ eindimensional ist, so ist also $k_{\#}$ surjektiv. Sei $k_{\#}[\alpha] = [\gamma]$, $[\beta] = l_{\#}[\gamma]$. Dann ist $j_{\#}[\beta] = [\omega]$. Also haben $i_{\#}$ und $j_{\#}$ dasselbe Bild.

Wir wählen nun eine lokal-endliche Überdeckung von M durch offene Mengen $(U_j | j \in J)$, die zu \mathbb{R}^n diffeomorph sind. Es sei $(\tau_j | j \in J)$ eine untergeordnete glatte Partition der Eins. Ist $\omega \in \Omega_c^n(M)$, so ist $\omega = \sum \tau_j \omega$ im wesentlichen eine endliche Summe.

Unser Ziel ist es zu zeigen, daß $H_c^n(M)$ höchstens eindimensional ist. Da es Formen ω mit $I_M[\omega] \neq 0$ gibt, ist dann I_M als Isomorphismus erkannt. Sei U_1 eine der Mengen U_j , und sei $\alpha \in \Omega_c^n(U_1)$ eine Form mit $I_M[\alpha] = I_{U_1}[\alpha] \neq 0$. Es genügt zu zeigen: $\lambda_j[\alpha] = [\tau_j \omega_j]$ in $H_c^n(M)$ für ein $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$[\omega] = \sum [\tau_j \omega_j] (\sum \lambda_j) [\alpha]$$

und $[\omega]$ als Vielfaches des fest gewählten Elementes $[\alpha]$ erkannt.

Nun besagt aber der Zusammenhang von M , daß wir zu jedem $j \in J$ eine endliche Folge $j_1, \dots, j_k \in J$ so auswählen können, daß

$$U_1 = U_{j_1}, U_{j_i} \cap U_{j_{i+1}} \neq \emptyset, U_{j_n} = U_j$$

($i = 1, \dots, n-1$). Nach den Vorüberlegungen haben dann für $\iota(j): U_j \subset M$ die Abbildungen $\iota(j_i)_{\#}$ alle dasselbe Bild, woraus die Existenz einer Relation $\lambda_j[\alpha] = [\tau_j \omega_j]$ folgt. Damit haben wir die Reduktion auf den Fall $M = \mathbb{R}^n$ erreicht. Mit dem nächsten Satz ist der Beweis von (7.5) beendet. \square

(7.8) Satz. Für $n \geq 1$ ist $\int: H_c^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Isomorphismus.

BEWEIS. Während die bisherigen Überlegungen rein formaler Natur waren, muß man nunmehr wirklich etwas über Integration verwenden. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach n .

$n = 1$. In diesem Fall haben wir unter einer Nullform eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger zu verstehen, und es ist $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx$. Sei $\omega \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$, $\omega(x) = u(x)dx$ mit einer Funktion u mit kompaktem Träger. Falls $[\omega]$ im Kern von \int liegt, falls also $\int_{-\infty}^{\infty} u(x) = 0$ ist, so haben wir in

$$f(x) = \int_{-\infty}^x u(x) dx$$

eine Nullform mit kompaktem Träger und äußerer Ableitung ω .

Für den Induktionsschritt vergleichen wir $\Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ und $\Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ über zwei Abbildungen: Integration über eine Veränderliche und Produkt mit einer 1-Form. Zunächst zur Integration.

Sei $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Wir setzen

$$F(\omega) = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1},$$

erhalten damit eine $(n-1)$ -Form auf \mathbb{R}^{n-1} und eine lineare Abbildung

$$F: \Omega_c^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Sie induziert eine lineare Abbildung der de Rham-Kohomologie. Sei $\alpha \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ in der Gestalt

$$\alpha = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} P_i(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$$

angesetzt. Dann ist

$$d\alpha = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Wir definieren

$$\tilde{F}\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \left(\int_{\mathbb{R}} P_i(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt \right) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{n-1}.$$

Dann ist

$$d\tilde{F}\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial P_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1},$$

und das ist wegen $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial P_n}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt = 0$ gleich $Fd\alpha$, das heißt es gilt $d\tilde{F}\alpha = Fd\alpha$. Folglich induziert F eine lineare Abbildung $F: H_c^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_c^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Nun zur Produktbildung. Seien

$$p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_n$$

die beiden Projektionen. Für $\omega = f(x_1, \dots, x_{n-1})dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ und $\sigma = \varphi(x_n)dx_n \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$ liegt

$$p^*\omega \wedge q^*\sigma = f(x_1, \dots, x_{n-1})\varphi(x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

in $\Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen ein σ mit $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = 1$ fest aus und bilden damit eine lineare Abbildung

$$\Pi: \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow \Omega_c^n(\mathbb{R}^n), \quad \omega \mapsto p^*\omega \wedge q^*\sigma.$$

Auch hier gilt die Verträglichkeit mit der äußeren Ableitung. Sei $\omega = d\alpha$. Dann ist

$$d(p^*\alpha \wedge q^*\sigma) = dp^*\alpha \wedge q^*\sigma + (-1)^{n-1}p^*\alpha \wedge dq^*\sigma = dp^*\alpha \wedge q^*\sigma.$$

Bei der zweiten Gleichheit wurde $dq^*\sigma = q^*d\sigma = 0$ benutzt; und das gilt, weil σ eine 1-Form ist. Damit erhalten wir $d\Pi\alpha = \Pi d\alpha$ und sehen, daß Π eine lineare Abbildung $\Pi: H_c^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow H_c^n(\mathbb{R}^n)$ induziert.

Wir zeigen nun, daß ΠF die identische Abbildung ist. Falls dem so ist, so ist Π surjektiv, und weil nach Induktionsvoraussetzung $H_c^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ eindimensional ist, so ist $H_c^n(\mathbb{R}^n)$ höchstens eindimensional. Fertig.

Für $\omega = f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ist

$$\omega - \Pi F\omega = (f(x_1, \dots, x_n) - \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt \cdot \varphi(x_n))dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Diese Form ist die äußere Ableitung von

$$\begin{aligned} \alpha &= (-1)^{n-1} \left(\int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt \int_{-\infty}^{x_n} \varphi(t)dt \right) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}; \end{aligned}$$

und α hat kompakten Träger! Wegen $\omega - \Pi F\omega = d\alpha$ repräsentieren ω und $\Pi F\omega$ in $H_c^n(\mathbb{R}^n)$ dasselbe Element. \square

(7.9) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Durch (7.6) läßt sich der Grad $D(f)$ für eigentliche Abbildungen $f: M \rightarrow N$ definieren. Es ist $D(f) \in \mathbb{Z}$ und ebenfalls gleich der Summe der Orientierungszahlen für die Urbilder eines regulären Wertes. Ist $H: M \times I \rightarrow N$ eine Homotopie von

eigentlichen Abbildungen, d. h. ist jedes H_t eigentlich, so gilt $D(H_0) = D(H_1)$. Da eine eigentliche stetige Abbildung eigentlich homotop zu einer glatten Abbildung ist, kann der Grad einer eigentlichen stetigen Abbildung durch den Grad einer dazu homotopen glatten eindeutig definiert werden. Ein Homöomorphismus $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eigentlich und hat den Grad ± 1 . Ist $D(h) = 1$, so heißt h Orientierungstreu.

2. Seien a, b, p, q natürliche Zahlen und gelte $ap - bq = 1$. Die Abbildung

$$f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad (x, y) \mapsto (x^p \bar{y}^q, x^b + y^a)$$

ist eigentlich und hat den Grad 1. Der Punkt $(1, 0)$ ist ein regulärer Wert.

3. Seien M, N orientierte, geschlossene, glatte, disjunkte Untermenigen von \mathbb{R}^{k+1} der Dimension m, n . Ferner sei $m + n = k$. Der Grad der

$$f_{M,N} = f: M \times N \rightarrow S^k, \quad (x, y) \mapsto \frac{x - y}{|x - y|},$$

multipliziert mit $(-1)^n$, heißt *Verschlingungszahl* $v(M, N)$ des Paares (M, N) in \mathbb{R}^{k+1} . Hierbei trägt $M \times N$ die Produkt-Orientierung und S^k die Standard-Orientierung. Mit $T: M \times N \rightarrow N \times M, (x, y) \mapsto (y, x)$ und $A: S^k \rightarrow S^k, x \mapsto -x$ gilt $f_{N,M} \circ T = A \circ f_{M,N}$. Es folgt

$$v(M, N) = (-1)^{nm+1} v(N, M).$$

Sind allgemeiner $\mu: M \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ und $\nu: N \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ stetige Abbildungen mit disjunkten Bildern, so heißt der Grad von $(x, y) \mapsto N(\mu(x) - \nu(y))$ die *Verschlingungszahl* von (μ, ν) .

4. Mit der Standard-Determinantenform \det auf \mathbb{R}^n wird durch

$$\omega: T_x S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1, \dots, v_{n-1}) \mapsto \det(x, v_1, \dots, v_{n-1})$$

eine Volumenform auf S^{n-1} definiert. Sie liefert ein erzeugendes Element der de Rham Gruppe $H^{n-1}(S^{n-1})$. Die Form auf \mathbb{R}^n

$$\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

liefert durch Einschränkung auf S^{n-1} die Form ω . Das Integral von ω über S^{n-1} ist das übliche Volumen von S^{n-1} , also die Bogenlänge 2π im Fall $n = 2$ und der Flächeninhalt 4π im Fall $n = 3$. Sind $f, g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ glatte Kurven mit disjunkten Bildern und ist $c: S^1 \times S^1 \rightarrow S^2, (x, y) = N(f(x) - g(y))$, so erhält man in

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^1 \times S^1} c^*(\omega) = v(f, g)$$

eine Integralformel für die Verschlingungszahl. Eine solche Formel war schon Gauß 1833 bekannt [?, p.605], der sie ohne Beweis mitteilt. Er schreibt dazu:

Eine Hauptaufgabe aus dem Grenzgebiet der Geometria Situs und der Geometria Magnitudinis wird sein, die Umschlingung zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen.

Sei M orientierter Rand der glatten kompakten Untermannigfaltigkeit $B \subset \mathbb{R}^{k+1}$. Es sei B transvers zu N . Dann läßt sich $v(M, N)$ nach (9.13) durch das Orientierungsverhalten von $B \times N \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}, (x, y) \mapsto x - y$ in den Urbildpunkten von Null berechnen. Wir haben die Vorzeichen so eingerichtet, daß mit unseren Vereinbarungen die Verschlingungszahl eine Schnitzzahl wird:

$$s(B, N) = v(M, N).$$

Man gebe daraufhin eine Standard-Verschlingung zweier Kreise im \mathbb{R}^3 mit der Verschlingungszahl 1 bildlich an.

5. Sei G eine kompakte, zusammenhängende Liesche Gruppe und T ein maximaler Torus in G . Die Abbildung $q: G/T \times T \rightarrow G, (g, t) \mapsto gtg^{-1}$ hat den Grad $|W|$. Dabei ist W die Weyl-Gruppe NT/T , NT der Normalisator von T in G . Insbesondere ist q also surjektiv. [?, IV.1].

6. Sei G eine kompakte, zusammenhängende Liesche Gruppe und T ein maximaler Torus. Für eine natürliche Zahl k hat die Abbildung $f: G \rightarrow G, g \mapsto g^k$ den Grad k^r , $r = \dim T$. Ist $c \in T$ ein Element, dessen Potenzen dicht in T liegen, so hat $f^{-1}(c)$ genau k^r Urbilder, die sämtlich in T liegen; außerdem ist c regulärer Wert [?][?].

8 Weiteres

1 Seifertsche Faserungen

Wir untersuchen eine Klasse von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten mit einer gefaserten Zusatzstruktur. Sie wurden von Seifert 1933 eingeführt [?]. Von Seifert stammt das Wort „Faserung“; es wird heute allerdings meist in anderem Sinne gebraucht.

Eine *Seifertsche Faserung* ist eine glatte, kompakte, zusammenhängende, orientierte 3-Mannigfaltigkeit mit einer glatten, effektiven S^1 -Operation ohne Fixpunkte für die ganze Gruppe. Eine *Seifert-Mannigfaltigkeit* ist eine 3-Mannigfaltigkeit, die eine derartige Zusatzstruktur besitzt.

Seifertsche Faserungen werden durch drei Sorten von Invarianten gekennzeichnet, die wir alsbald erklären:

- (1) Orbitinvarianten.
- (2) Orbitraum.
- (3) Euler-Zahl.

Wir setzen $G = S^1$. Sei M eine Seifert-Faserung. Die Standgruppe G_x von $x \in M$ ist eine endliche zyklische Gruppe. Jeder Punkt der Bahn $C = Gx$ durch x hat dieselbe Standgruppe. Die Bahn Gx ist diffeomorph zu G/G_x , also zu S^1 . Demnach ist M in disjunkte Kreise, die Bahnen, zerlegt. Auf diese Zerlegung bezieht sich der Seifertsche Terminus „Faserung“. Die Orbitabbildung $M \rightarrow M/G$ ist aber im allgemeinen nicht lokal trivial, und deshalb ist sie im allgemeinen keine Faserung im Sinne der Bündeltheorie.

(1.1) Beispiel. Durch

$$S^1 \times S^3 \rightarrow S^3, \quad (\lambda, (z_1, z_2)) \mapsto (\lambda^a z_1, \lambda^b z_2)$$

mit teilerfremden ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ wird eine effektive fixpunktfreie S^1 -Operation auf S^3 gegeben. Für $z_2 = 0$ erhält man eine 1-Sphäre mit Standgruppe \mathbb{Z}/a , für $z_1 = 0$ eine 1-Sphäre mit Standgruppe \mathbb{Z}/b .

