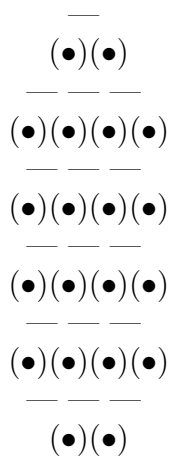


Brücken mit Pfeilern

Ein graphischer Kalkül der Knotenalgebra

Tammo tom Dieck

Fisches Nachtgesang
(Zweite Fassung¹)



¹Zu erhalten über E_6 -mail von chrismor@hades.de

Inhaltsverzeichnis

0.	Abstract: Bridges with pillars	2
1.	Brücken mit Pfeilern	4
2.	Einige Beispiele	9
3.	Die Algebra $TE_6(3)$	15
4.	Vergleich mit der Algebra TE_6	21
5.	Modultheorie für E_7	24
6.	Symmetrische Brücken mit Pfeilern	26
7.	Spuren	28
8.	Ausblick	29
9.	Monoidalgebren	29
10.	Literature	33

0. Abstract: Bridges with pillars

We continue our study of knot algebra from the point of view of root systems. This note is Part IV of the series. It comprises a new graphical calculus which is designed to deal with the Coxeter-Dynkin series of type E and some natural generalizations.

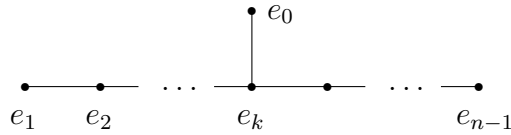
A Coxeter matrix (S, m) consists of a finite set S and a symmetric mapping $m: S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ with $m(s, s) = 1$ and $m(s, t) \geq 2$ for $s \neq t$. A Coxeter matrix (S, m) is often specified by its Coxeter graph $\Gamma(S, m)$. It has S as its set of vertices and an edge with weight $m(s, t)$ whenever $m(s, t) \geq 3$. Usually, the weight $m(s, t) = 3$ is omitted in the notation. If $m(S \times S) \subset \{1, 2, 3\}$, we define the associated Temperley-Lieb algebra $T_d(S, m)$ as follows. Let \mathfrak{K} be a commutative ring and $d \in \mathfrak{K}^*$ a parameter. Then $T_d(S, m)$ is the associative algebra with 1 over \mathfrak{K} with generators $(e_s \mid s \in S)$ and relations

$$(0.1) \quad \begin{aligned} e_s^2 &= de_s \\ e_s e_t &= e_t e_s & m(s, t) = 2 \\ e_s e_t e_s &= e_s & m(s, t) = 3. \end{aligned}$$

Suppose $p \in \mathfrak{K}^*$, $q = p^2$, $d = p + p^{-1}$. Then $T_d(S, m) = T(S, m)$ is a quotient of the Hecke algebra $H_q(S, m)$ with generators $(x_s \mid s \in S)$, the usual braid relations $x_s x_t \dots = x_t x_s \dots$ ($m(s, t)$ factors x_s, x_t alternating on each side), and the quadratic relations $x_s^2 = (q - 1)x_s + q$. The assignment $x_s \mapsto pe_s - 1$ yields a surjection $H_q(S, m) \rightarrow T_d(S, m)$ (see [3]). The classical Coxeter matrices (Coxeter graphs) of simple Lie groups yield finite dimensional Hecke algebras. It turns out that there are additional graphs which yield finite dimensional Temperley-Lieb algebras, e.g. those associated to the graphs $E_n(k)$ below.

In general, the algebras $T(S, m)$ are difficult to analyze, because of their definition by generators and relations. The purpose of this note is to describe a graphical calculus which is adapted to Coxeter graphs of type E . By $E_n(k)$ we denote the graph with n vertices of the following shape. Note that $E_n(1) = A_n$,

$E_n(2) = D_n$, $E_n(3) = E_n$, in standard notation. Note that $E_n(k)$ contains the linear subgraph A_{n-1} with $n - 1$ vertices (e_0 omitted).



Although the graphical calculus is designed for the finite dimensional algebras $TE_n(k)$, it has other uses as well.

The starting point for our calculus is the graphical notation of Kauffman [6, p. 100] for the standard Temperley-Lieb algebra TA_n associated to the Coxeter graph A_n . A basis element of TA_{n-1} over \mathfrak{K} consists of n disjoint arcs in $\mathbb{R} \times [0, 1]$ with endpoint set $\{1, \dots, n\} \times \{0, 1\}$. Such figures are called (n, n) -bridges. We use the decomposition of $\mathbb{R} \times [0, 1]$ into planar domains produced by the arcs of a bridge. This decomposition is used to incorporate additional information into the figure: We single out certain regions by placing *pillars*. A \mathfrak{K} -basis of the algebra $TE_n(k)$ will then consist of certain such *bridges with pillars*. For typographical reasons we use a bracket notation for bridges with pillars. The reader is advised to decode this into ordinary planar figures. The advantage of the graphical calculus is its semi-global nature, compared with generators and relations. (This is similar to the difference between the global definition of the symmetric group by permutations and its definition by generators and relations from the Coxeter graph.) As an example of the use of the calculus we mention: A geometrically defined filtration on the set of figures allows a splitting of the resulting algebras into matrix components (in the generic semi-simple case), and also allows a geometric construction of modules.

This note presents some ideas and examples in order to get used to the calculus. The full theoretical development will be given elsewhere. In particular, we apply the method to the graph $E_6 = E_6(3)$. A typical result in section 3 is:

Theorem A. *The algebra TE_6 has rank 662. For generic parameters d the algebra is semi-simple and has simple modules $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$, and $M(3)$ of rank 1, 6, 20, and 15.*

Since $A_5 \subset E_6$, we have an inclusion $TA_5 \subset TE_6$. We also determine the decomposition of the simple TE_6 -modules when restricted to TA_5 . Recall that the algebra TA_5 has simple modules M_0 , M_1 , M_2 , and M_3 of rank 1, 5, 9, and 5 (see e. g. [5]).

Theorem B. *The following isomorphisms hold:*

$$\begin{aligned} \text{res}M(0) &\cong M_0 \\ \text{res}M(1) &\cong M_1 \oplus M_0 \\ \text{res}M(2) &\cong M_2 \oplus 2M_1 \oplus M_0 \\ \text{res}M(3) &\cong M_3 \oplus M_2 \oplus M_0. \end{aligned}$$

We also study the module structure of $TE_7(3)$ and obtain in section 5:

Theorem C. *The algebra $TE_7(3)$ has in the generic case simple modules $N(4)$, $N(3)$, $N'(3)$, $N(2)$, $N'(2)$, $N(1)$, and $N(0)$ of rank 15, 35, 35, 27, 18, 7, and 1.*

For the restriction of these modules to TA_6 and TE_6 see section 5. Moreover, we demonstrate the relation of the calculus to the Coxeter series A , B , and D . Finally, we indicate some extensions of the calculus. An appendix (section 9) collects some elementary remarks about the algebras under consideration.

1. Brücken mit Pfeilern

Wir erinnern daran, daß eine (n, n) -Brücke aus einem System von n kreuzungsfreien Bögen im Streifen $\mathbb{R} \times [0, 1]$ besteht, deren Randpunkte die Menge $P_n := \{1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1\}$ bilden. Der Einfachheit halber stellen wir uns die Bögen glatt und transvers zum Rand vor. Zwei Brücken gelten als gleich, wenn die Bögen jeweils dieselben Punkte verbinden. Eine (n, n) -Brücke ist deshalb nichts anderes als eine freie Involution von P_n mit der Zusatzbedingung, die sich durch das Nichtkreuzen der Bögen ergibt. Bögen, deren beide Endpunkte in $\mathbb{R} \times 1$ ($\mathbb{R} \times 0$) liegen, heißen *obere* (*untere*) Bögen. Die oberen und unteren Bögen heißen *horizontal*, die anderen *vertikal*. Hat eine Brücke b insgesamt k obere Bögen, so werde k ihre *horizontale Kantenzahl* genannt, und wir schreiben dafür $HK(b) = k$. Die Konfiguration, die aus den oberen Bögen einer Brücke b besteht, heiße die *obere* Brücke von b . Analog wird eine untere Brücke definiert. Eine Brücke ist vollständig durch ihre obere und untere Brücke bestimmt, denn die Endpunkte, die von den horizontalen Bögen nicht verbraucht werden, sind der Reihe nach vertikal zu verbinden. Eine obere n -Brücke per se der horizontalen Kantenzahl k kann durch ein System von k (erlaubten) Klammerpaaren notiert werden, mit zusätzlichen Markierungen für die Enden der vertikalen Bögen. Eine solche Markierung darf niemals durch ein Klammerpaar eingeschlossen werden. Die 9 oberen 6-Brücken b mit $HK(b) = 2$ sehen in dieser Bezeichnung so aus:

$$()||, ()()||, |()(), |()(), ||(), ||(), ()|(), ()||(), |()|().$$

Eine (n, n) -Brücke selbst werde dann sinngemäß durch Paare von Klammersymbolen für ihre obere und untere Brücke mittels Bruchstrich notiert.

Wir brauchen fernerhin Brücken mit Zusatzstruktur. Ihre Definition erfordert einige Vorbereitungen.

Die Brückenbögen teilen den Streifen $\mathbb{R} \times [0, 1]$ in *Gebiete* ein. Es gibt ein oder zwei unbeschränkte Gebiete. Eine (n, n) -Brücke liefert $n + 1$ Gebiete: Das ist für die leere Brücke ($n = 0$) sicher richtig, und wenn ein weiterer Bogen hinzugefügt wird, so erhöht sich nach dem Jordanschen Kurvensatz die Anzahl der Gebiete um eins. Das Innere eines Gebietes ist immer homöomorph zur offenen Einheitskreisscheibe. Je zwei Gebiete haben höchstens eine gemeinsame Kante.

Der *Abstand* zweier Brückengebiete ist die Minimalanzahl von Bögen, die man transvers kreuzen muß, um vom einen Gebiet in das andere zu gelangen.

(1.1) Notiz. *Der Abstand modulo 2 zweier Brückengebiete ist die topologische Schnitzzahl modulo 2 zwischen der Brücke und einem Weg in $\mathbb{R} \times]0, 1[$ vom einen Gebiet ins andere. Dieser Abstand ist somit eine topologische Invariante.* \square

Die Randkurve eines Gebietes besteht aus Intervallen mit Enden in P_n , die in $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ liegen, sowie einigen Bögen der Brücke. Die besagten Intervalle heißen die *Füße* des Gebietes.

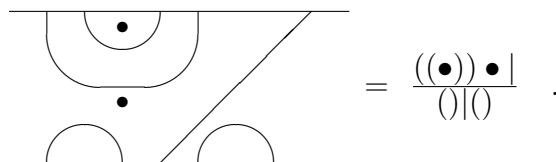
(1.2) Notiz. *Ein Gebiet ist durch seine Füße bestimmt.* \square

Ein *oberes* (*unteres*) Gebiet ist ein solches, dessen Füße alle in $\mathbb{R} \times 1$ ($\mathbb{R} \times 0$) liegen. Die anderen Gebiete heißen *vertikal*.

Jedem Gebiet G einer Brücke ordnen wir 4 *Trennzahlen* zu: $TZL(G), TZR(G), TZO(G), TZU(G)$. Dabei steht L, R, O, U für links, rechts, oben, unten. Die *linke Trennzahl* ist die Minimalanzahl von Bögen, die man kreuzen muß, um in das linksunendliche Gebiet zu gelangen. Die *untere Trennzahl* ist die Minimalanzahl von Bögen, die man kreuzen muß, um $\mathbb{R} \times 0$ zu erreichen. So ist etwa ein vertikales Gebiet durch $TZO = TZU = 0$ gekennzeichnet.

Wir fixieren im folgenden eine *Basiszahl* $k \in \{0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Es gibt dann zu jeder (n, n) -Brücke genau ein *Basisgebiet* mit einem Fuß $] - \infty, 0] \times 1$ im Fall $k = 0$ oder $[k, k + 1] \times 1$ im Fall $k > 0$. Ein Gebiet heiße *gerade* oder *ungerade*, je nachdem ob sein Abstand zum Basisgebiet gerade oder ungerade ist. Diese Benennung hängt nach (1.1) nur von $k \bmod 2$ ab. Später wird aber k selbst eine Rolle spielen.

Hier nun der für den weiteren graphischen Kalkül wichtige Begriff! Eine (n, n) -*Brücke mit Pfeilern zur Basiszahl k* besteht aus einer (n, n) -Brücke zusammen mit einer (eventuell leeren) Teilmenge ihrer *geraden* Gebiete. Wir symbolisieren diese ausgewählten Gebiete graphisch dadurch, daß wir einen Punkt (einen *Pfeiler*) in ein solches Gebiet (genannt *Pfeilergebiet*) einzeichnen. Aus drucktechnischen Gründen verwenden wir auch die anfangs eingeführte Klammersymbolik mit Bruchstrichen. Wir fügen Punkte \bullet hinzu, um die entsprechenden Pfeilergebiete zu symbolisieren. Die folgende Figur erläutere die Handhabung:



Es wäre auch sinnvoll, die ausgewählten Gebiete als schwarz und die anderen als weiß gefärbt anzusehen.

