Mengentheoretische Topologie

Tammo tom Dieck

Version vom 9. Februar 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen und Grundbegriffe

1 Topologische Räume und stetige Abbildungen

Eine ***Topologie*** auf einer Menge X ist eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, die ***offen*** genannt werden, mit den Eigenschaften:

(1) Eine Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.
(2) Ein Schnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.
(3) Die leere Menge und X sind offen.

Ein *topologischer Raum* $(X, \mathcal{O})$ besteht aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X besteht. Die Mengen in $\mathcal{O}$ heißen, wie schon gesagt, die offenen Mengen des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$. Wir bezeichnen einen topologischen Raum meist nur durch die zugrundeliegende Menge X; eine Topologie auf X wird dann unterstellt. Eine Menge $A \subset X$ heißt ***abgeschlossen*** in $(X, \mathcal{O})$, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen in $(X, \mathcal{O})$ ist. Beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind dann abgeschlossen.

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt ***stetig***, wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge von $V \subset Y$ offen in X ist. (Äquivalent: Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.) Die identische Abbildung $\mathrm{id}(X)$ von X ist stetig, und die Verkettung stetiger Abbildungen ist offenbar auch stetig. Topologische Räume und stetige Abbildungen bilden somit eine Kategorie, von uns mit TOP bezeichnet.

Ein ***Homöomorphismus*** $f\colon X \to Y$ ist eine stetige Abbildung, die eine stetige Umkehrung $g\colon Y \to X$ hat: $gf = \mathrm{id}(X)$, $fg = \mathrm{id}(Y)$. Die Räume X und Y heißen ***homöomorph***, wenn es einen Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ gibt. Kommt eine Eigenschaft eines Raumes auch jedem homöomorphen zu, so sprechen wir von einer ***topologischen Eigenschaft***.

Bevor wir zu interessanten geometrischen Beispielen kommen, machen wir noch einige einfache mengentheoretische Vorbemerkungen. Auf einer Menge gibt es viele verschiedene Topologien. Sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf X und gilt $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, so heißt $\mathcal{O}_1$ ***gröber*** als $\mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}_2$ ***feiner*** als $\mathcal{O}_1$. Die Menge aller Teilmengen von X ist eine Topologie; sie ist die feinste überhaupt und wird ***diskrete Topologie*** auf X genannt. Die gröbste Topologie auf X ist $\{\emptyset, X\}$, genannt ***Klumpentopologie***. Jede Abbildung aus einem diskreten Raum und jede Abbildung in einen klumpigen Raum ist stetig.

Ist $\mathcal{S}$ irgendeine Menge von Teilmengen von X, so gibt es eine gröbste Topologie $\mathcal{O}(\mathcal{S})$, die $\mathcal{S}$ enthält. Diese Topologie muß $X, \emptyset$, die Mengen aus $\mathcal{S}$, endliche Schnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$ und beliebige Vereinigungen aller dieser Mengen enthalten. Alle diese Mengen bilden aber eine Topologie $\mathcal{O}(\mathcal{S})$. Wir nennen sie die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie und $\mathcal{S}$ eine ***Subbasis*** von $\mathcal{O}(\mathcal{S})$. Die mengentheoretischen Regeln $f^{-1}(\cap_j W_j) = \cap_j f^{-1}(W_j)$ und $f^{-1}(\cup_j W_j) = \cup_j f^{-1}(W_j)$ zeigen, daß eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen schon dann stetig ist, wenn die Urbilder von Mengen einer Subbasis offen sind.

Eine Teilmenge $\mathcal{B}$ aller offenen Mengen $\mathcal{O}$ eines Raumes $(X, \mathcal{O})$ ist eine ***Basis der Topologie*** $\mathcal{O}$, wenn jede (nichtleere) offene Menge Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ ist.

(1.1) Reelle Zahlen. Die geometrische Topologie und die Analysis beginnen mit der Zahlengeraden, das heißt mit der Standardtopologie auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Definition dieser Topologie benutzt nur die Anordnung der Zahlen, ihren Größenvergleich, und nicht die algebraischen Rechenoperationen der Addition und Multiplikation. Vom Standpunkt einer axiomatischen Theorie sind die reellen Zahlen aber ein sehr komplizierter Raum. Insbesondere hat man die Existenz dieses Raumes zu beweisen (Vollständigkeitsaxiom!). Eine Konstruktion, die nur die Anordnung benutzt, beruht auf der Methode der Dedekindschen Schnitte.

Das System aller offenen Intervalle $]a, b[$ der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist eine Basis für die *Standardtopologie* auf $\mathbb{R}$, mit anderen Worten, die offenen Mengen sind die Vereinigungen offener Intervalle. Die offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten a, b bilden ebenfalls eine Basis dieser Topologie. Abgeschlossene Intervalle sind dann abgeschlossene Teilmengen bezüglich der Standardtopologie. Die Mengen $\{x \mid x < a\}$ und $\{x \mid x > a\}$, $a \in \mathbb{R}$, sind eine Subbasis für diese Topologie auf $\mathbb{R}$ sowie auf der erweiterten Zahlengeraden $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$; es genügt auch hier, nur $a \in \mathbb{Q}$ zu verwenden.

Eine Abbildung $f \colon X \to \mathbb{R}$ ist stetig, wenn alle Mengen der Form $\{f > b\} = \{x \mid f(x) > b\}$ und $\{f < a\} = \{x \mid f(x) < a\}$ offen sind. ◇

(1.2) Metrische Räume. Eine ***Metrik*** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d \colon X \times X \to [0, \infty[$ mit den Eigenschaften:

(M_1) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ ist.

(M_2) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.

(M_3) Für alle $x, y, z \in X$ gilt die ***Dreiecksungleichung*** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Wir nennen $d(x, y)$ den ***Abstand*** der Punkte x und y bezüglich der Metrik d. Ein ***metrischer Raum*** (X, d) besteht einer Menge X und einer Metrik d auf X.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir nennen $U_\varepsilon(x) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ die ε-***Umgebung*** von x. Wir sagen, $U \subset X$ sei offen bezüglich d (kurz d-offen), wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ so existiert, daß $U_\varepsilon(x)$ in U enthalten ist. Die Mengen $U_\varepsilon(x)$ sind d-offen; sei nämlich $y \in U_\varepsilon(x)$ und $0 < \eta < \varepsilon - d(x, y)$; dann zeigt die Dreiecksungleichung $U_\eta(y) \subset U_\varepsilon(x)$.

Das System $\mathcal{O}_d$ der d-offenen Mengen ist eine Topologie auf X. Die Mengen $U_\varepsilon(x)$ und bilden eine Basis von $\mathcal{O}_d$. Wir nennen $\mathcal{O}_d$ die der Metrik ***zugrundeliegende*** Topologie.

Trägt der Raum $(X, \mathcal{O})$ die Topologie $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ für eine Metrik d auf X, so heißt er ***metrisierbar***. Topologische Aussagen über einen metrischen Raum (X, d) beziehen sich im folgenden auf den topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_d)$.

Die Metrik auf X, die je zwei verschiedenen Punkten den Abstand 1 zuweist (die ***diskrete Metrik***), liefert die diskrete Topologie. ◇

(1.3) Euklidische Räume. Die ***Standardtopologie*** auf dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ wird mit Hilfe der ***euklidischen Norm*** $\|(x_1,\ldots,x_n)\| = (\sum x_i^2)^{1/2}$ und der zugehörigen ***euklidischen Metrik*** $d(x,y) = \|x-y\|$ gemäß (1.2) definiert. Wenn nichts anderes gesagt wird, so verstehen wir unter dem topologischen Raum $\mathbb{R}^n$ den so definierten. Die Normen $\|(x_i)\|_1 = \sum_i |x_i|$ und $\|(x_i)\|_\infty = \max_i |x_i|$ und die zugehörigen Metriken $d_1(x,y) = \|x-y\|_1$ und $d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty$ liefern dieselbe Topologie wie die euklidische Metrik, da eine ε-Umgebung bezüglich einer dieser Metriken eine η-Umgebung bezüglich einer anderen Metrik enthält. Die Mengen der Form $\prod_i]a_i,b_i[$ bilden eine Basis der Standardtopologie des $\mathbb{R}^n$. Es genügt, rationale a_i, b_i zu verwenden; es gibt also eine abzählbare Basis. Im Fall $n = 1$ erhalten wir natürlich wieder die Topologie (1.1).

Ebenso verfährt man mit dem komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ und überhaupt mit anderen normierten Vektorräumen. ◇

Wenngleich zunächst ein metrischer Raum geometrischer und natürlicher erscheinen mag als ein topologischer, so sind doch die metrischen Räume nicht so gut geeignet, die mengentheoretische Topologie axiomatisch aufzubauen. Häufig ist die Konstruktion einer Metrik komplizierter als die Konstruktion einer Topologie. Man würde auch mit den metrischen Räumen die Anwendbarkeit der Begriffssprache unnötig einschränken. Außerdem werden in der Definition einer Metrik die reellen Zahlen benutzt, und die reellen Zahlen sind selbst schon eine komplizierte mathematische Struktur. Auch beachte man, daß verschiedene Metriken dieselbe Topologie liefern können und die Stetigkeit nur von der Topologie abhängt. Natürlich haben die metrischen Räume ein großes eigenständiges Interesse. Die Zusatzstruktur einer Metrik erlaubt feinere geometrische Aussagen, man kann Umgebungen verschiedener Punkte miteinander vergleichen und Begriffe wie gleichmäßige Stetigkeit und gleichmäßige Konvergenz definieren.

Auch einseitige Inverse einer stetigen Abbildung sind interessant, und wir geben ihnen hier schon Namen. Sei $f\colon X \to Y$ stetig. Ein ***Schnitt*** von f ist eine stetige Abbildung $s\colon Y \to X$ mit $fs = \mathrm{id}(Y)$ und eine ***Retraktion*** von f ist eine stetige Abbildung $r\colon Y \to X$ mit $rf = \mathrm{id}(X)$.

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt ***offen*** (***abgeschlossen***) wenn das Bild jeder offenen (abgeschlossenen) Menge wieder offen (abgeschlossen) ist. (Diese Eigenschaften sagen natürlich nichts über Stetigkeit aus.)

Im weiteren werden wir fast immer die Stetigkeit einer Abbildung zwischen topologischen Räumen ohne besonderen Hinweis unterstellen. Manchmal betonen wir die Stetigkeit durch einen Hinweis, manchmal ist es ausdrückliches Ziel, die Stetigkeit zu beweisen. Eine Abbildung, deren Stetigkeit (zunächst) nicht vorausgesetzt ist, wird zur Hervorhebung auch ***Mengenabbildung*** genannt.

2 Topologische Grundbegriffe

Wir legen nun einen topologischen Raum X (oder auch mehrere Räume) zugrunde und definieren weitere topologische Grundbegriffe, die sich darauf beziehen.

Sei $A \subset X$. Eine offene Menge U, die A enthält, heißt ***offene Umgebung*** von A. Eine Menge $B \subset X$ heißt ***Umgebung*** von A, wenn sie eine offene Umgebung enthält. Besteht A nur aus einem Punkt x, so sprechen wir auch von Umgebungen von x. Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist. Mit dem Umgebungsbegriff wird die Stetigkeit in einzelnen Punkten definiert: Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt ***stetig am (oder im) Punkt*** $x \in X$, wenn zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x existiert, die durch f nach V abgebildet wird (oder, äquivalent dazu: das Urbild bei f jeder Umgebung von $f(x)$ ist eine Umgebung von x). Im Falle von metrischen Räumen und den zugeordneten Topologien (1.2) ist diese Definition äquivalent zur ε-δ-Definition der Analysis: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß aus $d(x,y) < \delta$ immer $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ folgt.

Sei $A \subset X$. Der Schnitt aller abgeschlossenen Mengen von X, die A enthalten, wird mit $\overline{A}$ bezeichnet und ***abgeschlossene Hülle*** oder kurz ***Abschluß*** von A in X genannt. Sie ist als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen, und A ist genau dann abgeschlossen, wenn $A = \overline{A}$ ist. Eine Teilmenge A heißt ***dicht in*** X, wenn $\overline{A} = X$ ist. Das ***Innere*** von A ist die Vereinigung aller in A enthaltenen offenen Mengen und wird mit A° bezeichnet. Das Innere ist offen, und A ist genau dann offen, wenn $A = A^\circ$ ist. Ein Punkt $a \in A^\circ$ wird ***innerer*** Punkt von A genannt. Eine Menge heißt ***nirgends dicht***, wenn das Innere ihrer abgeschlossenen Hülle leer ist.

Ein Punkt $x \in X$ heißt ***Berührpunkt*** von $A \subset X$, wenn jede Umgebung von x einen nichtleeren Durchschnitt mit A hat, und ***Limespunkt*** von A, wenn jede Umgebung von x einen nichtleeren Durchschnitt mit $A \setminus \{x\}$ hat. Hat $x \in A$ eine Umgebung U, deren Schnitt mit A nur x enthält, so ist x ein ***isolierter Punkt*** von A.

(2.1) Notiz. *Die Menge der Berührpunkte von A ist gleich der abgeschlossenen Hülle von A.*

Beweis. Sei $x \in \overline{A}$ und U Umgebung von x. Wir haben $U \cap A \neq \emptyset$ zu zeigen. Angenommen, daß sei nicht der Fall. Sei $V \subset U$ eine offene Umgebung von x. Ist $U \cap A$ leer, so auch $V \cap A$, und deshalb gilt $A \subset X \setminus V$. Da $X \setminus V$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{A} \subset X \setminus V$ und also $V \cap \overline{A} = \emptyset$. Letzteres ist ein Widerspruch zu $x \in V$ und $x \in \overline{A}$.

Sei umgekehrt x Berührpunkt von A. Ist x nicht in $\overline{A}$ enthalten, so liegt x in der offenen Menge $X \setminus \overline{A}$. Nach der Definition eines Berührpunktes müßte dann $(X \setminus \overline{A}) \cap A \neq \emptyset$ sein, was aber nicht der Fall ist. $\square$

(2.2) Notiz. *Seien A und B Teilmengen des Raumes X. Dann gelten:* (1) *Aus $A \subset B$ folgt $\overline{A} \subset \overline{B}$.* (2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. (3) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. (4) *Aus $A \subset B$ folgt $A^\circ \subset B^\circ$.* (5) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. (6) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$. (7) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$. (8) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$.

Beweis. (1) Es gilt $A \subset B \subset \overline{B}$. Da $\overline{B}$ abgeschlossen ist und A enthält, gilt $\overline{A} \subset \overline{B}$. (2) Wegen $A \subset A \cup B$ ist nach (1) $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ und folglich $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Wegen $A \subset \overline{A}$ und $B \subset \overline{B}$ ist $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Da $\overline{A} \cup \overline{B}$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. (3) Aus $A \subset \overline{A}$ und $B \subset \overline{B}$ folgt $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Da $\overline{A} \cap \overline{B}$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Der Beweis von (4), (5) und (6) ist „dual" zum Beweis von (1), (2) und (3). (7) $X \setminus \overline{A}$ ist als Komplement einer abgeschlossenen Menge offen und in $X \setminus A$ enthalten. Also gilt $X \setminus \overline{A} \subset (X \setminus A)^\circ$. Wegen $X \setminus A \supset (X \setminus A)^\circ$ liegt (Komplementbildung) A in der abgeschlossenen Menge $X \setminus (X \setminus A)^\circ$, und folglich liegt auch $\overline{A}$ darin. Durch abermalige Komplementbildung erhält man $X \setminus \overline{A} \subset (X \setminus A)^\circ$. Der Beweis von (8) ist „dual" zum Beweis von (7). □

Der ***Rand*** von A in X wird durch $\overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$ definiert. Wir bezeichnen den Rand mit $\mathrm{Rd}(A)$. Seien A und B Teilmengen eines Raumes X. Es gilt $\mathrm{Rd}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$. Eine Menge A ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathrm{Rd}(A) \subset A$ ist. Es gilt $\mathrm{Rd}(A \cup B) \subset \mathrm{Rd}(A) \cup \mathrm{Rd}(B)$. Genau dann liegt x im Rand von A, wenn jede Umgebung von x sowohl A als auch das Komplement trifft.

Die folgenden Aussagen sind leicht aus den Definitionen zu verifizieren.

(2.3) Notiz. *Über die Menge $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungen eines Punktes $x \in X$ gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *Jede Obermenge einer Umgebung von x ist eine Umgebung von x.*
(2) *Der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen von x ist eine Umgebung von x.*
(3) *Jede Umgebung von x enthält x.*
(4) *Ist U eine Umgebung von x, so gibt es eine weitere Umgebung V von x, so daß U Umgebung jedes Punktes von V ist.* □

Wir haben den Begriff der offenen Menge an den Anfang gestellt. Die offenen Mengen sind der geometrischen Denkweise am besten angepaßt. Sie sind „groß" und „unscharf". Andere Begriffe wie „abgeschlossene Hülle" oder „Umgebung" können ebenfalls als Grundlage dienen. Die Punktumgebungen gehören zur analytischen Denkweise der Grenzwerte. Abgeschlossene Mengen sind, grob gesagt, diejenigen, aus denen man durch Grenzwertbildung nicht herauskommt; (2.1) ist ein Ausdruck dieser Tatsache. Wir erläutern nun einen axiomatischen Beginn mit Punktumgebungen.

(2.4) Satz. *Sei X eine Menge. Jedem Element x von X sei ein System $\mathcal{U}(x)$ von Teilmengen, genannt Umgebungen von x, so zugeordnet, daß die im voranstehenden Satz genannten Aussagen* (1) *bis* (4) *gelten. Dann gibt es genau eine Topologie auf X, so daß $\mathcal{U}(x)$ das Umgebungssystem von x bezüglich dieser Topologie ist.*

Beweis. Wir definieren eine Menge $\mathcal{T} \subset P(X)$ durch: $U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$ zu jedem $x \in U$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \subset U$. Dann zeigt man, daß $\mathcal{T}$ eine Topologie ist. Gibt es eine Topologie $\mathcal{S}$ mit den im Satz genannten Eigenschaften, so muß offenbar $\mathcal{S} \supset \mathcal{T}$ sein; und da eine offene Menge Umgebung jedes ihrer Punkte ist, so ist auch $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.

Es muß noch gezeigt werden, daß $\mathcal{U}(x)$ aus den Umgebungen von x bezüglich $\mathcal{T}$ besteht. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$, und sei $W \subset U$ die Teilmenge der $u \in U$, zu denen es ein $W_u \in \mathcal{U}(u)$ mit $W_u \subset U$ gibt. Wir zeigen, daß W offen in der Topologie $\mathcal{T}$ ist und x enthält. Die Relation $x \in W$ ist klar, weil $U = W_x$ gewählt werden kann. Sei $z \in W$, $W_z \subset U$, $W_z \in \mathcal{U}(z)$. Es gibt nach (2.3.4) zu W_z eine Menge $V_z \in \mathcal{U}(z)$, so daß $W_z \in \mathcal{U}(v)$ für alle $v \in V_z$. Aus $v \in V_z$ folgt also $W_z \in \mathcal{U}(v)$, $W_z \subset U$ und damit $v \in W$ nach Definition von W. Da $z \in W$ beliebig war, ist $W \in \mathcal{T}$ und deshalb wegen $W \subset U$ die Menge U eine Umgebung von x in $\mathcal{T}$. □

(2.5) Satz. *Seien $(X, \mathcal{S})$ und $(Y, \mathcal{T})$ topologische Räume und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Folgende Aussagen sind gleichwertig:*

(1) *f ist stetig.*
(2) *Das Urbild jeder Menge einer Subbasis von Y ist offen.*
(3) *f ist in jedem Punkt von X stetig.*
(4) *Für jede Teilmenge B von Y gilt $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$.*
(5) *Für jede Teilmenge B von Y gilt $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.*
(6) *Für jede Teilmenge A von X ist $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
(7) *Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge von Y ist in X abgeschlossen.*

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Das beruht auf den mengentheoretischen Identitäten $f^{-1}(\cap_j A_j) = \cap_j f^{-1}(A_j)$ und dem Analogon für Vereinigungen.

(1) $\Rightarrow$ (3). Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Darin liegt eine offene Umgebung W. Deren Urbild ist offen, weil f stetig ist. Also ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sei $V \subset Y$ offen. Dann ist V eine Umgebung jedes Punktes $v \in V$. Also ist $U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung jedes Punktes dieser Menge. Eine Menge ist aber genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Elemente ist.

(1) $\Rightarrow$ (4). $f^{-1}(B^\circ)$ ist als Urbild einer offenen Menge offen und in $f^{-1}(B)$ enthalten. Nach Definition des Inneren folgt die behauptete Inklusion.

(4) $\Rightarrow$ (5). Wir benutzen (2.2) und mengentheoretische Dualität

$$\begin{aligned} X \setminus \overline{f^{-1}(B)} = (X \setminus f^{-1}(B))^\circ = f^{-1}(X \setminus B)^\circ \quad \supset \\ f^{-1}((X \setminus B)^\circ) = f^{-1}(X \setminus \overline{B}) = X \setminus f^{-1}(\overline{B}). \end{aligned}$$

Die Inklusion gilt wegen (4). Durch Komplementbildung ergibt sich die Behauptung.