Sei $|a| > 1$ und $|b| > 1$. Eine Teilmenge der Form

$$K(c_1, c_2) = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid c_1 z_1^b - c_2 z_2^a = 0\},$$

abhängig von $[c_1, c_2] \in \mathbb{C}P^1$, ist S^1 -stabil. Jeder Punkt von S^3 liegt in genau einer solchen Menge. Setzen wir $z_k = r_k \exp(i\varphi_k)$ mit $r_k \geq 0$ an, so sind die r_k durch die Gleichungen $r_1^2 + r_2^2 = 1$ und $|c_1|r_1^b = |c_2|r_2^a$ eindeutig bestimmt. Die Menge $K(c_1, c_2)$ liegt also auf dem Torus $\{(z_1, z_2) \mid |z_1| = r_1, |z_2| = r_2\}$ und wird durch $t \mapsto (z_1 \exp(iat), z_2 \exp(ibt))$ für eine feste Lösung z_1, z_2 beschrieben. Im Fall $c_1 \neq 0 \neq c_2$ haben wir eine freie Bahn, und diese ist ein (a, b) -Torusknoten. Die Orbitabbildung der Operation ist

$$S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1 \cong S^2, \quad (z_1, z_2) \mapsto [c_1, c_2] = [z_2^a, z_1^b].$$

Man beachte, daß $(z_1, z_2) \mapsto (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus ist. Also liefern (a, b) und $(-a, -b)$ orientiert isomorphe S^1 -Mannigfaltigkeiten. Wir werden später sehen, daß alle fixpunktfreien S^1 -Operationen auf S^3 von diesem Typ sind. \diamond

(1.2) Beispiel. Wir betrachten die durch die Gleichung

$$z_0^p + z_1^q + z_2^r = 0$$

in $S^5 = S(\mathbb{C}^3)$ herausgeschnittene Brieskorn-Mannigfaltigkeit $B = B(p, q, r)$. Darin seien p, q, r paarweise teilerfremd (der Einfachheit halber). Sei $a = pqr$. Wir haben die effektive S^1 -Operation

$$(\lambda, (z_0, z_1, z_2)) \mapsto (\lambda^{a/p} z_0, \lambda^{a/q} z_1, \lambda^{a/r} z_2).$$

Ist $z_2 = 0$, so verbleibt eine Bahn mit der Standgruppe \mathbb{Z}/r ; analog für $z_0 = 0$ und $z_1 = 0$. \diamond

Die lokale Struktur der G -Operation wird durch die äquivarianten tubularen Umgebungen der Bahnen, den sogenannten *Scheibenbündeln* gegeben. Sei $H \subset G$ eine zyklische Untergruppe und sei $\mathbb{C}(b)$ die H -Darstellung

$$H \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\lambda, z) \mapsto \lambda^b z.$$

Damit bilden wir das komplexe Geradenbündel $G \times_H \mathbb{C}(b) \rightarrow G/H$. Der Nullschnitt hat die Standgruppe H . Ist b zu $|H|$ teilerfremd, so ist die Operation außerhalb des Nullschnittes frei. Aus allgemeinen Überlegungen (??) wissen wir:

(1.3) Notiz. *Jeder Orbit einer Seifert-Faserung hat eine offene Umgebung, die zu einer Mannigfaltigkeit der Form $G \times_H \mathbb{C}(b)$ orientiert G -äquivariant diffeomorph ist.* \square

Aus den Vorbemerkungen und der Kompaktheit von M sehen wir nun, daß es nur endlich viele Bahnen mit nichttrivialer Standgruppe gibt. Seien C_1, \dots, C_m diese Bahnen; wir nennen sie *Ausnahmefasern* der Operation. Sei $H(i) = \mathbb{Z}/a_i$ die Standgruppe von C_i und $\mathbb{C}(b_i)$ die zugehörige *Scheibendarstellung* mit einer primen Restklasse $b_i \in \mathbb{Z}/a_i$. Das System der Paare $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ nennen wir die lokalen *Orbitinvarianten* der Operation.

(1.4) Bemerkung. Der G -Raum $G \times_H \mathbb{C}(b)$ ist G -diffeomorph zum Produkt $G/H \times \mathbb{C}(b)$, siehe ???. Hierbei ist b als ganze Zahl und $\mathbb{C}(b)$ als S^1 -Darstellung aufzufassen. \diamond

(1.5) Beispiel. Die Scheibendarstellung von $B(p, q, r)$ der Bahn $C_2 = \{z_2 = 0\}$ ist $\mathbb{C}(pq)$. Das Normalenbündel von C_2 in $B(p, q, r)$ ist nämlich die Einschränkung des Normalenbündels von $z_2 = 0$ in \mathbb{C}^3 , und für Letzteres ist die Behauptung klar. \diamond

(1.6) Satz. *Der Orbitraum M/G ist in kanonischer Weise eine geschlossene glatte orientierte Fläche.*

BEWEIS. Wir nehmen zunächst die Ausnahmeerbits heraus $M_0 = M \setminus \bigcup_j C_j$. Auf M_0 haben wir eine freie G -Operation, und die Orbitabbildung $M_0 \rightarrow M_0/G$ ist ein glattes G -Prinzipalbündel über einer orientierten Fläche (siehe ??). Für die Ausnahmefaser C_i wählen wir eine äquivariante tubulare Umgebung $\Phi_i: G \times_{H(i)} \mathbb{C}(b_i) \rightarrow U_i$. Die Orbitabbildung auf der Quelle von Φ_i beschreiben wir durch

$$q_i: G \times \mathbb{C}(b_i) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\lambda, w) \mapsto w^{a_i}.$$

Wir übertragen diese Orbitabbildung auf U_i und erhalten aus Φ_i eine lokale Parametrisierung $\varphi_i: \mathbb{C} \rightarrow U_i/G$, mit der wir eine Karte definieren. Karten dieser Art sind mit den Karten aus dem G -Prinzipalbündel glatt und positiv verbunden. Die resultierende Fläche erbt deshalb eine Orientierung. \square

Das Geschlecht der Fläche M/G ist die *globale Orbitinvariante* der Seifert-Faserung M .

(1.7) Notiz. *Es gibt eine endliche Untergruppe $K \subset S^1$, die sämtliche Standgruppen enthält. Das kleinste K ist die zyklische Gruppe, deren Ordnung das kleinste gemeinsame Vielfache der Standgruppenordnungen ist.* \square

(1.8) Satz. *Enthalte $K \subset G$ sämtliche Standgruppen. Dann ist die Orbitabbildung $M/K \rightarrow M/G$ ein G/K -Prinzipalbündel.*

BEWEIS. Man verifiziert, daß die Standgruppen der G/K -Operation auf M/K trivial sind. Nach allgemeinen Sätzen ist eine freie Operation von S^1 auf einem kompakten Hausdorff-Raum lokal trivial (?). In unserem Fall kann man lokale Karten aber auch aus den äquivarianten tubularen Umgebungen der Bahnen konstruieren. \square

Wir identifizieren G/K mit S^1 vermöge $zK \mapsto z^{|K|}$. Damit wird $M/K \rightarrow M/G$ ein S^1 -Prinzipalbündel. Es hat eine Euler-Zahl $e(M, K) \in \mathbb{Z}$. Das ist die Euler-Zahl des komplexen Geradenbündels $M/K \times_{G/K} \mathbb{C} \rightarrow M/G$, das zum Prinzipalbündel assoziiert ist.

(1.9) Satz. *Die rationale Zahl $e(M, K)/|K|$ ist unabhängig von der Wahl der Gruppe K , die sämtliche Standgruppen enthält.*

BEWEIS. Seien $L \supset K$ Untergruppen mit der genannten Eigenschaft. Dann operiert die zyklische Gruppe $L/K \subset G/K$ auf M/K mit dem Orbitraum M/L . Wir müssen die Relation $|L/K|e(M, K) = e(M, L)$ zeigen. Sie beruht auf dem allgemeinen Sachverhalt, daß $M/L \rightarrow M/G$ das Sphärenbündel zum $|L/K|$ -fachen Tensorprodukt des Geradenbündels $M/K \times_{G/K} \mathbb{C} \rightarrow M/G$ ist, und auf der Additivität der Euler-Zahl bei Tensorprodukten (siehe ??). \square

Wir nennen $e(M) = e(M, K)/|K| \in \mathbb{Q}$ die *Euler-Zahl* der Transformationsgruppe M . Damit haben wir die drei angekündigten Invarianten einer Seifert-Faserung definiert.

(1.10) Beispiel. Die Euler-Zahl der (a, b) -Operation aus Beispiel (??1) ist $-\frac{1}{ab}$. Wir gehen davon aus, daß im Falle der Hopf-Faserung $a = b = 1$ die

Euler-Zahl gleich -1 ist. Sei $H = \mathbb{Z}/ab$. Wir zeigen sodann, daß $S^3/H \rightarrow \mathbb{C}P^1$ die Hopf-Faserung ist. Die behauptete Identifikation wird durch ?? gegeben. \diamond

(1.11) Beispiel. Der Orbitraum von $B(p, q, r)$ ist S^2 und die Euler-Zahl ist $-\frac{1}{pqr}$. Zum Beweis verwenden wir die verzweigte Überlagerung ??.

(1.12) Satz. *Zwei Seifert-Faserungen M und M' der Typen*

$$(g, e; (a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)) \quad (g', e'; (a'_1, b'_1), \dots, (a'_n, b'_n))$$

sind genau dann äquivariant orientiert diffeomorph, wenn $g = g'$, $e = e'$ und $m = n$ ist und mit einer Permutation σ gilt $(a'_i, b'_i) = (a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)})$.

BEWEIS. (Notwendig) Wir zeigen zunächst die Notwendigkeit der Bedingungen für Diffeomorphie. Sei $f: M \rightarrow M'$ ein äquivarianter orientierungstreuer Diffeomorphismus. Da f Bahnen und Standgruppen respektiert, gilt $m = n$ und bei geeigneter Indizierung $a'_i = a_i$. Ferner induziert f Isomorphismen der äquivarianten orientierten Normalenbündel der Bahnen. Die Restklasse $b_i \text{ mod } a_i$ ist eine Invariante des betreffenden Bündels (Invariante der Scheibendarstellung). Also gilt $b_i = b'_i$. Da f einen Homöomorphismus der Orbiträume induziert, gilt $g = g'$. Schließlich induziert f einen Isomorphismus derjenigen Bündel, mit denen die Euler-Klasse definiert wird. Deshalb gilt $e = e'$.

(Hinreichend im Fall $m = 0$) Es gibt keine Ausnahmeorbits, die Operationen sind frei und die Orbitabbildungen p und p' sind G -Prinzipalbündel. Wegen $g = g'$ gibt es einen orientierungstreuen Diffeomorphismus $\varphi: M/G \rightarrow M'/G$. Das durch φ von p' induziert Prinzipalbündel \tilde{p} hat dieselbe Euler-Zahl wie p . Deshalb sind diese Bündel isomorph. Es gibt deshalb einen äquivarianten Diffeomorphismus $\Phi: M \rightarrow M'$, der über φ liegt. Er respektiert die Orientierung.

Der allgemeine Fall wird im Rest dieses Abschnittes bewiesen. Er erfordert einige Vorbereitungen, die wir unter dem Titel *äquivariante Dehn-Chirurgie* durchführen. \square

Wir erinnern an den Formalismus der Dehn-Chirurgie. Sei $t: D^2 \times S^1 \rightarrow M$ eine glatte Einbettung mit Bild U . Wir verwenden die Verheftung

$$M \setminus U^\circ \xleftarrow{t} S^1 \times S^1 \xleftarrow{\sigma} S^1 \times S^1 \xrightarrow{\cup} S^1 \times D^2.$$

Darin sei $\sigma(z, w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ und $ad - bc = 1$. Wir wollen jetzt diesen Prozeß verträglich mit einer S^1 -Operation durchführen. Eine S^1 -Operation auf $S^1 \times S^1$ werde durch $\lambda(z, w) = (\lambda^\mu z, \lambda^\nu w)$ beschrieben. Diesen Sachverhalt deuten wir durch das Symbol $S^1(\mu) \times S^1(\nu)$ an. Der durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

vermittelte Diffeomorphismus

$$\sigma: S^1(\mu) \times S^1(\nu) \rightarrow S^1(\mu') \times S^1(\nu')$$

ist genau dann äquivariant, wenn $(\mu, \nu)A = (\mu', \nu')$ ist. Wir sprechen von äquivarianter Dehn-Chirurgie an M , wenn $t: D^2(\mu') \times S^1(\nu') \rightarrow M$ eine S^1 -Einbettung ist und σ äquivariant.

Wir untersuchen, wie sich die Euler-Zahl bei Dehn-Chirurgie ändert und beginnen mit einem S^1 -Prinzipalbündel M , also einer freien Operation auf M . Gegeben sei $t: D^2(0) \times S^1(1) \rightarrow M$ sowie ein äquivarianter Diffeomorphismus $\sigma: S^1(1) \times S^1(\nu) \rightarrow S^1(0) \times S^1(1)$. Da wir eine freie Operation auf $S^1 \times D^2$ brauchen, muß $\mu = \pm 1$ sein. Als Matrix A für σ kommt wegen Äquivarianz und $\det(A) = 1$ nur

$$A = \begin{pmatrix} \nu & 1 - \nu d \\ -1 & d \end{pmatrix}$$

in Frage. Verschiedene ν liefern bei Dehn-Chirurgie isomorphe Resultate (??). Deshalb arbeiten wir mit $\nu = 0$.

(1.13) Satz. *Entsteht M' aus der freien S^1 -Mannigfaltigkeit M durch Dehn-Chirurgie mittels A wie oben, so gilt $e(M') = e(M) - d$.*

BEWEIS. Wir benutzen die geometrische Bestimmung der Euler-Zahl als Indexsumme eines Schnittes s von $q: M \times_G \mathbb{C}(1) \rightarrow M/G$. Sei U das Bild von T . Wir nehmen an, daß s über U/G keine Nullstellen hat und vermöge der Trivialisierung

$$\begin{array}{ccccc} U \times_G \mathbb{C} & \xleftarrow{t \times_G \text{id}} & (D^2 \times S^1) \times_G \mathbb{C} & \cong & D^2 \times \mathbb{C} \\ \downarrow q & & & & \downarrow \text{pr} \\ U/G & \xleftarrow{\bar{t}} & & & D^2 \end{array}$$

in den konstanten Schnitt $z \mapsto (z, 1)$ übergeht. Das ist möglich, weil sich ein gegebener Schnitt über U/G auf M/G fortsetzen läßt. Wir führen nun Dehn-Chirurgie mittels σ durch. Der konstante Schnitt über $\partial D^2 = S^1$ wird in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (S^1(0) \times S^1(1)) \times_G \mathbb{C} & \xrightarrow{\sigma \times_G \text{id}} & (S^1(1) \times S^1(0)) \times_G \mathbb{C} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ S^1(0) \times \mathbb{C} & & S^1(0) \times \mathbb{C} \\ \downarrow \text{pr} & & \downarrow \text{pr} \\ S^1 & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & S^1 \end{array}$$

in den Schnitt $w \mapsto (w, w^{-d})$ der Projektion pr transportiert. Wir erhalten deshalb einen Schnitt von $q': M' \times_G \mathbb{C} \rightarrow M'/G$ dadurch, daß wir auf $(M \setminus U^\circ)/G$ den ursprünglichen verwenden und auf dem neu angehefteten D^2 den Schnitt $w \mapsto (w, w^{-d})$. Da $S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, $w \mapsto w^{-d}$ bezüglich Null die Umlaufzahl $-d$ hat,

liefert die Beschreibung der Euler-Zahl als Indexsumme die Behauptung. Man beachte dazu, daß q' über dem neuen D^2 durch

$$\text{pr}: (S^1(1) \times D^2(0)) \times_G \mathbb{C} \cong D^2(0) \times \mathbb{C} \rightarrow D^2$$

orientierungstreu trivialisiert wird. \square

Sei nun M eine beliebige G -Mannigfaltigkeit und $t: D^2(0) \times S^1(1) \rightarrow M$ eine Einbettung wie oben. Wir wollen Dehn-Chirurgie mittels

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}: S^1(\mu) \times S^1(\nu) \rightarrow S^1(0) \times S^1(1)$$

durchführen. Äquivarianz und $\det(A) = 1$ liefern für die Matrix die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \nu & c \\ -\mu & d \end{pmatrix}$$

mit $\nu d + \mu c = 1$.

(1.14) Satz. *M' entstehe aus M durch Dehn-Chirurgie mittels der zuletzt genannten Matrix. Dann gilt*

$$e(M) = e(m) - \frac{d}{\mu}.$$

BEWEIS. Nach Definition der rationalen Euler-Zahl müssen wir zunächst durch Herausdividieren einer geeigneten Gruppe K zu einer freien Operation übergehen. Die Ordnung von K muß ein Vielfaches von μ sein. Das führt zu dem Anheftungsdiagramm

$$\begin{array}{ccccc} M \setminus U^\circ & \xleftarrow{t} & S^1(0) \times S^1(1) & \xleftarrow{A} & S^1(\mu) \times S^1(\nu) \\ \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow q \\ (M \setminus U^\circ)/K & \xleftarrow{\tilde{t}} & S^1(0) \times S^1(1) & \xleftarrow{B} & S^1(1) \times S^1(0). \end{array}$$

Darin operiert G auf den Räumen der oberen Zeile und G/K auf denen der unteren Zeile. Die Abbildungen p und q sind Orbitabbildungen für die K -Operation. Sie werden in Matrizenform durch

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |K| \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q = \begin{pmatrix} |K|/\mu & -\nu \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

gegeben. Daraus berechnet man die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & |K|d/\mu \end{pmatrix}.$$

Mit dem letzten Satz folgt die Behauptung.