Sei $E^*(n, k)$ die Menge der (n, n) -Pfeilerbrücken zur Basiszahl k . Später werden wir uns vornehmlich mit einer gewissen Teilmenge dieser Brücken beschäftigen: Eine Pfeilerbrücke heiße *reduziert*, wenn der Abstand je zweier Pfeilergebiete größergleich 4 ist. Sei $E(n, k)$ die Menge der reduzierten Brücken in $E^*(n, k)$.

(1.3) Bemerkung. Während eine Brücke formal eine freie Involution ist, also ein kombinatorisches Objekt, deren Zusatzstruktur (Nichtkreuzen der Bögen) sich ebenfalls kombinatorisch durch einfache Ungleichungen beschreiben läßt [1], sind die Gebiete der Brücke nur mühsam kombinatorisch zu fassen, und geometrische und graphische Notation und Argumentation sind vorzuziehen. ♡

(1.4) Notiz. *Der Abstand zweier Pfeilergebiete ist gerade.*

BEWEIS. Aus der topologischen Invarianz (1.1) folgt, daß „gerader Abstand“ eine Äquivalenzrelation ist. □

Wir schieben einige für das Weitere nicht wichtige Nebenbemerkungen ein (bis (1.5)). Aus der letzten Notiz folgt, daß jede Brücke eine Schachbrettfärbung besitzt, d. h. die Gebiete lassen sich so schwarz und weiß färben, daß niemals zwei Gebiete gleicher Farbe entlang einer gemeinsamen Kante zusammenstoßen. Eine Färbung einer Brücke hängt auch mit einer Orientierung zusammen. Wir versehen die Punkte $(1, 0), \dots, (n, 0)$ abwechselnd mit den Vorzeichen $+, -, +, \dots$ und ebenso die Punkte $(1, 1), \dots, (n, 1)$. Eine Brücke wird dadurch *orientiert*, daß alle Bögen eine Orientierung tragen. Sie erhalten dadurch einen Anfang und ein Ende. Die Orientierung heiße *alternierend*, wenn die positiven (die negativen) Punkte in $\{1, \dots, n\} \times 0$ (in $\{1, \dots, n\} \times 1$) die Anfangspunkte sind.

(1.5) Notiz. *Jede Brücke besitzt eine alternierende Orientierung.*

BEWEIS. Für die Randpunkte $(k, 0)$ und $(l, 0)$ eines unteren Bogens gilt $k - l \equiv 1 \pmod{2}$. Also kann dieser Bogen korrekt orientiert werden. Ebenso für die oberen Bögen. Für die Randpunkte $(k, 0)$ und $(l, 1)$ eines vertikalen Bogens gilt $k \equiv l \pmod{2}$. Also können auch sie korrekt orientiert werden. □

Wir erinnern an die graphische Definition der Temperley-Lieb-Algebra $T_n = TA_{n-1}$ zum Coxeter-Graphen A_{n-1} (siehe [6, p. 100]), weil wir sie für die hier interessierenden Algebren brauchen. Sei \mathfrak{K} ein kommutativer Ring und $d \in \mathfrak{K}$ ein Parameter. Additiv ist T_n der freie \mathfrak{K} -Modul über der Menge der (n, n) -Brücken. Die Multiplikation ist \mathfrak{K} -bilinear. Deshalb ist nur das Produkt zweier Brücken S und T zu definieren. Sei $T \circ S$ die Figur, die entsteht, wenn der T -Streifen über den S -Streifen gesetzt und das Resultat auf $\mathbb{R} \times [0, 1]$ gestaucht wird. Die Figur $T \circ S$ ist im allgemeinen keine Brücke, weil im Innern des Streifens Zyklen entstanden sein können. Nach Beseitigung der Zyklen von $T \circ S$ verbleibe die Brücke $T \wedge S$. Es gebe $k(T, S)$ Zyklen. Unter diesen Umständen wird das Produkt der Basiselemente T, S durch

$$(1.6) \quad T \cdot S = d^{k(T,S)} T \wedge S$$

definiert. Die Zuordnung $(T, S) \mapsto T \wedge S$ macht die Menge der (n, n) -Brücken zu einem Monoid; die Funktion $(T, S) \mapsto d^{k(T,S)}$ ist die zugehörige Parameterfunktion; siehe dazu Abschnitt 9.

Zu einer festen Basiszahl k definieren wir nun in analoger Weise aus Pfeilerbrücken verschiedene Algebren.

Die Algebra $TE^*(n, k)$ sei additiv der freie \mathfrak{K} -Modul über $E^*(n, k)$. (Sie entsteht im Sinne von Abschnitt 9 aus einer Monoidstruktur auf $E^*(n, k)$ zusammen mit einer Parameterfunktion.) Die Multiplikation sei wiederum \mathfrak{K} -bilinear. Es bleibt daher das Produkt zweier Pfeilerbrücken zu definieren. Dazu betrachten wir zunächst die zugehörigen Brücken ohne Pfeiler, ebenfalls T und S genannt, und bilden wie vordem $T \circ S$. In $T \circ S$ schauen wir auf die Position der Pfeiler. Die Abweichung von einer Pfeilerbrücke kann verschiedene Gründe haben. Wir korrigieren die Abweichung durch die nachstehend in (1.7) und (1.8) beschriebenen Prozesse. Dazu fixieren wir weitere Parameter $c, f \in \mathfrak{K}$, die in die Definition von $TE^*(n, k)$ eingehen werden.

(1.7) Mehrfachpfeiler. Ein durch $T \circ S$ bestimmtes Gebiet enthalte $a > 1$ Pfeiler. In jedem solchen Fall entfernen wir $a - 1$ Pfeiler aus dem betreffenden Gebiet und multiplizieren das Resultat mit c^{a-1} . Sei $T \circ_1 S$ die resultierende Figur mit Pfeilern. Seien insgesamt $a(T, S)$ aus $T \circ S$ entfernt worden. ♡

(1.8) Pfeilerzyklen. Wir betrachten die Zyklen von $T \circ_1 S$. Läßt sich ein Zyklus in seinem Innern ohne Kreuzen von anderen Zyklen mit einem Pfeiler verbinden (*Pfeilerzyklus*), so werden Zyklus und Pfeiler weggelassen, und das Resultat wird mit f multipliziert. Die anderen Zyklen werden wie vordem mit dem Parameter d behandelt. Es gebe $b(T, S)$ Pfeilerzyklen und $k(T, S)$ gewöhnliche. ♡

Wenn wir die Prozesse (1.7) und (1.8) durchgeführt haben, ist eine Brücke $T \cdot S$ mit Pfeilern zur Basiszahl k entstanden, deren zugrundeliegende Brücke $T \wedge S$ ist. Durch $(T, S) \mapsto T \cdot S$ werde die Monoidstruktur auf $E^*(n, k)$ definiert. Die Brücke $T \cdot S$ ist durch den Prozess noch mit einem Faktor der Form

$$c^{a(T,S)} f^{b(T,S)} d^{k(T,S)}$$

zu multiplizieren (Parameterfunktion zum Monoid). Damit haben wir die Vorschrift für die Multiplikation. Die pfeilerlose Brücke aus Vertikalen ist das Einselement. Die geometrische Form der Multiplikation belegt ihre Assoziativität. Man hat sich noch zu überlegen, daß die Pfeiler weiterhin alle geraden Abstand von der Basiszahl k haben, damit die Definition der Multiplikation statthaft ist. Das ist äquivalent zu der Aussage, daß für ein Pfeilergebiet in T mit einem Fuß $[l, l + 1] \times 0$ die Kongruenz $l \equiv k \pmod{2}$ gilt, d. h. wir können die Fußbedingung auch am unteren Rand testen. Also ist zu zeigen:

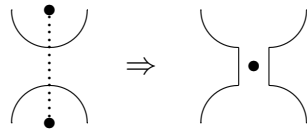
(1.9) Lemma. *Die Gebiete mit den Füßen $[k, k + 1] \times 1$ und $[k, k + 1] \times 0$ haben einen geraden Abstand.*

BEWEIS. Wir färben die Gebiete mit geradem Abstand von $[k, k + 1] \times 1$ schwarz. Dann alterniert die Farbe der Füße $[k - 1, k] \times 1, [k - 2, k - 1] \times 1, \dots$. Da die Füße $] - \infty, 0] \times 1$ und $] - \infty, 0] \times 0$ dieselbe Farbe haben, kommt man auf diese alternierende Weise in $[k, k + 1] \times 0$ zur schwarzen Farbe. □

Die Algebra $TE(n, k)$ habe als additive \mathfrak{K} -Basis die Menge $E(n, k)$ der reduzierten (n, n) -Brücken zur Basiszahl k . Um die Multiplikation zweier solcher

Brücken zu erklären, beginnen wir wie bei der Algebra $TE^*(n, k)$. Es gibt jetzt aber nach den Prozessen (1.7) und (1.8) noch einen weiteren Grund, der nach dem Übereinandersetzen der Brücken ein falsches Ergebnis liefert, nämlich wenn zwei Pfeilergebiete den Abstand zwei haben.

(1.10) Reduktion. Falls zwei Pfeilergebiete den Abstand zwei haben, so wird mit den Brücken eine Modifikation vorgenommen, die durch die Figur



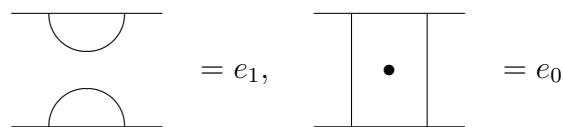
angedeutet wird (Punkt = Pfeiler). Die beiden Pfeilergebiete werden also durch einen Korridor verbunden, und es resultiert stattdessen ein einziges neues Pfeilergebiet. ♡

Man hat zu zeigen, daß die Reduktion ein wohldefinierter Prozeß ist. Zuvor müssen wir aber die Parameter c und f noch einschränken, und zwar setzen wir im Falle der Algebra $TE(n, k)$

$$c = d, \quad f = 1.$$

Das folgende Beispiel demonstriert, warum das nötig ist. Ebenfalls zeigt (1.11), was (1.10) mit den definierenden Relationen (0.1) einer Temperley-Lieb-Algebra zu tun hat.

(1.11) Beispiel. Mit den Bezeichnungen



gilt nach (1.10) $e_0 e_1 e_0 = e_0$ und nach (1.8) $e_1 e_0 e_1 = f e_1$. Damit berechnen wir $(e_0 e_1 e_0) e_1 = e_0 (e_1 e_0 e_1)$ auf zwei Weisen und sehen, daß $f = 1$ sein muß. Die Festlegung $c = d$ ist unwesentlich, da sie durch eine Parametertransformation (in einem Erweiterungsring) im allgemeinen erzwungen werden kann. ♡

Nun zur globalen Präzisierung von (1.10). Die durch die Brücke bestimmten Gebiete sind sämtlich homöomorph zu einer 2-Zelle. Wir betrachten die an eine pfeilerlose Zelle angrenzenden Pfeilerzellen. Diese haben dann untereinander den Abstand zwei. Wir verbinden innerhalb der pfeilerlosen Zelle die auf ihrem Rand liegenden Füße der Pfeilerzellen sternförmig, verdicken diesen Stern und lösen nach Art der Figur in (1.10) auf. (In jener Figur hat der Stern nur zwei Strahlen.) Diesen Prozeß führen wir mit allen pfeilerlosen Zellen durch, an die mindestens zwei Pfeilerzellen angrenzen. Der Prozeß ist wohldefiniert. Die Assoziativität beruht darauf, daß man den sternförmigen Verbindungsprozeß auch

durch mehrere unabhängige Verbindungen ersetzen kann. Die Füße zusammen mit den Verbindungen müssen einen zusammenziehbaren Komplex (Baum) bilden. Wir unterdrücken zunächst einen formalen Beweis.

In $TE(n, k)$ betrachten wir die Unteralgebra $TE_n(k)$, die von den gewöhnlichen Brücken und einer vertikalen Brücke e_0 mit einem Pfeiler an der Stelle k erzeugt wird. Dazu gehöre die Menge $E_n(k)$ der reduzierten Brücken². Die Bezeichnung ist im Einklang mit den Erläuterungen der Einleitung. Wir weisen hier allerdings nicht nach, daß die graphisch definierte Algebra mit der durch Erzeuger und Relationen präsentierten übereinstimmt, außer für den Fall $(n, k) = (6, 3)$ im dritten Abschnitt. Der Vollständigkeit halber definieren wir auch die Unteralgebra $TE_n^*(k)$ von $TE^*(n, k)$, die von den gewöhnlichen Brücken und einer vertikalen Brücke e_0 mit einem Pfeiler an der Stelle k erzeugt wird.

Wir betonen hier, daß die Konstruktion darauf angelegt ist, den folgenden Satz zu haben.

(1.12) Satz. *Es gibt einen kanonischen surjektiven Homomorphismus von Algebren $T_d E_n(k) \rightarrow TE_n(k)$.*

BEWEIS. Wir haben zu sagen, welche Brücke dem Erzeuger e_j zugeordnet werden soll. Für $j \geq 1$ sei das die gewöhnliche Brücke mit $HK = 1$, die oben j und $j + 1$ verbindet und ebenso unten. Das Bild von e_0 sei die vertikale Pfeilerbrücke mit einem Pfeiler zwischen k und $k + 1$. Die Prozesse (1.7) und (1.10) sind auf die Relationen für e_0 zugeschnitten. □

2. Einige Beispiele

Wir verschaffen uns einen Überblick über (n, n) -Brücken mit Basis k für kleine n und k .