(5) $\Rightarrow$ (6). Wir haben $f^{-1}(\overline{f(A)}) \supset \overline{f^{-1}f(A)} \supset \overline{A}$, wobei die erste Ungleichung wegen (5) gilt und die zweite wegen $f^{-1}f(A) \supset A$. Die Inklusion zwischen den äußeren Termen ist aber äquivalent zur Behauptung.

(6) $\Rightarrow$ (7). Sei $B \subset Y$ abgeschlossen. Mittels (6) erhalten wir

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} = B.$$

Also gilt $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$; die umgekehrte Inklusion ist aber klar; also besteht Gleichheit, und deshalb ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.

(7) $\Rightarrow$ (1) gilt wegen mengentheoretischer Dualität. $\square$

Ein System von Umgebungen eines Punktes x heißt ***Umgebungsbasis*** des Punktes x, wenn in jeder Umgebung von x eine Menge dieses Systems enthalten ist. Die Umgebungen von x sind dann einfach die Obermengen von Mengen dieses Systems. Ein Raum erfüllt das ***erste Abzählbarkeitsaxiom*** wenn jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis hat. Das ist zum Beispiel für metrische Räume der Fall. Abzählbare Umgebungsbasen sind der Grund dafür, daß man Grenzwerttheorie mit Folgen betreiben kann. In allgemeinen Räumen muß man etwa Folgen zu sogenannten Netzen verallgemeinern, wie wir später erläutern werden. Eine Folge $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ in einem topologischen Raum X ***konvergiert gegen*** x wenn es zu jeder Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ so gibt, daß für alle $n > N$ die Inklusion $x_n \in U$ gilt. Das Vorliegen der Konvergenz wird wie üblich symbolisch durch $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ beschrieben, und x heißt dann ***Grenzwert*** oder ***Limes*** der Folge.

3 Unterräume

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann ist

$$\mathcal{O}|A = \{U \subset A \mid \text{es gibt}\, V \in \mathcal{O} \text{ mit } U = A \cap V\}$$

eine Topologie auf A. Sie heißt die ***induzierte Topologie*** oder die ***Teilraumtopologie*** oder die ***Relativtopologie*** von A bezüglich X. Der Raum $(A, \mathcal{O}|A)$ heißt ***Unterraum*** oder ***Teilraum*** von $(X, \mathcal{O})$, oder kurz: A Unterraum von X. Die abgeschlossenen Mengen von A haben dann die Form $A \cap C$ mit abgeschlossenen Mengen C in X. Offenbar ist $\mathcal{O}|A$ die gröbste Topologie auf A, bezüglich der die Inklusion $i: A \subset X$ stetig wird: Ist nämlich i stetig und V in X offen, so ist $i^{-1}(V) = A \cap V$ in A offen. Teilmengen eines topologischen Raumes betrachten wir hinfort meist ohne Hinweis als Unterräume.

Eine stetige Abbildung $f: (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{O})$ heißt ***Einbettung*** wenn f injektiv ist und die durch f vermittelte Abbildung $(Y, \mathcal{S}) \to (f(Y), \mathcal{O}|f(Y))$, $y \mapsto f(y)$ ein Homöomorphismus ist. Der nächste Satz zeigt, daß man für die Feststellung der Stetigkeit jeden Unterraum verwenden kann, der das Bild der Abbildung umfaßt.

(3.1) Satz. *Ist A Teilraum von X, so ist die Inklusion $i: A \to X$ stetig. Ist Y ein weiterer Raum und $f: Y \to X$ eine Abbildung, deren Bild in A enthalten ist, so ist $f: Y \to X$ genau dann stetig, wenn die Abbildung $\varphi: Y \to A$, $y \mapsto f(y)$ stetig ist.*

Beweis. Es ist $f = i \circ \varphi$. Ist φ stetig, so auch die Verkettung von f mit i. Sei f stetig und $W = A \cap V$, $V \subset X$ offen. Dann ist $\varphi^{-1}(W) = f^{-1}(V)$ offen. $\square$

(3.2) Satz. *Sei $i: Y \to X$ eine injektive stetige Abbildung mit der Eigenschaft: $g: Z \to Y$ ist genau dann stetig, wenn ig stetig ist. Dann ist i eine Einbettung.*

Beweis. Sei $A = i(Y)$ mit der Teilraumtopologie von X versehen. Dann ist $j: Y \to A$, $y \mapsto i(y)$ bijektiv und stetig (3.1). Für die Umkehrung $g: A \to Y$ von j ist $ig: A \to X$ die Inklusion. Nach der vorausgesetzten Bedingung ist g stetig. Demnach ist j ein Homöomorphismus, das heißt i eine Einbettung. Umgekehrt hat eine Einbettung offenbar die genannte Eigenschaft. □

Man sollte beachten, daß eine in einem Teilraum offene (abgeschlossene) Menge im allgemeinen diese Eigenschaft nicht mehr bezüglich des umfassenden Raumes hat. So ist ja $A \subset X$ immer abgeschlossen in A. Ist A in B und B in X offen (abgeschlossen), so ist auch A in X offen (abgeschlossen). Diese letzte Aussage benutzen wir im Beweis des nächsten Satzes.

(3.3) Satz. *Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und sei X Vereinigung der Teilmengen $(X_j \mid j \in J)$. Sind die X_j offen, so ist f genau dann stetig, wenn alle Einschränkungen $f_j = f|X_j$ stetig sind. Sind die X_j abgeschlossen, so gilt die analoge Aussage, falls J endlich ist.*

Beweis. Wir behandeln den Fall abgeschlossener X_j. Ist f stetig, so auch die Zusammensetzung mit der Inklusion $i_j: X_j \subset X$; das ist aber gerade die Einschränkung. Seien die Einschränkungen stetig und sei $C \subset Y$ abgeschlossen. Dann ist $f^{-1}(C) = \cup_j (f^{-1}(C) \cap X_j) = \cup_j f_j^{-1}(C)$ eine endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen — denn $f_j^{-1}(C)$ ist in X_j abgeschlossen und also auch in X — und folglich abgeschlossen. □

Der voranstehende Satz wird oft so ausgenutzt: Für jedes j ist eine Abbildung $f_j: X_j \to Y$ gegeben; auf $X_i \cap X_j$ stimmen f_i und f_j überein. Dann gibt es zunächst genau eine Mengenabbildung f mit $f|X_j = f_j$, und der Satz gibt Bedingungen an, unter denen f stetig ist. Wir verwenden den Satz meist ohne besonderen Hinweis.

Durch den Begriff des Unterraumes fassen wir insbesondere sämtliche Teilmengen eines euklidischen Raumes als topologische Räume auf, immer bezüglich der Standardtopologie.

(3.4) Sphären. Als Teilraum eines euklidischen Raumes ist S^n ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Sei $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Wir definieren die ***stereographische Projektion*** $\varphi_N: U_N = S^n \setminus \{e_n\} \to \mathbb{R}^n$ dadurch, daß $\varphi_N(x)$ als Schnitt der Geraden durch e_n und x mit der zu e_n orthogonalen Hyperebene $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times 0$ definiert wird. Man errechnet $\varphi_N(x_0, \dots, x_n) = (1 - x_n)^{-1}(x_0, \dots, x_{n-1})$. Eine stetige Umkehrung ist $\pi_N: x \mapsto (1 + \|x\|)^2)^{-1}(2x, \|x\|^2 - 1)$. Analog haben wir eine stereographische Projektion $\varphi_S: U_S = S^n \setminus \{-e_n\} \to \mathbb{R}^n$. Es gilt $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y) = \|y\|^{-2} y$. ◇

(3.5) Beispiel. Sei $SU(2)$ die Menge der unitären $(2,2)$-Matrizen mit der Determinante 1, aufgefaßt als Teilraum komplexen aller $(2,2)$-Matrizen $M_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^4$. Es gilt

$$A \in SU(2) \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ -\bar{z}_1 & \bar{z}_0 \end{pmatrix} \quad z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1 = 1.$$

Wir erhalten einen Homöomorphismus $SU(2) \to S^3, A \mapsto (z_0, z_1)$, worin S^3 als die Einheitssphäre im $\mathbb{C}^2$ aufgefaßt wird. $\diamond$

(3.6) Beispiel. Die Beispiele (3.4) und (3.5) zeigen, daß homöomorphe Räume verschieden «aussehen» können. Hier sind noch zwei Beispiele. Sei $S_0^m = S^{m+n+1} \cap (\mathbb{R}^{m+1} \times 0)$ und $S_1^n = S^{m+n+1} \cap (0 \times \mathbb{R}^{n+1})$. Dann ist $X = S^{m+n+1} \setminus S_1^n$ höomorph zu $S^m \times E^n$. Ein Homöomorphismus $S^m \times E^n \to X$ ist $(x,y) \mapsto (\sqrt{1-\|y\|^2}x, y)$. Der Raum $Y = S^{m+n+1} \setminus (S_0^m \cup S_1^n)$ ist homöomorph zu $S^m \times S^n \times]0,1[$ vermöge $(x,y,t) \mapsto (\sqrt{1-t}x, \sqrt{t}y)$. $\diamond$

Sei $B \subset A \subset X$. Dann hat B als Teilraum von A und von X dieselbe Topologie. Für die abgeschlossenen Hüllen von B in A und X gilt $\overline{B}^A = \overline{B}^X \cap A$. Ist A in X abgeschlossen, so sind beide Hüllen gleich.

Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ stetig. Sind f, g Einbettungen, so ist auch gf eine Einbettung. Ist gf eine Einbettung, so auch f. Ist $gf = \mathrm{id}$, so ist f eine Einbettung. Eine Einbettung ist genau dann offen (abgeschlossen), wenn ihr Bild offen (abgeschlossen) ist.

4 Quotienträume

Sei X ein topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung auf eine Menge Y. Dann ist $\mathcal{S} = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ offen in } X\}$ eine Topologie auf Y. Sie ist die feinste Topologie auf Y, die f zu einer stetigen Abbildung macht, und heißt die ***Identifizierungstopologie*** oder ***Quotienttopologie*** auf Y bezüglich f. Eine surjektive Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt ***Identifizierung***, wenn gilt: $U \subset Y$ ist genau dann offen, wenn $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist. (Äquivalent: $C \subset Y$ abgeschlossen, genau dann wenn $f^{-1}(C) \subset X$ abgeschlossen.) In einer Identifizierung $f\colon X \to Y$ nennen wir Y ***Quotientraum*** von X. Eine bijektive stetige Abbildung ist genau dann eine Identifizierung, wenn sie ein Homöomorphismus ist. Oft entsteht Y als Menge der Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation auf X, und f ordnet dann jedem x seine Klasse zu. Solche f nennen wir ***Quotientabbildung***. In diesem Kontext nennen wir $A \subset X$ ***gesättigt*** wenn A mit jedem Punkt auch alle dazu äquivalenten enthält.

(4.1) Satz. *Sei $f\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung zwischen topologischen Räumen. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *f ist eine Identifizierung.*
(2) *Für jeden topologischen Raum Z und jede Abbildung $g\colon Y \to Z$ gilt: g ist genau dann stetig, wenn gf stetig ist.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Ist g stetig, so auch die Zusammensetzung gf. Sei gf stetig und $U \subset Z$ offen. Dann ist $(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ offen in X, also nach Definition der Quotienttopologie $g^{-1}(U)$ offen in Y; das heißt aber, g ist stetig.
(2) $\Rightarrow$ (1). Da $\mathrm{id}(Y)$ stetig ist, so ist $\mathrm{id}(Y) \circ f = f$ stetig. Trage Y die Topologie $\mathcal{T}$ und sei $\mathcal{S}$ die Quotienttopologie bezüglich f. Nach (1) $\Rightarrow$ (2) ist $\mathrm{id}\colon (Y,\mathcal{S}) \to (Y,\mathcal{T})$ stetig. Nach (2) ist $\mathrm{id}\colon (Y,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{S})$ stetig. Also ist $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. $\square$

(4.2) Notiz. *Sei $f\colon X \to Y$ eine Identifizierung. Sei B offen oder abgeschlossen in Y und sei $A = f^{-1}(B)$. Dann ist die Einschränkung $g\colon A \to B, x \mapsto f(x)$ eine Identifizierung.*

Beweis. Da $f(X) = Y$ ist, so ist auch $g(A) = B$. Wir behandeln den Fall, daß B offen in Y ist, also auch A offen in X. Sei $U \subset B$ und $g^{-1}(U)$ offen in A. Dann ist auch $g^{-1}(U)$ offen in X. Da f eine Identifizierung ist, so ist deshalb U offen in Y und folglich auch in B. Ist U offen in B, so ist $g^{-1}(U)$ offen in A, da g stetig ist. Damit ist g in diesem Fall als Identifizierung erkannt. Ähnlich schließt man für abgeschlossenes B. □

(4.3) Notiz. *Eine stetige, surjektive, offene (abgeschlossene) Abbildung $f\colon X \to Y$ ist eine Identifizierung. Für jedes $B \subset Y$ ist die Einschränkung $f\colon f^{-1}(B) \to B$ ebenfalls offen (abgeschlossen).*

Beweis. Sei $f^{-1}(B)$ offen. Da f surjektiv ist, gilt $f(f^{-1}(B)) = B$. Ist f offen, so also auch B. Analog im Fall abgeschlossener f. Die zweite Aussage folgt mit $f(f^{-1}(B) \cap U) = B \cap f(U)$. □

(4.4) Beispiel. Die Exponentialabbildung $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist eine offene Abbildung, wie etwa der Umkehrsatz der Differentialrechung oder die Funktionentheorie lehrt. Ebenso ist dann $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ offen. Der Kern des Homomorphismus p ist $\mathbb{Z}$. Sei $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die Quotientabbildung auf die Faktorgruppe. Mit einer bijektiven Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ gilt $\alpha \circ q = p$ erfüllt. Da p und q Identifizierungen sind, ist α ein Homöomorphismus. Die stetigen periodischen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$, entsprechen also den stetigen Funktionen $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ und den stetigen Funktionen $S^1 \to \mathbb{R}$ vermöge Verkettung mit p und q.

Ebenso erhält man einen Homöomorphismus $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}^*$. ◇

Wir machen noch einige allgemeine Bemerkungen über den Umgang mit Äquivalenzrelationen. Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge X wird beschrieben durch die Menge $R = \{(x,y) \in X \times X \mid x \sim y\}$. Eine Teilmenge $R \subset X \times X$ ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn gilt:

(1) $(x,x) \in R$;
(2) $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$;
(3) $(x,y) \in R, (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$.

Zu jeder Teilmenge $S \in X \times X$ gibt es Äquivalenzrelationen, die S enthalten, zum Beispiel $X \times X$. Die von S erzeugte Äquivalenzrelation ist der Schnitt aller Äquivalenzrelationen, die S enthalten. In der Praxis wird ein Quotientraum oft dadurch beschrieben, daß man eine typische Menge S angibt, und dann die davon erzeugte Äquivalenzrelation verwendet. Man sagt dann oft: Y entstehe aus X, indem man die Punkte a und b miteinander identifiziert (miteinander «verklebt» oder «verheftet»), wenn $(a,b) \in S$ ist.

Ist A Unterraum von X, so wird mit X/A der Quotientraum von X bezeichnet, der aus X dadurch entsteht, daß die Menge A zu einem Punkt identifiziert wird[1].

[1] Bei Faktorgruppen hat dieses Symbol allerdings eine andere Bedeutung.

Die Äquivalenzklassen sind also A und $\{x\}$ für $x \in X \setminus A$. Ist $A = \emptyset$, so ist $X/A = X + \{\emptyset\}$ ein Raum, der aus X durch Hinzufügen eines weiteren Punktes entsteht (siehe den nächsten Abschnitt über topologische Summen).

Die Bildung von Quotienträumen ist eines der fundamentalen Hilfsmittel zur Konstruktion von Räumen und deshalb unerläßlich für die geometrische Topologie. Wie auch andernorts in der Mathematik so sind auch hier die Quotientstrukturen komplizierter als die Unterstrukturen (obgleich sie in einem formalen Sinn dual zueinander sind), und man muß eine gewisse Vorsicht walten lassen.

Wir kommen nun zu einer wichtigen Methode, Räume aus Teilräumen aufzubauen, und zwar durch Verheftungen aus offenen Teilräumen.

(4.5) Satz. *Sei X eine Menge und $(U_j \mid j \in J)$ eine Familie von Teilmengen, die X überdecken. Sei $\varphi_j\colon U_j \to V_j$ eine Bijektion auf einen topologischen Raum V_j. Für jedes Paar (i,j) von Indices setzen wir $V_i^j = \varphi_i(U_i \cap U_j)$. Wir setzen voraus, daß alle V_i^j in V_i offen sind und alle Transformationen*

$$g_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\colon V_j^i \to V_i^j$$

Homöomorphismen. Dann gibt es auf X genau eine Topologie, für die alle U_j offen sind und alle φ_j Homöomorphismen.

Seien alle V_j Hausdorff-Räume (siehe §6). Dann ist der resultierende Raum X genau dann hausdorffsch, wenn für alle (i,j) die Abbildung $V_i^j \to V_i \times V_j, x \mapsto (x, g_i^j(x))$ eine abgeschlossene Einbettung ist.

Beweis. Wir haben eine kanonische Abbildung $\alpha\colon \coprod_{j\in J} V_j \to X$, die auf V_j die Umkehrung von φ_j ist. Trage X die Quotienttopologie bezüglich α. Wir sagen in diesem Fall, X entsteht aus den V_j durch ***Verheftung*** mittels der ***Klebedaten*** g_{ij}. Sei $Y_j \subset V_j$ offen. Dann ist $\alpha^{-1}\alpha(Y_j) = \coprod_j g_{ij}(Y_j)$ nach unseren Voraussetzungen offen in $\coprod_i V_i$. Also ist $\alpha(Y_j)$ offen in X; insbesondere ist U_j offen in X. Demnach ist α eine offene Abbildung. Da α auch stetig ist, erkennen wir, daß φ_j ein Homöomorphismus ist.

Sind umgekehrt alle U_j offen in X und die φ_j Homöomorphismen, so ist α stetig und offen und deshalb eine Identifizierung.

Da α stetig und offen ist, so ist nach (6.1) X genau dann hausdorffsch, wenn das Urbild $(\alpha \times \alpha)^{-1}(D_X)$ der Diagonale D_X von X abgeschlossen ist. Das ist genau dann der Fall, wenn alle Mengen $(\alpha \times \alpha)^{-1}(D_X) \cap (V_i \times V_j) =$ Bild γ_i^j in $V_i \times V_j$ abgeschlossen sind. □

In manchen Fällen wird in dem vorigen Satz die Menge X aus den V_j durch eine Äquivalenzrelation hergestellt.

Wir beschreiben die formale Situation. Sei $(V_j \mid j \in J)$ eine Familie topologischer Räume. Für jedes Paar (i,j) von Indices sei eine offene Teilmenge $V_i^j \subset V_i$ sowie ein Homöomorphismus $g_i^j\colon V_i^j \to V_j^i$ gegeben. Es soll gelten:

(1) $V_j = V_j^j$ und $g_j^j = \mathrm{id}$.

(2) Für jedes Tripel (i,j,k) von Indices induziert g_i^j eine Bijektion

$$g_i^j\colon V_i^j \cap V_i^k \to V_j^i \cap V_j^k,$$

und es gilt $g_j^k \circ g_i^j = g_i^k$, als Abbildung $V_i^j \cap V_i^k \to V_k^i \cap V_k^j$ betrachtet.

Auf der Summe der V_j betrachten wir die Äquivalenzrelation: $x \in V_i \sim y \in V_j$ sofern $x \in V_i^j$ und $g_i^j(x) = y$. Sei X der zugehörige Quotientraum von $\amalg_j V_j$. Die kanonische Abbildung von V_j nach X ist dann ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge.

Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ stetige Abbildungen. Sind f, g Identifizierungen, so ist auch gf eine Identifizierung. Ist gf eine Identifizierung, so auch g. Ist $gf = \mathrm{id}$, so ist g eine Identifizierung.

5 Produkte. Summen

Sei $((X_j, \mathcal{O}_j) \mid j \in J)$ eine Familie topologischer Räume. Die Produktmenge $X = \prod_{j \in J} X_j$ ist die Menge aller Familien $(x_j \mid j \in J)$ mit $x_j \in X_j$. Wir haben die Projektionen auf die Faktoren $\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i,\ (x_j) \mapsto x_i$. Wir nennen eine Teilmenge $B \subset X$ Basismenge, wenn es endlich viele $j_1, \dots, j_n \in J$ und offene Mengen $U_k \in \mathcal{O}_{j_k}$ gibt, mit denen $B = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{pr}_{j_i}^{-1}(U_i)$ ist. Diese Mengen bilden die Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X, der sogenannten ***Produkttopologie***. Wir nennen $(X, \mathcal{O})$ das ***topologische Produkt*** der $(X_j, \mathcal{O}_j)$. Der nächste Satz zeigt, daß es sich um das kategorientheoretische Produkt in TOP handelt.