(1.15) Bemerkung. Durch die Dehn-Chirurgie im letzten Satz wird eine Bahn mit den Orbitinvarianten (μ, ν) produziert. Die Zahl d unterliegt wegen $\nu d + \mu c = 1$ lediglich der Bedingung $\nu d \equiv 1 \pmod{\mu}$. \diamond

(1.16) Konstruktion von Standardmodellen. Sei F eine orientierte Fläche vom Geschlecht g . Wir beginnen mit dem trivialen S^1 -Prinzipalbündel $F \times S^1 \rightarrow F$. Wir wählen disjunkte, orientierungstreue Einbettungen $\tau_i: D^2 \rightarrow F$ und dazu Einbettungen $t_i = \tau_i \times \text{id}: D^2 \times S^1 \rightarrow F \times S^1$. Zu jedem i wählen wir eine Matrix

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \nu_i & c_i \\ -\mu_i & d_i \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad \mu_i > 0$$

und führen damit äquivariante Dehn-Chirurgie mit den Einbettungen t_i durch. Das Resultat ist eine Seifert-Faserung M mit den Invarianten

$$(g, e; (\mu_1, \nu_1), \dots, (\mu_m, \nu_m)),$$

wobei e nach (??) durch

$$e = - \sum_{i=1}^m \frac{d_i}{\mu_i}$$

festgelegt ist. (Bei Dehn-Chirurgie ändert sich das Geschlecht des Orbitraumes nicht.) Das Resultat einer derartigen Konstruktion nennen wir ein *Standardmodell*. \diamond

(1.17) Satz. Die Standardmodelle sind durch ihre Invarianten bis auf orientierte äquivariante Diffeomorphie bestimmt.

BEWEIS. Seien F und F' Flächen gleichen Geschlechts und $\tau_i: D^2 \rightarrow F$ und $\tau'_i: D^2 \rightarrow F'$ zwei Systeme von Einbettungen. Dann gibt es einen Diffeomorphismus $\alpha: F \rightarrow F'$ mit $\alpha \circ \tau_i = \tau'_i$. Da F und F' diffeomorph sind, folgt das daraus, daß je zwei Systeme von Einbettungen in dieselbe Fläche ambient isotop sind. Seien nun für jedes i Orbitinvarianten (μ_i, ν_i) gegeben. Dann sind dadurch die ν_i nur modulo μ_i bestimmt. Analog für die gestrichelten Größen. Nach Voraussetzung ist $\mu_i = \mu'_i$. Wir wissen schon, daß die Dehn-Chirurgie dasselbe Resultat liefert, wenn

$$\begin{pmatrix} \nu_i & c_i \\ -\mu_i & d_i \end{pmatrix} \quad \text{durch} \quad \begin{pmatrix} \nu_i - k\mu_i & c_i + k\mu_i \\ -\mu_i & d_i \end{pmatrix}$$

ersetzt wird. Wir können deshalb annehmen, daß $F = F'$, $\tau_i = \tau'_i$, $\mu_i = \mu'_i$ und $\nu_i = \nu'_i$ ist.

Der zu findende Diffeomorphismus zwischen M und M' soll auf den jeweils angehefteten $S^1 \times D^2$ die Identität sein. Vermöge der σ_i und σ'_i unterscheiden sich diese Diffeomorphismen auf dem entsprechenden Randteil von $(F \setminus \bigcup_i U_i^\circ) \times S^1 = F_0 \times S^1$ um die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & c'_i d_i - c_i d'_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen, damit verträglich, einen Diffeomorphismus von $F_0 \times S^1$, der auf dem Orbitraum die Identität induziert. Jeder solche Diffeomorphismus hat die Form $(x, z) \mapsto (x, f(x)z)$ mit einer differenzierbaren Abbildung $f: F_0 \rightarrow S^1$, die beliebig wählbar ist. Wir haben jedoch ein gesuchtes f auf dem Rand von F_0 schon vorgegeben. Es existiert genau dann eine Erweiterung auf F_0 , wenn die Summe der Abbildungsgrade auf den Komponenten gleich Null ist. Diese Summe ist

$$\delta = \sum_{i=1}^m (c'_i d_i - c_i d'_i).$$

Wir multiplizieren die Summe mit $\mu = \prod_i \mu_i = \mu_i \cdot \hat{\mu}_i$. Die Gleichheit der Euler-Zahlen besagt $\sum_i \hat{\mu}_i d_i = \sum_i \hat{\mu}_i d'_i$. Wir setzen in $\mu\delta$ jeweils $c'_i \mu_i = 1 - \nu_i d'_i$ und $c_i \mu_i = 1 - \nu_i d_i$ ein und bedenken die Gleichheit der Euler-Zahlen. Es folgt $\delta = 0$. \square

Zum endgültigen Beweis des Klassifikationssatzes (?.12) bleibt also zu zeigen:

(1.18) Satz. *Jede Seifert-Faserung M ist zu einem Standardmodell mit denselben Invarianten äquivariant diffeomorph.*

BEWEIS. Jeden Ausnahmearbit benutzen wir zu einer Dehn-Chirurgie, und zwar derart, daß eine freie Operation entsteht. Wird eine Umgebung eines solchen Orbits durch die Einbettung $t: D^2(\nu) \times S^1(\mu) \rightarrow M$ gegeben, so haben wir Dehn-Chirurgie mit einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \nu & \mu \\ b & d \end{pmatrix} : S^1(1) \times S^1(0) \rightarrow S^1(\nu) \times S^1(\mu),$$

durchzuführen, was wegen der Teilerfremdheit von μ und ν möglich ist. Dabei können wir d in der Restklasse $\nu d \equiv 1 \pmod{\mu}$ frei wählen. Das Resultat ist eine freie S^1 -Mannigfaltigkeit M' mit der Euler-Zahl

$$e' = e + \sum_i \frac{d_i}{\mu_i} \in \mathbb{Z}.$$

Durch geeignete Wahl von d_i in der vorgeschriebenen Restklasse können wir erreichen, daß $e' = 0$ ist, also M' diffeomorph zu einem trivialen Bündel $\varphi: M' \cong F \times S^1$ über einer orientierten Fläche F . Die Einbettungen

$$\begin{array}{ccccc} S^1 \times D^2 & \xrightarrow{t_i} & M' & \xrightarrow{\varphi} & F \times S^1 \\ \downarrow \text{pr} & & & & \downarrow \text{pr} \\ D^2 & \xrightarrow{\tau_i} & & & F \end{array}$$

haben die Form $(g, x) \mapsto (\tau_i(x), \alpha_i(x)g)$ mit $\alpha_i: D^2 \rightarrow S^1$. Da die α_i nullhomotop sind, kann man φ so abändern, daß alle α_i konstant den Wert 1 haben. Wenn man mit den resultierenden Einbettungen die Dehn-Chirurgie wieder rückgängig macht, so erkennt man, daß M diffeomorph zu einem Standardmodell ist. \square

(1.19) Bemerkung. Wir haben im voranstehenden Beweis gesehen, daß die Invarianten einer Seifert-Faserung der Einschränkung unterliegen, daß

$$e + \sum_{i=1}^m \frac{d_i}{\mu_i}$$

eine ganze Zahl ist, wobei die d_i die Gleichung $\nu_i d_i \equiv 1 \pmod{\mu_i}$ erfüllen. Alle Invariantensysteme, die dieser Einschränkung genügen, lassen sich realisieren. \diamond

2 Algebraische Topologie von Seifert-Faserungen

Ist $T \subset \mathbb{Q}$ ein Unterring, so nennen wir eine 3-Mannigfaltigkeit M eine T -Homologiesphäre, wenn $H_*(M; T) \cong H_*(S^3; T)$ ist. Im Fall $T = \mathbb{Z}$ sprechen wir kürzer von *Homologiesphäre*.

Sei M eine Seifert-Faserung mit Orbitraum F und enthalte K alle Standgruppen. Dann haben wir eine exakte Homotopiesequenz

$$\pi_2(F) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(M/K) \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow 1.$$

Da M/K aus einer S^1 -Operation entsteht, ist $H_1(M; \mathbb{Q}) \cong H_1(M/K; \mathbb{Q})$. Ist also $H_1(M; \mathbb{Q}) = 0$, so ist auch $H_1(F; \mathbb{Q}) = 0$. Ist M eine \mathbb{Q} -Homologiesphäre, so ist also der Orbitraum $F = S^2$.

Wir bestimmen die erste Homologiegruppe einer Seifert-Faserung mit dem Orbitraum S^2 . Dazu gehen wir von den Standardmodellen aus. Seien D_1, \dots, D_r disjunkte abgeschlossene 2-Zellen in S^2 . Dann ist

$$C = (S^2 \setminus \bigcup_j D_j^\circ) \times S^1 = N \times S^1$$

eine 3-Mannigfaltigkeit mit r Randkomponenten $S_i \times S^1$. An diese Randkomponenten wird jeweils ein Exemplar $S_i \times D^2$ mit einem Diffeomorphismus φ_i

$$N \times S^1 \supset S_i \times S^1 \xleftarrow{\varphi_i} S_i \times S^1 \subset S_i \times D^2$$

angeheftet, der zu einer Matrix

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & c_i \\ b_i & d_i \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

gehört. Sei M das Resultat. Wir bestimmen $H_1(M)$ aus der Mayer-Vietoris-Sequenz, die zu dieser Anheftung gehört. Sie zeigt, daß $H_1(M)$ der Kokern der darin vorkommenden Abbildung

$$\alpha: H_1(\coprod_i S_i \times S^1) \rightarrow H_1(C) \oplus H_1(\coprod_i S_i \times D^2)$$

ist. Wir wählen geeignete Erzeugende der Homologiegruppen, und zwar:

$$\begin{aligned} H_1(C) & : y = [S_i \times 1], \quad y = [x \times S^1] \\ H_1(\coprod_i S_i \times D^2) & : e_i = [S_i \times 1] \\ H_1(\coprod_i S_i \times S^1) & : u_i = [S_i \times 1], \quad v_i = [1 \times S^1]. \end{aligned}$$

Die Bezeichnung bedeutet, daß die in den Klammern stehende orientierte Untermannigfaltigkeit die Homologiekategorie repräsentiert. Es gibt zwischen diesen Elementen noch eine Relation

$$\sum_{i=1}^r y_i = 0,$$

weil $\Pi_i S_i$ orientierter Rand von N ist. Die Abbildung α hat bezüglich dieser Basen die Gestalt:

$$u_i \mapsto (a_i y_i + c y, e_i) \quad v_i \mapsto (b_i y_i + d_i y, 0).$$

Eine kleine Diagrammjagd zeigt: Kern und Kokern von α sind isomorph zum Kern und Kokern von

$$v_i \mapsto b_i y_i + d_i y.$$

Um die Relation zwischen den y_j zu berücksichtigen, führen wir ein weiteres Basiselement v_0 ein, das auf $y_1 + \dots + y_r$ abgebildet wird. Bezüglich der Basen (v_0, \dots, v_r) und (y_1, \dots, y_r, y) hat die fragliche Abbildung die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & b_r \\ 0 & d_1 & d_2 & \dots & d_r \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $\hat{b}_i = \prod_{j \neq i} b_j$, so berechnet man die Determinante durch Induktion nach r zu

$$(2.1) \quad k = (-1)^r \sum_{i=1}^r d_i \hat{b}_i.$$

Wir erhalten damit das Resultat des nächsten Satzes. Man beachte dazu, daß wegen Poincaré-Dualität und universeller Koeffizientenformel $H_2(M) = 0$ ist, wenn $H_1(M)$ endlich ist.

(2.2) Satz. *Genau dann ist M eine \mathbb{Q} -Homologiesphäre, wenn $\sum_{i=1}^r d_i \hat{b}_i \neq 0$ ist. Die Ordnung von $H_1(M; \mathbb{Z})$ ist in diesem Fall gleich $|k|$ in (??1). Genau dann ist M eine Homologiesphäre, wenn $k = \pm 1$ ist. \square*

Wir erinnern daran, daß die Seifert-Invarianten dieser Konstruktion durch $(0, e; (-b_1, a_1), \dots, (-b_m, a_m))$ gegeben sind. Hierbei dürfen einige der $b_i = -1$ sein, liefern also reguläre Orbits. Deshalb sollten die $b_i < 0$ gewählt werden. Die Euler-Zahl ist

$$e = \sum_{i=1}^r \frac{d_i}{b_i}.$$

Durch diese Daten ist M bestimmt, also auch $H_1(M; \mathbb{Z})$. Die Ordnung dieser Gruppe ist $|k|$ mit $k = e \prod_i (-b_i)$.

Wir bestimmen nun die Fundamentalgruppe der vorstehenden Seifert-Faserungen mit dem Satz von Seifert und van Kampen.

(2.3) Satz. *Sei M eine Seifert-Faserung mit Orbitraum S^2 und Invarianten $(0, e; (\mu_1, \nu_1), \dots, (\mu_m, \nu_m))$. Dann hat $\pi_1(M)$ die folgende Präsentation*

$$\langle s_1, \dots, s_m, f \mid [s_i, f] = s_1^{\mu_i} f^{d_i} = f^E \prod_{i=1}^m s_i = 1 \rangle.$$

Darin wird f durch eine reguläre Faser der S^1 -Operation repräsentiert. Ferner ist $E = e + \sum_{i=1}^m \frac{d_i}{\mu_i}$ und $\nu_i d_i \equiv 1 \pmod{\mu_i}$.