(2.1) $n = 2, k = 1$. Die Pfeilerbrücken sind:

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \end{array} & \begin{array}{c} | \bullet | \\ \parallel \end{array} & \begin{array}{c} () \\ () \end{array} & \begin{array}{c} (\bullet) \\ () \end{array} & \begin{array}{c} () \\ (\bullet) \end{array} & \begin{array}{c} (\bullet) \\ (\bullet) \end{array} \\
 1 & e_0 & e_1 & e_0 e_1 & e_1 e_0 & e_0 e_1 e_0
 \end{array}$$

Im reduzierten Fall ist das Element rechtsaußen nicht vorhanden. Die Algebra $TE^*(2, 1)$ wird von e_0 und e_1 mit den Relationen

$$e_0^2 = ce_0, \quad e_1^2 = de_1, \quad e_1 e_0 e_1 = fe_1$$

erzeugt. Das ist eine Algebra vom Typ TB_2 , wie sie in [1, 2, 3] untersucht wurde. Im reduzierten Fall $TE(2, 1)$ haben wir dieselben Erzeuger aber die Relationen

$$e_0^2 = de_0, \quad e_1^2 = de_1, \quad e_1 e_0 e_1 = e_1, \quad e_0 e_1 e_0 = e_0.$$

²Ogleich wir in der Einleitung auch einen Graphen mit demselben Symbol bezeichnet haben!

Das ist die Algebra TA_2 .

Da alles durch gewöhnliche Brücken und e_0 erzeugt wird, handelt es sich hier um die Algebren $TE_2^*(1)$ und $TE_2(1)$.

(2.2) $n = 2, k = 0$. Die Pfeilerbrücken sind:

$$\begin{array}{cccccc} \parallel & \bullet \parallel & \parallel \bullet & \emptyset & \bullet \emptyset & \bullet \parallel \bullet \\ \parallel & \parallel & \parallel & \emptyset & \emptyset & \parallel \\ 1 & e_0 & f_0 & e_1 & e_0 e_1 & e_0 f_0 \end{array} .$$

Das sind die Basiselemente von $TE^*(2, 0)$. Die Algebra $TE(2, 0) = TE_2(0)$ hat die Basiselemente $1, e_0, e_1, e_0 e_1 = e_1 e_0$ und ist isomorph zu $TA_1 \otimes TA_1$.

(2.3) $n = 3, k = 1$. Die Algebra $TE_3(1)$ hat die folgenden Basiselemente.

$$\begin{array}{ccccc} \parallel \parallel & \emptyset \parallel & \parallel \emptyset & \emptyset \parallel & \parallel \emptyset \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ 1 & e_1 & e_2 & e_1 e_2 & e_2 e_1 \\ \\ \bullet \parallel & \bullet \parallel & \emptyset \parallel & \bullet \parallel & \emptyset \parallel \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ e_0 & e_0 e_1 & e_1 e_0 & e_0 e_1 e_2 & e_1 e_2 e_0 \\ \\ \bullet \emptyset & \emptyset \parallel & \bullet \emptyset & \emptyset \bullet & \\ \emptyset \parallel & \bullet \parallel & \emptyset \parallel & \emptyset \parallel & \\ e_0 e_2 e_1 & e_2 e_1 e_0 & e_0 e_2 = e_2 e_0 & e_1 e_0 e_2 e_1 & \end{array}$$

Das sind 14 Elemente. Die Erzeuger e_0, e_1, e_2 erfüllen die Relationen von TA_3 zum Graphen A_3 , so daß $TA_3 \cong TE_3(1)$ ist.

In der unreduzierten Algebra $TE^*(3, 1)$ hat man noch zusätzlich die Elemente

$$\begin{array}{cccc} \bullet \parallel \bullet & \bullet \parallel & \bullet \emptyset & \bullet \parallel \\ \parallel & \bullet \parallel & \bullet \parallel & \bullet \parallel \\ e_0 e_1 e_0 & e_0 e_2 e_1 e_0 & e_0 e_1 e_2 e_0 & \\ \\ \bullet \parallel & \emptyset \bullet & \bullet \parallel & \\ \emptyset \parallel & \bullet \parallel & \bullet \parallel & \\ e_0 e_1 e_0 e_2 e_1 & e_1 e_0 e_2 e_1 e_0 & e_0 e_1 e_0 e_2 e_1 e_0 & \end{array} .$$

Läßt man das erste Element weg, das nur in $TE^*(3, 1)$ vorkommt, so hat man also noch 6 weitere für $TE_3^*(1)$. Die Erzeugenden e_0, e_1, e_2 genügen den Relationen

$$e_0^2 = ce_0, \quad e_1^2 = de_1, \quad e_2^2 = de_2, \quad e_1 e_0 e_1 = fe_1, \quad e_0 e_2 = e_2 e_0.$$

Das sind die Relationen für eine in [3] behandelte Algebra TB_3 .

(2.4) $n = 4, k = 2$. Wir notieren die reduzierten Elemente in der folgenden Weise. Es gibt 14 pfeilerlose $(4, 4)$ -Brücken. Wir zeichnen in sie die möglichen Pfeiler ein, und zwar jeweils alle in eine einzige Brücke. Das liefert dann zunächst

alle Brücken mit einem Pfeiler. Wir schreiben unter die Figur die Anzahl der zugehörigen Basiselemente.

$\frac{\parallel \bullet \parallel}{\parallel \parallel \parallel}$	$\frac{() \bullet \parallel \bullet}{() \parallel \parallel}$	$\frac{\bullet (\bullet) \bullet}{ (\bullet) }$	$\frac{\bullet \parallel \bullet ()}{\parallel ()}$
2	3	5	3
$\frac{() \bullet \parallel \bullet}{ (\bullet) }$	$\frac{\bullet (\bullet) \bullet}{() \parallel \parallel}$	$\frac{\bullet (\bullet) \bullet}{\parallel ()}$	$\frac{\bullet \parallel \bullet ()}{ (\bullet) }$
4	4	4	4
$\frac{() \bullet \parallel \bullet}{\parallel ()}$	$\frac{\bullet \parallel \bullet ()}{() \parallel \parallel}$	$\frac{() \bullet ()}{() ()}$	$\frac{((\bullet))}{() \bullet ()}$
3	3	2	3
$\frac{() \bullet ()}{((\bullet))}$	$\frac{((\bullet)) \bullet}{((\bullet))}$		
3	4 + 1		

Es gibt ein einziges reduziertes Element mit 2 Pfeilern (und keines mit noch mehr Pfeilern). Das ist für die +1 in der letzten Zeile verantwortlich. Insgesamt erhalten wir 48 Elemente.

Die Erzeuger

$$\frac{\parallel \bullet \parallel}{\parallel \parallel \parallel} = e_0, \quad \frac{() \parallel}{() \parallel} = e_1, \quad \frac{|() |}{|() |} = e_2, \quad \frac{\parallel ()}{\parallel ()} = e_3$$

erfüllen die Relationen der Temperley-Lieb-Algebra TD_4 zum Graphen D_4 . Die Algebra TD_4 hat nach [3] den Rang

$$\text{Rang } TA_3 + \frac{1}{2} \text{Rang } TB_4 - 1 = 14 + 35 - 1 = 48.$$

Eine leichte Überlegung zeigt, daß alle vorstehend illustrierten Brücken in $TE_4(2)$ liegen. Also ist $TE_4(2) \cong TD_4$.

Die obigen Beispiele legen die folgenden Sätze nahe. Man beachte dazu, daß der Graph $E_n(1)$ gleich A_n ist und der Graph $E_n(2)$ gleich D_n . Es geht hier darum, die entsprechenden Figuren aufeinander zu beziehen. Außerdem werden hier die algebraischen Untersuchungen aus [3] zum Teil geometrisch ergänzt.

(2.5) Satz. *Die Algebren $TE_n(1)$ und TA_n sind isomorph.*

(2.6) Satz. *Die Algebra $TE_n^*(1)$ ist zu einer Algebra TB_n mit geeigneten Parametern isomorph.*

(2.7) Satz. *Die Algebren $TE_n(2)$ und TD_n sind isomorph.*

Diese Sätze müssen natürlich wegen der graphischen Definition der neuen Algebren geometrisch bewiesen werden. Für die alten Algebren ist dann auch eine Beschreibung durch Erzeugende und Relationen vorhanden.

Beweis von Satz (2.6). Die Algebra TB_n hat nach [1] als \mathfrak{K} -Basis alle symmetrischen (n, n) -Brücken. Eine symmetrische (n, n) -Brücke ist eine Brücke in $\mathbb{R} \times [0, 1]$ mit Endpunktmenge $\{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\} \times \{0, 1\}$, die spiegelsymmetrisch zur Achse $0 \times [0, 1]$ ist. Wir notieren hier eine solche Brücke durch ihren Anteil in $[0, \infty[\times [0, 1]$. Dann besteht sie aus Bögen mit beiden Enden in $\{1, \dots, n\} \times \{0, 1\}$, sowie aus *Halbbögen*, die ein Ende auf der Achse $0 \times [0, 1]$ haben.

(2.8) Notiz. *Eine symmetrische Brücke hat eine gerade Anzahl von Halbbögen.*
 BEWEIS. Insgesamt gibt es nämlich $2n$ Bögen, und die Bögen, die nicht die Achse treffen, treten paarweise auf. \square

Sei $B(n)$ die Menge der symmetrischen (n, n) -Brücken. Wir definieren eine Abbildung

$$\sigma: B(n) \rightarrow E^*(n, 1)$$

durch den folgenden geometrischen Prozeß. Die Enden der Halbbögen auf $0 \times [0, 1] = [0, 1]$ seien $x_1 < x_2 < \dots < x_{2k}$. Wir verbinden der Reihe nach x_{2i-1} mit x_{2i} auf der Achse und lesen das Resultat als gewöhnliche (n, n) -Brücke. In das rechts neben $0 \times [x_{2i-1}, x_{2i}]$ liegende Gebiet setzen wir einen Pfeiler. Dann haben sicherlich die Pfeilergebiete untereinander und von $[1, 2] \times 1$ einen geraden Abstand, und das Resultat liegt somit in $E^*(n, 1)$. Ein Beispiel für die Handhabung:

$$\frac{())())}{)())} \Leftrightarrow \frac{()(\bullet)|\bullet}{()|\bullet}.$$

Ein Element im Bild von σ hat höchstens ein vertikales Pfeilergebiet.

Die linke Trennzahl eines Pfeilergebietes einer Brücke im Bild von σ ist 1. Durch diese Bedingung wird das Bild von σ auch charakterisiert. Für eine Brücke, in der jedes Pfeilergebiet die linke Trennzahl 1 hat, können wir nämlich durch Aufschneiden der von Linksunendlich trennenden Pfeilergebietsbögen zu zwei Halbbögen ein Element aus $B(n)$ herstellen.

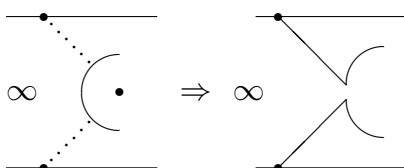
(2.9) Notiz. *Die Elemente in $E(n, 1)$ haben die linke Trennzahl 1 für alle Pfeilergebiete.*

BEWEIS. Das gilt sicherlich für die erzeugenden gewöhnlichen Brücken und das Element e_0 . Bei Multiplikation von Brücken kann sich diese Trennzahl nicht erhöhen, und die Parität der Trennzahl bleibt bei Multiplikation erhalten. Also ist in diesem Fall nur die Trennzahl 1 möglich. \square

Als Folgerung erhalten wir die Inklusion $E(n, 1) \subset \text{Bild } \sigma$. Die Gleichheit wird aus der Kenntnis der multiplikativen Struktur von TB_n folgen. Geometrisch ist die Multiplikation der Brücken in $B(n)$ folgendermaßen definiert: Übereinandersetzen und Zählen der Zyklen. In unserer Veranschaulichung mittels Bögen und Halbbögen gibt es dagegen *Zyklen* und *Halbzuklen*. Letztere haben beide Enden in $0 \times [0, 1]$. Die gewöhnlichen Zyklen werden durch den Parameter d verarbeitet. Es gibt jedoch zwei Sorten von Halbzuklen: Das Innere hat geraden oder

ungeraden Abstand von $(0, 0)$. Bei geradem Abstand verwenden wir den Parameter c , bei ungeradem den Parameter f . Bei der Übersetzung σ gehört dann c zu den Mehrfachpfeilern und f zu den Pfeilerzyklen. Somit induziert σ einen Homomorphismus $TB_n \rightarrow TE(n, 1)$. Es ist bekannt [1], daß TB_n von e_0 und den gewöhnlichen Brücken erzeugt wird. Damit folgt $E_n^*(1) = \sigma B(n)$. \square

Beweis von Satz (2.5) Wir haben die reduzierten Elemente in $E(n, 1)$ zu betrachten. Da alle Pfeilergebiete die linke Trennzahl 1 haben, gibt es in einer reduzierten Brücke höchstens ein Pfeilergebiet. Sei eine derartige Brücke gegeben. Durch eine Schnittmodifikation wie in der folgenden Figur erhält man daraus eine gewöhnliche Brücke mit einer um 1 vermehrten Bogenzahl.