(5.1) Satz. *Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie, für die alle Projektionen pr_j stetig sind. Eine Abbildung $f\colon Y \to X$ eines topologischen Raumes Y nach X ist genau dann stetig, wenn die Komponentenabbildungen $\mathrm{pr}_j \circ f$ sämtlich stetig sind.*

Beweis. Soll pr_j stetig sein, so müssen zumindest die Mengen $\mathrm{pr}_j(U)$ für in X_j offenes U offen sein. Die Produkttopologie ist so definiert, daß diese Mengen eine Subbasis bilden. Das zeigt die erste Behauptung.

Ist $f\colon Y \to X$ stetig, so auch die Zusammensetzung $\mathrm{pr}_j \circ f$ von stetigen Abbildungen. Für die Umkehrung verwenden wir, daß eine Abbildung stetig ist, wenn die Urbilder von Subbasismengen offen sind. □

(5.2) Satz. *Die Projektionen $\mathrm{pr}_j\colon X \to X_j$ sind offene Abbildungen.*

Beweis. Sei U in X offen. Ist U ein endlicher Durchschnitt von in der Definition der Produkttopologie auftretenden Subbasismengen, so ist $\mathrm{pr}_j(U)$ offen. Wegen der Regel $\mathrm{pr}_j(\bigcup_\lambda A_\lambda) = \bigcup_\lambda \mathrm{pr}_j(A_\lambda)$ ist also das Bild jeder offenen Menge offen. □

(5.3) Satz. *Seien X_j, Y_j topologische Räume und $f_j\colon X_j \to Y_j$ Abbildungen. Ist kein X_j leer, so ist $f = \prod f_j$ genau dann stetig, wenn alle f_j stetig sind.*

Beweis. Seien die f_j stetig. Es ist $\mathrm{pr}_j \circ f = f_j \circ \mathrm{pr}_j$, also ist nach (5.1) f stetig.

Ist umgekehrt f stetig, so ist jedenfalls die Zusammensetzung $\mathrm{pr}_j \circ f = f_j \circ \mathrm{pr}_j$ stetig. Da kein X_j leer ist, gilt für jede Menge $U \subset X_j$ die Gleichheit $\mathrm{pr}_j(\mathrm{pr}_j^{-1}(U)) = U$. Ist $U = f_j^{-1}(V)$, mit einer in Y_j offenen Menge V, so ist wegen der Stetigkeit von $f_j \circ \mathrm{pr}_j$ die Menge $\mathrm{pr}_j^{-1}(U)$ offen und deshalb nach dem letzten Satz auch U. $\square$

Für zwei Faktoren schreiben wir natürlich $X_1 \times X_2$ für das Produkt der Räume und analog $f_1 \times f_2$ für das Produkt zweier Abbildungen. Die „identische Abbildung" $X_1 \times (X_2 \times X_3) \to (X_1 \times X_2) \times X_3$ ist ein Homöomorphismus. Das folgt unmittelbar mit dem letzten Satz. Ganz allgemein ist das topologische Produkt assoziativ, das heißt mit beliebigen Klammerungen verträglich.

(5.4) Satz. *Seien $(X_j \mid j \in J)$ Räume und $A_j \subset X_j$ Teilmengen. Dann gilt $\prod_{j \in J} \overline{A_j} = \overline{\prod_{j \in J} A_j}$.*

Beweis. Man verifiziert, daß $(x_j \mid j \in J)$ genau dann Berührpunkt von $\prod A_j$ ist, wenn für jedes $j \in J$ der Punkt x_j Berührpunkt von A_j ist. $\square$

Sei $(X_j \mid j \in J)$ eine Familie topologischer Räume. Die X_j seien nicht leer und paarweise disjunkt. Die Summenmenge $\coprod X_j$ ist die Vereinigung der X_j. Die Menge

$$\mathcal{O} = \{U \subset \textstyle\coprod X_j \mid \text{für alle } j \in J \text{ ist } U \cap X_j \text{ offen in } X_j\}$$

ist eine Topologie auf $\coprod X_j$, die ***Summentopologie*** und $(\coprod X_j, \mathcal{O})$ heißt ***topologische Summe*** der X_j. Wir schreiben $X_1 + X_2$ für die topologische Summe zweier Räume.

(5.5) Satz. *Die topologische Summe hat die folgenden Eigenschaften:*

(1) *Die Teilraumtopologie von X_j in $\coprod X_j$ stimmt mit der ursprünglich auf X_j gegebenen Topologie überein.*
(2) *Sei X ein topologischer Raum und seien X_j, $j \in J$, paarweise disjunkte Teilmengen mit X als Vereinigung. Dann ist X genau dann die topologische Summe der X_j, wenn alle X_j in X offen sind.*
(3) *Eine Abbildung $f\colon \coprod X_j \to Y$ ist genau dann stetig, wenn alle Abbildungen $f|X_j\colon X_j \to Y$ stetig sind.* $\square$

Die topologische Summe ist also die kategorientheoretische Summe in TOP.

(5.6) Beispiel. Sei $(A_j \mid j \in J)$ eine Familie von Teilmengen des Raumes X. Sei $p\colon \amalg_{j \in J} A_j \to X$ die kanonische Abbildung, die auf jedem A_j die Inklusion ist. Genau dann ist p eine Identifizierung, wenn gilt: $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn alle Einschränkungen $f|A_j$ stetig sind. Siehe dazu (3.3). $\diamond$

(5.7) Beispiele. Ein diskreter Raum ist die topologische Summe seiner Punkte. Man hat einen kanonischen Homöomorphismus $X \times \amalg_j Y_j \cong \amalg_j (X \times Y_j)$. Für jedes $y \in Y$ ist $X \to X \times Y$, $x \mapsto (x, y)$ eine Einbettung. Allgemeiner: Ist $f\colon X \to Y$ stetig, so ist $X \to X \times Y$, $x \mapsto (x, f(x))$ eine Einbettung. $\diamond$

Die folgende Konstruktion verallgemeinert die Definition der Produkttopologie. Sei $(Y_j \mid j \in J)$ eine Familie topologischer Räume. Seien $f_j\colon X \to Y_j$ Abbildungen einer Menge X nach Y_j. Es gibt eine gröbste Topologie auf X, für die alle f_j stetig sind. Eine Abbildung eines topologischen Raumes Z nach X mit dieser Topologie ist genau dann stetig, wenn die Zusammensetzungen mit allen f_j stetig sind. Die definierte Topologie auf X heißt ***Initialtopologie*** bezüglich der Familie (f_j). Als Subbasismengen für die Initialtopologie werden die Urbilder offener Mengen bei den f_j verwendet.

Seien $f: X \to B$ und $g: Y \to B$ stetige Abbildungen. Sei

$$Z = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

mit der Teilraumtopologie von $X \times Y$. Wir haben die Projektionen auf die Faktoren $F: Z \to Y$ und $G: Z \to X$. Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{F} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle G} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

ist ein Pullback in der Kategorie der topologischen Räume. Sei $s: B \to Y$ ein Schnitt von g. Es gibt genau einen ***induzierten Schnitt*** $S: X \to Z$ von G, der die Gleichung $FS = sf$ erfüllt.

Die Addition $a: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x+y$ und die Multiplikation $m: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy$ sind stetig. Sind $f, g: X \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen aus einem topologischen Raum X, so ist die Summe $f + g$ die Verkettung

$$a(f \times g)d: X \to X \times X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Darin ist $d: x \mapsto (x,x)$ die nach (5.1) stetige ***Diagonalabbildung*** Insgesamt ist also $f + g$ als Verkettung stetiger Abbildungen stetig. Ebenso für das Produkt. Die Menge $C(X, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $X \to \mathbb{R}$ bildet also eine $\mathbb{R}$-Algebra. Analog für komplexwertige Funktionen. Da die Projektionen $\mathrm{pr}_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig sind, sieht man induktiv, daß alle Polynomfunktionen auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ stetig sind.

Wir wollen natürlich die aus der elementaren Analysis bekannten Tatsachen benutzen, ohne sie im Einzelnen hier noch einmal alle herzuleiten. Allerdings sollte man sich davon überzeugen, daß der Aufbau der elementaren Analysis viel einfacher und übersichtlicher wird, wenn man von vornherein die Methodik, Denkweise und Sprache der mengentheoretischen Topologie verwendet.

6 Trennungsaxiome

Wir zählen einige Eigenschaften eines topologischen Raumes X auf.

(T_1) Zu je zwei verschiedenen Punkten x und y hat jeder eine Umgebung, die den anderen Punkt nicht enthält.

(T_2) Zu je zwei verschiedenen Punkten x und y gibt es disjunkte Umgebungen.

(T_3) Zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$, die x nicht enthält, gibt es disjunkte Umgebungen U von x und V von A.

(T_4) Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen von X gibt es disjunkte Umgebungen.

Wir sagen, X erfüllt das ***Trennungsaxiom*** T_j (oder X ist ein T_j-Raum), wenn X die Eigenschaft T_j hat.

Ein T_2-Raum heißt ***Hausdorff-Raum*** oder ***separiert*** Ein Raum, der T_1 und T_3 erfüllt, heißt ***regulär*** Ein Raum, der T_1 und T_4 erfüllt, heißt ***normal*** Ein Raum ist genau dann T_1-Raum, wenn die einpunktigen Mengen abgeschlossen sind. Ein normaler Raum ist regulär, ein regulärer separiert. Ein Raum ist genau dann ein T_4-Raum, wenn zu jeder abgeschlossenen Menge A und jeder offenen Umgebung U von A eine offene Umgebung V von A existiert, deren abgeschlossene Hülle in U liegt (Schachtelungseigenschaft).

Ein Raum X heißt ***vollständig regulär*** wenn er separiert ist und wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder dazu disjunkten abgeschlossenen Menge A eine stetige Funktion $f: X \to [0,1]$ gibt mit $f(x) = 1$ und $f(A) \subset \{0\}$. Ein vollständig regulärer Raum ist offenbar regulär. Wir werden später zeigen, daß normale Räume vollständig regulär sind.

(6.1) Satz. *Ein Raum X ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn die Diagonale $D = D_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ in $X \times X$ abgeschlosssen ist.*

Beweis. Sei X hausdorffsch und $x \neq y$. Wir wählen disjunkte offene Umgebungen U von x und V von y. Dann ist $U \times V$ offen in $X \times Y$ und $D \cap (U \times V) = \emptyset$. Also ist $X \times X \setminus D$ als Vereinigung von Mengen des Typs $U \times V$ offen.

Sei $X \times X \setminus D$ offen. Ist $x \neq y$, so ist $(x,y) \in X \times X \setminus D$. Nach Definition der Produkttopologie gibt es eine Basismenge $U \times V$ dieser Topologie mit $(x,y) \in U \times V \subset X \times X \setminus D$. Das bedeutet aber, daß U und V disjunkte offene Umgebungen von x und y sind. □

(6.2) Satz. *Seien $f, g: X \to Y$ stetige Abbildungen in einen Hausdorff-Raum. Dann ist die Koinzidenzmenge $A = \{x \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in X. Stimmen also zwei stetige Abbildungen in einen Hausdorff-Raum auf einer dichten Teilmenge überein, so sind sie gleich.*

Beweis. Die Diagonalabbildung $d: X \to X \times X$, $x \mapsto (x,x)$ ist stetig (6.1). Es ist $A = ((f \times g)d)^{-1}(D_Y)$. □

(6.3) Satz. *Sei $f: X \to Y$ surjektiv, stetig und offen. Dann ist Y genau dann separiert, wenn $R = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ abgeschlossen in $X \times X$ ist.*

Beweis. Ist Y separiert, also die Diagonale D von Y abgeschlossen, so ist auch $R = (f \times f)^{-1}(D)$ abgeschlossen.

Sei umgekehrt R abgeschlossen, also $X \times X \setminus R$ offen. Es ist $Y \times Y \setminus D = (f \times f)(X \times X \setminus R)$, weil f surjektiv ist. Weil f offen ist, so ist auch $f \times f$ offen. Somit ist $Y \times Y \setminus D$ offen und Y separiert. □

(6.4) Satz. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ nicht leer. Wir setzen $d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$ als Abstand von x und A fest. Dann ist $x \mapsto$*

$d(x,A)$ gleichmäßig stetig, und $d(x,A) = 0$ ist mit $x \in \overline{A}$ gleichwertig. Ein metrischer Raum ist normal.

Beweis. Für ein $a \in A$ gilt die Dreiecksungleichung $d(x,y) + d(y,a) \geq d(x,a)$ und deshalb $d(x,y) + d(y,a) \geq d(x,A)$. Da das für alle a gilt, folgt $d(x,y) + d(y,A) \geq d(x,A)$. Ebenso, wenn wir x und y vertauschen; und deshalb insgesamt

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$

Ist $d(x,A) = 0$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $d(x,a) < \varepsilon$, das heißt $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Es folgt $x \in \overline{A}$. Diese Schlußkette läßt sich umdrehen.

Seien A und B disjunkte nichtleere Mengen in X. Dann nimmt die stetige Funktion $x \mapsto d(x,A)/(d(x,A) + d(x,B))$ auf A den Wert Null und auf B den Wert 1 an. Die Urbilder von $[0, \frac{1}{4}]$ und $[\frac{3}{4}, 1]$ sind trennende Umgebungen. □

(6.5) Satz. *Seien A und Y abgeschlossene Teilmengen eines T_4-Raumes X und sei U eine offene Umgebung von Y in X. Sei $C \subset A$ eine abgeschlossene Umgebung in A von $Y \cap A$, die in $U \cap A$ enthalten ist. Dann gibt es eine abgeschlossene Umgebung Z von Y, die in U enthalten ist und für die $Z \cap A = C$ gilt.*

Beweis. Falls Z_1 eine in U enthaltene abgeschlossene Umgebung von Y ist, für die $Z_1 \cap A \subset C$ gilt, so hat $Z = Z_1 \cup C$ die verlangten Eigenschaften. Um Z_1 zu finden, wählen wir zunächst eine abgeschlossene Umgebung Z_3 von Y, die in U enthalten ist. Sei D die abgeschlossene Hülle von $A \backslash C$. Da C eine Umgebung von $Y \cap A$ in A ist, so sind die abgeschlossenen Mengen Y und D disjunkt. Also hat Y eine abgeschlossene Umgebung Z_2, die zu D disjunkt ist. Es folgt $Z_2 \cap A \subset C$, und $Z_1 = Z_2 \cap Z_3$ leistet das Verlangte. □

(6.6) Satz. *Sei $f: X \to Y$ eine abgeschlossene Identifizierung und X normal. Dann ist auch Y normal.*

Beweis. Seien A und B disjunkte abgeschlossene Mengen von Y. Dann sind $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$ abgeschlossene Mengen, die sich durch disjunkte Umgebungen offene Mengen U und V trennen lassen, da X normal ist. Da f abgeschlossen ist, sind $Y \setminus f(X \setminus U)$ und $Y \setminus f(X \setminus V)$ offen in Y. Diese Mengen sind disjunkt und trennen A und B. Punkte in Y sind als Bilder von Punkten abgeschlossen. Also ist Y auch Hausdorff-Raum. □

Unterräume von T_1- T_2- und T_3-Räumen sind wieder von diesem Typ. Ein Unterraum eines vollständig regulären Raumes ist vollständig regulär. Abgeschlossene Unterräume von T_4-Räumen sind wieder T_4-Räume, aber im allgemeinen nicht beliebige Unterräume.

Produkte von T_j-Räumen sind wieder von diesem Typ ($j = 1, 2, 3$). Dasselbe gilt für reguläre und vollständig reguläre Räume. Ein Produkt zweier normaler Räume ist im allgemeinen kein normaler Raum, selbst dann nicht, wenn ein Faktor das Einheitsintervall $[0, 1]$ ist [].

7 Anheftungen

Eine wichtige geometrische Anwendung der Identifizierungen ist das Anheften eines Raumes an einen anderen. Sei

(7.1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & Y \arrow[d, "J"] \\ X \arrow[r, "F"] & Z \end{tikzcd}$$

ein Pushout in der Kategorie der topologischen Räume mit einer Inklusion $j\colon A \subset X$ eines abgeschlossenen Unterraumes. Zu gegebenem j und f läßt sich ein derartiges Diagramm folgendermaßen konstruieren: In der topologischen Summe $X + Y$ werde die Äquivalenzrelation betrachtet, die durch $a \sim f(a)$ für $a \in A$ erzeugt wird; die Äquivalenzklassen sind also die Mengen $\{z\}$ für $z \notin A + f(A)$ und $f^{-1}(z) \cup \{z\}$ für $z \in f(A)$. Der Quotientraum werde mit $Z = Y \cup_f X$ bezeichnet. Wir sagen, $Y \cup_f X$ entstehe aus Y durch ***Anheftung von*** X vermöge f. Die kanonischen Inklusionen $X \to X + Y$ und $Y \to X + Y$ induzieren stetige Abbildungen $F\colon X \to Y \cup_f X$ und $J\colon Y \to Y \cup_f X$. Man bestätige, daß das resultierende Diagramm (7.1) ein Pushout ist. Dazu beachte man, daß die Äquivalenzrelation so eingerichtet wurde, daß das Diagramm ein Pushout in der Kategorie der Mengen ist.

(7.2) Satz. *Das Pushout-Diagramm* (7.1) *mit abgeschlossenem* $j\colon A \to X$ *hat die folgenden Eigenschaften:*

(1) *J ist eine abgeschlossene Einbettung.*
(2) *Die Abbildung $F|(X \setminus A)$ ist eine offene Einbettung.*
(3) *Sind X und Y T_1-Räume, so ist auch $Y \cup_f X$ ein T_1-Raum.*
(4) *Sind X und Y T_4-Räume, so ist auch $Y \cup_f X$ ein T_4-Raum.*
(5) *Ist f eine Identifizierung, so auch F.*

Beweis. (1) Sei $C \subset Y$ abgeschlossen. Dann ist $p^{-1}(J(C)) = f^{-1}(C) + C$ in $X + Y$ abgeschlossen, weil $f^{-1}(C)$ in A abgeschlossen ist und A in X. Also ist $J(C)$ abgeschlossen.

(2) Ist $U \subset X \setminus A$ offen, so ist $p^{-1}F(U) = U$ offen in $X + Y$. Also ist $F(U)$ offen.

(3) Punkte von $Y \cup_f X$ haben in $X + Y$ Urbilder der Form $\{z\}$ für $z \notin A + j(A)$ oder $f^{-1}(z) + \{z\}$. Da diese Mengen abgeschlossen sind, so sind Punkte in $Y \cup_f X$ abgeschlossen.

(4) Seien A und B gesättigte abgeschlossene Mengen in $X + Y$. Zunächst werden die Anteile in Y durch offene Mengen getrennt und diese dann mittels (6.4) geeignet erweitert.

(5) Sei $g\colon Y \cup_f X \to Z$ gegeben. Sei gF stetig. Wegen $gFj = gJf$ und weil f eine Identifizierung ist, ist gJ stetig. Die Abbildungen gF und gJ zusammen liefern nach der Pushout-Eigenschaft eine stetige Abbildung g. □

Wegen (1) und (2) identifizieren wir $X \setminus A$ mit dem offenen Teilraum $F(X \setminus A)$ und Y mit dem abgeschlossenen Teilraum $J(Y)$. In diesem Sinne ist $Y \cup_f X$

Vereinigung der disjunkten Teilmengen $X \setminus A$ und Y.

(7.3) Satz. *Sei A ein abgeschlossener Unterraum $A \subset X' \subset X$ und $Y' \subset Y$ ein Unterraum. Habe $f\colon A \to Y$ ein Bild in Y' und bezeichne $g\colon A \to Y'$ die Einschränkung von f. Dann ist $Y' \cup_g X'$ ein Unterraum von $Y \cup_f X$. Dieser Unterraum ist offen (abgeschlossen), wenn X' und Y' offen (abgeschlossen) sind.*

Beweis. Sei $C' + D' \subset X' + Y'$ eine gesättigte offene Menge. Es gibt abgeschlossene Mengen $C \subset X$ mit $C' = C \cap X'$ und $D \subset Y$ mit $D \cap Y' = D'$. Die Menge $C + D$ ist gesättigt, da $A \subset X'$ ist. Also ist $p(C + D)$ abgeschlossen in $Y \cup_f X$ und hat den Schnitt $p(C' + D')$ mit $Y' \cup_b X'$.

Sind X', Y' offen (abgeschlossen), so ist $X' + Y'$ eine gesättigte offene (abgeschlossene) Menge von $X + Y$. Also ist $Y' \cup_g X' = p(X' + Y')$ offen (abgeschlossen) in $Y \cup_f X$. □

Sei $j\colon A \subset X$. Eine ***Retraktion*** von X auf A ist eine Abbildung $r\colon X \to A$ mit $rj = \mathrm{id}(A)$. Gibt es eine Retraktion, so nennen wir A einen ***Retrakt*** von X. Sei unter den Voraussetzungen von (7.1) $r\colon X \to A$ eine Retraktion von j. Da $fr\colon X \to Y$ und $\mathrm{id}\colon Y \to Y$ die Gleichung $\mathrm{id} \circ f = fr \circ j$ erfüllen, haben wir wegen der Pushout-Eigenschaft eine ***induzierte Retraktion*** $R\colon Y \cup_f X \to Y$ von J.