BEWEIS. Die Mannigfaltigkeit entstehe als Standardmodell durch die voranstehende Konstruktion. Dabei seien $(-b_i, a_i) = (\mu_i, \nu_i)$ für $1 \leq i \leq m$ gewählt und $(-b_0, a_0) = (1, 0)$, sowie ganze Zahlen d_i mit $\nu_i d_i \equiv a_i d_i \equiv 1 \pmod{\mu_i}$ und

$$0 = e + \sum_{i=0}^m \frac{d_i}{\mu_i}.$$

Dann führt man die Konstruktion mittels $(-b_0, a_0), \dots, (-b_m, a_m)$ aus. Es entsteht M aus einem Pushout-Diagramm des folgenden Typs:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i=0}^m S_i \times S^1 & \xrightarrow{\Pi \varphi_i} & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i=0}^m S_i \times D^2 & \longrightarrow & M \end{array}$$

mit $C = (S^2 \setminus \bigcup_i D_i^\circ) \times S^1$. Es ist

$$\pi_1(C) = \langle s_0, \dots, s_m, f \mid \prod_{i=0}^m s_i = 1 = [s_j, f] \rangle.$$

Dabei werden die s_i durch positiv orientierte Schleifen um den Rand S_i , verbunden mit einem Grundpunkt $*$, repräsentiert. Ferner wird f durch $\{*\} \times S^1$ repräsentiert. Seien u_i und v_i die durch $S_i \times 1$ und $* \times S^1$ in $S_i \times S^1$ gegebenen Elemente. Diese haben den Grundpunkt $(*, 1)$. Vermöge der Anheftung von $S_i \times D^2$ mittels

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} a_i & c_i \\ b_i & d_i \end{pmatrix}$$

wird die Relation $s_i^{b_i} f^{d_i} = 1$ hinzugefügt, denn v_i wird bei φ_i auf ein zu $s_i^{b_i} f^{d_i}$ konjugiertes (durch Grundpunktverschiebung) Element abgebildet, und v_i wird in $S_i \times D^2$ nullhomotop. Insgesamt erhält man die Präsentation

$$\langle s_0, \dots, s_m, f \mid \prod_{i=0}^m s_i = 1 = [s_j, f] = s_j^{b_j} f^{d_j} \rangle.$$

Nun ist aber $b_0 = -1 = -\mu_0$ und deshalb $-\frac{d_0}{\mu_0} = d_0 = E$. Die Relation für $j = 0$ liefert $s_0^{-1}f^E = 1$. Wenn man dieses einsetzt und die s_i für $i \geq 1$ durch ihre Inversen ersetzt, erhält man die im Satz angegebene Präsentation. \square

Indem man die bekannten Fundamentalgruppen der Flächen benutzt erhält man mit analogem Beweis:

(2.4) Satz. *Die Fundamentalgruppe einer Seifert-Faserung mit den Invarianten $(g, e; (\mu_1, \nu_1), \dots, (\mu_m, \nu_m))$ hat die Erzeugenden*

$$f, s_1, \dots, s_m, a_1, b_1, a_g, b_g$$

und die Relationen

$$[s_i, f] = [a_i, f] = [b_i, f] = s_i^{\mu_i} d^{d_i} = f^E \cdot \prod_i s_i \cdot \prod_j [a_j, b_j] = 1.$$

Darin ist wiederum $E = e + \sum \frac{d_i}{\mu_i} \in \mathbb{Z}$, und f wird durch eine reguläre Faser repräsentiert. Die Fundamentalgruppe des Orbitraumes ist bekanntlich $\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_j [a_j, b_j] = 1 \rangle$. Die Orbitabbildung induziert die Projektion, die s_j und f auf 1 abbildet und die a_j, b_j identisch. \square

(2.5) Beispiel. Jede glatte fixpunktfreie S^1 -Operation von S^1 auf S^3 ist orientiert äquivariant diffeomorph zu einer Operation der Form (??). Außer den bisher bewiesenen Sätzen benutzt man zum Beweis dieser Behauptung, daß eine Gruppe der Form $\langle s_1, \dots, s_m, f \mid [s_i, f] = s_i^{\mu_i} f^{d_i} = f^E \prod_i s_i = 1 \rangle$ für $m \geq 3$ und $\mu_i > 1$ niemals trivial ist. Um Letzteres einzusehen, dividiert man das im Zentrum liegende Element f heraus. Es entsteht $\langle s_1, \dots, s_m \mid s_i^{\mu_i} \prod s_j = 1 \rangle$. Es genügt, den Fall $m = 3$ zu betrachten. Die fragliche Gruppe hat die Form

$$T(a, b, c) = \langle x, y \mid x^a = y^b = (xy)^c = 1 \rangle.$$

Gruppen dieser Form heißen *Schwarzsche Dreiecksgruppen*. Sie treten in der Theorie der Riemannschen Flächen auf und sind als nichttrivial bekannt (siehe ??). Um eine Operation auf S^3 zu erhalten, dürfen also höchstens zwei Ausnahmearbits auftreten. Die möglichen Fällen sind jetzt schnell aufgezählt. \diamond

(2.6) Beispiel. Sei $B = B(p, q, r)$ mit paarweise teilerfremden p, q, r . Die Ordnung von $H_1(B)$ ist $|epqr|$, also gleich 1. Deshalb handelt es sich um eine Homologiesphäre. Wir können nach den allgemeinen Sätzen die Fundamentalgruppe bestimmen. Es ergibt sich

$$\pi_1(B) = \langle s_1, s_2, s_3, f \mid [s_i, f] = 1 = s_1^p f^{d_p} = s_2^q f^{d_q} = s_3^r f^{d_r} = s_1 s_2 s_3 \rangle$$

wobei $d_p q r + d_q p r + d_r p q = 1$ angesetzt wird, was wegen der paarweisen Teilerfremdheit möglich ist. In diesem Fall ist $E = 0$.

Sei speziell $(p, q, r) = (2, 3, 5)$. Dann ist $d_p = -1, d_q = d_r = 1$. In der Fundamentalgruppe lassen sich s_1 und f durch s_2 und s_3 ausrechnen, und es verbleibt

$$\langle s_2, s_3 \mid s_2^3 = s_3^5 = (s_2 s_3)^2 \rangle = \tilde{I}.$$

Es ist bekannt, daß \tilde{I} die binäre Ikosaedergruppe der Ordnung 120 ist (siehe ??). Diese Gruppe ist eine Untergruppe von $SU(2)$. Es ist $SU(2)$ diffeomorph zu S^3 ; gruppentheoretisch sind das die Quaternionen der Norm 1. Der Faktorraum S^3/\tilde{I} ist die berühmte Poincaré-Sphäre. Um diese mit $B(2, 3, 5)$ zu identifizieren, betrachtet man die S^1 -Operation, die durch den maximalen Torus von $SU(2)$ induziert wird. Man erhält dann drei Ausnahmefasern mit denselben lokalen Invarianten wie bei $B(2, 3, 5)$. Da die Gruppe perfekt ist, so ist auch $SU(2)/\tilde{I}$ eine Homologiesphäre, das heißt, die Seifert-Faserung hat auch die Euler-Zahl $-1/(2 \cdot 3 \cdot 5)$. \diamond

3 Verheftungen

Kragen werden dazu benutzt, um Mannigfaltigkeiten entlang gemeinsamer Randteile zu verheften und das Resultat mit einer differenzierbaren Struktur zu versehen. Ferner kann mit Hilfe von Kragen dem Produkt zweier Mannigfaltigkeiten mit Rand wieder eine differenzierbare Struktur gegeben werden („Glätten der Kanten oder Ecken“).

(3.1) Randverheftung. Seien M_1 und M_2 Mannigfaltigkeiten mit Rand. Gegeben seien Teilmengen $N_i \subset \partial M_i$, die jeweils offen und abgeschlossen in ∂M_i sind (also Vereinigung von Zusammenhangskomponenten des Randes). Sei $\varphi: N_1 \rightarrow N_2$ ein Diffeomorphismus. Wir bezeichnen mit $M = M_1 \cup_\varphi M_2$ den topologischen Raum, der aus der disjunkten Summe $M_1 + M_2$ durch Identifikation von $x \in N_1$ mit $\varphi(x) \in N_2$ entsteht. Wir bezeichnen das Bild von M_i in M wieder mit M_i . Dann ist $M_i \subset M$ abgeschlossen und $M_i \setminus N_i \subset M$ offen. Diese Vereinbarung führt allerdings zur Verwirrung $N_1 = N_2$. Wir wollen M mit der Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit versehen.

Wir wählen Kragen (für die Teile N_i) $k_i: \mathbb{R}_- \times N_i \rightarrow M_i$ mit offenem Bild $U_i \subset M_i$. Die Abbildung

$$k: \mathbb{R} \times N_1 \rightarrow M, \quad (t, x) \mapsto \begin{cases} k_1(t, x) & t \leq 0 \\ k_2(-t, \varphi(x)) & t \geq 0 \end{cases}$$

ist eine Einbettung mit dem in M offenen Bild $U = U_1 \cup_\varphi U_2$. Wir definieren eine differenzierbare Struktur \mathcal{D}_k (abhängig von der Wahl der Kragen k_i) durch die Forderung, daß $M_i \setminus N_i \rightarrow M$ und k glatte Einbettungen sein sollen. Das ist möglich, weil dadurch auf den Schnitten $(M_i \setminus N_i) \cap U$ die Struktur eindeutig festgelegt ist. Dieselbe Struktur ergibt sich, wenn statt k die Einschränkung k_ε von k auf $] -\varepsilon, \varepsilon[\times N_1$ (oder auf irgendeine andere offene Umgebung von $0 \times N_1$ in $\mathbb{R} \times N$) verwendet wird. Die differenzierbare Struktur im engeren Sinne hängt von der Wahl der Kragen ab. \diamond

(3.2) Produkte. Seien M_1 und M_2 glatte ∂ -Mannigfaltigkeiten. Dann ist $M_1 \times M_2 \setminus (\partial M_1 \times \partial M_2)$ in kanonischer Weise eine glatte Mannigfaltigkeit, indem man Produkte von Karten für M_i als neue Karten verwendet. Mit Kragen $k_i: \partial M_i \times [0, \infty[\rightarrow M_i$ betrachten wir die zusammengesetzte Abbildung λ

$$\begin{array}{ccc} \partial M_1 \times \partial M_2 \times \mathbb{R}_+^2 & \xrightarrow{\text{id} \times \pi} & \partial M_1 \times \partial M_2 \times \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}_+^1 \\ \downarrow \lambda & & \downarrow (1) \\ M_1 \times M_2 & \xleftarrow{k_1 \times k_2} & (\partial M_1 \times \mathbb{R}_+^1) \times (\partial M_2 \times \mathbb{R}_+^1). \end{array}$$

Darin ist $\pi: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}_+^1, (r, \varphi) \mapsto (r, \frac{1}{2}\varphi)$, geschrieben in Polarkoordinaten (r, φ) , und die Abbildung (1) ist die Vertauschung des 2. und 3. Faktors. Es gibt genau eine differenzierbare Struktur auf $M_1 \times M_2$, bezüglich der $M_1 \times M_2 \setminus (\partial M_1 \times \partial M_2) \subset M_1 \times M_2$ und λ Diffeomorphismen auf offene Teile

von $M_1 \times M_2$ sind. Wiederum führt eine andere Wahl der Kragen zu diffeomorphen Mannigfaltigkeiten. \diamond

(3.3) Randteile. Oft sind Mannigfaltigkeiten an gemeinsamen Randstücken zu identifizieren. Die differenzierbare Struktur wird dabei folgendermaßen definiert. Seien B und C glatte n -Mannigfaltigkeiten mit Rand. Sei M eine glatte $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit mit Rand, und seien

$$\varphi_B: M \rightarrow \partial B, \quad \varphi_C: M \rightarrow \partial C$$

glatte Einbettungen. Wir identifizieren in $B+C$ jeweils $\varphi_B(m)$ mit $\varphi_C(m)$ für alle $m \in M$. Das Resultat D erhält eine differenzierbare Struktur mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) $B \setminus \varphi_B(M) \subset D$ ist glatte Untermannigfaltigkeit.
- (2) $C \setminus \varphi_C(M) \subset D$ ist glatte Untermannigfaltigkeit.
- (3) $\iota: M \rightarrow D$, $m \mapsto \varphi_B(m) \sim \varphi_C(m)$ ist eine glatte Einbettung als eine Untermannigfaltigkeit vom Typ 1.
- (4) Der Rand von D ist diffeomorph zur Verheftung von $\partial B \setminus \varphi_B(M)^\circ$ mit $\partial C \setminus \varphi_C(M)^\circ$ vermöge $\varphi_B(m) \sim \varphi_C(m)$, $m \in \partial M$.

Natürlich sind (1) und (2) bezüglich der kanonischen Einbettungen $B \subset D \supset C$ zu lesen. Karten sind um die Punkte von $\iota(M)$ zu definieren, da die Forderungen (1) und (2) festlegen, was in den anderen Punkten zu geschehen hat. Für die Punkte von $\iota(M \setminus \partial M)$ verwendet man Kragen von B und C wie beim Verheften von Mannigfaltigkeit mit Rand. Für $\iota(\partial M)$ verfahren wir wie folgt.

Wir wählen Kragen $\kappa_B: \partial B \times \mathbb{R}_+ \rightarrow B$ und $\kappa: \partial M \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M$ sowie eine Einbettung $\tau_B: \partial M \times \mathbb{R} \rightarrow \partial B$, so daß folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} \partial M \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\tau_B} & \partial B \\ \uparrow \cup & & \uparrow \varphi_B \\ \partial M \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\kappa} & M \end{array}$$

Damit bilden wir

$$\Phi_B: \partial M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\tau_B \times \text{id}} \partial B \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\kappa_B} B.$$

Für C wählen wir entsprechend κ_C und τ_C . Jetzt soll aber $\varphi_C \circ \kappa^- = \tau_C$ gelten, wobei $\kappa^-(m, t) = \kappa(m, -t)$ gesetzt wird. Wir bilden analog Φ_C aus κ_C und τ_C . Die differenzierbare Struktur in einer Umgebung von $\iota(\partial M)$ wird dadurch festgelegt, daß die folgende Abbildung $\alpha: \partial M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow D$ als glatte Einbettung postuliert wird. Wir setzen

$$\alpha(m, r, \psi) = \begin{cases} \Phi_B(m, r, 2\psi - \pi), & \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi \\ \Phi_C(m, r, 2\psi), & 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

mit den üblichen Polarkoordinaten (r, ψ) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. \diamond

Eine allgemeine Methode, Mannigfaltigkeiten zu konstruieren, besteht darin, sie aus Mannigfaltigkeiten mit Rand durch Randverheftung zusammzusetzen. Wir geben einige Beispiele.

(3.4) Verbundene Summe. Seien M_1 und M_2 n -Mannigfaltigkeiten. Wir wählen glatte Einbettungen $s_i: D^n \rightarrow M_i$, die etwa vorhandene Ränder nicht treffen. In $M_1 \setminus s_1(E^n) + M_2 \setminus s_2(E^n)$ werde $s_1(x)$ mit $s_2(x)$ für alle $x \in S^{n-1}$ identifiziert. Das Resultat ist nach (3.1) eine glatte Mannigfaltigkeit, genannt die *verbundene Summe* $M_1 \# M_2$ von M_1 und M_2 . Bis auf Diffeomorphie ist die verbundene Summe im wesentlichen von der Wahl der Einbettungen unabhängig: Sind M_1, M_2 orientierte zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, so muß man die Einbettung s_1 als orientierungstreu, die Einbettung s_2 dagegen als untreu voraussetzen; dann trägt $M_1 \# M_2$ eine Orientierung, die $M_i \setminus s_i(E^n)$ als orientierte Teile besitzt, und der orientierte Diffeomorphietyp ist von der Wahl der s_i unabhängig. Ändert man die Orientierung einer Mannigfaltigkeit, so kann sich durchaus ein anderes Resultat ergeben. \diamond

Für geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten gibt es einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz über die Zerlegung bezüglich $\#$ in unzerlegbare Summanden, der auf H. Kneser [?] und Milnor [?] zurückgeht (siehe auch [60]).

(3.5) Henkel. Sei M eine n -Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir wählen eine Einbettung $s: S^{k-1} \times D^{n-k} \rightarrow \partial M$ und benutzen sie dazu, in $M + D^k \times D^{n-k}$ Punkte $s(x)$ und x zu identifizieren. Das Resultat, nach (3.3) mit einer glatten Struktur versehen, wird Anheften eines k -Henkels an M genannt. Ist M eine 3-Mannigfaltigkeit, vorgestellt als Körper im Raum, so entspricht dem Anheften eines 1-Henkels auch anschaulich das Anheften eines Henkels. Das Resultat der Anheftung hängt, auch bis auf Diffeomorphie, von der Wahl der Einbettung s ab. Ist etwa $M = D^n + D^n$, so kann man die beiden Kopien von D^n durch einen 1-Henkel verbinden oder nur an einen Summanden einen Henkel anheften.

Anheften eines Nullhenkels bedeutet die disjunkte Summe mit D^n . Anheften eines n -Henkels bedeutet, daß ein „Loch“ mit dem Rand S^{n-1} geschlossen wird.