Sei umgekehrt eine Brücke gegeben, die links nicht mit $\infty | \dots$ aufhört. Dann sind ihre von der ersten linken Position $1 \times \{0, 1\}$ oben und unten ausgehenden Bögen verschieden. Wir können diese Bögen deshalb spleißen und damit ein Pfeilergebiet der linken Trennzahl 1 schaffen, als Umkehrung des Schneideprozesses.

Beide Prozesse liefern eine Bijektion zwischen den gewöhnlichen (n, n) -Brücken und den Elementen von $E(n, 1)$ mit höchstens einem Pfeilergebiet, und letzteres sind genau die Elemente von $E_n(1)$. Diese Bijektion liefert den gewünschten Isomorphismus $TA_n \cong TE_n(1)$. Man müßte noch verifizieren, daß diese Zuordnung mit der Multiplikation verträglich ist. \square

Der vorstehende Beweis zeigt übrigens, daß man in TA_n Normalformenworte mit höchstens einem e_0 braucht, was auch anderweitig bekannt ist.

Zur Untersuchung von $TE_n(2)$ wird die folgende Aussage gebraucht. Der Rest dieses Abschnittes ist dem Beweis von (2.7) gewidmet.

(2.10) Notiz. *Es gibt gleichviele symmetrische (n, n) -Brücken mit einer Anzahl der Halbbögen $\equiv 2(4)$ und $\equiv 0(4)$.*

Diese Notiz folgt offenbar aus der nächsten genaueren Anzahlbestimmung. Ein direkter Beweis ist nicht schwer und wird im Teil V zur Brückenkombinatorik enthalten sein.

(2.11) Notiz. *Es gibt*

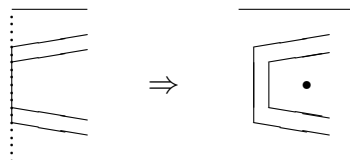
$$\binom{2n}{n-k} - \binom{2n}{n-k-1}$$

symmetrische (n, n) -Brücken mit genau $2k$ Halbbögen. \square

Sei $B_0(n)$ die Menge der symmetrischen (n, n) -Brücken mit durch 4 teilbarer Anzahl von Halbbögen. Wir erhalten eine injektive Abbildung

$$\omega: B_0(n) \rightarrow E(n, 2)$$

durch die folgende geometrische Konstruktion. In Analogie zum Beweis von (2.6) numerieren wir die Achsenpunkte der Halbbögen $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{4k}$. Die vier aufeinanderfolgenden $x_{4j-3}, x_{4j-2}, x_{4j-1}, x_{4j}$ modifizieren wir zu zwei gewöhnlichen Bögen wie in der folgenden Figur.



Das Bild dieses Prozesses besteht genau aus den reduzierten Pfeilerbrücken, bei denen alle Pfeilergebiete die linke Trennzahl 2 haben, denn für diese können wir den Prozeß offenbar umkehren. Eventuell ist die Pfeilermenge leer.

(2.12) Notiz. *Eine Brücke in $E_n(2)$ hat nur die linken Trennzahlen 0 und 2. Tritt die Trennzahl 0 auf, so gibt es nur ein Pfeilergebiet.*

BEWEIS. Die erste Aussage folgt wieder daraus, daß die Trennzahlen bei Multiplikation höchstens kleiner werden und ihre Parität sich nicht ändert. Die zweite Aussage ist dann eine Konsequenz der Reduziertheit. \square

Wegen (2.10) betrachten wir zunächst die Menge $E'_n(2) \subset E(n, 2)$ der Brücken mit linken Trennzahlen 0 und 2.

(2.13) Notiz. *Die Menge $E'_n(2)$ hat die Mächtigkeit*

$$\frac{1}{2} \binom{2n}{n} + \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

BEWEIS. Der erste Summand ist mittels (2.10) die Mächtigkeit des Bildes von ω . Der zweite Summand ist der Rang von TA_{n-1} . \square

In $E'_n(2)$ gibt es ein Element, das nicht in $E_n(2)$ liegt. Es handelt sich um die identische Brücke mit einem Pfeilergebiet der linken Trennzahl Null. Die Algebra TD_n hat nach [3] einen um 1 kleineren Rang als die Mächtigkeit von $E'_n(2)$. Wir erhalten einen Homomorphismus $TD_n \rightarrow TE'_n(2)$, der die formalen Erzeuger e_0, \dots, e_{n-1} auf die ebenso bezeichneten elementaren Brücken abbildet. Das Bild liegt in $TE_n(2)$. Also besteht $E_n(2)$ genau aus den Elementen von $E'_n(2)$ ohne das eine soeben ausgeschlossene. Damit ist Satz (2.7) bewiesen. Die Strukturaussage von [3], (2.6) findet in der Struktur der Pfeilerbrücken eine natürliche Entsprechung. Wir geben noch einige Erläuterungen dazu.

Die Brücken mit einem Pfeilergebiet der linken Trennzahl 0 entsprechen den gewöhnlichen Brücken. Der von ihnen in $TE'_n(2)$ aufgespannte \mathfrak{K} -Modul ist darin ein zweiseitiges Ideal J .

Wir ordnen einer Pfeilerbrücke aus $E'_n(2)$ dadurch eine gewöhnliche Brücke zu, daß wir einen Pfeiler nach Linksunendlich setzen, dann den Reduktionsprozeß

(1.10) anwenden und alle Pfeiler weglassen. Diese Zuordnung ist mit der Multiplikation verträglich und liefert einen Algebrenhomomorphismus $\alpha: TE'_n(2) \rightarrow TA_{n-1}$, der die Inklusion $TA_{n-1} \subset TE'_n(2)$ spaltet.

(2.14) Notiz. Die Quotientabbildung $TE'_n(2) \rightarrow TE'_n(2)/J =: \mathfrak{A}$ und α zusammen liefern einen Isomorphismus von Algebren $TE'_n(2) \cong \mathfrak{A} \times TA_{n-1}$. \square

Es bliebe noch die Beziehung zwischen \mathfrak{A} und TB_n geometrisch aufzuzeigen. Das verschieben wir jedoch.

3. Die Algebra $TE_6(3)$

Als Beispiel für die Wirkungsweise des neuen graphischen Kalküls behandeln wir ausführlich die Algebra $TE_6(3)$ und ihre Modulstruktur. Sie wird von den gewöhnlichen (6,6)-Brücken und der vertikalen Pfeilerbrücke $|||\bullet||| = e_0$ erzeugt. Als Hilfsmittel verwenden wir:

(3.1) Brückeninvarianten

- (1) Die *horizontale Kantenzahl* HK . Sie liegt in unserem Fall in $\{0, 1, 2, 3\}$.
- (2) Die Anzahl $VP(b)$ der *vertikalen Pfeilergebiete* einer Brücke b . Ein Gebiet heißt vertikal, wenn es Randpunkte in $\mathbb{R} \times 0$ und $\mathbb{R} \times 1$ hat. Zum Beispiel ist e_0 vertikal.
- (3) Die *Filterung* einer Brücke b ist durch $F(b) = HK(b) + VP(b)$ definiert. Wir werden gleich sehen, daß $0 \leq F(b) \leq 3$ ist.
- (4) Ein Pfeilergebiet G hat *Trennzahlen* $TZU(G)$, $TZO(G)$, $TZR(G)$, $TZL(G)$, worin U, O, R, L für unten, oben, rechts, links steht. Wir werden sehen, daß $0 \leq U + O \leq 3$ und $L, R \in \{1, 3\}$ gilt. \heartsuit

Wir notieren einige Aussagen über diese Größen.

(3.2) Die Trennzahlen mod 2 sind topologische Invarianten. Durch Multiplikation werden TZR und TZL nicht erhöht. Da e_0 rechte und linke Trennzahl 3 hat, folgt $L, R \in \{1, 3\}$. \heartsuit

(3.3) Jedes Gebiet einer Brücke berührt entweder den oberen oder den unteren Rand. Also ist entweder $U = 0$ oder $O = 0$. Eine Trennung eines oberen Gebietes vom unteren Rand ist nur durch obere horizontale Bögen möglich. Deshalb ist O höchstens gleich der maximal möglichen HK . In unserem Fall kommen die Werte 0, 1, 2, 3 für O vor. \heartsuit

(3.4) Die HK wird durch Multiplikation nicht erniedrigt. Wenn ein vertikales Pfeilergebiet existiert, so ist dieses durch einen oder drei vertikale Bögen vom linken und rechten Unendlich getrennt. Es gibt demnach 6, 4, 2 oder 0 vertikale Bögen. Die Fälle führen zu den Pfeilersituationen der folgenden Tabelle.

Pfeiler	HK	F
•	0	1
•	1	2
•	1	2
•	2	3

Wegen der Reduktionsbedingung sind weitere Pfeiler nicht möglich. Damit sind die möglichen Filtrierungen beschrieben. \heartsuit

In der Tabelle 1 am Ende dieses Abschnittes zählen wir in Klammernotation die möglichen Konfigurationen von Halbbögen und Vertikalen auf. Diese sind dann mit horizontalen Bögen aufzufüllen. Unter der jeweiligen Figur steht die Zahl der Auffüllungen. Sie ergibt sich als Produkt der unteren und oberen Auffüllzahlen. Letztere sind durch die bekannte Brückenkombinatorik leicht zu ermitteln. Einige Fälle treten in Tabelle 1 paarweise auf, da die Vertauschung von oben und unten jeweils verschiedene Möglichkeiten liefert. In diesem Fall haben wir eine 2 vor die Figur geschrieben, die Anzahlen für die Gesamtzählung sind jeweils zu verdoppeln.

Die gewöhnlichen $(6, 6)$ -Brücken ohne Pfeiler, von denen es 132 gibt, lassen wir in der Tabelle beiseite.

Bemerkung. Zur Aufzählung der Pfeilerbrücken ist ebenfalls wie früher schon eine graphische Notation möglich, die auch im zweiten Abschnitt schon nützlich gewesen war. Wir verwenden wieder Brücken mit Bögen und linken Halbbögen wie bei der Temperley- Lieb-Algebra vom Typ B . Eine Pfeilerbrücke notieren wir dabei als eine geeignete solche B -Brücke. Der Übergang von Pfeilerbrücken zu B -Brücken heiße *Linksschnitt*. Wir wählen dazu einen bogentransversen Weg vom Pfeiler nach Linksunendlich mit minimaler Schnittpunktzahl (also 1 oder 3 in unserem Fall). Entlang dieses Weges wird aus einem Bogen ein Paar von Halbbögen.

Es entstehen also 2 oder 6 Halbbögen, deren Zusammengehörigkeit durch eine Strecke über 2 oder 6 linke Endpunkte notiert wird. Dieser Prozess ist umkehrbar, so daß wir für unseren Fall eine treue Notation finden. Die Reduktionsbedingung ist bei dem Umkehrprozess immer erfüllt.

(3.5) Notiz. Die möglichen Anzahlen für Halbbögen sind $0, 2, 6, 8, 12$, da die linke Trennzahl 1 oder 3 ist. Die zugehörige Anzahl der Pfeilergebiete ist $0, 1, 1, 2, 2$. \square

Als Ergänzung zum Linksschnitt bemerken wir noch: Im Fall von zwei Pfeilergebieten gibt es noch weitere Möglichkeiten, die zu einem Halbbogen an der linken Kante führen, wenn nämlich ein vertikaler Bogen von zwei Schnittwegen getroffen wird. \heartsuit

In der rechten Spalte der Tabelle 1 haben wir die Gesamtzahlen einer Zeile notiert. Insgesamt ergibt sich die folgende Anzahl:

$$132 + 190 + 107 + 110 + 44 + 68 + 12 + 30 = 703.$$

Von diesen Fällen sind in $E_6(3)$ jedoch nicht alle möglich! Zum einen müssen auch die rechten Trennzahlen kleinergleich 3 sein. Das eliminiert die rechten Fälle in den ersten beiden Zeilen der Tabelle, also 11 Stück.

Sodann sind die Fälle der letzten Zeile unmöglich. Das hat folgenden Grund. Wir haben das Erzeugnis von gewöhnlichen Brücken und e_0 zu betrachten. Wir müssen für die in Rede stehenden Situationen jedenfalls mindestens zweimal e_0 verwenden. (Zur Erinnerung: Wir betrachten Linksmultiplikation als geometrisch oben angesetzt.) Aus einem unteren Pfeilergebiet kann höchstens ein vertikales werden. Im ersten Fall (links in der letzten Zeile) muß also im Verlauf der Multiplikationen mit Erzeugern irgendwann eine Pfeilerbrücke mit einem oberen Pfeilergebiet mit e_0 multipliziert werden. Dann ist aber die Reduktionsbedingung verletzt, und es entsteht kein zweites Pfeilergebiet.

Ein zweites Pfeilergebiet kann also nur dann auftreten, wenn der Fuß



vom schon vorhandenen Pfeilergebiet mindestens den Abstand 4 hat. Das kann nur ein unteres Pfeilergebiet sein. Außerdem darf in den Fällen 2 und 3 der letzten Tabellenzeile die HK nicht größer als 1 sein. Eine Vierfachtrennung ist dann unmöglich.