(7.4) Satz. *Der Raum $Y \cup_f X$ ist hausdorffsch, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *Y ist ein Hausdorff-Raum.*
(2) *X ist regulär.*
(3) *A ist Retrakt einer offenen Umgebung in X.*

Beweis. Seien $z_1, z_2 \in Y \cup_f X = Z$ verschiedene Punkte. Wir unterscheiden drei Fälle. Falls $z_1, z_2 \in X \setminus A$, so können sie durch Umgebungen in $X \setminus A$ getrennt werden, da dieser Raum hausdorffsch ist. Da $X \setminus A$ offen in Z ist, trennen dieselben Umgebungen in Z.
Sei $z_1 \in X \setminus A$ und $z_2 \in Y$. Da X regulär ist, gibt es disjunkte offene Mengen U, V von X mit $z_1 \in U \subset X \setminus A$ und $A \subset V$. Dann sind U und $V \cup_f Y$ disjunkte Umgebungen von z_1 und z_2.
Sei $z_1, z_2 \in Y$. Da Y hausdorffsch ist, können wir disjunkte offene Umgebungen W_j von z_j in Y wählen. Sei $r\colon U \to A$ eine Retraktion einer offenen Menge $U \subset X$ auf A. Die Mengen $r^{-1}f^{-1}(W_j)$ sind offen in U und X; sie sind disjunkt, da die $f^{-1}(W_j)$ disjunkt sind und r eine Retraktion ist. Die Mengen $r^{-1}f^{-1}(W_j) + W_j$ sind offen und gesättigt in $X + Y$. Also sind ihre Bilder in $Y \cup_f X$ trennende Umgebungen von z_1 und z_2. □

(7.5) Satz. *Sei ein kommutatives Diagramm* (7.1) *mit abgeschlossenen Einbettungen j und J gegeben. Angenommen, F induziert eine Bijektion $X \setminus A \to Z \setminus Y$. Dann ist das Diagramm ein Pushout, falls $F(X) \subset Z$ abgeschlossen ist und $F\colon X \to F(X)$ eine Identifizierung.*

Beweis. Erfülle $g: X \to U$, $h: Y \to U$ die Gleichung $gj = hf$. Das Diagramm ist ein mengentheoretischer Pushout. Also gibt es genau eine Mengenabbildung $\varphi: Z \to U$ mit $\varphi F = g$, $\varphi J = h$. Da J eine abgeschlossene Einbettung ist, so ist $\varphi \mid J(Y)$ stetig. Da F eine Identifizierung ist, so ist $\varphi \mid F(X)$ stetig. Also ist φ stetig, da $F(X)$ und $J(Y)$ abgeschlossene Mengen sind, die Z überdecken. □

8 Zusammenhang

Eine ***Zerlegung*** eines Raumes X ist ein Paar U, V offener, nichtleerer Teilmengen, die disjunkt sind und X als Vereinigung haben. Ein Raum heißt ***zusammenhängend*** wenn er keine Zerlegung besitzt. In einer Zerlegung sind die Mengen U und V als Komplemente offener Mengen auch abgeschlossen.

Beweistechnisch wird der Zusammenhang eines Raumes X oft folgendermaßen ausgenutzt. Sei E die Teilmenge der Punkte von X, die eine gewisse Eigenschaft haben. Man zeigt dann, daß diese Menge offen, abgeschlossen und nichtleer ist. Wegen des Zusammenhangs von X ist dann $X = E$.

Die zweipunktige Teilmenge $\{0,1\}$ von $\mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend. Ein Raum X ist genau dann unzusammenhängend, wenn es eine surjektive stetige Abbildung $f: X \to \{0,1\}$ gibt; die Zerlegungen U, V sind durch $f^{-1}(0) = U$ und $f^{-1}(1) = V$ gegeben. Eine stetige Abbildung $f: X \to \{0,1\}$ ist auf einem zusammenhängenden Unterraum konstant. Äquivalent zum Zwischenwertsatz und auch äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen ist:

(8.1) Satz. *Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn A ein Intervall ist (offen, halboffen, abgeschlossen, endlich oder unendlich).*

Beweis. Ein Intervall ist eine Teilmenge, die mit je zwei Punkten alle dazwischenliegenden enthält. Ist A kein Intervall, so gibt es $x < y < z$, $x, z \in A$, $y \notin A$. Dann ist $\{a \in A \mid a < y\}$, $\{a \in A \mid a > y\}$ eine Zerlegung von A.

Sei A ein Intervall, zerlegt durch U und V. Sei $x \in U$, $y \in V$ und etwa $x < y$. Sei $z = \sup([x,y] \cap U)$. Ist $z \in U$, so widerspricht das der Offenheit von U. Ist $z \in V$, so widerspricht das der Supremumseigenschaft. □

Ist $f: X \to Y$ stetig und X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend, denn eine Zerlegung U, V von $f(X)$ liefert eine Zerlegung $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ von X.

(8.2) Satz. *Sei $(A_j \mid j \in J)$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von X und $A_i \cap A_j$ sei immer nichtleer. Dann ist die Vereinigung Y der A_j zusammenhängend. Ist A eine zusammenhängende Teilmenge von X und $A \subset B \subset \overline{A}$, so ist B zusammenhängend.*

Beweis. Eine stetige Abbildung $f: Y \to \{0,1\}$ ist auf allen A_j konstant und, da die $A_i \cap A_j$ nichtleer ist, überhaupt konstant.

Seien U, V offene Teilmengen von X, für die $B \subset (U \cup V), B \cap U \cap V = \emptyset$ gilt. Da A zusammenhängend ist, so gilt etwa $U \cap A = \emptyset$; also $A \subset X \setminus U$, $\overline{A} \subset X \setminus U$, $U \cap \overline{A} = \emptyset$. □

Die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen A von X, die $x \in X$ enthalten, heißt ***Zusammenhangskomponente*** oder ***Komponente*** $X(x)$ von x. Nach (8.2) sind die Komponenten von X zusammenhängende abgeschlossene Teilmengen von X. Ist $y \in X(x)$, so gilt $X(x) = X(y)$. Eine Komponente ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge von X. Ein Raum ist die disjunkte Vereinigung seiner Komponenten. Bestehen alle Komponenten nur aus einem Punkt, so heißt der Raum ***total unzusammenhängend***.

Ein Raum X heißt ***lokal zusammenhängend***. wenn zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine zusammenhängende Umgebung V von x existiert, die in U enthalten ist. Diese Eigenschaft wird auf offene Teilmengen vererbt. Die Komponenten einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}$ sind offene Intervalle; U hat höchstens abzählbar viele Komponenten.

(8.3) Satz. *Die Komponenten eines lokal zusammenhängenden Raumes X sind offen.*

Beweis. Sei K eine Komponente von x. Sei V eine zusammenhängende Umgebung von x. Dann ist $K \cup V$ zusammenhängend. Also ist $K \cup V \subset K$. Das zeigt, daß K offen ist. □

Es gibt einen zweiten Zusammenhangsbegriff, der auf der Verbindbarkeit von Punkten durch Wege beruht. Eine stetige Abbildung $w\colon [a,b] \to U$ heißt ***Weg*** in U mit ***Parameterintervall*** $[a,b]$, ***Anfangspunkt*** $w(a)$ und ***Endpunkt*** $w(b)$. Ein Weg w läuft *von* $w(a)$ *nach* $w(b)$ und ***verbindet*** $w(a)$ mit $w(b)$. Ist $w(a) = w(b)$, so ist der Weg ***geschlossen***. Zwei Punkte x und y eines Raumes U sind ***verbindbar***, wenn es einen Weg $w\colon [a,b] \to U$ von x nach y gibt. Mit w ist auch $u\colon [0,1] \to U,\ t \mapsto w(a + t(b-a))$ ein Weg von x nach y. Es genügt deshalb meist, das Parameterintervall $[0,1]$ zu betrachten. Ist $w\colon I \to U$ gegeben, so heißt $w^-\colon t \mapsto w(1-t)$ der zu w ***inverse Weg***. Sind $v\colon I \to U$ und $w\colon I \to U$ zwei Wege mit $v(1) = w(0)$, so heißt der durch $(v * w)(t) = v(2t)$ für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ und $(v * w)(t) = w(2t-1)$ für $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ definierte Weg $v * w$ das ***Produkt*** von v und w. Die Relation „verbindbar" ist eine Äquivalenzrelation auf U. Die Äquivalenzklassen heißen die ***Wegekomponenten*** von U. Ein Raum heißt ***wegweise zusammenhängend***. wenn je zwei seiner Punkte verbindbar sind. Ist X wegweise zusammenhängend, so auch zusammenhängend, denn ist U, V eine Zerlegung von X und $w\colon [0,1] \to X$ ein Weg von $x \in U$ nach $y \in V$, so ist $w^{-1}(U)$, $w^{-1}(V)$ eine Zerlegung von $[0,1]$, die es aber nach (8.1) nicht gibt. Bezeichne $\pi_0(U)$ die Menge der Wegekomponenten von U.

Ein Raum X heißt ***lokal wegweise zusammenhängend*** wenn zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine wegweise zusammenhängende Umgebung V von x existiert, die in U enthalten ist.

(8.4) Notiz. *Die Wegekomponenten eines lokal wegweise zusammenhängenden Raumes sind offen und stimmen mit den Komponenten überein.*

(8.5) Notiz. *Die Menge $GL(n,\mathbb{R})$ der invertierbaren reellen (n,n)-Matrizen hat zwei Wegekomponenten; sie werden durch das Vorzeichen der Determi-*

nante unterschieden. Die Menge $GL(n, \mathbb{C})$ der komplexen invertierbaren (n, n)-Matrizen ist wegweise zusammenhängend. Ebenso ist $U(n)$ wegweise zusammenhängend, während $O(n)$ zwei Wegekomponenten hat.

(8.6) Satz. *Ein Produkt $\prod X_j$ nichtleerer topologischer Räume ist genau dann zusammenhängend, wenn jeder Faktor X_j zusammenhängend ist. Die Zusammenhangskomponente eines Punktes $(x_j) \in \prod X_j$ ist das Produkt der Zusammenhangskomponenten der x_j. Das Entsprechende gilt für den Wegzusammenhang.*

Beweis. Ist X zusammenhängend, so auch X_j als stetiges Bild. Seien X und Y zusammenhängend. Nach (8.2) ist $X \times y \cup x \times Y$ zusammenhängend. Also liegen (x_1, y) und (x, y_1) immer in derselben Komponente. Deshalb ist $X \times Y$ zusammenhängend und allgemeiner ein endliches Produkt zusammenhängender Räume. Ist J unendlich und $\prod_j X_j = U + V$ eine Zerlegung, so gibt es nach Definition der Produkttopologie in U und V Punkte, die bis auf endlich viele Koordinaten übereinstimmen; nach der Überlegung über endlich viele Faktoren liegen sie in derselben Komponente. Sei $K(x_j)$ die Komponente von x_j in X_j. Dann ist $L = \prod_j K(x_j)$ zusammenhängend, also in der Komponente K von $x = (x_j \mid j \in J)$ enthalten. Durch Projektion auf die Komponenten sieht man, daß K im Produkt L enthalten ist. □

9 Metrische Räume

Eine Metrik beschreibt feinere geometrische Eigenschaften als eine Topologie: Man kann Umgebungen verschiedener Punkte der Größe nach miteinander vergleichen und dadurch „Gleichmäßigkeitsbegriffe“ definieren. Das haben wir schon gelegentlich benutzt. Eine Abbildung $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ heißt ***gleichmäßig stetig*** wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß aus $d(x, y) < \delta$ immer $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$ folgt. Eine gleichmäßig stetige Abbildung ist natürlich stetig, wenn wir die zugrundeliegenden Topologien betrachten. (Man kann den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit auch in einem allgemeineren mengentheoretischen Rahmen definieren; das geschieht in der Theorie der uniformen Räume [**?**, Ch.II].) Eine Folge $(f_n\colon X \to E \mid n \in \mathbb{N})$ von Abbildungen in einen metrischen Raum E heißt ***gleichmäßig konvergent*** gegen $f\colon X \to E$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $x \in X$ und alle $n > N$ die Ungleichung $d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ gilt. Ein Folge in einem metrischen Raum heißt ***Cauchy-Folge***, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N so gibt, daß für $m, n > N$ die Ungleichung $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ gilt. Mit der Dreiecksungleichung folgt sofort, daß eine konvergente Folge in einem metrischen Raum eine Cauchy-Folge ist. Ein metrischer Raum heißt ***vollständig***, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert. Die Vollständigkeit ist keine topologische Eigenschaft; so sind die Räume $]0, 1[$ und $\mathbb{R}$ homöomorph, aber nur der zweite ist vollständig bezüglich der euklidischen Metrik. In metrischen Räumen und allgemeiner in Räumen mit abzählbarer Umgebungsbasis von Punkten kann man die aus der Analysis bekannten Schlußweisen mittels Folgen durchführen. Wir notieren:

(9.1) Notiz. *Sei A Teilmenge des metrischen Raumes E. Genau dann liegt x in $\overline{A}$, wenn es eine Folge (x_n) in A gibt, die gegen x konvergiert.*

Sei $f\colon E_1 \to E_2$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Genau dann ist f bei $a \in E_1$ stetig, wenn für jede Folge (a_n) in E_1 mit Grenzwert a die Folge $(f(a_n))$ den Grenzwert $f(a)$ hat.

Der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig. □

Sei X ein metrischer Raum und $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine Folge in X. Ein Element $z \in X$ heißt ***Häufungswert*** der Folge, wenn jede Umgebung von z unendlich viele Folgenglieder enthält. Sei $HW(x_n)$ die Menge der Häufungswerte.

Ist $\mu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine injektive, monoton wachsende Abbildung, so heißt die Folge $(x_{\mu(n)} \mid n \in \mathbb{N})$ eine ***Teilfolge*** von (x_n). Sei $T(x_n)$ die Menge der Elemente $z \in X$, die Grenzwerte konvergenter Teilfolgen sind.

Sei $X(n) = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ und $H(x_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{H(n)}$.

(9.2) Satz. *Für jede Folge (x_n) in X sind die Mengen $HW(x_n)$, $H(x_n)$ und $T(x_n)$ gleich. Insbesondere sind diese Mengen abgeschlossen.*

Beweis. Sei $z \in HW(x_n)$. Da jede Umgebung U von z unendlich viele Folgenglieder enthält, ist $U \cap X(n) \neq \emptyset$. Folglich ist z Berührpunkt von $X(n)$ und demnach in der abgeschlossenen Hülle enthalten. Das gilt für jedes n; also liegt z in $H(x_n)$.

Sei $z \in T(x_n)$ und sei $(x_{\mu(n)})$ eine Teilfolge, die gegen z konvergiert. Ist U eine Umgebung von z, so gibt es wegen der Konvergenz ein N, so daß für $n > N$ gilt $x_{\mu(n)} \in U$. Also enthält U unendlich viele Folgenglieder, das heißt $z \in HW(x_n)$.

Sei $z \in H(x_n)$. Wir konstruieren induktiv eine Teilfolge, die gegen z konvergiert. Seien $x_{\mu(j)}$, $1 \leq j \leq n-1$ so gegeben, daß $d(z, x_{\mu(j)}) < j^{-1}$ ist. Da der Durchschnitt $U_{1/n}(z) \cap X(\mu(n-1)+1)$ nicht leer ist, können wir ein $\mu(n) > \mu(n-1)$ mit $d(z, x_{\mu(n)}) < n^{-1}$ wählen. Die resultierende Folge konvergiert wie gewünscht. □

Eine Menge A in einem metrischen Raum (X, d) heißt ***beschränkt***, wenn $\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$ eine beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ ist. Das Supremum dieser Menge ist dann der ***Durchmesser*** von A.

(9.3) Cauchy-Kriterium. *Sei $f\colon A \to F$ eine Abbildung aus einer Teilmenge A des metrischen Raumes E. Sei z Häufungspunkt von A. Sei F vollständig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es ein $\delta > 0$, so daß für alle $a, b \in U_\delta(z) \cap A \setminus \{z\}$ die Ungleichung $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$ gilt. Dann existiert $\lim_{a \to z} f(a)$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ fixiert und $\delta > 0$ mit der Eigenschaft des Satzes gewählt. Sei $z = \lim a_n$, $a_n \in A$. Das ist möglich, weil z Häufungspunkt von A ist. Sei N so, daß $d(a_n, z) < \delta/2$ für $n > N$. Dann ist $d(a_m, a_n) < \delta$ und folglich $d(f(a_m), f(a_n)) < \varepsilon$ für $m, n > N$, das heißt, $(f(a_m))$ ist eine Cauchy-Folge in F. Da F vollständig ist, hat sie einen Grenzwert c. Ist nun $d(z, a) < \delta/2$ und wählen wir a_m so, daß $d(z, a_m) < \delta/2$ und $d(c, f(a_m)) < \varepsilon/2$, so ist $d(a, a_m) < \delta$ und folglich $d(c, f(a)) \le d(a, f(a_m)) + d(f(a_m), f(a)) < \varepsilon$. Damit ist $\lim_{a\to z} f(a) = c$ gezeigt. $\square$

(9.4) Satz. *Seien E und F metrische Räume. Sei F vollständig. Sei $A \subset E$ und sei $\varphi: A \to F$ gleichmäßig stetig. Dann gibt es genau eine gleichmäßig stetige Abbildung $\Phi: \overline{A} \to F$, die f erweitert.*

Beweis. Wegen (6.2) ist eine stetige Erweiterung eindeutig bestimmt. Sei $z \in \overline{A} \setminus A$. Da φ gleichmäßig stetig ist, so existiert $\lim_{a\to z} \varphi(a)$, weil das Cauchy-Kriterium (9.3) erfüllt ist. Wir nennen diesen Limes $\Phi(z)$. Es bleibt zu zeigen, daß Φ gleichmäßig stetig ist. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta > 0$ so, daß für $a, b \in A$ mit $d(a, b) < 3\delta$ immer $d(\varphi(a), \varphi(b)) < \varepsilon/3$ gilt. Seien nun $x, y \in \overline{A}$ irgend zwei Punkte mit einem Abstand $d(x, y) < \delta$. Es gibt $a, b \in A$ mit $d(x, a) < \delta$, $d(y, b) < \delta$ und $d(\Phi(x), \varphi(a)) < \varepsilon/3$, $d(\Phi(y), \varphi(b)) < \varepsilon/3$. Aus der Dreiecksungleichung folgt $d(a, b) < 3\delta$. Insgesamt bekommt man

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \le d(\Phi(x), \varphi(a)) + d(\varphi(a), \varphi(b)) + d(\varphi(b), \Phi(y)) < \varepsilon$$

und damit die gleichmäßige Stetigkeit. $\square$

Viele metrische Räume entstehen aus normierten Vektorräumen. Wir verwenden Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und setzen $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, wenn beide Fälle erlaubt sind.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine ***Norm*** auf V ist eine Abbildung $N: V \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(1) $N(v) = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.
(2) $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$ für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$.
(3) $N(v + w) \le N(v) + N(w)$. (***Dreiecksungleichung***)

Ein ***normierter Vektorraum*** (V, N) beseht aus einem Vektorraum V und einer Norm N auf V. Eine Norm wird oft durch $N(v) = \|v\|$ bezeichnet. Ist (V, N) ein normierter Vektorraum, so ist $(x, y) \mapsto d(x, y) = N(x - y)$ eine Metrik auf V. Wir fassen einen normierten Vektorraum in dieser Weise als metrischen Raum auf. Ist ein normierter Vektorraum als metrischer Raum vollständig, so nennt man ihn ***Banach-Raum***.

(9.5) Satz. *Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen. Dann sind äquivalent:*

(1) *f ist stetig.*
(2) *f ist am Nullpunkt stetig.*
(3) *Es gibt ein $C > 0$, so daß immer $\|f(v)\| \le C\|v\|$ gilt.*

Eine stetige lineare Abbildung ist gleichmäßig stetig.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) ist klar.

(2) $\Rightarrow$ (3). Wegen der Stetigkeit am Nullpunkt gibt es ein $\delta > 0$, so daß aus $\|u\| \le \delta$ folgt $\|f(u)\| \le 1$. Sei $v \ne 0$ ein Vektor aus V. Dann hat $u = \delta\|v\|^{-1}v$ die Norm kleinergleich δ. Es ergibt sich $\|f(v)\| \le \delta^{-1}\|v\|$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Wegen $\|f(u)-f(v)\| \leq C\|u-v\|$ erkennen wir, daß f sogar gleichmäßig stetig ist. $\square$

Im Kontext der normierten Vektorräume wird eine lineare Abbildung auch ***linearer Operator*** genannt. Wegen (3) in (9.1) heißt eine stetige lineare Abbildung auch ***beschränker Operator***. Das Infimum der C, für die $\|f(v)\| \leq C\|v\|$ gilt, wird mit $\|f\|$ bezeichnet und ***Norm des Operators*** f genannt. Diese Norm hängt natürlich von den in V und W vorgegebenen Normen ab. Der nächste Satz zeigt, daß diese Verwendung des Wortes Norm gerechfertigt ist.