Es ist eine fundamentale Tatsache, daß sich jede (glatte) Mannigfaltigkeit durch sukzessives Anheften von Henkeln aus der leeren Mannigfaltigkeit gewinnen läßt. Ein Beweis kann mit der nach Marston Morse benannten Morse-Theorie geführt werden (siehe etwa [100] [102]). \diamond

(3.6) Elementare Chirurgie. Entsteht M' aus M durch Anheften eines k -Henkels, so wird $\partial M'$ aus ∂M durch einen Prozeß gewonnen, der *elementare Chirurgie* genannt wird. Es handelt sich um die folgende Konstruktion. Sei $h: S^{k-1} \times D^{n-k} \rightarrow X$ eine Einbettung in eine $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit mit Bild U . Dann hat $X \setminus U^\circ$ ein Randstück, das vermöge h zu $S^{k-1} \times S^{n-k-1}$ diffeomorph ist. Dieses fassen wir als Rand von $D^k \times S^{n-k-1}$ auf und verheften die Randteile mittels h ; symbolisch

$$X' = (X \setminus U^\circ) \cup_h D^k \times S^{n-k-1}.$$

Der auf diese Weise hergestellte Übergang von X nach X' wird *elementare Chirurgie vom Index k an X* vermöge h genannt. Als *Chirurgie* an X bezeichnet man eine mehrmals angewendete elementare Chirurgie. Die Methode der Chirurgie ist äußerst flexibel und wirkungsvoll, um Mannigfaltigkeiten mit vorgegebenen topologischen Eigenschaften zu konstruieren.

In der Flächentheorie bezeichnet man die elementare Chirurgie vom Index 1 auch als Ansetzen eines Henkels an die Fläche. \diamond

(3.7) Dehn-Chirurgie. Eine auf Dehn [?] zurückgehende Methode zur Konstruktion dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten besteht darin, einen Volltorus herauszubohren und ihn auf neue Art wieder einzusetzen. Sei $t: D^2 \times S^1 \rightarrow M$ eine glatte Einbettung in eine 3-Mannigfaltigkeit mit dem Bild $U = t(E^2 \times S^1)$. Man hefte $S^1 \times D^2$ an $M \setminus U$ an, indem $(z, w) \in S^1 \times S^1 \subset S^1 \times D^2$ mit $t(z^a w^b, z^c w^d)$ identifiziert wird. Hierbei sei $ad - bc = 1$ vorausgesetzt; dann ist die Verheftungsabbildung ein Diffeomorphismus. Das Resultat der Verheftung sei M' . Bei gegebenem t bezeichnen wir den Übergang von M nach M' als Dehn-Chirurgie mittels $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ oder als $-\frac{b}{a}$ -Dehn-Chirurgie. Im Falle $d = 0$ ist unter $\frac{b}{a}$ das Symbol ∞ zu verstehen.

Ist M orientiert, so sei t als orientierungstreu vorausgesetzt. Es trage S^1 und D^2 die Standard-Orientierung und $S^1 \times S^1$ in der obigen Konstruktion jeweils die Rand-Orientierung von $S^1 \times D^2$ oder $D^2 \times S^1$.

Ist $M = S^3$, so soll man sich das Bild von t als eine Verdickung des Knotens $t(0 \times S^1)$ vorstellen. Es läßt sich Dehn-Chirurgie simultan an mehreren solchen disjunkten Einbettungen durchführen. Die verwendeten Knoten können dann noch miteinander verschlungen sein. Jede orientierbare 3-Mannigfaltigkeit läßt sich auf diese Weise aus S^3 durch Dehn-Chirurgie erzeugen ([?] [?]). Natürlich gibt es sehr viele verschiedene Prozesse, die zu derselben 3-Mannigfaltigkeit führen. Trotzdem kann diese Methode zu einem effektiven Werkzeug ausgebaut werden, wie Kirby [?] gezeigt hat, weshalb man auch vom *Kirby-Kalkül* spricht.

(3.8) Beispiel. Für die Teilmengen

$$D_1 = \{(x, y) \mid \|x\|^2 \geq 1/2, \|y\|^2 \leq 1/2\}, D_2 = \{(x, y) \mid \|x\|^2 \leq 1/2, \|y\|^2 \geq 1/2\}$$

von $S^{m+n+1} \subset \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ gibt es Diffeomorphismen $D_1 \cong S^m \times D^{n+1}$, $D_2 \cong D^{m+1} \times S^n$. Die Unterräume D_i sind glatte Untermannigfaltigkeiten mit Rand von S^{m+n+1} . Deshalb läßt sich S^{m+n+1} also aus $S^m \times D^{n+1}$ und $D^{m+1} \times S^n$ erhalten, indem entlang des gemeinsamen Randes $S^m \times S^n$ mit der Identität verheftet wird. Ein Diffeomorphismus $D_1 \rightarrow S^m \times D^{n+1}$ wird durch $(z, w) \mapsto (\|z\|^{-1}z, \sqrt{2}w)$ gegeben. \diamond

(3.9) Beispiel. Ist M eine Mannigfaltigkeit mit nichtleerem Rand, so kann man zwei Exemplare des Randes durch die Identität des Randes verheften: Es entsteht das *Doppel* $D(M)$ von M . Hat man nach dem Whitney'schen Einbettungssatz $D(M)$ eingebettet, so auch M . Ist M kompakt, so ist $D(M)$ selbst Rand einer Mannigfaltigkeit B . Topologisch läßt sich B durch $M \times I$ angeben. Eine andere Vorstellung von B : Man lasse M um ∂M um 180° rotieren. \diamond

Das Resultat einer Dehn-Chirurgie mittels $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ hängt nur von der rationalen Zahl $\frac{b}{d}$ (oder ∞) ab. Um das einzusehen beachte man: Wird eine Mannigfaltigkeit B mittels Diffeomorphismen $f_1, f_2: \partial B \rightarrow \partial M$ angeheftet und gibt es einen Diffeomorphismus $f: B \rightarrow B$, der $f_1 f = f_2$ erfüllt, so liefern beide Anheftungen diffeomorphe Ergebnisse. Der Diffeomorphismus

$$S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1, \quad (z, w) \mapsto (z^k w^l, z^m w^n)$$

läßt sich durch dieselbe Formel zu einen Diffeomorphismus von $S^1 \times D^2$ erweitern, sofern $l = 0$ ist. Deshalb kann man auch Dehn-Chirurgie mittels

$$\begin{pmatrix} a + kb & b \\ c + kd & d \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -a + kb & -b \\ -c + kd & -d \end{pmatrix}$$

durchführen, um dasselbe Ergebnis zu erhalten. Da b und d teilerfremd sind, sind mit einer Lösung (a, c) von $ad - bc = 1$ alle anderen durch $(a + bk, c + dk)$, $k \in \mathbb{Z}$ gegeben. \diamond

Ein dreidimensionaler *Henkelkörper* H entsteht aus D^3 durch Anheften von 1-Henkeln. Ist $f: \partial H \rightarrow \partial H$ ein Diffeomorphismus, so entsteht aus zwei Exemplaren H durch Identifikation mittels f eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Die Daten (H, f) nennt man eine *Heegaard-Zerlegung*, nach der Dissertation von Heegaard 1898, die 1916 in französischer Übersetzung erschien [?]. Jede geschlossene 3-Mannigfaltigkeit besitzt eine Heegaard-Zerlegung [60]. \diamond

(3.10) Aufgaben und Ergänzungen.

1. $M \# S^n$ ist immer zu M diffeomorph.

4 Homotopiesphären

Eine geschlossene (glatte) n -Mannigfaltigkeit M heißt *Homotopiesphäre*, wenn sie zur Sphäre S^n homotopieäquivalent ist. Falls dann M nicht diffeomorph zu S^n ist, so nennen wir M eine *exotische Sphäre*. Aus dem Satz von Hurewicz und dem Satz von Whitehead folgt, daß für $n > 1$ eine geschlossene Mannigfaltigkeit genau dann eine Homotopiesphäre ist, wenn sie einfach zusammenhängend ist und $H_*(M; \mathbb{Z})$ zu $H_*(S^n; \mathbb{Z})$ isomorph ist. Wegen $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$ ist eine n -Homotopiesphäre (homologisch) orientierbar. Setzt man nur die Isomorphie der Homologiegruppen voraus aber nichts über die Fundamentalgruppe, so spricht man von einer *Homologiesphäre*.

(4.1) Notiz. Sei M eine n -Homotopiesphäre. Dann ist $M \setminus p$ zusammenziehbar. Ebenso $M \setminus U$, falls \bar{U} zu D^n homöomorph ist.

BEWEIS. \square

(4.2) Verdrillte Sphären. Sei $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ ein Diffeomorphismus. Wir benutzen ihn dazu, um aus $D^n + D^n$ durch Randverheftung die Mannigfaltigkeit

$M(f) = D^n \cup_f D^n$ herzustellen. Die Mannigfaltigkeit $M(f)$ ist homöomorph zur Sphäre $M(id) = S^n$. Zum Beweis ?? \diamond

(4.3) Satz. *Sind $f, g: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ diffeotop, so sind $M(f)$ und $M(g)$ diffeomorph. Die verbundene Summe $M(f) \# M(g)$ ist orientiert diffeomorph zu $M(fg)$.*

BEWEIS. \square

(4.4) Satz. *Die verbundene Summe zweier Homotopiesphären ist wieder eine.*

BEWEIS. \square

Sei Θ_n die Menge der orientierten Diffeomorphieklassen n -dimensionaler Homotopiesphären. Die verbundene Summe induziert auf Θ_n eine assoziative und kommutative Verknüpfung mit neutralem Element S^n . Es fragt sich, ob es Inverse gibt. Jedenfalls ist $M(f^{-1})$ invers zu $M(f)$. Als Vorbereitung dient:

(4.5) Satz. *Sei M eine n -Homotopiesphäre. Dann ist $M \# (-M)$ Rand einer zusammenziehbaren, orientierten, kompakten Mannigfaltigkeit.*

BEWEIS. \square

(4.6) Beispiel. Sei $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, $a_i \geq 2$ ganz, seien a_0 und a_1 jeweils teilerfremd zu den restlichen a_j . Dann ist die Brieskorn–Mannigfaltigkeit $B(a)$ eine \mathbb{Z} -Homologiesphäre. Für $n \geq 3$ ist $B(a)$ einfach zusammenhängend, also eine Homotopiesphäre.

BEWEIS. \square

Ein h -Kobordismus $(B; M_0, M_1)$ zwischen geschlossenen Mannigfaltigkeiten M_i ist ein Bordismus B zwischen ihnen, für den die Inklusionen $M_i \subset B$ h -Äquivalenzen sind. Wir zitieren zu weiterem Gebrauch den berühmten

(4.7) h -Kobordismensatz. *Sei $n \geq 5$. Sei B ein h -Kobordismus zwischen den n -Mannigfaltigkeiten M_i . Dann gibt es einen Diffeomorphismus $B \rightarrow M_0 \times [0, 1]$, der auf M_0 die Identität ist. Insbesondere sind M_0 und M_1 diffeomorph.* \square

(4.8) Satz. *Sei $n \geq 5$. Die einfach zusammenhängende geschlossene n -Mannigfaltigkeit M sei Rand einer kompakten zusammenziehbaren Mannigfaltigkeit W . Dann ist M diffeomorph zu S^n*

BEWEIS. \square

(4.9) Folgerung. *In Θ_n ist für $n \geq 5$ $[-M]$ invers zu $[M]$. Wir haben damit die Gruppe der Homotopiesphären Θ_n zur Verfügung. Falls $\Theta_n \neq 0$ ist, so gibt es n -dimensionale exotische Sphären.* \square

BEWEIS. \square

(4.10) Satz. *Für $n \geq 6$ ist jede Homotopiesphäre eine verdrillte Sphäre, insbesondere auch homöomorph zu einer Sphäre.*

BEWEIS.

□

Der vorstehende Satz ist auch für $n \neq 3$ richtig. Im Fall $n \leq 2$ ist das klassisch. Für $n = 5$ siehe ??, für $n = 4$ siehe ?. Der Fall $n = 3$ ist die berühmte Poincarésche Vermutung.

9 Morse-Theorie

1 Morse-Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung der Null und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit dem kritischen Punkt Null, das heißt, das Differential $Df(0)$ von f im Nullpunkt ist Null oder äquivalent, alle partiellen Ableitungen $D_i f(0)$ von f im Nullpunkt sind Null. Die symmetrische Matrix der zweiten partiellen Ableitungen

$$Hf(0) = D^2 f(0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)$$

heißt *Hesse-Matrix* von f . Der kritische Punkt heißt *regulär* oder *nichtausgeartet*, wenn diese Matrix regulär ist. Das Differential $Df: U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ hat die Ableitung $D^2 f: U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$. Wir identifizieren den letzten Hom-Raum wie üblich mit dem Vektorraum der Bilinearformen auf \mathbb{R}^n . Die Bilinearform $D^2 f(0)$ wird in den Standardkoordinaten durch die Hesse-Matrix beschrieben und heißt *Hesse-Form* des kritischen Punktes. Sei $\varphi: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus mit $\varphi(0) = 0$. Dann ist Null ein kritischer Punkt für $f \circ \varphi$ genau dann, wenn dieses für f der Fall ist. Aus der Kettenregel folgt

$$(1.1) \quad H(f \circ \varphi)(0) = D\varphi(0)^t \cdot Hf(0) \cdot D\varphi(0),$$

sofern der Nullpunkt für f kritisch ist. Also ist der Nullpunkt genau dann für $f \circ \varphi$ regulär, wenn dieses für f gilt.

Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und p ein kritischer Punkt von f . Seien $X_p, Y_p \in T_p M$ und seien X, Y in einer Umgebung von p definierte glatte Vektorfelder mit den Werten $X(p) = X_p$ und $Y(p) = Y_p$. Dann gilt für die Lie-Klammer $X_p(Yf) - Y_p(Xf) = [X, Y]_p f = 0$. Die Abbildung

$$H_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X_p, Y_p) \mapsto X_p Y_p f$$

ist deshalb unabhängig von der Wahl von X und Y und eine symmetrische Bilinearform, genannt die *Hesse-Form* von f im kritischen Punkt p . Wählen wir lokale Koordinaten um p , so wird in der Basis $(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)$ die Hesse-Form von f in diesen Koordinaten durch die oben genannte Hesse-Matrix repräsentiert.

Ist H eine symmetrische Matrix, so heißt die Anzahl der negativen Eigenwerte der *Index* der Matrix und der zugehörigen Bilinearform.

(1.2) Satz. *Sei p ein nichtausgearteter kritischer Punkt vom Index i . Dann gibt es eine in p zentrierte Karte (U, φ, V) um p , so daß $f \circ \varphi^{-1}$ die Form*

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto f(p) - y_1^2 - \dots - y_i^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_n^2$$

hat.