Wir halten als Zwischenergebnis dieser Brückenzählung fest:

(3.6) Notiz. *Die Algebra $TE_6(3)$ hat höchstens den Rang 662.* □

Um den Rang als genau 662 zu erweisen, müßte dargetan werden, daß alle genannten Figuren wirklich auftreten. Das ist im Prinzip eine Frage der Geduld, wenn man keine weiteren strukturellen Überlegungen einbringen möchte. Es stellt sich jedoch heraus, daß eine genauere Einsicht in die Anzahlbestimmung über die Modul- und Idealstruktur von $TE_6(3)$ gewonnen wird. Wir werden mit (3.9), (3.10) und den anschließenden Bemerkungen gezeigt haben:

(3.7) Satz. *Die Algebra $TE_6(3)$ ist für generische Parameter d halbeinfach und hat in einem solchen Fall einfache Moduln vom Rang 1, 6, 20 und 15.*

Im Lichte von (3.6) bemerken wir zu (3.7)

$$662 = 1^2 + 6^2 + 20^2 + 15^2.$$

Auch im nichtgenerischen Fall gibt es immer typische Moduln vom in (3.7) genannten Rang, da sie durch den graphischen Kalkül definiert werden. Wir setzen im folgenden voraus, daß $d \in \mathfrak{K}$ invertierbar ist.

Für obere Pfeilerbrücken verwenden wir auch die Klammernotation, wobei ein Punkt an der zum Pfeilergebiet gehörenden Stelle eingetragen wird. (Das ist nicht immer eindeutig möglich, $(\bullet()) = (())\bullet$.) Die Standardbrücken der Kantenzahl 0, 1, 2, 3 bezeichnen wir mit $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$; die oberen und unteren Brücken dieser pfeilerlosen Brücken sind gleich $||| |||$, $||()||$, $|(()|)$, $((()))$. Die einfachen Moduln werden sich aus den von β_j erzeugten Linksidealen modulo den Brücken höherer Filterung ergeben. Wir behandeln sie der Reihe nach.

Im weiteren Verlauf benutzen wir:

(3.8) Lemma. *Die Filterung wird bei Multiplikation nicht erniedrigt.*

BEWEIS. Durch Multiplikation von links mit einer gewöhnlichen Brücke kann ein vertikales Pfeilergebiet nur dann verschwinden, wenn seine vertikalen Begrenzungen verbunden werden. Dann erhöht sich aber die HK um 1.

Wenn durch Multiplikation mit e_0 die horizontale Kantenzahl erniedrigt wird, so geschieht dies durch einen Reduktionsprozeß, der ein vertikales Pfeilergebiet schafft. \square

(3.9) Satz. *Das von β_3 erzeugte Linksideal $M(3)$ hat den Rang 15 und das von β_3 erzeugte zweiseitige Ideal $L(3)$ den Rang 15^2 . Es ist $L(3)$ die direkte Summe von 15 zu $M(3)$ isomorphen Linksidealen. Die oberen Brücken einer Basis von $M(3)$ sind in der folgenden Tabelle angegeben.*

$((()))$	$()(())$	$((())()$	$()()()$	$((())$
$(((\bullet)))$	$()(\bullet())$	$((\bullet)()$	$()(\bullet)()$	$((\bullet \bullet))$
$(\bullet(()))$	$(\bullet)()$	$((\bullet))(\bullet)$	$(\bullet)()()$	$()()(\bullet)$

BEWEIS. In der ersten Zeile stehen die oberen Brücken der pfeilerlosen Elemente von $M(3)$ und in der zweiten Zeile die daraus durch Linksmultiplikation mit e_0 hervorgehenden. Die dritte Zeile besteht aus den Produkten

$$e_3z, \quad e_4e_3x, \quad e_2e_3y, \quad e_3x, \quad e_3y,$$

wobei x, y, z das zweite, dritte und fünfte Element der zweiten Zeile bezeichnet. Weitere Elemente gibt es nicht, was unter Beachtung von Reduktion und Trennzahl zu ersehen ist.

Nach (3.8) bilden die Brücken der maximalen Filterung 3 eine Unteralgebra $L(3)$ (eventuell ohne 1). Der Modul $M(3)$ ist darin enthalten. Wegen (3.8) ist $L(3)$ ein zweiseitiges Ideal.

Wir betrachten die Linksideale, die durch die 15 an $\mathbb{R} \times \frac{1}{2}$ gespiegelten Elemente (Vertauschen von oben und unten) des Satzes erzeugt werden. Alle diese Linksideale sind isomorph zu $M(3)$; ein Beweis benutzt die folgenden Ideen. Isomorphismen werden durch geeignete Rechtsmultiplikation mit Brücken geliefert. Hierbei wird die Invertierbarkeit von d benutzt. In der Summe dieser Linksideale ist $L(3)$ enthalten. Es wird von β_3 erzeugt: Man kann aus einer Brücke durch

Multiplikation mit einer anderen zunächst die $HK = 3$ erreichen und dann durch weitere Multiplikation β_3 herausmodellieren.

Da die Ideale von disjunkten Basismengen erzeugt werden, ist ihre Summe direkt. \square

(3.10) Satz. *Sei $M(2)$ das von β_2 erzeugte Linksideal modulo dem Untermodul der Brücken höherer Filterung. Der Modul $M(2)$ hat den Rang 20 und wird von den Brücken mit unterer Brücke $|((\bullet))|$ und der Filterung 2 erzeugt. Das von β_2 erzeugte zweiseitige Ideal modulo $L(3)$ ist eine Algebra $L(2)$ vom Rang 20^2 und zerfällt als Linksmodul in 20 zu $M(2)$ isomorphe Moduln.*

BEWEIS. Der Modul $M(2)$ wird definitionsgemäß von den genannten Brücken erzeugt. Es bleibt festzustellen, daß es 20 Stück davon gibt. Die möglichen Pfeilerbrücken ohne vertikale Pfeilergebiete sind in summarischer Notation in der folgenden Tabelle angegeben.

$ ((\bullet)) $	$ (\bullet) $	$ (\bullet) (\bullet)$	$(\bullet) (\bullet)$	$(\bullet) (\bullet)$
$ (\bullet)(\bullet)$	$(\bullet)(\bullet) $	$(\bullet(\bullet)) $	$ (\bullet)(\bullet)$	

Es bleibt zu verifizieren, daß diese durch die 9 gewöhnlichen Brücken darunter und Multiplikation mit e_0 erzeugt werden. Durch Multiplikation mit e_0 entstehen

$$|((\bullet))|, ||(\bullet)(\bullet), (\bullet)(\bullet)||, ((\bullet)\bullet)||, ||(\bullet)(\bullet).$$

Sodann werden die letzten beiden mit e_3, e_4 und e_5 multipliziert.

Die weitere Argumentation ist wie für (3.9). \square

Schließlich kann man analog wie in (3.9) und (3.10) mit β_0 und β_1 verfahren. Dadurch werden dann der triviale Modul geliefert, sowie der 6-dimensionale Modul, der auch anders durch die Spiegeldarstellung der Hecke-Algebra gegeben ist (siehe [3]).

Insgesamt ist dann damit die für (3.7) nötige Modultheorie beschrieben. Wir gehen hier nicht auf die genaue Bedingung für die Halbeinfachheit ein. Jedenfalls genügt es, von zugehörigen halbeinfachen Hecke-Algebren auszugehen. Ebenfalls diskutieren wir noch nicht die Einfachheit der konstruierten Moduln. Wenn man die Theorie der Algebren TA_n voraussetzt, folgt sie aus (3.11).

Wir haben die Unter algebra $TA_5 \subset TE_6(3)$ der gewöhnlichen Brücken. Aus der Strukturtheorie dieser Temperley-Lieb-Algebren wissen wir (siehe etwa [5]): Die Algebra TA_5 hat (im generischen Fall) einfache Moduln M_0, M_1, M_2 und M_3 vom Rang 1, 5, 9, 5. Die Restriktion eines $TE_6(3)$ -Moduls M als TA_5 -Modul wurde kurz mit $\text{res}M$ bezeichnet.

(3.11) Satz. *Es bestehen die folgenden Isomorphismen:*

$$\begin{aligned} \text{res}M(0) &\cong M_0 \\ \text{res}M(1) &\cong M_1 \oplus M_0 \\ \text{res}M(2) &\cong M_2 \oplus 2M_1 \oplus M_0 \\ \text{res}M(3) &\cong M_3 \oplus M_2 \oplus M_0. \end{aligned}$$

BEWEIS. Der Fall $M(0)$ ist klar. Wir beginnen mit $M(3)$ und betrachten die oben beschriebene geometrische Form durch Brücken der Filterung 3. Die gewöhnlichen Brücken liefern darin einen Untermodul M_3 der Dimension 5. Wir untersuchen weiterhin $M(3)/M_3$. Dabei gehen wir vom Element

$$z = \frac{()(\bullet)()}{()()()}$$

aus. Wenn wir dieses Element von rechts mit e_0 multiplizieren, entsteht β_2 . Multiplikation von links mit gewöhnlichen Brücken liefert alle gewöhnlichen oberen $(2, 2)$ -Brücken, und das sind neun Stück. Es erzeugt demnach z in $M(3)/M_3$ einen neundimensionalen Modul, der zu M_2 isomorph ist. Der Quotient nach diesem Modul ist notwendig eindimensional. Das einzige Basiselement, das noch fehlt, hat die obere Brücke $((\bullet))$.

Wir behandeln auf ähnliche Weise $M(2)$. Darin haben wir zunächst den Untermodul M_2 aus den gewöhnlichen Brücken. Die übrigen 11 Basiselemente von $M(2)$ sind in der folgenden Tabelle angegeben.

$ (\bullet)()$	$ ()(\bullet)$	$ ((\bullet))$	$() (\bullet)$	$ () (\bullet)$
$()(\bullet) $	$(\bullet)() $	$(\bullet()) $	$(\bullet) ()$	$(\bullet) () $
$ ((\bullet)) $				

Wir behaupten, daß die Zeilen jeweils einen Modul M_1, M_1, M_0 liefern. Wenn wir in der oberen Zeile als untere Brücke $||()()$ wählen und von rechts mit e_0 multiplizieren, so entstehen die oberen Brücken mit $HK = 1$. Ebenso in der zweiten Zeile bei unterer Brücke $()()||$. Das liefert die Isomorphismen zu M_1 . Man muß dazu noch verifizieren, daß die angegebenen Basiselemente Untermoduln von $M(2)/M_2$ liefern.

Der Fall $M(1)$ schließlich ist klar, weil man den Untermodul der gewöhnlichen Brücken M_1 hat. \square

Es bleibt zu zeigen, daß die Algebra $TE_6(3)$ zu der durch Erzeugende und Relationen definierten Algebra TE_6 isomorph ist. Dem ist der nächste Abschnitt gewidmet.

$2 \frac{(\bullet)}{\quad}$ 45	$2 \frac{(\bullet) \parallel}{\quad}$ 45	$2 \frac{(\bullet) \parallel \parallel \parallel}{\quad}$ 5	190
$\frac{ \bullet }{\quad}$ 81	$\frac{ \bullet \parallel}{\quad}$ 25	$\frac{ \bullet \parallel \parallel \parallel}{\quad}$ 1	107
$2 \frac{(((\bullet)))}{\quad}$ 5	$2 \frac{\parallel(\bullet)}{\quad}$ 45	$2 \frac{\parallel(\bullet) \parallel}{\quad}$ 5	110
$2 \frac{\parallel(\bullet)}{\quad}$ 9	$\frac{\parallel \bullet }{\quad}$ 25	$\frac{\parallel \bullet \parallel \parallel}{\quad}$ 1	44
$2 \frac{(((\bullet)))}{(\bullet)}$ 9	$2 \frac{\parallel(\bullet) \parallel}{(\bullet) \parallel}$ 5	$2 \frac{\parallel(\bullet)}{(\bullet) \parallel}$ 25	68
$\frac{(((\bullet)))}{((\bullet))}$ 1	$2 \frac{\parallel(\bullet)}{\parallel((\bullet))}$ 5	$\frac{\parallel(\bullet)}{\parallel((\bullet))}$ 1	12
$2 \frac{(\bullet) \parallel (\bullet)}{\quad}$ 9	$2 \frac{(\bullet) \parallel \parallel \bullet }{\quad}$ 5	$2 \frac{\parallel(\bullet) \parallel}{(\bullet) \parallel}$ 1	30

Tabelle 1

4. Vergleich mit der Algebra TE_6

Die Algebra $T_d E_6$ wird von e_0, \dots, e_5 erzeugt. Nach Konstruktion gibt es einen surjektiven Homomorphismus $TE_6 \rightarrow TE_6(3)$, siehe (1.12). Den Rang von $TE_6(3)$ haben wir schon bestimmt. Um den Homomorphismus als injektiv zu erweisen, zeigen wir, daß sich Worte in e_0, \dots, e_5 auf Grund der Relationen von TE_6 in eine gewisse Normalform bringen lassen, wobei die Anzahl dieser Normalformen 662 ist. Wir unterscheiden dazu verschiedene Fälle, je nach dem Auftreten von e_0 .