(9.6) Satz. *Sei $L(V,W)$ die Menge der beschränkten Operatoren $V \to W$ zwischen normierten Vektorräumen. Dann ist $L(V,W)$ bezüglich der vorstehend definierten Normen ein normierter Vektorraum. Ist W ein Banach-Raum so auch $L(V,W)$.*

Beweis. Zunächst einmal handelt es sich bei $L(V,W)$ um einen Vektorraum (mit punktweise definierter Addition und Skalarmultiplikation; Untervektorraum von $\mathrm{Hom}(V,W)$). Seien nämlich $f_1, f_2 \in L(V,W)$. Dann gilt

$$\|(f_1+f_2)(v)\| \leq \|f_1(v)\| + \|f_2(v)\| \leq (\|f_1\| + \|f_2\|) \cdot v.$$

Also ist $f_1 + f_2$ ein beschränkter Operator, und es gilt $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$. Analog folgt $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$. Ist $\|f\| = 0$, so ist für alle $v \in V$ auch $\|f(v)\| = 0$ und deshalb $f(v) = 0$; also ist f das Nullelement in $L(V,W)$.

Sei nun W ein Banach-Raum und (f_n) eine Cauchy-Folge in $L(V,W)$. Sei $\varepsilon > 0$ fixiert und N so gewählt, daß für $m, n > N$ immer die Abschätzung $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ gilt. Für $v \in V$ gilt dann $\|f_m(v) - f_n(v)\| \leq \varepsilon\|v\|$ und deshalb ist $(f_n(v))$ eine Cauchy-Folge in W. Sei $f(v)$ ihr Limes. Aus der Linearität der f_m zeigt man durch Grenzübergang, daß $v \mapsto f(v)$ eine lineare Abbildung ist. Da die Norm eine stetige Abbildung ist, folgt aus $\|f_m(v) - f_n(v)\| \leq \varepsilon\|v\|$ die Ungleichung $\|f_m(v) - f(v)\| \leq \varepsilon\|v\|$, und damit schließen wir auf $\|f_m - f\| \leq \varepsilon$. Also konvergiert (f_n) in $L(V,W)$ gegen f. $\square$

(9.7) Satz. *Seien E und F normierte Vektorräume. Sei F vollständig, sei $A \subset E$ ein Untervektorraum und sei $\varphi\colon A \to F$ eine stetige lineare Abbildung mit Norm L. Dann gibt es genau eine stetige lineare Abbildung $\Phi\colon \overline{A} \to F$, die φ erweitert; sie hat dieselbe Norm L.*

Beweis. Nach (9.4) gibt es eine stetige Erweiterung Φ. Sie ist linear: Die Abbildung $(x,y) \mapsto \Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)$ ist auf $A \times A$ gleich Null, also auch auf der Hülle $\overline{A} \times \overline{A}$ von $A \times A$; ebenso für die Skalarmultiplikation. Also ist Φ linear. Eine Relation $\|\varphi(z)\| \leq (L+\varepsilon)\|z\|$ bleibt bei Grenzübergängen erhalten; also gilt sie auch für Φ; das zeigt die Behauptung über die Norm.

10 Mannigfaltigkeiten

Die fundamentalen Räume der geometrischen Topologie sind die Mannigfaltigkeiten. Ein topologischer Raum X heißt n-dimensional *lokal euklidisch*, wenn jeder

Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, die zu einer offenen Teilmenge V des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist. Ein derartiger Homöomorphismus $h\colon U \to V$ ist eine *Karte* oder ein *lokales Koordinatensystem* von X um x mit *Kartengebiet* U und die Umkehrung $h^{-1}\colon V \to U$ eine *lokale Parametrisierung* von X um x. Ist $h(x) = 0$, so sagen wir, h und h^{-1} seien in x *zentriert.* Ein *Atlas* ist eine Menge von Karten, deren Kartengebiete X überdecken. Ist X n-dimensional lokal euklidisch, so schreiben wir $n = \dim X$ und nennen n die *Dimension* von X. Eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit* (oder kürzer n-Mannigfaltigkeit) ist ein topologischer Raum, der n-dimensional lokal euklidisch ist, das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt und eine abzählbare Basis für seine Topologie besitzt.

Zwei Karten (U_1, h_1, V_1) und (U_2, h_2, V_2) Karten einer n-Mannigfaltigkeit unterscheiden sich um eine *Koordinatentransformation* (um einen *Kartenwechsel*)

$$h_2 h_1^{-1}\colon h_1(U_1 \cap U_2) \to h_2(U_1 \cap U_2).$$

Die Kartenwechsel sind Homöomorphismen zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Zusätzliche geometrische oder analytische Strukturen auf einer Mannigfaltigkeit werden dadurch definiert, daß die Kartenwechsel weiteren Bedingungen unterworfen werden.

(10.1) Beispiel. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist die Identität (U, id, U) eine Karte für U. Damit wird U zu einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

So einfach dieses Beispiel ist: Es gibt viele geometrisch interessante Mengen dieser Form.

Die Menge $GL(n, \mathbb{R})$ der invertierbaren reellen $n \times n$-Matrizen ist eine offene Teilmenge des Vektorraums $M_n(\mathbb{R})$ aller reellen $n \times n$-Matrizen, denn die Determinantenabbildung $\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist stetig, und $GL(n, \mathbb{R})$ ist das Urbild der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Hier und an anderen Stellen ist es zweckmäßig, den euklidischen Standardraum durch andere Vektorräume zu ersetzen.)

Ein injektives stetiges Bild K des Kreises $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ im $\mathbb{R}^3$ heißt *Knoten.* Das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus K$ ist offen — der *Knotenaußenraum.* Seine Geometrie dient dazu, Knoten zu unterscheiden. $\diamond$

(10.2) Sphären. Das einfachste Beispiel einer Mannigfaltigkeit, die mindestens zwei Karten in einem Atlas braucht, ist die n-dimensionale Sphäre S^n. Als Teilraum eines euklidischen Raumes ist S^n ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. Wir geben einen Atlas mit zwei Karten an. Sei $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Wir definieren die *stereographische Projektion* $\varphi_N\colon U_N = S^n \setminus \{e_n\} \to \mathbb{R}^n$ dadurch, daß $\varphi_N(x)$ als Schnitt der Geraden durch e_n und x mit der zu e_n orthogonalen Hyperebene $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times 0$ definiert wird. Man errechnet

$$\varphi_N(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{1 - x_n}(x_0, \dots, x_{n-1}).$$

Eine stetige Umkehrung ist

$$\pi_N\colon x \mapsto \frac{1}{1 + \|x\|^2}(2x, \|x\|^2 - 1).$$

Also ist (U_N, φ_N) eine Karte von S^n. Analog haben wir eine stereographische Projektion $\varphi_S: U_S = S^n \setminus \{-e_n\} \to \mathbb{R}^n$. Der Kartenwechsel ist $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y) = \|y\|^{-2} y$. $\diamond$

(10.3) Projektive Räume. Die projektiven Räume sind Mannigfaltigkeiten von grundsätzlicher Bedeutung. Ist V ein $(n+1)$-dimensionaler reeller Vektorraum, so ist der zugehörige projektive Raum $P(V)$ die Menge der eindimensionalen Unterräume von V. Zwei Vektoren $x, y \in V \setminus \{0\}$ spannen genau dann denselben Unterraum auf, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, so daß $\lambda x = y$ ist. Wir können deshalb $P(V)$ als die Menge der Äquivalenzklassen von $V \setminus \{0\}$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^* \quad \text{mit} \quad \lambda x = y$$

auffassen. Wir bezeichnen mit $p: V \setminus \{0\} \to P(V)$, $x \mapsto [x]$ die zugehörige Quotientabbildung und geben $P(V)$ die Quotienttopologie bezüglich p. Die Äquivalenzklasse von $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ wird mit $[x] = [x_0, \dots, x_n]$ bezeichnet (homogene Koordinaten von $[x]$). Statt $P(\mathbb{R}^{n+1})$ schreiben wir auch $\mathbb{R}P^n$. Wir nennen $\mathbb{R}P^n$ den *n-dimensionalen reellen projektiven Raum.*

Wir definieren Karten für den Raum $P(\mathbb{R}^{n+1})$. Sei

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i \neq 0\} \subset P(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Nach Definition der Quotienttopologie ist U_i eine offene Teilmenge von $P(\mathbb{R}^{n+1})$. Durch

$$\varphi_i: U_i \to \mathbb{R}^n, \quad [x_0, \dots, x_n] \mapsto x_i^{-1}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

wird ein Homöomorphismus mit der Umkehrung

$$\psi_i: \mathbb{R}^n \to U_i, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto [a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_i, \dots, a_n]$$

definiert. Die Abbildung ψ_i ist als Verkettung stetiger Abbildungen stetig. Um φ_i als stetig zu erkennen, benutzen wir, daß auch die Einschränkung $p: p^{-1}(U_i) \to U_i$ eine Identifizierung ist (4.3), und wenden (4.1) an.

Wir werden später die Räume $P(V)$ vom Standpunkt der Transformationsgruppen ausführlicher behandeln und dann auch nachweisen, daß es sich um Hausdorff-Räume handelt. Ein direkter Nachweis mag hier als Aufgabe gelten. Hat ein Raum einen Atlas aus abzählbar vielen Karten, so auch eine abzählbare Basis.

Auf dieselbe Weise kann man den projektiven Raum $P(V)$ eines komplexen Vektorraumes V definieren. Er entsteht aus $V \setminus \{0\}$ durch die Äquivalenzrelation wie oben, nur daß jetzt $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist. Die Karten von $P(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{C}P^n$ werden wieder durch dieselben Formeln definiert.

(10.4) Beispiel. *Der euklidische Raum mit den zwei Nullpunkten.* In der Summe $\mathbb{R}^n + \mathbb{R}^n$ werde jeweils x im ersten Summanden mit x im zweiten identifiziert, und zwar für alle $x \neq 0$. Der resultierende Raum ist nicht hausdorffsch, die beiden verbleibenden Nullpunkte lassen sich nicht durch disjunkte offene Mengen trennen. Der Raum ist n-dimensional lokal euklidisch mit abzählbarer Basis. $\diamond$

Eine Mannigfaltigkeit wurde hier zusammen mit einer Dimension definiert. Tatsächlich ist aber die Dimension durch den topologischen Raum bestimmt. Es gilt der fundamentale Satz von der *Invarianz der Dimension*:

(10.5) Satz. *Sind $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ nichtleere offene homöomorphe Teilmengen, so ist $m = n$.* $\square$

Der Satz wird am besten mit Hilfsmitteln der algebraischen Topologie bewiesen. Ein einfacher Beweis ist leider nicht möglich – und das zeigt die außerordentlichen Schwierigkeiten, die mit dem Begriff einer stetigen Abbildung verbunden sind. Setzt man dagegen voraus, daß es eine umkehrbar stetig differenzierbare Abbildung $f\colon U \to V$ gibt, so hat man das Differential zur Verfügung und führt damit das Problem auf den Hauptsatz der linearen Algebra (Mächtigkeit der Basis eindeutig) zurück, das heißt auf den algebraischen Dimensionsbegriff.

11 Aufgaben

(11.1) Aufgaben und Ergänzungen.

1. *Jeder topologische Raum ist Quotient eines Hausdorff-Raumes.*

Beweis. (1) Sei X ein topologischer Raum. Zu jeder Teilmenge M von X und jedem $p \in M$ definieren wir einen Raum (M,p) wie folgt: Die zugrundeliegende Menge ist X; alle Punkte von $X \setminus p$ sind offen und alle Mengen $U \setminus (M \setminus p)$, wobei U eine offene Umgebung von p in X ist. Je zwei Punkte in $X \setminus p$ können also in (M,p) durch offene Umgebungen getrennt werden. Das gleiche gilt für p und Punkte in $M \setminus p$. Sei $\mathcal{A}$ die Menge dieser Räume (M,p) und $\mathcal{B}$ die Teilmenge der Hausdorff-Räume. Wir definieren

$$D = \coprod_{(M,p)\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} \mathrm{Mor}(I,(M,p)),$$

worin I das Einheitsintervall ist. Für jedes $d \in D$ nehmen wir eine Kopie I_d des Einheitsintervalles und definieren

$$Y = \coprod_{(M,p)\in\mathcal{B}} (M,p) \amalg \coprod_{d\in D} I_d.$$

Der Raum Y ist hausdorffsch.

(2) Sei $f_{(M,p)}\colon (M,p) \to X$ die durch die Identität gegebene stetige Abbildung und $g_d\colon I_d \to X$ die Komposition $f_{(M,p)} \circ d\colon I_d \to (M,p) \to X$. Die Abbildungen $g_d, d \in D$, und $f_{(M,p)}, (M,p) \in \mathcal{B}$, induzieren eine stetige Abbildung $r\colon Y \to X$. Wir zeigen, daß r eine Identifizierung ist, also X ein Quotient von Y. Falls dem nicht so ist, gibt es eine Menge $A \subset X$, die nicht offen ist, wohl aber deren Urbild bei r. Dann gibt es ein $q \in A$, das in jeder Umgebung Punkte aus $X \setminus A$ enthält.

(3) $(A,q) \in \mathcal{A}\setminus\mathcal{B}$. Beweis: Die Teilmenge A ist nicht offen in (A,q), da jede Umgebung von q in (A,q) Punkte aus $X \setminus A$ enthält. Da $r^{-1}(A)$ offen ist, so ist A offen in jedem

$(M, p) \in \mathcal{B}$. Damit gibt es ein $x \in X \setminus A$, das in (A, q) nicht durch offene Umgebungen von q getrennt werden kann.
(4) Wir definieren nun $h: I \to (A, q)$ durch

$$h(t) = \begin{cases} q & t = 0 \\ x & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Da x in (A, q) offen ist und in jeder offenen Umgebung von q enthalten ist, ist h stetig. Nun ist das Urbild von A bei $f_{(A,q)} \circ h = g_h$ gerade $0 \subset I$, also nicht offen; weil aber $r^{-1}(A)$ als offen angenommen wurde, müßte dieses Urbild offen sein. Widerspruch.

2. Sei $f: X \to Y$ stetig. Ist Y ein Hausdorff-Raum, so ist der Graph $\{(x, f(x) \mid x \in X\}$ von f abgeschlossen in $X \times Y$.

3. Sei X hausdorffsch. Dann ist die Diagonale in einem beliebigen Produkt $\prod_j X$ abgeschlossen.

4. Sei X normal und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist X/A normal.

(11.2) Aufgaben und Ergänzungen.

5. Sind (v_n) und (w_n) konvergente Folgen in einem normierten Vektorraum, so gilt $\lim(v_n + w_n) = \lim v_n + \lim w_n$ und $\lim \lambda v_n = \lambda \lim v_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

6. Seien $f: U \to V$ und $g: V \to W$ beschränkte Operatoren. Dann ist auch $g \circ f$ beschränkt, und es gilt $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$.

7. Sei X eine beliebige Menge und sei $B(X, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller beschränkten Funktionen $f: X \to \mathbb{R}$. Dabei heißt eine Funktion f *beschränkt*, wenn

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\} \in \mathbb{R}$$

existiert. Durch $f \mapsto \|f\|_\infty$ wird die *Supremumsnorm* auf $B(X, \mathbb{R})$ definiert.

Sei $(f_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine Folge in $B(X, \mathbb{R})$. Konvergiert (f_n) bezüglich der Supremumsnorm gegen f, so ist das äquivalent dazu, daß (f_n) im üblichen Sinn gleichmäßig gegen f konvergiert. Der Raum $(B(X, \mathbb{R}), \| - \|_\infty)$ ist vollständig, also ein Banach-Raum. Das vorstehende Beispiel läßt sich leicht verallgemeinern. Sei V ein normierter Vektorraum und X eine beliebige Menge. Eine Funktion $f: X \to V$ heißt *beschränkt*, wenn $x \mapsto \|f(x)\|$ als Funktion $X \to \mathbb{R}$ beschränkt ist. Aus den Grundeigenschaften einer Norm folgt, daß die Menge $B(X, V)$ der beschränkten Funktionen $X \to V$ bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum ist. Für $f \in B(X, V)$ setzen wir

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in X\}.$$

Die Zuordnung $f \mapsto \|f\|_\infty$ ist dann eine Norm auf $B(X, V)$. Ist V ein Banach-Raum, so ist $B(X, V)$ ebenfalls ein Banach-Raum.

8. Jede lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist stetig, wenn man etwa die euklidische Norm zugrundelegt. Unstetige lineare Abbildungen treten also erst bei unendlichdimensionalen Vektorräumen auf.

Sei $\mathbb{R}^\infty$ der Vektorraum aller Folgen $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$, bei denen nur endlich viele $a_n \neq 0$ sind. Die Formel für die euklidische Norm definiert auch auf $\mathbb{R}^\infty$ eine Norm. Die Vektoren e_k, die die k-te Komponente gleich Eins haben und alle anderen gleich Null, haben die Norm 1 und bilden eine Basis im Sinne der linearen Algebra. Eine lineare

Abbildung $f\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ wird durch die Werte $f(e_k)$ bestimmt. Setzen wir $f(e_k) = k$, so ist der Operator f nicht beschränkt.

9. Sei $C^0[a,b]$ der Vektorraum der stetigen und $C^1[a,b]$ der Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$. Die Ableitung ist eine lineare Abbildung $D\colon C^1[a,b] \to C^0[a,b]$. Wir definieren auf $C^1[a,b]$ die C^1-Norm als die Summe zweier Sup-Normen durch $\|f\|_{C^1} = \sup|f| + \sup|f'|$ und setzen, der Einheitlichkeit halber, $\|f\|_{C^0} = \sup|f|$. Dann ist $\|Df\|_{C^0} = \sup|f'| \le \|f\|_{C^1}$ und demnach D ein beschränkter Operator bezüglich dieser Normen. Wir können $C^1[a,b]$ auch als Unterraum von $C^0[a,b]$ mit der C^0-Norm betrachten. Dann ist D nicht beschränkt, da im Fall $[a,b] = [0,2\pi]$ gilt: $f_n\colon x \mapsto \sin x$ hat die C^0-Norm 1 und Df_n hat die C^0-Norm n.

10. $C^0[a,b]$ mit der C^0-Norm und $C^1[a,b]$ mit der C^1-Norm sind vollständig.

11. Auf $\mathbb{R}^n$ haben wir für $1 \le p$ die p-Norm $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{1/p}$. Im Fall $p = 2$ ist das die euklidische Norm. Im Fall $p = 1$ ist $\|x\|_p = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Wir haben außerdem die *Maximumnorm* $\|x\|_\infty = \max(|x_i|)$ mit der zugehörigen Metrik d_∞. Entsprechende Normen gibt es auch auf dem $\mathbb{C}^n$. Weise direkt nach, daß alle diese Normen dieselbe Topologie auf $\mathbb{R}^n$ definieren. Siehe aber auch II(2.5).

12. Sei $A\colon V \to W$ ein beschränkter Operator. Dann gilt $\|A\| = \sup_{x,\|x\|=1} \|Ax\|$.

(11.3) Aufgaben und Ergänzungen.

13. Sei A eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes E. Dann ist A vollständig. Eine Cauchy-Folge in A ist eine Cauchy-Folge in E, hat dort einen Limes, der nach (11.1) in A liegt.

14. Seien (X_i, d_i) metrische Räume. Durch

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_1(x_1,x_2) + d_2(y_1,y_2)$$

wird eine *Produktmetrik* auf $X_1 \times X_2$ definiert. Sie induziert die Produkttopologie.

15. Sei (E,d) ein metrischer Raum. Trage $E \times E$ die Produktmetrik. Dann ist die Abbildung $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

16. Eine Metrik δ heißt *beschränkt* durch M, wenn für alle x, y immer $\delta(x,y) \le M$ ist. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann wird durch

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

eine durch 1 beschränkte Metrik δ auf X definiert, die dieselbe Topologie wie d induziert.

17. Sei $((X_j, d_j) \mid j \in \mathbb{N})$ eine abzählbare Familie metrischer Räume mit durch 1 beschränkten Metriken d_j. Dann wird auf dem Produkt $\prod_{j=1}^\infty X_j$ durch

$$d((x_j),(y_j)) \mid j \in \mathbb{N}) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$$

eine Metrik definiert, die die Produkttopologie induziert.

2 Kompaktheit

1 Kompakte Räume

Eine Familie $A = (A_j \mid j \in J)$ von Teilmengen von X ist eine *Überdeckung* von X, wenn X Vereinigung der A_j ist. Eine Überdeckung $B = (B_k \mid k \in K)$ von X ist eine *Verfeinerung* von A, wenn zu jedem $k \in K$ ein $j \in J$ existiert, so daß $B_k \subset A_j$ ist. Ist X ein topologischer Raum, so heißt eine Überdeckung $A = (A_j \mid j \in J)$ *offen* (*abgeschlossen*), wenn alle A_j offen (abgeschlossen) sind. Eine Überdeckung $B = (B_k \mid k \in K)$ ist eine *Teilüberdeckung* von A oder in A enthalten, falls $K \subset J$ und $B_k = A_k$ für alle $k \in K$ ist. Wir nennen B *endlich* beziehungsweise *abzählbar*, falls K endlich beziehungsweise abzählbar ist; und *lokal endlich*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung hat, die nur endlich viele B_k trifft; und *punktal endlich*, falls jeder Punkt nur in endlich vielen B_k liegt.

Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat. (Manchmal wird in der Literatur dem Begriff „kompakt“ noch die Bedingung „hausdorffsch“ hinzugefügt. Wir haben uns hier zur Hervorhebung für die etwas umständlichere Version entschieden.) Durch Komplementbildung erhält man: Ist in einem kompakten Raum der Schnitt einer Familie abgeschlossener Mengen leer, so hat schon eine endliche Teilfamilie leeren Schnitt. Der Begriff „kompakt“ ist der wichtigste Spezialbegriff der allgemeinen Topologie. (Er umfaßt das Äußerste an Endlichkeit — will sagen: Menschlichkeit —, was man der exorbitanten mathematischen Unendlichkeit abgewinnen kann.) Der *Überdeckungssatz von Heine-Borel* aus der Analysis ist äquivalent zur Vollständigkeit der reellen Zahlen und besagt:

(1.1) Satz. *Das Einheitsintervall $I = [0,1]$ ist kompakt.*

Beweis. Wir erinnern an den Beweis mit dem Vollständigkeitsaxiom, welches besagt: Eine beschränkte nichtleere Menge reeller Zahlen hat eine kleinste obere Schranke (ein Supremum). Sei $(U_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung von $[0,1]$. Wir betrachten die Menge $T \subset [0,1]$ der t, für die $[0,t]$ durch endlich viele U_j überdeckt wird. Sie enthält 0, ist also nichtleer. Sei z ihr Supremum. Es liege in U_k. Zusammen mit einer endlichen Überdeckung von $[0, z-\varepsilon]$ sehen wir, daß $z \in T$ ist und $z < 1$ nicht möglich. □

(1.2) Beispiel. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ eines nichtleeren kompakten Raumes X hat ein Maximum, denn andernfalls bilden die $f^{-1}\,]-\infty, a[\,$, $a \in f(X)$, eine offene Überdeckung von X ohne endliche Teilüberdeckung. ◇

(1.3) Notiz. *Sei X kompakt, A abgeschlossen und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann sind A und $f(X)$ kompakt.*

Beweis. Sei $(A_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung von A. Es gibt in X offene U_j mit $A_j = A \cap U_j$, nach Definition der Teilraumtopologie. Nehmen wir zu den U_j noch $X \setminus A$ hinzu, so erhalten wir eine offene Überdeckung von X, von denen endlich viele zur Überdeckung von X ausreichen und deren Schnitte mit A dann eine geeignete endliche Teilüberdeckung von A bilden.

Sei $(B_k \mid k \in K)$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Dann bilden die $f^{-1}(B_k)$ eine offene Überdeckung von X. Wir wählen eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(B_j) \mid j \in E)$ aus, und dann liegt $f(X)$ in $\bigcup_{j\in E} B_j$. □

(1.4) Satz. *Sei B (beziehungsweise C) kompakter Teilraum von X (beziehungsweise Y). Sei ferner $(A_j \mid j \in J)$ eine Familie offener Teilmengen von $X \times Y$ mit $B \times C \subset \bigcup_{j\in J} A_j$. Dann gibt es offene Umgebungen U von B in X (und V von C in Y) und endliches $E \subset J$, so daß $U \times V \subset \bigcup_{j\in E} A_j$. Insbesondere ist das Produkt zweier kompakter Räume kompakt.*

Beweis. Sei zunächst $B = \{b\}$. Für jedes $c \in C$ gibt es offene Umgebungen M_c von b in X und N_c von c in Y derart, daß $M_c \times N_c$ in einer Menge $A_{j(c)}$, $j(c) \in J$ enthalten ist; das entnimmt man der Definition der Produkttopologie. Es ist $(N_c \mid c \in C)$ eine offene Überdeckung von C. Sei $C \subset (N_{c_1} \cup \ldots \cup N_{c_n})$, was wegen der Kompaktheit von C möglich ist. Sei $U = \bigcap_{i=1}^n M_{c_i}$ und $V = \bigcup_{i=1}^n N_{c_i}$. Dann ist

$$\{b\} \times C \subset U \times V \subset \bigcup_{i=1}^n A_{j(c_i)}.$$

Sei nun B eine beliebige kompakte Teilmenge. Nach dem eben Gezeigten gibt es zu jedem $b \in B$ eine offene Umgebung U_b von b in X und eine offene Umgebung V_b von C in Y, so daß $U_b \times V_b$ in einer endlichen Vereinigung

$$\bigcup_{j\in J(b)} A_j, \qquad J(b) \subset J \text{ endlich},$$

liegt. Es ist $(U_b \mid b \in B)$ eine offene Überdeckung von B. Sei $B \subset (U_{b_1} \cup \ldots \cup U_{b_m})$, was wegen der Kompaktheit von B möglich ist. Sei $U = \bigcup_{i=1}^m U_{b_i}$, $V = \bigcap_{i=1}^m V_{b_i}$. Dann ist

$$B \times C \subset U \times V \subset \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j\in J(b_i)} A_j$$

und damit die Behauptung gezeigt. □

Ein allgemeiner *Satz von Tychonoff* besagt: Ein beliebiges Produkt kompakter Räume ist kompakt. Wir beweisen den Satz in einem späteren Abschnitt über Konvergenz und Filter.

(1.5) Satz. *Seien B und C disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorff-Raumes X. Dann gibt es disjunkte offene Umgebungen von B und C. Also ist ein kompakter Hausdorff-Raum normal. Eine kompakte Teilmenge C eines Hausdorff-Raumes X ist abgeschlossen.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $B \times C \subset X \times X \setminus D = W$, wenn D die Diagonale von X bezeichnet. Da X Hausdorff-Raum ist, so ist W offen. Nach (1.4) gibt es offene Umgebungen U von B und V von C mit $U \times V \subset W$, also $U \cap V = \emptyset$.

Sei $x \in X \setminus C$. Dann haben $\{x\}$ und C disjunkte offene Umgebungen. Also ist $X \setminus C$ offen. □

(1.6) Satz. *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Sei A abgeschlossen und beschränkt. Es gibt ein $r > 0$, so daß $A \subset [-r, r]^n$. Nach (1.1) und (1.4) ist $[-r, r]^n$ kompakt und mithin auch A als abgeschlossene Menge (1.3).

Sei A kompakt. Die Mengen $U_n(0)$ überdecken A. Also gibt es ein n mit $A \subset U_n(0)$, das heißt A ist beschränkt. Als kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes ist A auch abgeschlossen (1.5). □

(1.7) Satz. *Eine stetige Abbildung $f: X \to Y$ eines kompakten Raumes X in einen Hausdorff-Raum Y ist abgeschlossen. Ist f ferner injektiv (bijektiv), so ist f eine Einbettung (ein Homöomorphismus). Ist f surjektiv, so ist f eine Identifizierung.*

Beweis. Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so ist nach (1.3) und (1.5) $f(A)$ kompakt und abgeschlossen. Ist f bijektiv, so besagt die erste Aussage, daß bei der Umkehrabbildung das Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist, das heißt, die Umkehrabbildung ist stetig. Eine injektive Abbildung ist eine bijektive Abbildung auf die Bildmenge. Eine surjektive stetige abgeschlossene Abbildung ist eine Identifizierung. □

(1.8) Satz. *Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $f: X \to Y$ eine Identifizierung. Dann sind äquivalent:*

(1) *Y ist Hausdorff-Raum.*
(2) *f ist abgeschlossen.*
(3) *$R = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ ist abgeschlossen in $X \times X$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (3). Die Menge R ist das Urbild der Diagonale $D \subset Y \times Y$ bei $f \times f$.
(3) $\Rightarrow$ (2). Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Wir müssen zeigen: $f(A)$ ist abgeschlossen; also, da f eine Identifizierung ist, $f^{-1}f(A)$ ist abgeschlossen. Es ist

$$f^{-1}f(A) = \mathrm{pr}_1(R \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(A)),$$

gebildet mit den Projektionen $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2: X \times X \to X$. Ist R abgeschlossen, so auch $R \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(A)$. Also ist $R \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(A)$ kompakt, als abgeschlossene Menge in dem kompakten Raum $X \times X$. Also ist auch das Bild $\mathrm{pr}_1(R \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(A))$ kompakt; und folglich abgeschlossen, da X separiert ist.
(2) $\Rightarrow$ (1). Seien y_1 und y_2 zwei verschiedene Punkte in Y. Dann sind $f^{-1}(y_1)$ und $f^{-1}(y_2)$ disjunkte abgeschlossene Mengen in X; als Bilder einpunktiger, also abgeschlossener, Mengen sind nämlich die $\{y_j\}$ nach der Voraussetzung (2) abgeschlossen. Da X als kompakter Hausdorff-Raum normal ist, gibt es disjunkte offene Umgebungen U_j von $f^{-1}(y_j)$. Da f abgeschlossen ist, sind die Mengen $f(X \setminus U_j)$abgeschlossen; das Komplement $V_j = Y \setminus f(X \setminus U_j)$ ist also offen. Nach Konstruktion ist $y_j \in V_j$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. □

(1.9) Satz. *Eine diskrete abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist endlich.*

Beweis. Sei F eine solche Menge im kompakten Raum K. Für jeden Punkt $x \in F$ ist $F \setminus \{x\}$ in F abgeschlossen, da F die diskrete Topologie trägt. Da F in K abgeschlossen ist, so auch $F \setminus \{x\}$. Der Schnitt $\bigcap_{x \in F}(F \setminus \{x\})$ ist leer. Also ist ein endlicher Schnitt der $F \setminus \{x\}$ leer, das heißt aber: F ist endlich. □

Sei der Raum X Vereinigung einer aufsteigenden Folge $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ von Teilräumen X_i, $i \in \mathbb{N}$. Wir sagen, X trägt die *Kolimes-Topologie bezüglich der Filtrierung* (X_i), wenn eine Menge $A \subset X$ genau dann offen (abgeschlossen) ist, wenn jeder Schnitt $A \cap X_n$ offen (abgeschlossen) in X_n ist. Diese Topologie hat die Eigenschaft, daß eine Abbildung $f \colon X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn alle Einschränkungen $f|X_n$ stetig sind. Ist nur die aufsteigende Folge gegeben, so kann man auf ihrer Vereinigung X in der genannten Weise eine Topologie definieren; der resultierende Raum X heißt *Kolimes* der Folge.

(1.10) Satz. *Sei X Vereinigung einer aufsteigenden Folge $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ von Teilräumen X_i mit der Kolimes-Topologie. Die Punkte in jedem X_i seien abgeschlossen. Dann liegt jede kompakte Teilmenge K von X in einem der Teilräume X_k.*

Beweis. Falls dem nicht so ist, gibt es eine abzählbar unendliche Menge F in K, so daß jeder Schnitt $F \cap X_n$ endlich ist. Für jede Teilmenge S von F ist dann $S \cap X_n$ als endliche Vereinigung abgeschlossener Punkte abgeschlossen in X_n. Nach Definition der Kolimes-Topologie ist also jede Teilmenge von F abgeschlossen in X und damit auch in K und F. Folglich trägt F die diskrete Topologie und müßte nach dem voranstehenden Satz endlich sein. □

(1.11) Satz von Dini. *Sei $(f_n \colon X \to \mathbb{R})$ eine Folge stetiger Funktionen auf dem kompakten Raum X. Für $t \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ gelte $f_n(t) \le f_{n+1}(t)$. Die Folge konvergiere punktweise gegen eine stetige Funktion f. Dann ist die Konvergenz gleichmäßig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $x \in X$ wählen wir ein $n(x) \in \mathbb{N}$, so daß für $n \ge n(x)$ die Ungleichung $f(x) - f_n(x) < \varepsilon/3$ gilt. Da f und $f_{n(x)}$ stetig sind, gibt es eine Umgebung $V(x)$ von x, so daß für $y \in V(x)$ gilt

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |f_{n(x)}(y) - f_{n(x)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für jedes $y \in V(x)$ gilt dann nach der Dreiecksungleichung $f(y) - f_{n(x)}(y) < \varepsilon$. Der Raum X wird von endlich vielen $V(x)$ überdeckt, etwa von $V(x_1), \ldots, V(x_m)$. Sei $N = \max(n(x_1), \ldots, n(x_k))$. Für $n \ge N$ und alle $y \in X$ gilt dann $f(y) - f_n(y) < \varepsilon$. □

(1.12) Satz. *Sei K eine Komponente des kompakten Hausdorff-Raumes X. Dann bilden die gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Umgebungen von K eine Umgebungsbasis von K.*

Beweis. Sei X ein metrischer Raum mit Metrik d. Eine Familie $x = x_0, \dots, x_n = y$ heißt t-Kette ($t > 0$) von x nach y, wenn $d(x_i, x_{i+1}) < t$ für $0 \le i < n$. Die Relation $x \sim_t y$ bedeute: Es gibt eine t-Kette von x nach y. Offenbar ist $x \sim_t y$ eine Äquivalenzrelation und die Klasse $A(x,t)$ von x offen in X. Da aber $A(x,t)$ als Komplement eine Vereinigung von Äquivalenzklassen hat, ist $A(x,t)$ auch abgeschlossen. Sei

$$A(x) = \bigcap\nolimits_{t>0} A(x,t).$$

Sei $C(x)$ die Komponente von x, und sei $AO(x)$ der Durchschnitt aller x enthaltenden Mengen, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. Es gilt

$$C(x) \subset AO(x) \subset A(x),$$

und wenn $A(x)$ zusammenhängend ist, so gilt überall die Gleichheit. Es ist $A(x)$ als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Ist $A(x)$ nicht zusammenhängend, so gibt es eine disjunkte Zerlegung $A(x) = P \cup Q$ in abgeschlossene Mengen P und Q. Es gibt dann ein $s > 0$, so daß die offenen $2s$-Umgebungen $U(P, 2s)$ und $U(Q, 2s)$ disjunkt sind. Sei $H = X \setminus (U(P,s) \cup U(Q,s))$, $x \in P$, $y \in Q$. Für jedes t, $0 < t < s$, gibt es t-Ketten $\{x_0, \dots, x_n\}$ von x nach y, da x und y in $A(x)$ liegen, und nach Wahl von s hat jede solche t-Kette ein in H liegendes Glied. Mit anderen Worten: Für $t < s$ ist $A(x,t) \cap H \neq \emptyset$. Da außerdem für $t_1 < t_2$ auch $A(x,t_1) \subset A(x,t_2)$ gilt, haben wegen der Kompaktheit die Mengen $H \cap A(x,t)$, $0 < t < s$, einen nichtleeren Durchschnitt, das heißt, es gilt $H \cap A(x) \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Definition von H. Also ist $A(x)$ zusammenhängend.

Sei U eine offene Umgebung von K. Da K eine Komponente von X ist, gilt $K = C(x) = A(x)$ für jedes $x \in K$. Wäre die Menge $A(x,t) \cap (X \setminus U)$ für jedes t nicht leer, so würde wieder aus der Kompaktheit $(X \setminus U) \cap A(x) \neq \emptyset$ folgen, was absurd ist.

Ist X kein metrischer Raum, so wird der Beweis formal analog geführt, nur müssen die t-Umgebungen durch allgemeinere Objekte ersetzt werden, was durch eine geeignete uniforme Struktur geschieht. □

Sei $\pi(X)$ die Menge der Komponenten von X und $p\colon X \to \pi(X)$ die Abbildung, die jedem Punkt seine Komponente zuordnet. Es trage $\pi(X)$ die Quotiententopologie und werde *Komponentenraum* genannt.

(1.13) Satz. *Der Komponentenraum eines kompakten Hausdorff-Raumes X ist ein total unzusammenhängender kompakter Hausdorff-Raum.*

Beweis. Sei $F \subset \pi(X)$ eine abgeschlossene Menge, die mehr als einen Punkt enthält. Dann enthält $p^{-1}(F)$ mehrere Komponenten, ist also nicht zusammenhängend und besitzt deshalb eine Zerlegung $p^{-1}(F) = P \cup Q$ in disjunkte, nichtleere, abgeschlossene Mengen P und Q. Ist $x \in P$ und $C(x)$ die Komponente von x, so kann $C(x)$ als zusammenhängende Menge keine Punkte von Q enthalten. Also sind P und Q vollständige Urbilder bei p und $p(P)$, $p(Q)$ nach

Definition der Quotienttopologie in $\pi(X)$ abgeschlossen. Wir haben damit F zerlegt. Also sind alle Komponentenräume total unzusammenhängend.

Es bleibt zu zeigen, daß $\pi(X)$ ein Hausdorff-Raum ist. Seien K und L zwei verschiedene Komponenten von X. Seien $U \supset K$, $V \supset L$ disjunkte offene Umgebungen von K und L. Nach Satz (1.12) gibt es gleichzeitig offene und abgeschlossene Mengen U_0, V_0 von X mit $U \supset U_0 \supset K, V \supset V_0 \supset L$. Es sind U_0 und V_0 Vereinigungen von Komponenten, also sind $p(U_0)$ und $p(V_0)$ offene disjunkte Umgebungen von $p(K)$ und $p(L)$. □

(1.14) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Das *Cantorsche Diskontinuum* C ist der Durchschnitt der kompakten Räume $X_1 \supset X_2 \supset \ldots$, wobei $X_i \subset [0,1] = X_1$ eine endliche disjunkte Vereinigung abgeschlossener Intervalle ist und X_{i+1} aus X_i dadurch hervorgeht, daß aus jedem Intervall von X_i das offene mittlere Drittel herausgenommen wird. Der Raum C ist total unzusammenhängend, kompakt, überabzählbar. Ferner ist C homöomorph zum topologischen Produkt von abzählbar unendlich vielen zweipunktigen diskreten Räumen (hier wird der Satz von Tychonoff gebraucht).

2. Sei $f\colon X \times C \to \mathbb{R}$ stetig, C kompakt. Wir setzen $g(x) = \sup\{f(x,c) \mid c \in C\}$. Dann ist $g\colon X \to \mathbb{R}$ stetig.

3. Sei $\mathbb{R}^\infty$ der Vektorraum aller Folgen $(x_j \mid j \in \mathbb{N})$ reeller Zahlen, die schließlich Null sind, mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation. Sei $\mathbb{R}^n$ der Teilraum der Folgen mit $x_j = 0$ für $j > n$. Trage $\mathbb{R}^\infty$ die Kolimestopologie bezüglich der $\mathbb{R}^n$. Dann sind die Addition $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ und die Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ stetig.

4. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte konvexe Menge mit nichtleerem Inneren. Dann gibt es einen Homöomorphismus $D \to D^n$, der einen Homöomorphismus $\mathrm{Rd}(D) \to S^{n-1}$ induziert.

5. Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn jede stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

6. Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und sei $f\colon X \to X$ eine Mengenabbildung mit $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ für alle $x, y \in X$. Dann ist f ein Homöomorphismus. (Sei $y \notin f(X)$. Betrachte die Folge $y = y_0$, $y_n = f(y_{n-1})$).

7. Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $CA = A \times [0,1]/A \times 1$ der formale Kegel über A. Die Abbildung $f\colon CA \to \mathbb{R}^2$, $(a,t) \mapsto ((1-t)a, t)$ ist injektiv und stetig. Ist A kompakt, so ist f eine Einbettung; ist A ein offenes Intervall, so ist f keine Einbettung.

8. Der Raum D^n/S^{n-1} ist homöomorph zu S^n. Ein Homöomorphismus kann mit Hilfe der stetigen Abbildung $D^n \to S^n$, $x \mapsto (2\sqrt{1-\|y\|^2}\cdot y, \|y\|^2 - 1)$ und (1.7) konstruiert werden.

2 Kompakte metrische Räume

(2.1) Satz. *Sei X ein kompakter metrischer Raum. Sei $\mathcal{A} = (A_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung von X. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für jedes $x \in X$ die Kugel $U_\varepsilon(x)$ in einer Menge A_j enthalten ist.*

Beweis. Zu jedem $x \in X$ werde ein $\varepsilon(x) > 0$ so gewählt, daß $U_{2\varepsilon(x)}(x)$ in einem Glied der Familie $\mathcal{A}$ liegt. Werde X von $W_z = U_{\varepsilon(z)}(z)$, $z \in E \subset X$ endlich, überdeckt. Sei $\varepsilon = \min(\varepsilon(z) \mid z \in E)$. Zu $x \in X$ gibt es $z \in E$ mit $x \in W_z$. Sei $y \in U_\varepsilon(x)$. Dann gilt $d(y,x) \leq d(y,x) + d(x,z) < \varepsilon + \varepsilon(z) \leq 2\varepsilon(z)$. Also ist $U_\varepsilon(x) \subset U_{2\varepsilon(z)}(z)$, und letztere Menge liegt in einem Glied von $\mathcal{A}$. □

Eine Zahl ε mit der im letzten Satz genannten Eigenschaft heißt *Lebesguesche Zahl* der Überdeckung $(A_j \mid j \in J)$.