BEWEIS. Da es sich um ein lokales Problem handelt, können wir annehmen, daß M eine offene Kugel $U_\varepsilon(0)$ des \mathbb{R}^n ist, p der Nupunkt und $f(0) = 0$. Es gibt eine Darstellung $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$ mit glatten g_i . Da 0 kritischer Wert ist, gilt $g_i(0) = 0$. Wir wenden auf die g_i eine ebensolche Darstellung an und erhalten $f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x)$ mit glatten Funktionen h_{ij} . Ohne wesentliche Einschränkung sei $h_{ij} = h_{ji}$. Die Matrix $H(x) = (h_{ij}(x))$ ist an der Stelle $x = 0$ die Hesse-Matrix H und nach Voraussetzung regulär. Sei $S_n(\mathbb{R})$ die Menge der symmetrischen $n \times n$ -Matrizen. Die Abbildung $\Psi: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R}), X \mapsto X^t H X$ ist in einer Umgebung der Einheitsmatrix eine Submersion. Es gibt daher eine offene Umgebung $U(H)$ von H in $S_n(\mathbb{R})$ und einen glatten Schnitt $\Theta: U(H) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ von Ψ . Sei U eine Umgebung der Null, so daß für $x \in U$ die Matrix $H(x)$ in $U(H)$ liegt. Dann gilt für $x \in U$ die Gleichung (Θ Schnitt von Ψ)

$$\Theta(H(x))^t \cdot H \cdot \Theta(H(x)) = H(x)$$

und deshalb

$$f(x) = \langle H(x), x \rangle = \langle H \cdot \Theta(H(x))x, \Theta(H(x))x \rangle.$$

Die Abbildung $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \Theta(H(x))x$ hat an der Stelle 0 das Differential $\Theta(H(0)) = E$. Also ist φ in einer Umgebung der Null eine Koordinatentransformation. In den neuen Koordinaten hat f die Gestalt $f(\varphi^{-1}(u)) = \langle Hu, u \rangle$. Zum Schluß hat man noch H nach den Erkenntnissen der linearen Algebra auf die richtige Diagonalgestalt zu transformieren, was wegen (1.1) zum Ziel führt. \square

Aus diesem sogenannten *Morse-Lemma* folgt, daß ein regulärer kritischer Punkt ein isolierter kritischer Punkt ist.

Wir nennen f eine *Morse-Funktion*, wenn sämtliche kritischen Punkte regulär sind. Sei B eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial B = V + W$, der in zwei disjunkte geschlossene Mannigfaltigkeiten V und W zerlegt ist, die aber selbst nicht zusammenhängend sein müssen. Eine glatte Funktion $f: B \rightarrow [a, b]$ heißt *Morse-Funktion* des Bordismus $(B; V, W)$, wenn gilt:

- (1) $V = f^{-1}(a)$ und $W = f^{-1}(b)$,
- (2) Die kritischen Punkte von f sind nichtausgeartet und liegen im Innern von B .

Wir werden alsbald die Existenz von Morse-Funktionen zeigen. Im Beweis werden die folgenden Hilfssätze gebraucht.

(1.3) Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Genau dann ist f eine Morse-Funktion, wenn $0 \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ kein kritischer Werte von $Df: U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist.*

BEWEIS. Die Menge $K(f)$ der kritischen Punkte von f ist das Urbild von $0 \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ bei Df . Sei $x \in K(f)$. Genau dann ist x nichtausgearteter kritischer Punkt, wenn $Df: U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ bei x ein bijektives Differential hat, das heißt, wenn x ein regulärer Punkt von Df ist. Sind alle $x \in K(f)$ reguläre Punkte von

Df , so heißt das definitionsgemäß: $0 \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist kein kritischer Wert von Df . \square

(1.4) Lemma. *Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und $\lambda \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Die Funktion $f_\lambda: x \mapsto f(x) - \lambda(x)$ ist genau dann eine Morse-Funktion, wenn λ kein kritischer Wert von Df ist. Für alle λ bis auf eine Nullmenge ist f_λ eine Morse-Funktion.*

BEWEIS. Es ist $Df_\lambda = Df - \lambda$. Genau dann ist Null ein regulärer Wert von Df_λ , wenn λ einer von Df ist. Die zweite Aussage folgt aus dem Satz von Sard. \square

Wir verwenden im nächsten Lemma Supremumnormen der ersten und zweiten Ableitungen $\|Df\|_K = \max(|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)| \mid x \in K, 1 \leq j \leq n)$ und $\|D^2f\|_K = \max(|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)| \mid x \in K, 1 \leq i, j \leq n)$.

(1.5) Lemma. *Sei $K \subset U$ kompakt. In K habe $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ nur nichtausgeartete kritische Punkte. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß alle glatten $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$\|Df - Dg\|_K < \delta, \quad \|D^2f - D^2g\|_K < \delta$$

ebenfalls nur nichtausgeartete kritische Punkte in K haben.

BEWEIS. Seien x_1, \dots, x_r die kritischen Punkte von f in K . Es gibt nur endlich viele, da K kompakt ist und nichtausgeartete Punkte isoliert liegen. Da in einem nichtausgearteten kritischen Punkt $\det(D^2f(x_j)) \neq 0$ ist, können wir ein $\varepsilon > 0$ so fixieren, daß für alle $x \in D_\varepsilon(x_j)$ die Determinante $\det(D^2f(x)) \neq 0$ ist. Es gibt dann ein $\delta > 0$, so daß für alle g mit $\|D^2f - D^2g\|_K < \delta$ und alle $x \in D_\varepsilon(x_j) \cap K$ auch $\det(D^2g(x)) > 0$ ist und somit alle kritischen Punkte von g in $K \cap D_\varepsilon(x_j)$ nichtausgeartet sind. Da f in $L = K \setminus \cup_j D_\varepsilon(x_j)$ keine kritischen Punkte hat, gibt es ein $c > 0$ mit $\|Df\|_L \geq c$. Wir wählen nun $\delta > 0$ außerdem so, daß für alle g mit $\|Df - Dg\|_K < \delta$ die Norm $\|Dg\| \geq c/2$ ist; dann liegen die kritischen Punkte von $g|_K$ in $\cup_j D_\varepsilon(x_j)$. \square

(1.6) Satz. *Jeder Bordismus $(B; V, W)$ besitzt eine Morse-Funktion*

BEWEIS. Es gibt zunächst einmal eine glatte Funktion $g: B \rightarrow [0, 1]$, die in einer Umgebung von ∂B keine kritischen Punkte hat und für die $V = g^{-1}(0)$ und $W = g^{-1}(1)$ ist. Eine derartige Funktion gibt sicher auf disjunkten Kragenumgebungen von V und W , und mit einer geeigneten Partition der Eins wird diese dann auf B erweitert (vergleiche (10.4)).

Sei U eine offene Umgebung von ∂B , auf der g keine kritischen Punkte hat. Sei P eine offene Umgebung von ∂B , deren Abschluß in U liegt. Sei (U_1, \dots, U_r) eine offene Überdeckung von $B \setminus P$ durch Kartenbereiche $U_j \subset B \setminus \partial B$ und (C_1, \dots, C_r) eine Überdeckung von $B \setminus P$ durch kompakte Mengen C_i mit $C_i \subset U_i$.

Es habe $g: B \rightarrow [0, 1]$ mit $g^{-1}(0) = V$ und $g^{-1}(1) = W$ auf $\bar{P} \cup C_1 \cup \dots \cup C_r$ für $0 \leq i < r$ nur nichtausgeartete kritische Punkte. Für $i = 0$ gibt es eine

derartige Funktion nach der Anfangsbemerkung (Induktionsanfang). Wir wählen kompakte Mengen Q und R , so daß

$$C_{i+1} \subset Q^\circ \subset Q \subset R^\circ \subset R \subset U_{i+1}$$

und wählen sodann eine glatte Funktion $\lambda: B \rightarrow [0, 1]$ mit $\lambda(Q) \subset \{1\}$ und $\lambda(B \setminus R^\circ) \subset \{0\}$. Sei $h_{i+1}: U_{i+1} \rightarrow V_{i+1}$ eine Kartenabbildung und sei $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linear. Wir betrachten

$$h: B \rightarrow \mathbb{R}, \quad b \mapsto g(b) + \lambda(b)L(h_{i+1}(b)).$$

Die Abbildungen h und g unterscheiden sich nur auf R . Um die kritischen Punkte zu untersuchen, genügt es, mit h_{i+1}^{-1} zusammzusetzen, und dann sehen wir mit (1.5), daß h für alle genügend kleinen L auf $(\bar{P} \cup C_1 \cup \dots \cup C_i) \cap R$ nur nichtausgeartete kritische Punkte hat. Da R einen endlichen Abstand von ∂B hat, so gilt auch für alle genügend kleinen L weiterhin $h^{-1}(0) = V$ und $h^{-1}(1) = W$, sowie $h(B) \subset [0, 1]$. Insgesamt erhalten wir ein h , das auf $\bar{P} \cup C_1 \cup \dots \cup C_i$ nur nichtausgeartete kritische Punkte hat. Nach (1.4) können wir L auch noch so wählen, daß h auf C_{i+1} nur nichtausgeartete kritische Punkte hat. Insgesamt erhalten wir den Induktionsschritt zur Verbesserung von g . \square

(1.7) Satz. *Sei f eine Morse-Funktion für das Tripel $(B; V, W)$ mit kritischen Punkten p_1, \dots, p_k . Dann gibt es eine Morse-Funktion g mit denselben kritischen Punkten, die überdies $g(p_i) \neq g(p_j)$ für $i \neq j$ erfüllt.*

BEWEIS. Wir ändern zunächst f zu f_1 so ab, daß für $i \neq 1$ immer $f_1(p_1) \neq f_1(p_i)$ gilt. Sei dazu N eine in $B \setminus \partial B$ gelegene kompakte Umgebung von p_1 , die p_i für $i \neq 1$ nicht enthält. Sei $\lambda: B \rightarrow [0, 1]$ eine glatte Funktion, die außerhalb von N gleich Null ist und in einer Umgebung von p_1 gleich eins. Sei $\varepsilon_1 > 0$ so klein, daß für $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ die Funktion $f + \varepsilon\lambda$ Werte in $[0, 1]$ hat und $f_1(p_1) \neq f_1(p_i)$ für $i \neq 1$ erfüllt.

Mit einer Riemannschen Metrik auf B bilden wir die Gradientenfelder von f und f_1 . Die Nullstellen des Gradientenfeldes sind die kritischen Punkte. Sei K die abgeschlossene Hülle von $\lambda^{-1}]0, 1[$. Außerhalb von K ist $\text{grad } f_1 = \text{grad } f$. Dort liegen also dieselben kritischen Punkte vor. Sie sind für f_1 ebenfalls nichtausgeartet. Da K keinen kritischen Punkt von f enthält, gibt es ein $c > 0$ mit $c \leq \|\text{grad } f(x)\|$ für alle $x \in K$. Sei $d > 0$ so gewählt, daß $\|\text{grad } \lambda(x)\| \leq d$ in K ist. Sei $0 < \varepsilon < \min(\varepsilon_1, c/d)$. Auf K gilt dann

$$\|\text{grad } (f + \varepsilon\lambda)\| \geq \|\text{grad } f\| - \varepsilon\|\text{grad } \lambda\| \geq c - \varepsilon d > 0.$$

Also hat f_1 auf K keine weiteren kritischen Punkte. Analog behandelt man induktiv die anderen Punkte p_i . \square

Die Sätze (1.5) und (1.6) haben die folgende Konsequenz. Sei B ein Bordismus zwischen V und W . Wir wählen eine Morse-Funktion $g: B \rightarrow [0, 1]$ wie in Satz

(1.6) und numerieren die kritischen Punkte so, daß $g(p_i) < g(p_{i+1})$ ist. Wir wählen c_i zwischen $g(p_i)$ und $g(p_{i+1})$. Dann sind

$$g^{-1}[0, c_1], g^{-1}[c_1, c_2], \dots, g^{-1}[c_{r-1}, 1]$$

Bordismen, die eine Morse-Funktion mit genau einem kritischen Punkt besitzen. Jeder Bordismus läßt sich also aus solchen elementaren Bordismen aufbauen. Diese sollen deshalb im weiteren genauer untersucht werden.

Wir geben noch einen weiteren Beweis für die Existenz von Morse-Funktionen für Untermannigfaltigkeiten euklidischer Räume, ohne auf Ränder Rücksicht zu nehmen.

(1.8) Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine glatte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Dann ist für alle $\lambda \in \text{Hom}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ bis auf eine Nullmenge die Funktion $f_\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - \lambda(x)$ eine Morse-Funktion.*

BEWEIS. Ist $(U_\nu \mid \nu \in \mathbb{N})$ eine offene Überdeckung von M , so genügt es, die Behauptung für die Einschränkungen $f_\lambda|_{U_\nu}$ zu beweisen, da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind.

Wir nehmen deshalb ohne wesentliche Einschränkung an, daß M das Bild einer glatten Einbettung $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^N$ ist und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Genau dann ist f_λ eine Morse-Funktion, wenn $f_\lambda \circ \varphi$ eine ist. Wir setzen $g = f \circ \varphi$. Dann hat $f_\lambda \circ \varphi$ die Form

$$x \mapsto g(x) - \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_j(x),$$

wenn $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ und $\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_j \lambda_j x_j$ ist.

Die kritischen Punkte dieser Abbildung sind diejenigen x , für die

$$Dg(x) - \sum_j \lambda_j D\varphi_j(x) = 0$$

ist. Wir fragen nach den $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, für die Null ein regulärer Wert von

$$U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad x \mapsto Dg(x) - \sum_j \lambda_j D\varphi_j(x)$$

ist. Dazu betrachten wir

$$F: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad (x, (\lambda_j)) \mapsto Dg(x) - \sum_j \lambda_j D\varphi_j(x).$$

Wir halten x fest. Die lineare Abbildung $(\lambda_j) \mapsto Dg(x) - \sum_j \lambda_j D\varphi_j(x)$ ist surjektiv, da $D\varphi$ den Rang n hat. Folglich ist diese Abbildung eine Submersion und damit auch F . Aus (?? Transversal??) erhalten wir nun, daß für alle λ , bis auf eine Nullmenge, Null ein regulärer Wert von F_λ ist. \square

(1.9) Beispiel. Sei $a_0 < a_1 < \dots < a_n$. Dann ist

$$f: S^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto \sum_i a_i x_i^2$$

eine Morse-Funktion. Die kritischen Punkte sind die Einheitsvektoren $(\pm e_j \mid 0 \leq j \leq n)$, und der Index von $\pm e_j$ ist j . Diese Funktion induziert eine Morse-Funktion $g: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n+1$ kritischen Punkten vom Index $0, 1, \dots, n$. \diamond

2 Elementare Bordismen

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß bei Vorliegen einer Morse-Funktion mit genau einem kritischen Punkt, die Situation zu einem Standardmodell diffeomorph ist. Wir beschreiben zunächst die Standardsituation.

Sei V eine (kompakte) Mannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension $n-1$. Sei $a+b=n$, $a \geq 1$, $b \geq 1$. Sei $\varphi: S^{a-1} \times E^b \rightarrow V$ eine glatte Einbettung. In der disjunkten Summe

$$(V \setminus \varphi(S^{a-1} \times 0)) + E^b \times S^{b-1}$$

identifizieren wir

$$\varphi(u, \Theta v) \sim (\Theta u, v), \quad u \in S^{a-1}, v \in S^{b-1}, 0 < \Theta < 1.$$

Da beide Summanden Mannigfaltigkeiten ohne Rand sind und in beiden Summanden offene Teile durch einen Diffeomorphismus identifiziert werden, ist nach Abschnitt 6 der Quotient eine glatte Mannigfaltigkeit. Sie ist wieder kompakt, wenn V kompakt war. Wir bezeichnen das Resultat mit $\chi(V, \varphi)$ und sagen: $\chi(V, \varphi)$ (oder eine dazu diffeomorphe Mannigfaltigkeit V') entstehe aus V durch *elementare Chirurgie vom Typ (a, b)* . Natürlich hängt das Resultat von der Einbettung φ im allgemeinen ab.