(4.1) Es gibt die von e_1, \dots, e_5 erzeugte Unter algebra TA_5 . Sie hat den Rang 132.

(4.2) Wir bestimmen Normalformen von Monomen der Form $\alpha e_0 \beta$ mit $\alpha_1 \beta \in TA_5$. Unter Monomen verstehen wir dabei beliebige Worte in den Symbolen e_j ,

eventuell mit einem Vorfaktor aus \mathfrak{K} versehen. Es werden nur solche Monome betrachtet, die sich nicht durch die definierenden Relationen von TE_6 verkürzen lassen und bei denen α sich nicht verkürzen läßt, zum Beispiel durch Vertauschen von Erzeugern mit e_0 . Diese Monome nennen wir dann reduziert. Die Minimalität von α bedeutet:

- (1) $\alpha = 1$ oder
- (2) α enthält e_3 und hört rechts mit e_3 auf. Links neben diesem e_3 steht kein mit e_3 vertauschbarer Erzeuger, also kein e_1 und e_5 .

Die Brücken α mit dieser Bedingung haben als untere Brücken $||()||$, $|(()|)$, $((()|))$. Denn die anderen mit e_3 aufhörenden Elemente haben untere Brücken $()()||$, $||()()$, $()()()$ und enthalten somit e_1 oder e_5 . Die Anzahl der α mit den genannten möglichen unteren Brücken ist 5, 9, 5. Wir führen sie hier tabellarisch auf (Tabelle 2). In der zweiten Spalte der Tabelle 2 steht das zugehörige Produkt der Erzeuger, in der Kurzform 243 für $e_2e_4e_3$. In der dritten Spalte steht die Anzahl der möglichen β , die wir gleich begründen. Dabei liefern zwei α , die durch die Spiegelung $e_j \leftrightarrow e_{6-j}$ auseinander hervorgehen, dieselbe Anzahl.

Die Bedingungen an die β haben die folgende Form, weil alle anderen Möglichkeiten zu einer Verkürzung von $\alpha e_0\beta$ führen: Es beginnt β nicht mit einem der Symbole e_j , die in α vorkommen.

Wir behandeln der Reihe nach die Fälle der Tabelle 2.

$\alpha = e_3$. Die mit e_3 beginnenden β haben eine obere Brücke, die $||()||$ enthält. Dieses ist die Anzahl der 10-Brücken 42. Also bleiben $132 - 42 = 90$.

$\alpha = e_4e_3$. Kein Beginn mit $||()||$ oder $||()|$. Das sind disjunkte Fälle. Also bleiben $132 - 2 \cdot 42 = 48$.

$\alpha = e_5e_4e_3$. Kein Beginn mit $||()||$, $||()|$ oder $|||()$. Der erste und der dritte Fall haben als Schnittmenge die mit $||()()$ beginnenden Brücken. Davon gibt es 14. Also bleiben $132 - 3 \cdot 42 + 14 = 20$.

$\alpha = e_2e_5e_4e_3$. Kein Beginn mit $|()|||$, $||()||$, $|||()$ oder $|||()$. Der erste und der dritte Fall haben den Schnitt $|()()|$; der zweite und der vierte den Schnitt $||()()$; der erste und der vierte den Schnitt $|()()|()$. Andere Schnittmengen gibt es nicht. Also bleiben $132 - 4 \cdot 42 + 3 \cdot 14 = 6$.

Die restlichen α enthalten alle Symbole e_1, \dots, e_5 , und deshalb muß β gleich 1 sein. Insgesamt ergibt sich als Summe dieser Fälle 440.

Obere Brücke	Wort	Anzahl der β
()	3	90
()	43	48
()	23	48
()	543	20
()	123	20
()	243	20
()	2543	6
() ()	1243	6
()	3243	20
()	32543	6
() ()	13243	6
() ()	12543	1
()	432543	6
()	213243	6
()()	132543	1
()()	1432543	1
()()	2132543	1
()()	21432543	1
(())	321432543	1

Tabelle 2

(4.3) Monome, in denen e_0 zweimal vorkommt: $\alpha e_0 \beta e_0 \gamma$. Damit $\beta e_0 \gamma$ minimal ist, mit minimalem β , muß nach (4.2) β mit $||()||$, $|(|)|$, $((|))$ aufhören. Damit $\alpha e_0 \beta$ minimal ist, muß nach der gespiegelten Version von (4.2) β mit $||()||$, $|(|)|$, $((|))$ anfangen. Demnach gibt es für β nur die schon im dritten Abschnitt betrachteten Brücken β_2 und β_3 . Im zweiten Fall muß $\alpha = \gamma = 1$ sein.

Im ersten Fall gibt es nach (4.2) die Möglichkeiten $\alpha = 1$ und 20 Werte für γ , sowie $\gamma = 1$ und 20 Werte für α , minus den Schnitt $\alpha = \gamma = 1$. Zusammen sind das zunächst $39 + 1 = 40$ Möglichkeiten.

Sind $\alpha \neq 1$ und $\gamma \neq 1$, so muß γ mit e_1, e_5 anfangen und α mit e_1, e_5 aufhören, und diese Fälle müssen außerdem verschieden sind. Also gibt es $2N^2$ Möglichkeiten, wobei N die Anzahl der γ ist, die mit e_1 beginnen, aber nicht mit e_2, e_3, e_4 ,

und außerdem in keiner Darstellung mit e_5 beginnen *können*. Das sind die mit $()|||$ beginnenden fünf Brücken. Also ergeben sich 50 weitere Möglichkeiten.

Insgesamt haben wir bislang $132 + 440 + 40 + 50 = 662$ Fälle. Weitere gibt es nicht, da in einem reduzierten Wort e_0 höchstens zweimal vorkommen kann, wie eine Zusatzüberlegung zeigt.

5. Modultheorie für E_7

Wir beschreiben die Modultheorie, indem wir obere Pfeilerbrücken nach horizontaler Kantenzahl und Filterung sortieren. Eine Begründung für die generische Einfachheit der Moduln unterdrücken wir. Es gibt 14 obere gewöhnliche 7-Brücken mit $HK = 3$. Die oberen Pfeilerbrücken dazu sind in der folgenden Tabelle in summarischer Form wie vordem zusammengestellt.

$((\bullet)\bullet) \bullet$ 4 + 1	$((\bullet)(\bullet) \bullet$ 4	$(\bullet)(\bullet) \bullet$ 4	$(\bullet)(\bullet)(\bullet) $ 5	$((\bullet)\bullet) \bullet$ 3
$ \bullet((\bullet))$ 3	$ \bullet((\bullet))()$ 3	$ \bullet()((\bullet))$ 3	$ \bullet()()()$ 2	$ \bullet((\bullet)(\bullet))$ 4
$(\bullet)(\bullet) \bullet()$ 4	$((\bullet) \bullet()$ 3	$(\bullet) \bullet()()$ 3	$(\bullet) \bullet((\bullet))$ 4	

Das sind insgesamt 50 Stück. Die damit gewonnenen Brücken lassen sich noch bezüglich der Filterung $F = HK + VP$ unterscheiden. Es treten darunter nämlich Brücken mit der Filterung 3 und 4 auf. Diejenigen mit der Filterung 4 müssen ein vertikales Pfeilergebiet enthalten, da die HK immer gleich 3 ist. Es gibt 15 Brücken der Filterung 4. Die rechte Trennzahl des vertikalen Pfeilergebietes ist Null. Den dadurch aufgespannten Modul (Linksideal in $TE_7(3)$) bezeichnen wir mit $N(4)$.

Wir wollen im folgenden die Restriktionen res_E und res_A der TE_7 -Moduln auf TE_6 und TA_6 angeben. Dazu bemerken wir noch, daß TA_6 die einfachen Brückenmoduln N_0, N_1, N_2, N_3 vom Rang 1, 6, 14, 14 hat.

(5.1) Notiz. *Es besteht das Restriktionsverhalten*

$$\text{res}_E N(4) = M(3), \quad \text{res}_A N(4) = N_0 \oplus N_3.$$

BEWEIS. Ein Isomorphismus $M(3) \rightarrow N(4)$ wird folgendermaßen erhalten. Die in (3.9) aufgeführten Brücken werden durch die untere Brücke $|\bullet()()()$ nach TE_7 abgebildet, und diese werden dann von rechts mit e_0 multipliziert.

Wenn wir $M(3)$ nach (3.11) auf TA_5 einschränken und das Bratteli-Diagramm von $TA_5 \subset TA_6$ beachten, so sehen wir, daß $\text{res}_A N(4)$ jedenfalls N_3 enthalten muß. Aus Dimensionsgründen bleibt dann nur die angegebene Möglichkeit. \square

Die 50 genannten oberen Brücken liefern sicherlich einen Linksmodul. Sein Quotient nach $N(4)$ hat den Rang 35 und werde mit $N(3)$ bezeichnet.

(5.2) Notiz. *Es besteht das Restriktionsverhalten*

$$\begin{aligned} \text{res}_E N(3) &= M(2) \oplus M(3) \\ \text{res}_A N(3) &= N_0 \oplus N_1 \oplus N_2 \oplus N_3. \end{aligned}$$

BEWEIS. Der 15-dimensionale Untermodul $M(3)$ von $\text{res}_E N(3)$ wird dadurch gegeben, daß die Brücken γ aus (3.9) durch $\gamma|$ nach TE_7 abgebildet werden. Den Bestandteil $M(2)$ erkennt man dadurch, daß die Brücken δ aus dem Beweis von (3.10) vermöge

$$\delta \mapsto \frac{\delta|}{()()|||}$$

nach TE_7 abgebildet und dann von rechts mit e_6 multipliziert werden.

Indem man weiter auf TA_5 restringiert, zeigt eine genauere Diskussion, daß für res_A nur die angegebene Möglichkeit bleibt. \square

Die Filterung 3 kann auch mit 2 oberen Brücken auftreten. Es ergeben sich wiederum 35 Möglichkeiten, und zwar 28 mit einem Pfeiler und einem vertikalen Pfeilergebiet, wovon jeweils 14 die linke Trennzahl 1 bzw. die rechte Trennzahl 0 haben. Dazu kommen 7 mit zwei Pfeilern und einem vertikalen Pfeilergebiet der linken Trennzahl 0. Die Figuren dazu sind in den folgenden Tabellen angegeben.

$((\bullet)) \bullet \bullet$	$()() \bullet \bullet$	$() \bullet () \bullet$	$() \bullet () \bullet$	$() \bullet () \bullet$
$ \bullet (()) \bullet$	$ () \bullet () \bullet$	$ () \bullet () \bullet$	$ () \bullet () \bullet$	$ \bullet () \bullet$
$ \bullet ()() \bullet$	$ \bullet () () \bullet$	$ \bullet () \bullet$	$ \bullet () \bullet$	

Das sind 28 Stück. Die sieben weiteren mit zwei Pfeilergebieten sind in der nächsten Tabelle aufgeführt.

$((\bullet)) \bullet$	$(\bullet)(\bullet) \bullet$	$(\bullet) () \bullet$	$(\bullet) () \bullet$	$ ((\bullet)) \bullet$
--------------------------	---------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

Wir erhalten auf diese Weise einen Modul $N'(3)$ vom Rang 35.

(5.3) Notiz. *Der Modul $N'(3)$ hat dasselbe Restriktionsverhalten wie $N(3)$.*

BEWEIS. Aus der obigen Beschreibung sehen wir sofort, daß res_A zwei 14-dimensionale Moduln enthält, die durch die Trennzahlen unterschieden werden. Die einzige Möglichkeit, die mit der Restriktion auf TA_5 verträglich ist, ist durch N_2 und N_3 für diese Moduln gegeben. Es folgt leicht, daß $\text{res}_A N'(3)$ wie behauptet aussieht. Nur die angegebene Form von res_E ist dann damit verträglich. \square

Wir sammeln nun die weiteren Moduln und ihr Restriktionsverhalten. Beweise ergeben sich nach obigem Muster.

(5.4) Notiz. Es gibt 27 obere Brücken mit $F = HK = 2$ und 18 mit $F = 2$ aber $HK = 1$. Sie liefern Moduln $N(2)$ und $N'(2)$ mit dem Restriktionsverhalten

$$\begin{aligned} \text{res}_E N(2) &= M(2) \oplus M(1) \oplus M(0) \\ \text{res}_E N'(2) &= 3M(1) \\ \text{res}_A N(2) &= M_2 \oplus 2M_1 \oplus M_0 \\ \text{res}_A N'(2) &= 3M_1. \end{aligned}$$

Schließlich gibt es noch Moduln $N(1)$ vom Rang 7 mit $F = 1$ und $N(0)$ vom Rang 1. Es gilt

$$\text{res}_E N(1) = M(1) \oplus M(0), \quad \text{res}_A N(1) = N_1 \oplus N_0.$$

Wir präsentieren noch die 27 bzw. 18 oberen Brücken, die zu den angegebenen Moduln gehören.