(2.2) Satz. *Sei X ein kompakter metrischer Raum. Zu jeder Umgebung W der Diagonale D_X von $X \times X$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $U_\delta(D_X) = \{(x,y) \mid d(x,y) < \delta\} \subset W$.*

Beweis. Zu jedem $x \in X$ wählen wir ein $\delta(x) > 0$ mit $U_{2\delta(x)}(x) \times U_{2\delta(x)}(x) \subset W$. Werde X von $W_z = U_{\delta(z)}(z)$, $z \in E \subset X$ endlich, überdeckt, und sei $\delta = \min(\delta(z) \mid z \in E)$. Dann ist $U_\delta(D_X) \subset W$. Sei nämlich $d(x,y) < \delta$. Es gibt $z \in E$ mit $x \in W_z$, also $d(x,z) < \delta(z)$. Es folgt $d(y,x) \leq d(x,y) + d(x,z) < 2\delta(z)$, also $x, y \in U_{2\delta(z)}(z)$ und damit $(x,y) \in W$. □

(2.3) Folgerung. *Eine stetige Abbildung eines kompakten metrischen Raumes X in einen metrischen Raum ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Die Behauptung besagt, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß $(f \times f)^{-1}(U_\varepsilon(D_Y)) \supset U_\delta(D_X)$, und wird nach (2.2) sichergestellt. □

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *relativ kompakt*, wenn ihre abgeschlossene Hülle kompakt ist. Ein metrischer Raum X heißt *präkompakt*, wenn gilt: Zu jedem ε gibt es eine endliche Überdeckung von X durch Mengen mit einem Durchmesser kleiner als ε. Diese Bedingung ist äquivalent zu der folgenden: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $F \subset X$, so daß für jedes $x \in X$ die Ungleichung $d(x,F) < \varepsilon$ besteht.

(2.4) Satz. *Sei X ein metrischer Raum. Folgende Aussagen über $A \subset X$ sind äquivalent:*

(1) *$\overline{A}$ ist kompakt.*
(2) *Jede Folge in A hat einen Häufungspunkt in X.*
(3) *Jede Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$, $a_n \in A$, hat eine in X konvergente Teilfolge.*
(4) *$\overline{A}$ ist präkompakt und vollständig.*

Beweis. Die Implikationen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) haben wir schon gezeigt.
(3) $\Rightarrow$ (4). Sei $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine Folge in $\overline{A}$. Es gibt $b_n \in A$ mit $d(b_n, a_n) < 2^{-n}$. Es gibt eine konvergente Teilfolge der (b_n) mit einem Limes b; und dann hat die entsprechende Teilfolge der (a_n) denselben Limes. Folglich gilt (3) auch für Folgen aus $\overline{A}$. Ist (a_n) eine Cauchy-Folge mit einer gegen a konvergenten Teilfolge, so konvergiert sie selbst schon gegen a. Also ist $\overline{A}$ vollständig.

Falls für $\alpha > 0$ die Menge $\overline{A}$ nicht durch endlich viele Mengen $B(x,\alpha) = \{y \mid d(x,y) \leq \alpha\}$ überdeckt würde, so könnten wir induktiv eine Folge (x_n) mit $d(x_i, x_j) > \alpha$ für alle $i \neq j$ konstruieren, die dann keine konvergente Teilfolge hätte.

(4) $\Rightarrow$ (1). Sei $(U_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung von $\overline{A}$. Wir definieren induktiv eine Folge von Mengen $B(x_n, 2^{-n}) = B_n$: Angenommen, $\overline{A}$ wird von keiner endlichen Teilfamilie der (U_j) überdeckt. Dann gibt es eine endliche Überdeckung durch Mengen $B(x, 1)$ von $\overline{A}$ und folglich ein $B(x_1, 1)$, das ebenfalls nicht durch endlich viele U_j überdeckt wird. Angenommen $B(x_{n-1}, 2^{-(n-1)})$ werde nicht durch endlich viele U_j überdeckt. Wir wählen eine endliche Überdeckung von $\overline{A}$ durch Mengen $B(y_k, 2^{-n})$. Unter den $B(y_k, 2^{-n})$, die $B(x_{n-1}, 2^{-(n-1)})$ schneiden, gibt es eine, etwa $B(x_n, 2^{-n})$, die nicht durch endlich viele U_j überdeckt wird. Für $n \leq p < q$ gilt $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + \ldots + d(x_{q-1}, x_q)$. Da $B_{n-1} \cap B_n \neq \emptyset$ ist, gilt

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$$

und folglich

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{1}{2^{p-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{q-2}} \leq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Also ist (x_p) eine Cauchy-Folge. Diese hat eine konvergente Teilfolge, ist also konvergent, etwa gegen x. Es gibt ein λ, so daß $x \in U_\lambda$. Für ein $\alpha > 0$ ist $B(x, \alpha) \subset U_\lambda$. Es gibt ein n mit

$$d(x, x_n) < \frac{\alpha}{2}, \qquad \frac{1}{2^n} < \frac{\alpha}{2}.$$

Also ist $B(x_n, 2^{-n}) \subset B(x, \alpha) \subset U_\lambda$, im Widerspruch zur Nichtüberdeckbarkeit von $B(x_n, 2^{-n})$ durch endlich viele U_j. $\square$

(2.5) Satz. *Je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

Beweis. Normen N_1 und N_2 heißen *äquivalent*, wenn es positive Konstanten a und b gibt, so daß immer $aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$ gilt. Sei N eine beliebige Norm und $\| - \| = \| - \|_\infty$ die Sup-Norm. Da Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation ist, wie eine kleine Überlegung zeigt, genügt es zu zeigen, daß diese beiden Normen äquivalent sind. Wir schreiben einen Vektor $x = (x_i) = \sum_i x_i e_i$ als Linearkombination der Standardbasis. Die Dreiecksungleichung für N liefert

$$N(x) = N(\sum x_i e_i) \leq \sum |x_i| N(e_i) \leq a\|x\|$$

mit $a = \sum_i N(e_i)$. Die Ungleichung $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq a\|x-y\|$ zeigt, daß $N\colon (\mathbb{R}^n, \| - \|) \to \mathbb{R}$ stetig ist. Die Menge $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ ist kompakt, denn die durch $\| - \|$ induzierte Topologie auf $\mathbb{R}^n$ ist die Produkttopologie und S ist abgeschlossen und beschränkt. Da N stetig ist, hat $N(S)$ ein Minimum b. Es ist $b \neq 0$, da S nicht den Nullvektor enthält. Also gilt für $x \in S$ die Ungleichung $N(x) \geq b\|x\|$, und wegen der Homogenität einer Norm gilt diese Ungleichung dann auch für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Also gilt immer $b\|x\| \leq N(x) \leq a\|x\|$, was definitionsgemäß die Äquivalenz der beiden Normen besagt. $\square$

3 Intervall und Kreis

Die gesamte Topologie gründet wesentlich auf den reellen Zahlen. Die Vervollständigung der rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen kann selbst als ein topologischer Prozeß angesehen werden. Wenn man nicht an der algebraischen Struktur der reellen Zahlen interessiert ist, sondern nur an der topologischen, so gibt es Charakterisierungen, die nur Grundbegriffe der Topologie benutzen, wie etwa den Begriff des Zusammenhangs. Wir charakterisieren das Einheitsintervall und den Einheitskreis auf diese Weise. Die Beweise sind ein Musterbeispiel für eine axiomatische Deduktion. Die Methode geht auf Hilbert zurück und zielt auf eine topologische Begründung der ebenen Geometrie.

Um die Hauptsätze zu formulieren, führen wir den Begriff des Trennpunktes ein. Ein Punkt X eines zusammenhängenden Raumes X heiße *Trennpunkt* von X, wenn $X \setminus x$ nicht zusammenhängend ist. Einen Punkt, der kein Trennpunkt ist, wollen wir in diesem Zusammenhang einen *Endpunkt* von X nennen. Das Vorliegen einer Zerlegung $Y = U \cup V$ eines Raumes Y im Sinne von Abschnitt 9 drücken wir durch das Symbol $Y = U|V$ aus. Wir setzen im folgenden stillschweigend voraus, daß X mehr als einen Punkt enthält.

(3.1) Intervall-Satz. *Ein kompakter metrischer zusammenhängender Raum, dessen sämtliche Punkte, bis auf höchstens zwei, Trennpunkte sind, ist homöomorph zum Einheitsintervall.*

(3.2) Kreis-Satz. *Ein kompakter metrischer zusammenhängender Raum, der durch Entfernen jeder zweipunktigen Teilmenge unzusammenhängend wird, ist homöomorph zum Einheitskreis.*

Die Beweisidee für (3.1) besteht darin, durch Untersuchung zusammenhängender Teilmengen in X eine lineare Anordnung auf X zu definieren. Diese Anordnung wird es erlauben, eine monotone Abbildung von X in das Einheitsintervall $I = [0,1]$ zu definieren, die dann als Homöomorphismus nachgewiesen wird. Die Topologie auf I läßt sich durch die Anordnung (nämlich durch Teilintervalle) definieren. Wir versuchen, für X diese Situation zu imitieren. Insbesondere wird es bedeutsam werden, für X das Axiom der Dedekindschen Schnitte zu verifizieren.

(3.3) Satz. *Sei X ein zusammenhängender Hausdorff-Raum, $x \in X$ ein Trennpunkt und $X \setminus x = U|V$. Unter diesen Voraussetzungen gilt:*

(1) $\overline{U} = U \cup x$, $\overline{V} = V \cup x$. *Insbesondere sind U und V offen in X.*

(2) $\overline{U}$ *und* $\overline{V}$ *sind zusammenhängend.*

(3) *Ist $y \in U$ und $X \setminus y = A|B$, so ist A oder B in U enthalten.*

Beweis. (1) U ist abgeschlossen in $X \setminus x$. Deshalb gilt $U = \overline{U} \cap (X \setminus x) = \overline{U} \setminus x$ und somit $\overline{U} \subset U \cup x$. Wäre $U = \overline{U}$, so wären U und $\overline{V} \cup x$ abgeschlossene Mengen in X, die wegen $U \cap (\overline{V} \cup x) = U \cap \overline{V} \subset U \cap (V \cup x) = \emptyset$ eine Zerlegung von X liefern würden. Als Komplement von $\overline{V}$ ist U offen.

(2) Sei $\overline{U} = A|B$ und etwa $x \in A$. Dann ist $B \cap \overline{V} = B \cap (V \cup x) = B \cap V = \emptyset$ und deshalb $X = B|(A \cup \overline{V})$, denn A und B sind abgeschlossen in $\overline{U}$ und somit

in X.
(3) $\overline{V} = V \cup x$ ist in $X \setminus y$ enthalten, also als zusammenhängende Menge in A oder in B. Ist etwa $V \cup x \subset A$, so folgt $B \subset X \setminus \overline{V} = U$. □

(3.4) Satz. *Sei zusätzlich zu den Voraussetzungen von* (3.3) *X kompakt metrisch. Dann enthalten U und V jeweils mindestens einen Endpunkt von X.*

Beweis. Angenommen, jeder Punkt von U, also auch von $\overline{U} = U \cup x$, sei Trennpunkt von X. Da $\overline{U}$ nach (3.3) ein zusammenhängender kompakter metrischer Raum ist, der mehr als einen Punkt enthält, gibt es in $\overline{U}$ und damit in U eine abzählbar unendliche, dichte Teilmenge. Sei $\{x(1), x(2), \dots\} \subset U$ dicht. Wir zeigen induktiv: Es gibt eine Teilfolge $(x(n_1), x(n_2), \dots)$ und Zerlegungen $X \setminus x(n_r) = U_r|V_r$ mit den folgenden Eigenschaften:

(α) $X \setminus x(n_r) = U_r|V_r$,
(β) n_{r+1} ist die kleinste Zahl der Menge $\{j \in \mathbb{N} \mid x(j) \in U_r\}$,
(γ) $U \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots$.

Es sei $n_1 = 1$ und $X \setminus x(1) = U_1|V_1$, wobei U_1 der nach (3.3.3) in U gelegene Teil ist. Seien $x(j)$, U_j, V_j mit den genannten Eigenschaften für $1 \le j \le t$ gegeben. Dann ist U_t eine nichtleere, nach (3.3.1) offene, Teilmenge von U. Deshalb enthält U_t Punkte der Form $x(n)$. Wir definieren n_{t+1} als kleinste Zahl in $\{j \in \mathbb{N} \mid x(j) \in U_t\}$. Nach Annahme ist $X \setminus x(n_{t+1})$ zerlegbar. Wir wählen eine Zerlegung

$$X \setminus x(n_{t+1}) = U_{t+1}|V_{t+1}, \quad U_{t+1} \subset U_t.$$

Da $x(n_1), \dots, x(n_t) \notin U_{t+1}$, so ist n_{t+1} verschieden von $n_1, \dots, n_t$.

Da $\overline{U} \supset \overline{U_1} \supset \overline{U_2} \supset \dots$ kompakte Mengen sind, ist ihr Schnitt U_∞ nicht leer. Da $\overline{U}_{t+1} = U_{t+1} \cup x(n_{t+1}) \subset U_t$, so haben die $U \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$ denselben Schnitt. Sei $z \in U_\infty \subset U$ und $X \setminus z = A|B$. Nach (3.3) enthält jedes U_m entweder A oder B. Also ist etwa A in unendlich vielen U_m enthalten, also in U_∞. Da A offen ist, können wir einen Punkt $x(i) \in A$ wählen. Sei n_{t+1} die kleinste der Zahlen $n_2, n_3, \dots$, die größer als i ist. Dann ist $x(i) \in A \subset U_t$, im Widerspruch zu (β); und somit ist nicht jeder Punkt von U ein Trennpunkt. Ebenso verfährt man mit V. □

(3.5) Satz. *Erfülle X die Voraussetzungen von* (3.1). *Sei x ein Trennpunkt und $X \setminus x = U|V$. Dann sind U und V zusamenhängend.*

Beweis. Wegen (3.4), und weil es nach Voraussetzung höchstens zwei Endpunkte gibt, hat X genau zwei Endpunkte, etwa $a \in U$ und $b \in V$. Sei $U = A|B$ angesetzt, und sei etwa $a \in A$. Dann ist

$$X \setminus x = B|((X \setminus x) \setminus B),$$

aber B enthält weder a noch b im Widerspruch zu (3.4), jetzt auf diese Zerlegung angewendet. □

Wir sind nun in der Lage, auf X eine totale Ordnung $<$ zu definieren. Wir setzen voraus, daß X die Voraussetzungen von (3.1) erfüllt. Eine *totale Ordnung* ist eine Relation $<$, die den folgenden Axiomen genügt:

(o_1) Für kein x ist $x < x$.

(o_2) Ist $x \neq y$, so gilt $x < y$ oder $y < x$.

(o_3) Ist $x < y$ und $y < z$, so auch $x < z$.

Aus den Axiomen folgt: Die Relationen $x < y$ und $y < x$ bestehen nicht gleichzeitig.

Für $x \in X$ sei $L_x = \emptyset$, falls $x = a$ ist, und andernfalls die a enthaltende Komponente von $X \setminus x$. Analog sei $R_x = \emptyset$, falls $x = b$ ist, und andernfalls die b enthaltende Komponente von $X \setminus x$. Dabei sind a und b weiterhin, wie im Beweis von (3.5), die beiden Endpunkte. Für jedes x haben wir demnach eine disjunkte Vereinigung $X = L_x \cup x \cup R_x$.

Wir setzen nun fest:

(3.6) $$x < y \quad \text{bedeute} \quad L_x \subset L_y,\ L_x \neq L_y.$$

Zur Untersuchung dieser Relation zeigen wir:

(3.7) Hilfssatz. $x < y \Leftrightarrow x \in L_y$.

Beweis. Sei $x \in L_y$. Dann ist $L_x \neq L_y$, da $x \notin L_x$. Es ist $y \neq a$, da $L_a = \emptyset$ aber $x \in L_y$. Ist $y = b$, so ist $L_x \subset X \setminus b = L_y$. Ist schließlich $y \notin \{a, b\}$, so gilt nach (3.3.3) $L_x \subset L_y$ oder $R_x \subset L_y$; und wegen $a \in L_x \cap L_y$ besteht die erste Relation.

Sei $x < y$. Dann ist $y \neq a$, da $L_y \neq \emptyset$. Ist $x = a$, so ist $x \in L_y$ nach Definition von L_y. Sei $x \neq a$. Dann folgt $L_x \cup x = \overline{L}_x \subset \overline{L}_y = L_y \cup y$. Wegen $L_x \neq L_y$ ist $x \neq y$, und folglich ist $x \in L_y$. □

Ebenso schließen wir: $x \in R_y \Leftrightarrow R_x \subset R_y\ R_x \neq R_y$.

(3.8) Satz. *Die Relation $<$ auf X ist eine totale Ordnung.*

Beweis. (o_1) und (o_3) folgen unmittelbar aus der Definition.

(o_2): Sei $x \neq y$. Dann ist $x \in L_y$ oder $x \in R_y$. Ist $x \in L_y$, so gilt $x < y$ nach (3.7). Ist $x \in R_y$, so folgen nacheinander $R_x \subset R_y$; $L_x \cup x \supset L_y \cup y$; $L_x \supset L_y$; $y < x$. □

Die *Ordnungstopologie* auf X hat als Basis die Mengen der Form $U(< q) = \{x \in X \mid x < q\}$ und $U(p <) = \{y \in X \mid p < y\}$. Für $p < q$ sind dann die Mengen $U(p < q) = \{x \in X \mid p < x < q\} = U(p <) \cap U(< q)$ ebenfalls offen. Sie sind auch nicht leer, da andernfalls $L_p \cup p \mid R_q \cup q$ eine Zerlegung von X wäre. Also liegt zwischen je zwei Elementen ein weiteres. Die genannten Mengen sind auch in der ursprünglichen Topologie offen, denn mittels (3.7) folgt

$$U(< q) = L_q,\ \ U(p <) = R_p;$$

und diese Mengen sind nach (3.3) offen.

Die Ordnungstopologie ist hausdorffsch, denn ist $x < y$, so wählen wir ein z mit $x < z < y$. Dann sind L_z und R_z disjunkte offene Umgebungen von x

und y. Die identische Abbildung von X mit der ursprünglichen Topologie in den Raum X mit der Ordnungstopologie ist deshalb stetig und, da X kompakt ist, ein Homöomorphismus.

Sei $E \subset X \setminus \{a, b\}$ eine in X dichte abzählbare Menge. Die auf E induzierte Ordnung hat, wie wir gesehen haben, die Eigenschaft, daß zwischen je zwei Elementen mindestens ein weiteres liegt und daß es keine maximalen oder minimalen Elemente gibt. Es gibt deshalb, wie schon Cantor gezeigt hat, eine bijektive, monoton wachsende Abbildung $f\colon E \to \mathbb{Q} \cap]0,1[$ von E auf die rationalen Zahlen in $]0,1[$. Wir wollen f zu einem Homöomorphismus $X \to [0,1]$ fortsetzen. Dazu zeigen wir, daß (X, E) das Dedekindsche Schnittaxiom erfüllt:

(3.9) Dedekindsche Schnitte. *Sei $A \subset E$ eine Teilmenge ohne größtes Element. Ferner gelte: Ist $x \in A$, $y \in E$ und $y < x$, so gilt $y \in A$. Dann hat die Menge $K = \{s \in X \mid \text{für alle}\, x \in A \,\text{ist}\, x < s\}$ der oberen Schranken von A ein kleinstes Element s_A. Es gilt dann $A = U(< s_A) \cap E$.*

Beweis. Es ist $b \in K$, also $K \neq \emptyset$. Ist $K = X$, so ist a das kleinste Element von K. Die Menge $X \setminus K$ ist offen: Sei $x \in X \setminus K$. Es gibt $y \in A$ mit $x < y$. Die Menge $U(a < y)$ ist dann eine x enthaltende offene Menge in $X \setminus K$. Falls K kein kleinstes Element enthält, so ist ebenfalls K offen und $K|(X \setminus K)$ eine Zerlegung von X. □

Eine Menge $A \subset E$ mit den in (3.9) vorausgesetzten Eigenschaften heiße *Schnitt* von E. Aus (3.9) folgt, daß die Zuordnung $x \mapsto U(< x) \cap E =: A_x$ eine Bijektion von X zur Menge der Schnitte von E ist. Diese Bijektion ist in folgendem Sinne ordnungserhaltend: $x < y \Leftrightarrow A_x \subset A_y$. Wir ordnen jedem Schnitt A von E den Schnitt $f(A)$ von $R = \mathbb{Q} \cap]0,1[$ zu. Die Schnitte von R sind die Mengen $\mathbb{Q} \cap [0,t[$ für $t \in [0,1]$. Die Bijektion der Schnitte von E und R wird durch diese Entsprechungen zu einer bijektiven, monoton wachsenden Abbildung $X \to [0,1]$. Sie ist stetig bezüglich der Ordnungstopologien und wegen der Kompaktheit von X also ein Homöomorphismus. Damit ist Satz (3.1) vollständig bewiesen. □

Beweis von (3.2). Wir beweisen Satz (3.2), indem wir ihn auf (3.1) zurückführen: Der Raum wird als Vereinigung zweier Intervalle (= einfacher Bögen) mit gemeinsamen Endpunkten dargestellt. Die folgenden Nummern (1) bis (5) sind Beweisschritte.