(2.1) Bemerkung. Man kann V durch einen inversen Prozeß, eine elementare Chirurgie vom Typ (b, a) , aus $\chi(V, \varphi)$ wieder zurückgewinnen. Nach Konstruktion hat man nämlich eine Einbettung $\tilde{\varphi}: E^a \times S^{b-1} \rightarrow \chi(V, \varphi)$, mit der man arbeiten kann. (Hier haben die Faktoren ihre Bedeutung vertauscht.) \diamond

(2.2) Satz. *Es gibt einen Bordismus $(H(V, \varphi); V, \chi(V, \varphi))$ mit einer Morse-Funktion, die genau einen kritischen Punkt vom Index a hat.*

BEWEIS. Wir konstruieren zunächst ein Standardobjekt, das in der Definition von $H(V, \varphi)$ gebraucht wird. Die Abbildung

$$\alpha:]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[\times \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (xy, x^2 - y^2)$$

ist ein Diffeomorphismus. Wir bezeichnen mit $(c, t) \mapsto (\gamma(c, t), \delta(c, t))$ den inversen Diffeomorphismus. Damit zeigen wir, daß

$$\begin{aligned} \Psi &: (\mathbb{R}^a \setminus 0) \times (\mathbb{R}^a \setminus 0) \rightarrow S^{a-1} \times (\mathbb{R}^b \setminus 0) \times \mathbb{R}, \\ \Psi(x, y) &= \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{2\|y\|} \operatorname{arsinh}(2\|x\|\|y\|), -\|x\|^2 + \|y\|^2 \right) \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus ist. Eine Umkehrung wird durch

$$(u, v, t) \mapsto \left(u\gamma(c, t), \frac{v}{\|v\|} \delta(c, t) \right)$$

mit $c = \frac{1}{2} \sinh 2\|u\|\|v\|$ definiert, wie man durch Nachrechnen verifiziert. Wir setzen für $d > 0$

$$L^{a,b}(d) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b \mid -1 \leq -\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq 1, 2\|x\|\|y\| < \sinh 2d\}$$

und $L^{a,b}(1) = L^{a,b}$. Dann verifiziert man, daß Ψ durch Einschränkung einen Diffeomorphismus

$$(2.3) \quad \Psi: L^{a,b}(d) \cap ((\mathbb{R}^a \setminus 0) \times (\mathbb{R}^b \setminus 0)) \rightarrow S^{a-1} \times (E^b(d) \setminus 0) \times D^1$$

induziert. Mit diesen Daten definieren wir den Bordismus $H(V, \varphi)$ durch die Identifizierung in der disjunkten Summe $L^{a,b} + (V \setminus \varphi(S^{a-1} \times 0)) \times D^1$

$$\begin{array}{ccc} (V \setminus \varphi(S^{a-1} \times 0)) \times D^1 & & L^{a,b} \\ \uparrow \varphi \times \text{id} & & \uparrow \cup \\ S^{a-1} \times (E^b \setminus 0) \times D^1 & \xleftarrow{\Psi} & L^{a,b} \cap ((\mathbb{R}^a \setminus 0) \times (\mathbb{R}^b \setminus 0)). \end{array}$$

Die entstehende Mannigfaltigkeit hat zwei Randteile V und $\chi(V, \varphi)$. Der erste ist gegeben durch $V \rightarrow H(V, \varphi)$

$$z \mapsto \begin{cases} (z, -1) & z \in V \setminus \varphi(S^{a-1} \times 0) \\ (u \cosh \Theta, v \sinh \Theta) \in L^{a,b} & z = \varphi(u, \Theta v), \|u\| = \|v\| = 1. \end{cases}$$

Hierzu beachte man $\Psi(u \cosh \Theta, v \sinh \Theta) = (u, \Theta v, -1)$. Der zweite durch $\chi(V, \varphi) \rightarrow H(V, \varphi)$

$$\begin{array}{ll} V \setminus \varphi(S^{a-1} \times 0) \ni z & \mapsto (z, 1) \\ E^a \times S^{b-1} \ni (\Theta u, v) & \mapsto (u \sinh \Theta, v \cosh \Theta). \end{array}$$

Eine Morse-Funktion $f: H(V; \varphi) \rightarrow [-1, 1]$ mit den gewünschten Eigenschaften wird durch

$$\begin{array}{ll} f(x, c) = c & (x, c) \in (V \setminus \varphi(S^{a-1} \times 0)) \times D^1 \\ f(x, y) = -\|x\|^2 + \|y\|^2 & (x, y) \in L_{a,b} \end{array}$$

definiert. □

(2.4) Satz. Sei $f: B \rightarrow [a, b]$ eine Morse-Funktion mit genau einem kritischen Punkt. Dann ist B diffeomorph zu einem elementaren Bordismus $H(V, \varphi)$.

BEWEIS. Ohne wesentliche Einschränkung nehmen wir $[a, b] = [-d, d]$ an, und der kritische Punkt p habe den Wert $f(p) = 0$. Nach dem Morse-Lemma wählen wir eine lokale Parametrisierung $\alpha: W \rightarrow U$, zentriert in p , so daß $f\alpha(x, y) =$

$f^{a,b}(x, y) = -\|x\|^2 + \|y\|^2$ für $(x, y) \in W \subset \mathbb{R}^{a,b}$. Sei $s_\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die skalare Multiplikation mit λ . Für genügend kleines $\lambda > 0$ ist $s_\lambda L^{a,b} \subset W$. Die Funktion $\lambda^{-2}f: B \rightarrow [-\lambda^{-2}d, \lambda^2d]$ hat ebenfalls den kritischen Punkt p und in der Karte $\alpha \circ s_\lambda$ die Form $f^{a,b}$. Wir können also ohne wesentliche Einschränkung $L^{a,b} \subset W$ annehmen. Dann ist $d \geq 1$ und $f^{-1}[0, 1]$ diffeomorph zu B . Wir nehmen also auch $d = 1$ an und setzen $B_\pm = f^{-1}(\pm 1)$ für die beiden Randteile von B .

Sei $M^{a,b} = \alpha(L^{a,b}) \subset B$. Es handelt sich um eine offene Untermannigfaltigkeit mit Rand von B . Wir hatten einen Diffeomorphismus Ψ in (2.3) konstruiert. Der Rand von $L^{a,b}$ besteht aus den Teilen $L_\pm^{a,b} = \{(x, y) \in L^{a,b} \mid f^{a,b}(x, y) = \pm 1\}$, und es gilt $\alpha(L_\pm^{a,b}) = M_\pm^{a,b} \subset B_\pm$. Das Achsenkreuz

$$L_0^{a,b} = L^{a,b} \cap (\mathbb{R}^a \times 0 \cup 0 \times \mathbb{R}^b)$$

liegt nicht im Definitionsbereich von Ψ . Der Schnitt $L_{0,-}^{a,b} = L_0^{a,b} \cap L_-^{a,b}$ ist die Sphäre $S^{a-1} \times 0$; und analog ist $L_{0,+}^{a,b}$ die Sphäre $0 \times S^{b-1}$. Ihre Bilder bei α mögen $S_\pm \subset B_\pm$ heißen. Wir haben einen Diffeomorphismus

$$S^{a-1} \times E^b \rightarrow L_-^{a,b}, \quad (u, \Theta v) \mapsto (u \cosh \Theta, v \sinh \Theta),$$

der die Umkehrung $\Psi^{-1}|_{S^{a-1} \times (E^b \setminus 0)} \times \{-1\}$ auf $S^{a-1} \times E^b \times \{-1\}$ erweitert. Setzen wir diesen mit α zusammen, so erhalten wir eine Einbettung $\varphi: S^{a-1} \times E^b \rightarrow B_-$, und $\varphi(S^{a-1} \times \{0\}) = S_-$.

Mit dieser Einbettung bilden wir $H(B_-, \varphi)$ und behaupten, daß das Resultat zu B diffeomorph ist. Wir erinnern daran, daß $H(B_-, \varphi)$ als Quotient von $(B_- \setminus S_-) \times D^1 + L^{a,b}$ definiert wurde. Einen Diffeomorphismus $D: H(B_-, \varphi) \rightarrow B$ definieren wir getrennt auf diesen beiden Stücken. Auf $L^{a,b}$ sei D die lokale Parametrisierung α . Auf $(B_- \setminus S_-) \times D^1$ werden wir D durch Integration eines geeigneten Vektorfeldes X auf $B \setminus M_0^{a,b}$ gewinnen ($M_0^{a,b} = \alpha(L_0^{a,b})$).

Wir wählen auf $M^{a,b}(2) = \alpha(L^{a,b}(2))$ das Vektorfeld X_0 , das bei $\Psi \circ \alpha^{-1}$ dem konstanten Vektorfeld $\partial/\partial t$ des Faktors D^1 entspricht. Auf $B \setminus M_0^{a,b}$ haben wir außerdem das normierte Gradientenfeld X_1 von f , das heißt ein Vektorfeld mit $X_1 f = 1$. Zu der offenen Überdeckung $U_0 = M^{a,b}(2)$ und $U_1 = B \setminus \overline{M}^{a,b}$ wählen wir eine glatte Partition der Eins τ_0, τ_1 und bilden damit $X = \tau_0 X_0 + \tau_1 X_1$. Dieses Vektorfeld stimmt auf $M^{a,b} \setminus M_0^{a,b}$ mit X_0 überein. Für $(x, t) \in (B_- \setminus S_-) \times D^1$ setzen wir nun $D(x, t) = k_u(t+1)$. Dabei ist k_u die Integralkurve von X mit Anfang $x = k_u(0)$. Wir haben zu überlegen, daß durch diese Vorschrift ein Diffeomorphismus von $(B_- \setminus S_-) \times D^1$ mit $B \setminus M_0^{a,b}$ geliefert wird.

Zunächst: Die Kurve k_u hat das Definitionsintervall $[0, 2]$ und endet in $B_+ \setminus S_+$. Nach Konstruktion gilt das, wenn die Kurve in $M_-^{a,b}$ beginnt. Sie verläuft dann in $M^{a,b}$, und diese Menge wird durch derartige Integralkurven ausgefüllt. Der Rest spielt sich im kompakten Komplement von $M^{a,b}$ ab. Dort können wir wie in (12.2) argumentieren. \square

Etwas genauer können wir anstelle von (2.3) sagen: Es gibt Diffeomorphismen $B \rightarrow H(V, \varphi)$ und $[a, b] \rightarrow [-1, 1]$, die die gegebene Morse-Funktion auf B in die Morse-Funktion des Standardmodells (2.2) transformieren.

Literaturverzeichnis

- [1] Abraham, R., and J. Robbins: Transversal Mappings and Flows. New York, W.A. Benjamin Inc. 1967.
- [2] Adams, J. F.: Vector fields on spheres. Ann. of Math. 75, 603 – 632 (1962).
- [3] Alexander, J.W.: An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected. Proc. Nat. Acad. Sci. 10, 8 – 10 (1924).
- [4] Antoine, L.: Sur l'homéomorphie de figures et de leurs voisinages (1921). J. Math. Pures Appl. 86, 221 – 315.
- [5] Apéry, F.: Models of the Real Projective Plane. Braunschweig – Wiesbaden, Vieweg (1987).
- [6] Artin, E., and R.H. Fox: Some wild cells and spheres in three-dimensional space (1948). Ann. Math. 49, 979 – 990.
- [7] Atiyah, M.F.: K -theory and Reality. Quart. J. Math. Oxford(2) 17, 367 – 386 (1966).
- [8] Atiyah, M.F.: Bott periodicity and the index of elliptic operators. Quart. J. Math. Oxford(2) 72, 113 – 140 (1968).
- [9] Atiyah, M.F.: Collected Works, Vol I-V. Oxford Science Publ. 1988
- [10] Atiyah, M.F., and R. Bott: On the periodicity theorem for complex vector bundles. Acta Math. 112, 229 – 247 (1964).
- [11] Atiyah, M.F., Bott, R., and A. Shapiro: Clifford modules. Topology 3, 3 – 38 (1964).
- [12] Atiyah, M.F., and F. Hirzebruch: Vector bundles and homogeneous spaces. Proc. Symp. in Pure Math., Amer. Math. Soc. 3, 7 – 38 (1961).
- [13] Atiyah, M.F., and I. M. Singer: The index of elliptic operators I. Ann. of Math. 87, 484 – 534 (1968).
- [14] Bott, R.: The stable homotopy of the classical groups. Ann. of Math. 70. 313 – 337 (1959).
- [15] Boy, W.: Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen (1903). Math. Ann. 57, 151 – 184.

- [16] Bredon, G. E.: Introduction to compact transformation groups. New York, Academic Press (1972).
- [17] Brieskorn, E.: Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten. Inv. Math. 2, 1 – 14 (1966).
- [18] Bröcker, Th., and T. tom Dieck: Representations of Compact Lie Groups. New York – Berlin – Heidelberg, Springer 1985.
- [19] Bröcker, Th., und K. Jänich: Einführung in die Differentialtopologie. Berlin – Heidelberg – New York, Springer 1973.
- [20] Brouwer, L. E. J.: Collected Works. Vol. I, II. Amsterdam, North – Holland Publ. Comp 1975–76.
- [21] Brouwer, L. E. J.: Beweis der Invarianz der Dimensionszahl. Math. Ann. 70, 161 – 165 (1911).
- [22] Brouwer, L. E. J.(1912): Beweis der Invarianz des n -dimensionalen Gebiets. Math. Ann. 71, 305n– 313 (1912).
- [23] Brouwer, L. E. J.: Beweis des Jordanschen Satzes für den n -dimensionalen Raum. Math. Ann. 71, 314 – 319 (1912).
- [24] Brouwer, L. E. J.: Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 71, 97 – 115 (1912).
- [25] Brouwer, L. E. J.: Zur Invarianz des n -dimensionalen Gebiets. Math. Ann. 72, 55 – 56 (1912).
- [26] Brown, A. B.: Functional dependence. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 379 – 394 (1935).
- [27] Brown, M.: A proof of the generalized Schoenflies Theorem. Bull. Amer. Math. Soc. 66, 74 – 76 (1960).
- [28] Brown, M.: Locally flat imbeddings of topological manifolds. Ann. of Math. 75, 331 – 341 (1962).
- [29] Burde, G., and H. Zieschang: Knots. Berlin – New York, de Gruyter 1985.
- [30] Chevalley, C.: Theory of Lie Groups. Princeton, Univ. Press 1946.
- [31] Cohen, R. L.: The immersion conjecture for differentiable manifolds. Ann. of Math. 122, 237 – 328 (1985).
- [32] Dehn, M.: Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. Math. Ann. 69, 137 – 168 (1910).
- [33] Dehn, M., und P. Heegaard: Analysis situs. Encyclopädie der Math. Wissenschaften III.1., 153 – 220. Leipzig, Teubner 1907.
- [34] tom Dieck, T.: Transformation Groups. Berlin – New York, de Gruyter 1987.