$((\bullet)\bullet)\parallel$	$(\bullet)(\bullet)\parallel\parallel$	$(\bullet)\mid\mid\mid$	$(\bullet)\parallel(\bullet)\mid$	$(\bullet)\parallel\mid\mid\mid$
$\mid\mid((\bullet))\parallel$	$\mid\mid\mid\mid\mid$	$\mid\mid\mid(\bullet)\mid$	$\mid\mid\mid\mid\mid$	$\parallel\mid\mid(\bullet)\mid\mid$
$\parallel\mid\mid(\bullet)(\bullet)\mid$	$\parallel\mid\mid(\bullet)\mid\mid$	$\parallel\mid\mid\mid\mid\mid$	$\parallel\mid\mid\mid\mid\mid$	

$\mid\mid\mid\mid\mid$	$\mid\mid\mid\mid\mid$	$\mid\mid\mid\mid\mid$	$\mid\mid\mid\mid\mid$	$\mid\mid\mid\mid\mid$	$\mid\mid\mid\mid\mid$
------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------

6. Symmetrische Brücken mit Pfeilern

Wir erläutern an Beispielen die weitere Verwendung des graphischen Kalküls. Die resultierenden Algebren sind noch mysteriös. Sie sind zwar zu gewissen Coxeter-Graphen assoziiert, sind aber nicht Quotienten der zugehörigen generischen Hecke-Algebren. Es ergeben sich interessante halbeinfache Quotienten nichthalbeinfacher Algebren.

Ausgangspunkt sind jetzt die symmetrischen Brücken, die zur graphischen Konstruktion der Temperley-Lieb-Algebren TB_n gebraucht werden [1].

Zusätzlich wird nun noch die symmetrische vertikale Pfeilerbrücke mit einem Pfeiler auf der Symmetrieachse $\mid\mid\mid\mid\mid\bullet\mid\mid\mid\mid\mid = e_0$ als erzeugendes Element herangezogen. Wir betrachten hier nur reduzierte Pfeilerbrücken.

Legen wir symmetrische (2, 2)-Brücken zugrunde, so ergibt sich eine Algebra TF_3 vom Rang 18. Ihre Elemente sind in der schon früher verwendeten summarischen Darstellung

$$\begin{array}{cccccc} \begin{array}{c} \parallel\bullet\parallel \\ \parallel\parallel\parallel \end{array} & \begin{array}{c} \mid(\bullet)\mid \\ \mid(\bullet)\mid \end{array} & \begin{array}{c} ()\bullet() \\ ()() \end{array} & \begin{array}{c} ((\bullet)) \\ ()\bullet() \end{array} & \begin{array}{c} ()\bullet() \\ ((\bullet)) \end{array} & \begin{array}{c} ((\bullet))\bullet \\ ((\bullet)) \end{array} \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 + 1 \end{array} .$$

Im letzten Fall weist $+1$ wieder auf die Brücke mit zwei Pfeilern hin. Die Algebra TF_3 werde ebenfalls durch ihre Modultheorie verdeutlicht. Dazu sortieren wir die symmetrischen Pfeilerbrücken abermals nach ihrer Filtrierung.

Filtrierung	0	1	2	3
Anzahl	1^2	2^2	3^2	2^2

Die Elemente der Filtrierung größergleich k erzeugen ein zweiseitiges Ideal $F(k)$, und $F(k)/F(k+1)$ zerfällt in isomorphe Moduln vom Rang $1, 2, 3, 2$ für $k = 0, 1, 2, 3$.

Zur genauen Beschreibung der Algebra müssen wir noch Parameter festlegen. Bei dieser Gelegenheit präsentieren wir auch die Algebra durch Erzeugende und Relationen. Die Erzeuger sind

$$\|\bullet\| = e, \quad \frac{|\circ|}{|\circ|} = e_1, \quad \frac{(\circ)}{(\circ)} = e_2.$$

Mit Parametern $D, F, d \in \mathfrak{K}$ sind die Relationen zwischen den Erzeugern wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} e_1^2 &= De_1 & e^2 &= De \\ e_2^2 &= de_2 & ee_2 &= e_2e \\ e_2e_1e_2 &= Fe_2 & ee_1e &= e \\ & & e_1ee_1 &= e_1. \end{aligned}$$

Die Rechnungen

$$ee_2e_1e_2e = e_2ee_1ee_2 = e_2ee_2 = e_2^2e = de_2e$$

$$e(Fe_2)e = Fe^2e_2 = FDee_2$$

zeigen, daß die Relation

$$(6.1) \quad FD = d$$

bestehen muß. Die 18 Basiselemente der Algebra, die den Brücken entsprechen, sind die nachstehenden Worte in den Erzeugern:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & e_1 & e_2 & e_1e_2 & e_2e_1 & e_1e_2e_1 \\ e & ee_1 & e_1e & ee_1e_2 & ee_2e_1 & e_1e_2ee_1 \\ e_2e_1e & e_1e_2e & ee_1e_2e_1 & e_1e_2e_1e & ee_1e_2e_1e & ee_2. \end{array}$$

Es ist leicht zu verifizieren, daß weitere Multiplikation dieser Elemente mit den Erzeugern nichts Neues mehr ergibt. Die Erzeuger e_1 und e_2 liefern die Unteralgebra $TB_2 \subset TF_3$.

Wir stellen TF_3 als Quotient einer Hecke-Algebra vom Typ HB_3 dar. Sie hat die Erzeugenden x, t und g mit den Relation $x^2 = (Q-1)x + Q$, $t^2 = (Q-1)t + Q$, $g^2 = (q-1)g + q$, $xtx = txt$, $tgtg = gtgt$ und $xg = gx$. Mit weiteren Parametern U und u wird ein surjektiver Homomorphismus $\varphi: HB_3 \rightarrow TF_3$

durch die Zuordnungen $x \mapsto Ue - 1$, $t \mapsto Ue_1 - 1$ und $g \mapsto ue_2 - 1$ gegeben, wenn die folgenden Relationen gelten: $UD = Q + 1$, $ud = q + 1$, $U^2 = Q$ und $q + Q = uUF$. Machen wir den Ansatz $D = U + U^{-1}$ und $d = u + u^{-1}$, so erhalten wir aus $q + Q = uUF$ zusammen mit $FD = d$ durch Umrechnung die Relation $Q^2 + q = 0$. Das ist nach [4] also gerade eine Situation, in der HB_3 nicht halbeinfach ist.

Legen wir symmetrische $(3, 3)$ -Brücken zugrunde, so entsteht eine Algebra TF_4 vom Rang 70. Hier verifiziert man die Tabelle

Filtrierung	0	1	2	3
Anzahl	1^2	2^2	4^2	7^2

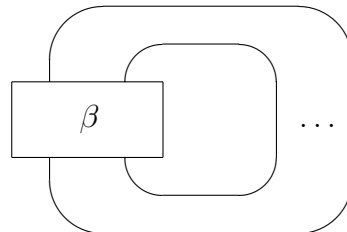
Entsprechend stellt sich die Ideal- und Modulstruktur dar. Ein typischer 7-dimensionaler Modul hat die oberen Brücken

$$()()(), ()(•)(), (())(), (())(•), ((()), (((•))), (•(•)) .$$

Wie eben sehen wir, daß in diesem Fall der Graph F_4 eine Rolle spielt. Der siebendimensionale Modul zeigt aber, daß hier kein generischer Quotient der Hecke-Algebra HF_4 vorliegt, wohl aber ein degenerierter. Die Konstruktion von Temperley-Lieb-Algebren zu allgemeinen Coxeter-Graphen steht sowieso noch aus.

7. Spuren

Die Algebren $TE^*(n, k)$ und $TE(n, k)$ haben geometrisch definierte Spuren τ . Ist β eine (n, n) -Pfeilerbrücke, so wird sie — wie in der Zopftheorie üblich — durch rechte Bögen geschlossen, wie es die folgende Figur angibt.



Das Resultat besteht aus Zyklen mit Pfeilern. Dabei treten Mehrfachpfeiler, Pfeilerzyklen und gewöhnliche Zyklen auf. Diese werden im Fall $E^*(n, k)$ nach (1.7) und (1.8) durch die Parameter c , d und f gezählt. Im Fall $E(n, k)$ wird noch die Reduktion (1.10) verwendet und durch $c = d$ und $f = 1$ gezählt. Auf diese Weise ist die \mathfrak{K} -lineare Spur auf den Basiselementen festgelegt. Die fundamentale Eigenschaft $\tau(ab) = \tau(ba)$ einer Spur folgt direkt aus der geometrischen Definition. Man kann zeigen, daß in der Situation der Sätze (2.5) und (2.6) bis auf einen konstanten Faktor die andernorts analog definierte Spur auf den Temperley-Lieb-Algebren entsteht. Für symmetrische Pfeilerbrücken läßt sich diese Spurdefinition ebenfalls geben. Offenbar handelt es sich um Markov-Spuren: Beim Übergang von $E(n, k)$ nach $E(n + 1, k)$ durch Anfügen eines rechten vertikalen Bogens wird die Spur mit d multipliziert.

8. Ausblick

Wir bemerken, daß mit den Vorschlägen dieser Note die Möglichkeiten des graphischen Kalküls keineswegs erschöpft sind. Zum einen lassen sich Brücken mit verschiedenen Sorten von Pfeilern betrachten. Das ist für einige affine Wurzelsysteme bedeutsam. Zum anderen kann man aus den graphischen Konstruktionen auch Tensor kategorien gewinnen. Die Ausarbeitung dieser Ideen bleibt weiteren Arbeiten vorbehalten. Schließlich sind wir in das systematische Studium der Algebren-Türme (im Sinne von [5]), die sich aus diesen Konstruktionen ergeben, auch noch nicht eingetreten.

9. Monoidalgebren

Wir sammeln einige einfache Bemerkungen über die formale Struktur der im Vorangehenden betrachteten Algebren. Wir haben sie zum Teil stillschweigend verwendet. Diese Überlegungen werden andernorts fortgesetzt.

Sei X eine Menge und $m: X \rightarrow X$, $(a, b) \mapsto m(a, b) = ab$ ein multiplikatives Monoid. Wir definieren zwei Ordnungsrelationen auf X . Die *Rechtsordnung* \leq_r wird erklärt durch:

$$(9.1) \quad a \leq_r c \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt } b \in X \text{ mit } ab = c;$$

und die *Linksordnung* \geq_l durch:

$$(9.2) \quad a \geq_l c \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt } b \in X \text{ mit } a = bc.$$

Da X ein neutrales Element e hat, gilt $a \leq_r a$ und $a \geq_l a$. Aus der Assoziativität von m folgt die Transitivität: $a \leq_r b$, $b \leq_r c$ impliziert $a \leq_r c$ und analog für \geq_l . Gilt $a \leq_r b$ und $b \leq_r a$, so heißen a und b *rechtsassoziert*: $a \sim_r b$. Die Relation \sim_r ist eine Äquivalenzrelation auf X . Ebenso haben wir die Relation linksassoziert $a \sim_l b$. Wir nennen a und b *assoziert*, in Zeichen $a \approx b$, wenn Elemente u, v, u', v' existieren, mit denen die Gleichungen $a = ubv$ und $b = u'av'$ gelten. Auch dadurch ist eine Äquivalenzrelation auf X gegeben. Wir nennen $Y \subset X$ *linksabgeschlossen*, wenn aus $c \in Y$, $z \geq_l c$ immer $z \in Y$ folgt. Analog: *rechtsabgeschlossen*. Eine links- und rechtsabgeschlossene Teilmenge heiße *abgeschlossen*. Abgeschlossene Mengen $C \subset D$ von X heißen *benachbart*, wenn $C \neq D$ ist und $D \setminus C$ aus einer Äquivalenzklasse von assoziierten Elementen besteht.

Sei \mathfrak{K} ein kommutativer Ring. Eine *Parameterfunktion* zum Monoid (X, m) ist eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathfrak{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$(9.3) \quad d(a, bc)d(b, c) = d(a, b)d(ab, c) \text{ fur alle } a, b, c \in X.$$

$$(9.4) \quad d(e, a) = d(a, e) = 1 \text{ fur alle } a \in X.$$

Mit einer Parameterfunktion definieren wir eine (parametrische) Monoidalgebra

$\mathfrak{K}(X, m, d) = A$ wie folgt. Additiv ist A der freie \mathfrak{K} -Modul über X . Die Multiplikation $(x, y) \mapsto x * y$ auf A sei \mathfrak{K} -bilinear, und für Basiselemente $a, b \in X$ setzen wir

$$(9.5) \quad a * b = d(a, b)ab.$$

Mit diesen Vereinbarungen verifiziert man leicht:

(9.6) Notiz. $\mathfrak{K}(X, m, d)$ ist genau dann assoziativ, wenn d die Bedingung (7.3) erfüllt. Diese Algebra hat genau dann $e \in X$ als Einselement, wenn (7.4) gilt. \square

(9.7) Beispiel. Ist (X, m) eine Gruppe und d konstant gleich 1, so ist $\mathfrak{K}(X, m, d)$ die Gruppenalgebra von X über \mathfrak{K} . \heartsuit

(9.8) Beispiel. Sei X die Menge der (n, n) -Brücken. Die Monoidstruktur auf X wird durch $(T, S) \mapsto T \wedge S$ definiert und die Parameterfunktion $d(T, S)$ durch $d^{k(T, S)}$ mit der Anzahl der Zyklen $k(T, S)$ von $T \circ S$. Die resultierende Algebra ist die Temperley-Lieb-Algebra $T_d A_{n-1}$. Siehe dazu (1.6). \heartsuit

Sei im folgenden (X, m, d) gegeben und $A = \mathfrak{K}(X, m, d)$ die zugehörige assoziative Monoidalgebra mit 1. Bis auf weiteres setzen wir voraus, daß die Strukturkonstanten $d(b, c)$ Einheiten von \mathfrak{K} sind.

Sei $L(b) \subset A$ das von $b \in X$ erzeugte Linksideal. Wir setzen

$$\{x \in X \mid x \geq_l b\} = B(\geq_l b).$$

(9.9) Satz. Über die Linksideale $L(b)$ gilt:

- (1) Das Ideal $L(b)$ ist ein freier \mathfrak{K} -Modul mit Basis $B(\geq_l b)$.
- (2) Sei $b \sim_r c$. Dann sind die A -Moduln $L(b)$ und $L(c)$ isomorph.

BEWEIS. (1) Sei $x \geq_l b$, etwa $x = ub$. Es gilt dann $u * b = d(u, b)x$, und da $d(u, b)$ eine Einheit ist, gilt $x \in L(b)$.

Ist $z \in L(b)$, so ist z nach Definition von $L(b)$ eine Linearkombination von Elementen $x \in B(\geq_l b)$.

(2) Sei $b = cu$. Die Rechtsmultiplikation mit u ist eine A -lineare Abbildung $r_u: L(c) \rightarrow L(b)$. Gilt $c = bv$, so haben wir auch $r_v: L(b) \rightarrow L(c)$ zur Verfügung. Für λb , $\lambda \in A$ gilt

$$r_u r_v(\lambda b) = \lambda r_u r_v(b) = \lambda d(b, v)d(c, u)b.$$

Da nach Voraussetzung $d(b, v)d(c, u)$ eine Einheit ist, so ist $r_u r_v$ ein Isomorphismus. \square

(9.10) Satz. Genau dann gilt $L(b) \subset L(c)$, wenn $b \geq_l c$ ist.

BEWEIS. Es gilt $L(b) \subset L(c)$ genau dann, wenn $b \in L(c)$ ist. Sei $b = \alpha c$ und $\alpha = \sum_{u \in X} l_u u \in A$. Nach Definition der Multiplikation von A gibt es dann mindestens ein $u \in X$, für das $uc = b$ ist, es gilt also $b \geq_l c$. Ist umgekehrt $uc = b$, so sehen wir aus $u * c = d(u, c)b$, daß b in $L(c)$ liegt. \square

Sei $B(>_l b) = \{c \in B(\geq_l b) \mid c \text{ nicht linksassoziert zu } b\}$. Nach (7.9) ist diese Menge in $L(b)$ enthalten. Sei $L(>_l b)$ der davon erzeugte Untermodul und

$$M(b) = L(b)/L(>_l b).$$

(9.11) Satz. *Der Modul $L(>_l b)$ hat die \mathfrak{K} -Basis $B(>_l b)$. Der Modul $M(b)$ hat als \mathfrak{K} -Basis die Menge der zu b linksassozierten Elemente.*

BEWEIS. Ein Element aus $L(>_l b)$ ist Linearkombination von Basiselementen d , für die es ein $c \in B(>_l b)$ mit $d \geq_l c$ gibt. Wäre d zu b assoziiert, so auch c . Widerspruch. Also liegt $L(>_l b)$ in der linearen Hülle von $B(>_l b)$. Die Aussage über $M(b)$ folgt dann. \square

Die \mathfrak{K} -lineare Hülle $\mathfrak{K}Y$ einer (linken, rechten) abgeschlossenen Menge Y ist ein (linkes, rechtes) Ideal. Sind $C \subset D$ benachbart, so haben wir die Faktoralgebra $\mathfrak{K}(D, C) := \mathfrak{K}D/\mathfrak{K}C$; sie hat eventuell kein Einselement. Sie ist außerdem ein A -Bimodul.

Sei $Y \subset X$. Dann haben wir dazu den linken Abschluß \bar{Y}_l von Y ; das ist die kleinste linksabgeschlossene Menge, die Y enthält. Zum Beispiel ist für $Y = \{b\}$ der linke Abschluß $B(\geq_l b)$. In Verallgemeinerung von (7.9) gilt:

(9.12) Satz. *Sei $L(Y)$ das von $Y \subset X$ erzeugte Linksideal. Dann ist $L(Y)$ die \mathfrak{K} -lineare Hülle von \bar{Y}_l .* \square

Statt (7.10) haben wir jetzt allgemeiner:

(9.13) Satz. $L(C) \subset L(D) \iff \bar{C}_l \subset \bar{D}_l$. \square

Sind $C \subset D$ abgeschlossene Mengen, so hat die Faktoralgebra $\mathfrak{K}(D, C) = \mathfrak{K}(D)/\mathfrak{K}(C)$ additiv die \mathfrak{K} -Basis $D \setminus C$. Eine solche Algebra läßt sich durch Basen und Strukturkonstanten wie folgt beschreiben. Sei $D//C$ die Menge D , in der C zu einem Basispunkt \circ identifiziert wurde. Da C und D abgeschlossen sind, induziert m eine Verknüpfung μ auf $D//C$ mit $\mu(\circ, x) = \mu(x, \circ) = \circ$ für alle $x \in D//C$. Wir haben auf $D//C$ eine Parameterfunktion $\delta: D//C \times D//C \rightarrow \mathfrak{K}$, die durch $\delta(a, b) = d(a, b)$ erklärt ist, wenn $ab \in D \setminus C$ ist, und sonst den Wert Null hat. Auf dem freien \mathfrak{K} -Modul über $D//C$ wird nun eine \mathfrak{K} -bilineare assoziative Multiplikation durch $x * y = \delta(x, y)\mu(x, y)$ für $x, y \in D//C$ definiert. Darin ist $\mathfrak{K}(D, C)$ die Unter algebra, die additiv von $D \setminus C$ aufgespannt wird.

Wir geben jetzt ein einfaches Beispiel dafür an, wie Daten m und d konstruiert werden können.

(9.14) Beispiel. Sei Y eine Menge und $\delta: Y \times Y \rightarrow \mathfrak{K}$ eine symmetrische $Y \times Y$ -Matrix. Wir setzen $X = Y \times Y$ und definieren

$$\begin{aligned} m((b, c), (u, v)) &= (b, v) \\ d((b, c), (u, v)) &= \delta(c, u). \end{aligned}$$

Die Assoziativität von m und (7.3) ist leicht nachzurechnen. Wir definieren damit eine assoziative Algebra, die zunächst kein Einselement haben muß. Ist $\delta(c, u) =$

$\delta_{c,u}$ das Kronecker-Symbol, so ist die resultierende Algebra die Algebra der $Y \times Y$ -Matrizen über \mathfrak{K} . Ist Y endlich, so hat diese Algebra also ein Einselement. Wir bezeichnen sie allgemein mit $A(Y, \delta)$. \heartsuit

Sei $A = A(Y, \delta)$ eine Algebra aus (7.14). Sei $I(v) \subset A$ die \mathfrak{K} -lineare Hülle von $\{(u, v) \mid u \in Y\}$. Dann ist $I(v)$ ein Linksideal, und A ist die direkte Summe der Linksideale $I(v)$, $v \in Y$. Analog gibt es eine Zerlegung in Rechtsideale.

(9.15) Notiz. *Seien $\delta(v, v)$ Einheiten. Dann sind die Ideale $I(v)$ untereinander isomorphe A -Moduln.*

BEWEIS. Ein Isomorphismus $I(v) \rightarrow I(w)$ wird durch Rechtsmultiplikation mit (v, w) gegeben. \square

(9.16) Satz. *Sei Y endlich. Genau dann ist $A(Y, \delta)$ isomorph zur $Y \times Y$ -Matrixalgebra, wenn die Matrix δ invertierbar ist.*

BEWEIS. Sei A eine Matrixalgebra. Dann hat A insbesondere ein Einselement

$$e = \sum_{b,c \in Y} \alpha(b, c)(b, c).$$

Die Relation $e * (u, v) = (u, v)$ liefert durch Koeffizientenvergleich

$$\sum_{c \in Y} \alpha(b, c)\delta(c, u) = \delta_{b,u}.$$

Also ist α invers zu δ .

Sei δ invertierbar. Wir werden zeigen, daß A isomorph zur Matrixalgebra $\text{Hom}_{\mathfrak{K}}(Y(v), Y(v))$ ist. Indem wir jedem $a \in A$ die Linksmultiplikation l_a mit a zuordnen, erhalten wir einen Homomorphismus

$$L: A \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{K}}(Y(v), Y(v)), \quad a \mapsto l_a$$

von Algebren. Sei $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{K}}(Y(v), Y(v))$ durch

$$f((u, v)) = \sum_w \alpha_{w,u}(w, v)$$

gegeben, und sei

$$\gamma = \sum_{x,y} \gamma(x, y)(x, y) \in A$$

ein allgemeines Element. Wir wollen f als l_γ realisieren. Dazu berechnen wir

$$\gamma * (u, v) = \sum_{x,y} \gamma(x, y)(x, y) * (u, v) = \sum_{x,y} \gamma(x, y)\delta(y, u)(x, v).$$

Der Koeffizient von (w, v) darin ist $\sum_y \gamma(w, y)\delta(y, u)$. Soll dieser gleich $\alpha_{w,u}$ sein, so muß die Gleichung $\gamma\delta = \alpha$ bestehen, und diese ist für invertierbares δ durch $\gamma = \alpha\delta^{-1}$ erfüllbar. Also ist l surjektiv. Ist l_γ die Nullabbildung, so ist $\gamma\delta$ die Nullmatrix und folglich $\gamma = 0$. \square

Wir können in $A(Y, \delta)$ auch eine Einszerlegung in orthogonale Idempotente angeben. Ist α invers zu δ , so bilden die Elemente

$$(9.17) \quad e_c = \sum_{b \in Y} \alpha(b, c)(b, c)$$

eine Zerlegung des Einselementes von A in paarweise orthogonale Idempotente.

Die Algebra $A = A(Y, \delta)$ hat eine \mathfrak{K} -lineare *Spur*

$$(9.18) \quad T: A \rightarrow \mathfrak{K}, \quad (a, b) \mapsto \delta(a, b).$$

Die Kommutativität

$$T((a, b) * (c, d)) = \delta(b, c)T(a, d) = \delta(b, c)(\delta(a, d)) = T((c, d) * (a, b))$$

gilt wegen der Symmetrie von δ . Für die Elemente (7.17) errechnet man

$$(9.19) \quad T(e_c) = 1.$$

Wir erwähnen weitere axiomatische Untersuchungen über diese Algebren.

(9.20) Involutionen. Es sei eine Involution $*$: $X \rightarrow X$, $a \mapsto a^*$ gegeben. Sie habe die Eigenschaft $m(a, b)^* = m(b^*, a^*)$, ist also ein Antihomomorphismus von (X, m) . Die Parameterfunktion erfülle in diesem Kontext $d(a, b) = d(a^*, b^*)$. Damit definieren wir einen \mathfrak{K} -linearen Antiautomorphismus von $\mathfrak{K}(X, m, d)$ durch $a \mapsto a^*$ auf den Basiselementen. \heartsuit

(9.21) Assoziationsklassen. Einem Element $b \in X$ ordnen wir die Mengen $\lambda(b)$ der Linksassoziierten, $\rho(b)$ der Rechtsassoziierten und $\alpha(b)$ der Assoziierten zu. Es sei in bestimmter Weise eine Bijektion $\alpha(b) \cong \lambda(b) \times \rho(b)$ gegeben. Bei Vorliegen einer Involution gelte $\lambda(b) \cong \rho(b^*)$, $z \mapsto z^*$. Es gelte $\alpha(b) = \alpha(b^*)$ und deshalb also

$$\begin{array}{c} \alpha(b) \cong \lambda(b) \times \rho(b) \cong \rho(b^*) \times \lambda(b^*) \\ \downarrow = \\ \alpha(b^*) \cong \lambda(b^*) \times \rho(b^*) \cong \rho(b) \times \lambda(b). \end{array}$$

Diese Bijektionen sollten durch Bijektionen $\lambda(a) \cong \rho(b)$ vermittelt werden. Die Menge $\alpha(b)$ hat unter diesen Umständen Matrixform. \heartsuit

10. Literature

1. tom Dieck, T.: Symmetrische Brücken und Knotentheorie zu den Dynkin-Diagrammen vom Typ B . J. reine angew. Math. 451, 71 – 88 (1994).
2. tom Dieck, T.: Knotentheorien und Wurzelsysteme. Teil II. Mathematica Gottingensis 44 (1993).
3. tom Dieck, T.: Knot theories and root systems. Part III. Mathematica Gottingensis 22 (1994).

4. Dipper, R., and G. James: Representations of Hecke algebras of type B_n . J. of Algebra 146, 454 – 481 (1992).
5. Goodman, F. M., de la Harpe, P., and V. F. R. Jones: Coxeter graphs and towers of algebras. New York – Berlin, Springer 1989.
6. Kauffman, L. H.: Knots and physics. Singapore, World Scientific 1992.

Version vom 9. Februar 2009

Tammo tom Dieck
Mathematisches Institut
Bunsenstraße 3/5
D – 37073 Göttingen
tammo@uni-math.gwdg.de