- [35] tom Dieck, T.: Topologie. Berlin – New York, W. de Gruyter 1991.
- [36] tom Dieck, T., K. H. Kamps, und D. Puppe: Homotopietheorie. Lecture Notes in Math. 157. Berlin – Heidelberg – New York, Springer 1970.
- [37] tom Dieck, T., and T. Petrie: Contractible affine surfaces of Kodaira dimension one. *Japan. J. Math.* 16, 147 – 169 (1990).
- [38] Dieudonné, J.: A history of algebraic and differential topology 1900 – 1960. Boston, Birkhäuser 1989.
- [39] Dold, A. (1963): Partitions of unity in the theory of fibrations. *Ann. of Math.* 78, 223 – 255.
- [40] Dold, A.: Lectures on Algebraic Topology. Berlin – Heidelberg – New York, Springer 1972.
- [41] Donaldson, S.: An application of gauge theory to 4-dimensional topology. *J. Diff. Geom.* 18, 279 – 315 (1983).
- [42] Donaldson, S., and P. B. Kronheimer: The Geometry of Four-Manifolds. Oxford, Clarendon Press 1990.
- [43] Ebbinghaus et al.: Zahlen. Berlin – Heidelberg – New York, Springer 1983.
- [44] Ehresmann, C.: Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable. *C.R. Acad. Sci.* 216, 628 – 630 (1943).
- [45] Ehresmann, C.: Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. *Colloque de Topologie, Bruxelles*, 29 – 55 (1950).
- [46] Fischer, G.: Mathematische Modelle (Bildband und Kommentarband). Braunschweig, Vieweg 1986.
- [47] Freedman, M. H.: The topology of 4-dimensional manifolds. *J. Diff. Geom.* 17, 357 – 453 (1982).
- [48] Freedman, M.H., and F. Quinn: Topology of 4-Manifolds. Princeton, Univ. Press 1990.
- [49] Gauss, C. F.: Werke. Bde I - XII. Göttingen 1870 – 1929.
- [50] Gitler, S.: Immersions and embeddings of manifolds. *Proc. Symp. Pure Math.* XXII, 87 – 96 (1971).
- [51] Gordon, C.McA: Knots, homology spheres, and contractible 4-manifolds. *Topology* 14, 151 – 172 (1975).
- [52] Grauert, H.: On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. *Ann. of Math.* 68, 460 – 472 (1958).
- [53] Grauert H., und K. Fritzsche (1976): Several complex variables. New York – Heidelberg – Berlin, Springer 1976.

- [54] Greub, W., S. Halperin, and R. Vanstone: Connections, Curvature, and Cohomology. New York, Academic Press 1972.
- [55] Guillou, L., Marin, A. (Ed.): A la Recherche de la Topologie Perdue. Boston, Birkhäuser 1986.
- [56] Haefliger, A.: Plongements différentiables des variétés. Comment. Math. Helv. 37, 155 – 176 (1962).
- [57] Hanner, O.: Some theorems on absolute neighborhood retracts. Ark. Mat. 1, 389 – 408 (1951).
- [58] Hausdorff, : Grundzüge ??
- [59] Heegard, P.: Sur l'Analysis situs. Soc. Math. France Bull. 44, 161 – 242 (1916).
- [60] Hempel, J.: 3-Manifolds. Princeton, Univ. Press 1976.
- [61] Hilbert, D.: Über die Grundlagen der Geometrie. Math. Ann. 64, 381 – 422. (Dazu: Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 190.)
- [62] Hilbert, D.: Gesammelte Abhandlungen. Berlin, Springer 1932 – 1935.
- [63] Hilbert, D., und S. Cohn–Vossen: Anschauliche Geometrie. Berlin, Springer 1932.
- [64] Hirsch, M.W.: A proof of the nonretractability of a cell onto its boundary. Proc. Amer. Math. Soc. 14, 364 – 365 (1963).
- [65] Hirsch, M.W.: Differential Topology. New York – Heidelberg – Berlin, Springer 1976.
- [66] Hirzebruch, F.: Singularities and exotic spheres. Sémin. Bourbaki 314 (1967).
- [67] Hirzebruch, F.: Gesammelte Abhandlungen. Bde I - II. Berlin – Heidelberg – New York, Springer 1987.
- [68] Hirzebruch, F., und K. H. Mayer: $O(n)$ -Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten. Berlin – Heidelberg – New York, Springer 1968.
- [69] Hocking, J. G., and G. S. Young: Topology. Reading Mass., Addison – Wesley 1961.
- [70] Hopf, H.: Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. Math. Ann. 104, 637 – 665 (1931).
- [71] Hopf, H.: Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. Fund. Math. 25, 427 – 440 (1935).
- [72] Hopf, H.: Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven. Compositio Math. 2, 50 – 62 (1935).
- [73] Hopf, H.: Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume. Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 85, 165 – 177 (1940).

- [74] Hopf, H.: Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen. *Comment. Math. Helv.* 13, 119 – 143 (1940/41).
- [75] Hopf, H.: Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen. *Ann. of Math.* 42, 22 – 52 (1941).
- [76] Hopf, H.: Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4–dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. *Comment., Math. Helv.* 29, 132 – 156 (1955).
- [77] Hopf, H.: *Selecta Heinz Hopf*. Berlin – Göttingen – Heidelberg, Springer 1964.
- [78] James, I. M.: Euclidean models of projective spaces. *Bull. London Math. Soc.* 3, 257 – 276 (1971).
- [79] Karoubi, M.: *K-Theory*. Berlin – Heidelberg – New York, Springer 1978.
- [80] v. Kerékjártó, B.: *Vorlesungen über Topologie*. Berlin, Springer 1923.
- [81] Kervaire, M. A.: A manifold which does not admit any differentiable structure. *Comment. Math. Helv.* 34, 257 – 270 (1960).
- [82] Kervaire, M. A., and J. Milnor: Groups of homotopy spheres, I. *Ann. of Math.* 77, 504 – 537 (1963).
- [83] Kirby, R. C.: A calculus for framed links in S^3 . *Inv. Math.* 45, 36 – 56 (1978).
- [84] Kirby, R. C.: *The Topology of 4-Manifolds*. Berlin – Heidelberg – New York, Springer 1989.
- [85] Klein, F.: Über den Zusammenhang der Flächen. *Math. Ann.* 9, 476 – 482 (1876).
- [86] Klein, F.: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Bd.I–III. Berlin, Springer 1921 – 1923.
- [87] Kneser, H.: Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein* 38, 248 – 260 (1929).
- [88] Kneser, H.: Analytische Struktur und Abzählbarkeit. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A/I. Diss.* 251/5 (1958).
- [89] Kneser, H., und M. Kneser: Reell-analytische Strukturen der Alexandroff-Halbgeraden und der Alexandroff-Geraden. *Arch. Math.* 11, 104 – 106 (1960).
- [90] Koch, W., und D. Puppe: Differenzierbare Strukturen auf Mannigfaltigkeiten ohne abzählbare Basis. *Arch. Math.* 19, 95 – 102 (1968).
- [91] Leja, F.: Sur la notion du groupe abstrait topologique. *Fund. Math.* 9, 37 – 44 (1927).
- [92] Lickorish, W. B. R.: A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. *Ann. of Math.* 76, 531 – 540 (1962).
- [93] Lie, S.: *Gesammelte Abhandlungen*. Bde I - III. Leipzig, Teubner 1934 – 1960.

- [94] Lie, S., und F. Engel: Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig, Teubner 1888 – 1893.
- [95] Mazur, B.: A note on some contractible 4-manifolds. Ann. of Math. 73, 221 – 228 (1961).
- [96] Milnor, J.: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Ann. Math. 64, 399 – 405 (1956).
- [97] Milnor, J.: A unique factorization theorem for 3-manifolds. Amer. J. Math. 84, 1 – 7 (1962).
- [98] Milnor, J.: Morse Theory. Princeton, Univ. Press 1963.
- [99] Milnor, J.: Micro bundles. Topology 3, Suppl. 1, 53 – 80 (1964).
- [100] Milnor, J.: Topology from the differentiable viewpoint. Charlottesville, Univ. Press 1965.
- [101] Milnor, J.: Lectures on the h -cobordism theorem. Princeton, Univ. Press 1965.
- [102] Milnor, J.: Singular points of complex hypersurfaces. Princeton, Univ. Press 1968.
- [103] Milnor, J., and J. D. Stasheff: Characteristic classes. Princeton, Univ. Press 1974.
- [104] Möbius, A. F.: Gesammelte Werke. Bd. I–IV. Leipzig, Hirzel KG 1886.
- [105] Moise, E. E.: Geometric Topology in Dimensions 2 and 3. Berlin – Heidelberg – New York, Springer 1977.
- [106] Morse, A. P.: The behavior of a function on its critical set. Ann. of Math. 40, 62 – 70 (1939).
- [107] Munkres, J. R.: Elementary Differential Topology. Princeton, Univ. Press 1966.
- [108] Newman, M. H. A.: Elements of the topology of plane sets of points. Cambridge, Univ. Press 1951.
- [109] Newmann, M- H. A.(1966): The engulfing theorem for topological manifolds. Ann. of Math. 84, 555 – 571 (1966).
- [110] Nielsen, J. Collected Math. Papers. Vol 1.2. Birhäuser.
- [111] Poincaré, H.: Mémoire sur les Groupes Kleinéens. Acta Math. 3, 49 – 92 1883.
- [112] Poincaré, H.: Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 117, 144 – 145 (1893).
- [113] Poincaré, H.: Analysis situs. Journal de l'École Polytechnique 1, 1 – 121 (1895).
- [114] Poincaré, H.: Complément à l'Analysis Situs. Rend. Circ. Mat. Palermo 13, 285 – 343 (1899).

- [115] Poincaré, H.: Cinquième complément à l'Analysis Situs. Rend. Circ. Mat. Palermo 18, 45 – 110 (1904).
- [116] Poincaré, H.: Œuvres de Henri Poincaré VI. Paris, Gauthier – Villars 1953.
- [117] Pont, J. C.: La topologie algébrique des origines à Poincaré. Paris, Presses Univ. de France 1974.
- [118] Radó, T.: Über den Begriff der Riemannschen Fläche. Acta Sci. Math. (Szeged) 2, 101 – 121 (1924).
- [119] de Rham, G.: Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions. J. Math. Pures Appl. 10, 115 – 200 (1931).
- [120] Riemann, B.: Grundlagen für eine allgemeine Theorie einer veränderlichen complexen Grösse. Inauguraldissertation, Göttingen 1851.
- [121] Riemann, B.: Theorie der Abel'schen Functionen. Borchardt's J. Reine und Angew. Math. 54 (1857).
- [122] Riemann, B.: Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben von H. Weber. Leipzig, Teubner 1876.
- [123] Rolfsen, D.: Knots and links. Berkeley, Publish or Perish 1976.
- [124] Sard, A.: The measure of the critical points of differentiable maps. Bull. Amer. Math. Soc. 48, 883 – 890 (1942).
- [125] Scholz, E.: Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré. Boston, Birkhäuser 1980.
- [126] Schreier, O.: Abstrakte kontinuierliche Gruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 4, 15 – 32 (1926).
- [127] Schreier, O.: Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im großen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5, 233 – 244 (1927).
- [128] Seifert, H.: Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume. Ber. Sächs. Akad. Wiss. 83, 26 – 66 (1931).
- [129] Seifert, H.: Topologie dreidimensionaler gefaseter Räume. Acta math. 60, 147 – 238 (1933).
- [130] Seifert, H., und W. Threlfall: Lehrbuch der Topologie. Leipzig, Teubner 1934.
- [131] Smale, S.: On the structure of manifolds. Amer. J. Math. 84, 387 – 399 (1962).
- [132] Steenrod, N.: The topology of fibre bundles. Princeton, Univ. Press (1951).
- [133] Stiefel, E.: Richtungsfelder und Fernparallelismus in Mannigfaltigkeiten. Comment. Math. Helv. 8, 3 – 51 (1936).
- [134] Stillwell, J.: Classical Topology and Combinatorial Group Theory. New York – Heidelberg – Berlin, Springer 1980.

- [135] Taubes, C. H.: Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. *J. Diff. Geom.* 25, 363 – 430 (1987).
- [136] Thom, R.: Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Comment. Math. Helv.* 28, 17 – 86 (1954).
- [137] Thom, R.: Un lemme sur les applications différentiables. *Bol. Soc. Mat. Mexicana* 59 – 71 (1956).
- [138] Tougeron, J. C.: *Idéaux de fonctions différentiables*. Berlin – Heidelberg – New York, Springer 1972.
- [139] Wallace, A. H.: Modifications and cobounding manifolds. *Can. J. Math.* 12, 503 – 528 (1960).
- [140] Weyl, H.: *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Leipzig – Berlin, Teubner 1913.
- [141] Whitehead, J. H. C.: On C^1 -complexes. *Ann. of Math.* 41, 809 – 824 (1940).
- [142] Whitehead, J. H. C.: Combinatorial homotopy. *Bull. Amer. Math. Soc.* 55, 213 – 245 (1949).
- [143] Whitehead, J. H. C.: *Mathematical Works. Vol I - IV*. Oxford, Pergamon Press 1962.
- [144] Whitehead, J. H. C., and O. Veblen: A set of axioms for differential geometry. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 17, 551 – 561 (1931).
- [145] Whitney, H.: Sphere spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 21, 462 – 468 (1935).
- [146] Whitney, H.: A function not constant on a connected set of critical points. *Duke Math. J.* 1, 514 – 517 (1935).
- [147] Whitney, H.: Differentiable manifolds. *Ann. of Math.* 37, 645 – 680 (1936).
- [148] Whitney, H.: On regular closed curves in the plane. *Compositio Math.* 4, 276 – 284 (1937).
- [149] Whitney, H. (1944): The self-intersection of a smooth n -manifold in $2n$ -space. *Ann. Math.* 45, 220 – 246 (1944).
- [150] Whitney, H. (1944): The singularities of a smooth n -manifold in $(2n - 1)$ -space. *Ann. Math.* 45, 247 – 293 (1944).

Index

- Abbildung
 - differenzierbar ?? ??
 - differenzierbar in einem Punkt ??
 - glatt ?? ??
- Atlas 5
- C^k -verbunden 5
- Derivation 17
- Diffeomorphismus 6
- Diffeotopie 55
- Differential ?? 14
- Dimension 5
- Einbettung ??
 - Typ1 25
 - Typ2 25
- Fläche ??
- Fluß eines Vektorfeldes 47
- Graßmann-Mannigfaltigkeit 9
- Halbgerade, lange 7
- Halbraum 23
 - differenzierbare Abbildung ??
- Immersion ??
- Inneres 24
- Integalkurve eines Vektorfeldes 46
 - Anfangsbedingung ??
- Isotopie 55
 - ambiente 55
- Karte 5 23
- Kartengebiet 5 23
- Kettenregel 14
- Klebedatum 27
- Knoten 57
- Knotentyp 57
- Kotangentialraum 18
- Kotangentialvektoren 18
- Kragen ??
- Lie-Klammer ??
- Mannigfaltigkeit 5
 - differenzierbare ??
 - glatte ??
 - komplexe ??
 - mit Rand 23
 - Rand 24
 - Inneres ??
 - reell analytische ??
- Metrik, euklidische ??
- Nullmenge, Lebesguesche 16
- Karte 5
 - angepaßt 18 22 25 25
 - zentriert ??
- Kartengebiet 5
- Kartenwechsel 5
- Kettenregel 14
- Koordinaten, homogene ??
- Koordinatensystem, lokales 5
- Koordinatentransformation 5
- lokal endlich 27
- lokal euklidisch 5
- numerierbar 28
- Numerierung 28
- parakompakt ??
- Parametrisierung, lokale ??
- Partition der Eins 28
 - einer Überdeckung untergeordnet ??
- Poisson-Klammer ??
- Punkt
 - regulärer ??
 - singulärer ??
- Rangsatz ??
- Raum, projektiver ??
- Riemannsche Fläche ??
- reell analytisch ??
- Schnitt, lokaler 16
- Singularität ??

- Sphäre 20
- Submersion ??
- Stiefel–Mannigfaltigkeit ??
- Struktur, differenzierbare 5
- Tangentialraum 14
- Tangentialvektor 14
 - nach innen, nach außen, tangential ??
- Träger
 - einer Funktion 27
- transverse ??
 - zueinander ??
 - Schnitt ??
- Transversalität ??
- Umkehrsatz ??
- Untermannigfaltigkeit 18
 - differenzierbare ??
 - lokal flache ??
 - offene 6
 - Typ 1 24
 - Typ 2 25
- Vektorfeld ??
 - Integralkurve 46
 - global integrierbar ??
 - Fluß 47
- Wert
 - regulärer ??