(1) Kein Punkt ist ein Trennpunkt. Wäre nämlich $X \setminus x = U \cup V$ eine Zerlegung, so gäbe es nach (3.4) einen Punkt $y \in U$, der $\overline{U} = U \cup x$ nicht trennt, und einen Punkt $z \in V$, der $V \cup x = \overline{V}$ nicht trennt. Es wäre $X \setminus \{y, z\} = (\overline{U} \setminus y) \cup (\overline{V} \setminus z)$ Vereinigung zweier zusammenhängender Mengen, die x enthalten. Also wäre $X \setminus \{y, x\}$ zusamenhängend, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(2) Sei hier und im folgenden $X \setminus \{a, b\} = U|V$, $a \neq b$. Dann ist $U \cup \{a, b\} = \overline{U}$. Denn $\overline{U} \subset U \cup \{a, b\}$, wie im Beweis von (3.3.1). Es ist $X \setminus a$ nach (1) zusammenhängend und $b \in$ Trennungspunkt dieses Raumes. Also ist nach (3.3.1), angewendet auf $(X \setminus a, b)$ statt auf (X, x), der Punkt b in $\overline{U}$ enthalten, und analog $a \in \overline{U}$.

(3) $U \cup \{a,b\}$ ist zusammenhängend. Sei zunächst eine Zerlegung $U \cup a = A|B$ angenommen, mit $a \in A$. Es ist nach (2) $U \cup a = \overline{U} \setminus b$, also diese Menge in $X \setminus b$ abgeschlossen. Ebenso ist $V \cup a$ in $X \setminus b$ abgeschlossen. Wegen

$$X \setminus b = U \cup a \cup V = B \cup A \cup (V \cup a)$$

ist $X \setminus b = B|(A \cup a \cup V)$, im Widerspruch zu (1).

(4) Da $U \cup a$ zusammenhängend ist, so auch $U \cup \{a,b\} = \overline{U \cup a}$.

(5) Wir zeigen, daß $\overline{U}$ und $\overline{V}$ die Voraussetzungen von (3.1) erfüllen und $\{a,b\}$ die Endpunkte sind. Wir haben schon in (3) gesehen, daß a und b keine Trennpunkte sind. Sei $u \in U$ und $\overline{U} \setminus u$ zusammenhängend. Dann ist für kein $v \in V$ die Menge $\overline{V} \setminus v$ zusamenhängend, denn andernfalls wäre wegen $X \setminus \{u,v\} = \overline{U} \setminus u \cup \overline{V} \setminus v$ und $a \in (\overline{U} \setminus u) \cap (\overline{V} \setminus v)$ der Raum $X \setminus \{u,v\}$ entgegender Voraussetzung zusammenhängend. Nach (3.1) ist also $\overline{V}$ ein einfacher Bogen mit Endpunkten a und b. Deshalb hat für $v \in V$ die Menge $\overline{V} \setminus v$ zwei Komponenten $a \in C_a$ und $b \in C_b$ und folglich ist $C_a \cup (\overline{U} \setminus u) \cup C_b$ zusamenhängend. Diese Menge ist aber $X \setminus \{u,v\}$. Die Annahme, daß $\overline{U} \setminus u$ für ein $u \in U$ zusammenhängend ist, führt also zum Widerspruch. Nach (3.1) ist also $\overline{U}$ ein einfacher Bogen mit Endpunkten a, b; und analog $\overline{V}$. Deshalb ist X als Vereinigung zweier Bögen mit gemeinsamen Endpunkten homöomorph zu S^1. □

4 Konvergenz. Filter

Folgen sind zu klein oder zu kurz, um damit in allgemeinen Räumen eine Grenzwerttheorie aufzubauen. Wir brauchen größere Indexmengen. Das führt zu den Netzen.

Eine *gerichtete Menge* $(I, \leq)$ besteht aus einer Menge I und einer Relation $\leq$ auf I mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $i \leq i$ für alle $i \in I$.

(2) $i \leq j$, $j \leq k$ impliziert $i \leq k$.

(3) Zu $i, j \in I$ gibt es $k \in I$ mit $i \leq k, j \leq k$.

Die Menge $\mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnung $\leq$ ist gerichtet. Die Menge $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungen von x wird durch $U \leq V \Leftrightarrow V \subset U$ gerichtet. Wir schreiben auch $j \geq i$ anstelle von $i \leq j$.

Ein *Netz* (mit Indexmenge I) in einer Menge X ist eine Abbildung $I \to X$, $i \mapsto x_i$ einer gerichteten Menge I nach X, auch $(x_i)_{i \in I}$ oder nur (x_i) geschrieben. Ein Netz (x_i) in einem topologischen Raum X heißt *konvergent* gegen x, in Zeichen $\lim x_i = x$, wenn es zu jeder Umgebung U von x ein $i \in I$ gibt, so daß für $j \geq i$ immer $x_j \in U$ ist. Netze mit der gerichteten Menge $\mathbb{N}$ sind Folgen, und der neue Konvergenzbegriff stimmt in diesem Fall mit dem für Folgen bekannten überein. Wählt man aus jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein Element x_U aus, so konvergiert das Netz (x_U) gegen x. Ein Punkt x heißt *Häufungspunkt* (oder besser: *Häufungswert*) des Netzes $(x_i)_{i \in I}$, wenn zu jeder Umgebung U von x und jedem $i \in I$ ein $j \geq i$ existiert, so daß $x_j \in U$ ist. Seien I und J gerichtete Mengen. Eine Abbildung $h\colon I \to J$ heißt *final*, wenn zu jedem $j \in J$ ein $i \in I$ mit $h(i) \geq j$ existiert. Ein

Teilnetz eines Netzes $(x_j)_{j\in J}$ ist ein Netz der Form $i \mapsto x_{h(i)}$ mit einer finalen Abbildung $h\colon I \to J$. Konvergiert ein Teilnetz von $(x_j)_{j\in J}$ gegen z, so ist z ein Häufungspunkt dieses Netzes. Umgekehrt gibt es zu jedem Häufungspunkt ein Teilnetz, das gegen diesen Punkt konvergiert.

Sei $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in X. Für jedes $j \in J$ sei $F(j)$ die abgeschlossene Hülle von $\{x_k \mid k \geq j\}$. Dann ist $F = \bigcap_{j\in J} F(j)$ die Menge der Häufungspunkte dieses Netzes.

Mit Netzen arbeitet man ähnlich wie mit Folgen, wie die voranstehenden Bemerkungen und die nächsten Sätze zeigen.

(4.1) Satz. *Seien X und Y topologische Räume, sei $A \subset X$ und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:*

(1) *Genau dann ist $x \in \overline{A}$, wenn es ein Netz in A gibt, das gegen x konvergiert. Der Grenzwert eines Netzes in A liegt in $\overline{A}$.*

(2) *Genau dann ist f im Punkt $x \in X$ stetig, wenn für jedes gegen x konvergierende Netz $(x_i)_{i\in I}$ das Netz $(f(x_i))_{i\in I}$ gegen $f(x)$ konvergiert.*

Beweis. (1) Sei $x \in \overline{A}$. Zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ wählen wir ein $x_U \in U \cap A$. Dann ist (x_U) ein gegen x konvergierendes Netz in A.

Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein gegen x konvergierendes Netz in A; sei U eine Umgebung von x. Dann gibt es ein x_i in U, das heißt $U \cap A \neq \emptyset$. Also ist x Berührpunkt von A.
(2) Sei f im Punkt x stetig und (x_i) ein gegen x konvergierendes Netz. Ist V eine Umgebung von $f(x)$ und x_j für alle $j \geq i$ in $f^{-1}(V)$ gelegen, so liegt $f(x_j)$ für $j \geq i$ in V. Also konvergiert $(f(x_i))$ gegen $f(x)$.

Sei die Konvergenzbedingung für f erfüllt. Falls f im Punkt x nicht stetig ist, gibt es eine Umgebung V von $f(x)$, so daß keine Umgebung U von x bei f nach V abgebildet wird. Wir wählen dann $x_U \in U$ mit $f(x_U) \notin V$. Das Netz (x_U) konvergiert gegen x. Dagegen konvergiert $(f(x_U))$ nicht gegen $f(x)$. □

(4.2) Satz. *Ein Raum X ist genau dann kompakt, wenn jedes Netz in X ein konvergentes Teilnetz (äquivalent: einen Häufungspunkt) hat.*

Beweis. Sei X kompakt und $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in X. Wir bilden die Menge F wie eben erläuert. Sie ist nicht leer, da sonst wegen der Kompaktheit schon ein endlicher Schnitt der $F(j)$ leer wäre, was nicht sein kann. Also gibt es Häufungspunkte.

Habe umgekehrt jedes Netz ein konvergentes Teilnetz. Sei $(C_j \mid j \in J)$ eine Familie abgeschlossener Mengen, so daß jede endliche Teilfamilie nichtleeren Schnitt hat. Wir betrachten die Familie der endlichen Schnitte $(C_E \mid E \subset J$ endlich), wobei $C_E = \bigcap_{e\in E} C_e$ ist. Die Indexmenge ist gerichtet durch $E \geq E' \Leftrightarrow C_E \subset C_{E'}$. Wir wählen $x_E \in C_E$. Wir wählen ein gegen z konvergentes Teilnetz, das wir der Einfachheit halber wieder durch (x_E) bezeichnen. Für jede Umgebung U von z und jedes E ist dann $C_E \cap U \neq \emptyset$, also $z \in C_E$, da C_E abgeschlossen ist. Wir schließen auf $z \in \bigcap C_E \neq \emptyset$. Also haben alle Familien $(C_j \mid j \in J)$ der genannten Art einen nichtleeren Schnitt, was äquivalent zur Kompaktheit von X ist. □

Für die Konvergenztheorie sind die gerichteten Mengen $\mathcal{U}(x)$ entscheidend. Statt nun aus allen Umgebungen einen Punkt auszuwählen, kann man gleich mit den $\mathcal{U}(x)$ arbeiten. Das führt zur nächsten Definition.

Ein *Filter* $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist eine Menge von Teilmengen mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$.

(2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

(3) $F \in \mathcal{F}, G \supset F \Rightarrow G \in \mathcal{F}$.

Eine Teilmenge $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ heißt *Basis* des Filters $\mathcal{F}$, wenn jedes Element aus $\mathcal{F}$ ein Element aus $\mathcal{F}_0$ enthält. Sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ Filter und gilt $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$, so heißt $\mathcal{F}_1$ *feiner* als $\mathcal{F}_2$ und $\mathcal{F}_2$ *gröber* als $\mathcal{F}_1$. Ein Filter, der keinen echt feineren besitzt, heißt *Ultrafilter*.

Ein nichtleeres System $\mathcal{B}$ von nichtleeren Teilmengen von X ist genau dann Basis eines Filters, wenn zu jedem Paar $B, C \in \mathcal{B}$ ein $D \in \mathcal{B}$ mit $D \subset B \cap C$ existiert. Der zugehörige Filter besteht aus allen Obermengen der Mengen aus $\mathcal{B}$.

Die Menge $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungen von x bildet den *Umgebungsfilter* von x.

(4.3) Satz. *Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.*

Beweis. Die Menge aller Filter, die feiner als ein Filter $\mathcal{F}$ sind, ist durch die Inklusionsrelation geordnet. Die Vereinigung einer linear geordneten Teilmenge von Filtern darin ist ein Filter. Also hat die Menge nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element, und das ist ein Ultrafilter, der $\mathcal{F}$ enthält. □

(4.4) Satz. *Ein Filter $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jedes $A \subset X$ entweder A oder $X \setminus A$ in $\mathcal{F}$ liegt.*

Beweis. Liege immer A oder $X \setminus A$ in $\mathcal{F}$ und sei $\mathcal{G}$ ein Filter, der echt feiner als $\mathcal{F}$ ist. Ist $G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, so ist nach Voraussetzung $X \setminus G \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Da G und $X \setminus G$ nicht zugleich Elemente eines Filters sind, ergibt sich ein Widerspruch.

Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und $A \subset X$. Angenommen, $F \cap A \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Dann ist $\{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$ eine Basis für einen Filter, der feiner als $\mathcal{F}$ ist und A enthält. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, liegt also A in $\mathcal{F}$. Analog, falls $(X \setminus A) \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Tritt keiner dieser Fälle ein, so gibt es $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ mit $F_1 \cap A = \emptyset$ und $F_2 \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Dann ist aber $F_1 \cap F_2 \subset (X \setminus A) \cap A = \emptyset$ im Widerspruch zur Filterdefinition. □

(4.5) Satz. *Die Mengen eines Ultrafilters haben genau dann einen nichtleeren Durchschnitt, wenn sie die Obermengen eines Punktes sind.*

Beweis. Nach dem vorigen Satz bilden die Obermengen eines Punktes einen Ultrafilter. Liegt ein Punkt in allen Mengen eines Filters, so bilden seine Obermengen einen feineren Filter. □

Die Filter verallgemeinern die Umgebungsfilter. Sie dienen im folgenden zum Aufbau der Grenzwerttheorie.

Ein Filter auf einem topologischen Raum *konvergiert* gegen einen Punkt des Raumes, wenn er feiner als der Umgebungsfilter dieses Punktes ist. Jeder feinere Filter konvergiert dann ebenfalls gegen diesen Punkt. Ein solcher Punkt heißt *Limespunkt* oder *Konvergenzpunkt* des Filters. Ein Punkt heißt *Berührpunkt* des Filters, wenn jede Umgebung des Punktes jede Filtermenge schneidet. Die Menge der Berührpunkte eines Filters ist also der Schnitt der abgeschlossenen Hüllen der Filtermengen. Ist $\mathcal{G}$ feiner als $\mathcal{F}$, so ist jeder Berührpunkt von $\mathcal{G}$ auch einer von $\mathcal{F}$. Ein Konvergenzpunkt eines Filters ist auch ein Berührpunkt.

(4.6) Satz. *Ein Punkt eines Raumes ist genau dann ein Berührpunkt eines Filters, wenn es einen feineren Filter gibt, der gegen diesen Punkt konvergiert.*

Beweis. Ist x Berührpunkt des Filters $\mathcal{F}$, so ist $\{U \cap F \mid U \in \mathcal{U}(x), F \in \mathcal{F}\}$ Basis eines gegen x konvergierenden Filters. Konvergiert ein feinerer Filter, so ist der Konvergenzpunkt Berührpunkt des gröberen. □

Ist $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, so ist $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ Basis eines Filters $f(\mathcal{F})$ auf Y, des *Bildfilters* von $\mathcal{F}$ bei f.

(4.7) Notiz. *Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann ist $f(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter auf Y.*

Beweis. Wir benutzen (4.4). Sei $B \subset Y$. Es liegt $f^{-1}(B)$ oder $X \setminus f^{-1}(B)$ in $\mathcal{F}$. Im ersten Fall ist $f(f^{-1}(B)) \subset B$ und damit $B \in f(\mathcal{F})$. Im zweiten Fall ist $Y \setminus B \in f(\mathcal{F})$. □

(4.8) Satz. *Ein Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig im Punkt x, wenn der Bildfilter jedes gegen x konvergierenden Filters gegen $f(x)$ konvergiert.*

Beweis. Sei f stetig und konvergiere $\mathcal{F}$ gegen x. Zu jeder Umgebung V von $f(x)$ gibt es eine Umgebung U von x, die bei f nach V abgebildet wird. Da $\mathcal{F}$ gegen x konvergiert, gehört U zu $\mathcal{F}$ und deshalb V als Obermenge von $f(U)$ zu $f(\mathcal{F})$. Also ist $f(\mathcal{F})$ feiner als $\mathcal{U}(f(x))$ und konvergiert damit gegen $f(x)$.

Sei $\mathcal{F} = \mathcal{U}(x)$. Jede Umgebung V von $f(x)$ gehört zu $f(\mathcal{F})$, wenn $f(\mathcal{F})$ gegen $f(x)$ konvergiert. Es gibt dann also eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$, da diese $f(U)$ eine Filterbasis von $f(\mathcal{F})$ bilden. □

(4.9) Satz. *Sei X eine Menge, $(X_i \mid i \in I)$ eine Familie topologischer Räume und $(f_i\colon X \to X_i \mid i \in I)$ eine Familie von Abbildungen. Trage X die gröbste Topologie, die alle f_i stetig macht (Initialtopologie). Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn für jedes $i \in I$ der Bildfilter $f_i(\mathcal{F})$ gegen $f_i(x)$ konvergiert.*

Beweis. Das System aller Mengen der Form $\bigcap_{k \in K} f_k^{-1}(U_k)$, $K \subset I$ endlich, $U_k \in \mathcal{U}(f_k(x))$ ist eine Umgebungsbasis von x in der Initialtopologie. Konvergieren alle $f_i(\mathcal{F})$, so gibt es zu $U_k \in \mathcal{U}(f_k(x))$ ein $F_k \in \mathcal{F}$ mit $f_k(F_k) \subset U_k$. Dann ist $F = \bigcap_{k \in K} F_k \in \mathcal{F}$ und F in der Basismenge $\bigcap_{k \in K} f_k^{-1}(F_k)(U_k)$ von $\mathcal{U}(x)$ enthalten.

Die umgekehrte Richtung folgt aus dem vorigen Satz. □

Der vorstehende Satz läßt sich insbesondere auf ein Produkt und die zugehörigen Projektionen auf die Faktoren anwenden.

(4.10) Satz. *Folgende Aussagen über einen topologischen Raum X sind äquivalent:*
(1) *X ist kompakt.*
(2) *Jeder Filter auf X hat einen Berührpunkt.*
(3) *Jeder Ultrafilter auf X ist konvergent.*

Beweis. (1) ⇒ (2). Habe der Filter $\mathcal{F}$ keinen Berührpunkt. Dann ist der Schnitt aller $\overline{F}$, $F \in \mathcal{F}$ leer, und folglich ist ein Schnitt von endlich vielen Filtermengen leer, da X kompakt ist. Das widerspricht der Definition eines Filters.
(2) ⇒ (3). Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter. Er hat einen Berührpunkt. Es gibt einen feineren Filter, der konvergiert, aber $\mathcal{U}$ hat keine feineren Filter.
(3) ⇒ (1). Sei $(U_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. Für jede endliche Menge $L \subset J$ ist dann $A_L = X \setminus \bigcup_{j\in L} U_j = \bigcap_{j\in L}(X \setminus U_j)$ nichtleer und folglich das System der A_L die Basis eines Filters, der dann in einem etwa gegen x konvergierenden Ultrafilter $\mathcal{U}$ liegt. Der Punkt x liegt in einer Menge U_i, und wegen der Konvergenz von $\mathcal{U}$ gegen x ist $U_i \in \mathcal{U}$. Nach Konstruktion liegt auch $X \setminus U_i$ in $\mathcal{U}$. Widerspruch. □

Ein wichtiger Satz der allgemeinen Topologie ist der folgende *Satz von Tychonoff*:

(4.11) Satz. *Jedes topologische Produkt X kompakter Räume X_i ist kompakt.*

Beweis. Seien die X_i kompakt und $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Der Bildfilter $\mathrm{pr}_i(\mathcal{F})$ auf X_i ist dann ein Ultrafilter. Da X_i kompakt ist, konvergiert nach dem vorigen Satz $\mathrm{pr}_i(\mathcal{F})$ gegen ein x_i und nach Satz (4.9) konvergiert $\mathcal{F}$ gegen (x_i). □

5 Lokal kompakte Räume

Ein Raum X heißt *lokal kompakt*, wenn jede Umgebung eines Punktes x eine kompakte Umgebung von x enthält. Eine offene Teilmenge eines lokal kompakten Raumes ist wieder lokal kompakt.

Ist X Hausdorff-Raum, so ist X lokal kompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Sei nämlich U eine Umgebung von x und K eine kompakte Umgebung. Da K normal ist, enthält $K \cap U$ eine abgeschlossene Umgebung L von x in K. Dann ist aber L kompakt und eine Umgebung von x in X. Also ist X lokal kompakt. Insbesondere ist ein kompakter Hausdorff-Raum lokal kompakt.

Sei X ein topologischer Raum. Eine Einbettung $f\colon X \to Y$ heißt *Kompaktifizierung* von X, wenn Y kompakt ist und $f(X)$ dicht in Y. Die durch den folgenden Satz gekennzeichnete Kompaktifizierung heißt *Alexandroff-Kompaktifizierung* oder *Einpunktkompaktifizierung*; der hinzugefügte Punkt wird *unendlich ferner*

Punkt genannt. Der Sinn einer Kompaktifizierung allgemein besteht darin, den Raum durch ideale unendlich ferne Punkte zu ergänzen.

(5.1) Satz. *Ein lokal kompakter Hausdorff-Raum X besitzt bis auf Homöomorphie genau eine Kompaktifizierung $f\colon X \to Y$ durch einen kompakten Hausdorff-Raum Y, so daß $Y \setminus f(X)$ aus einem Punkt besteht.*

Beweis. Wir betrachten die Menge $Y = X \cup \{\infty\}$. Wir definieren eine Topologie auf Y durch die Festsetzung: Offene Mengen seien die offenen Mengen von X und die Mengen der Form $Y \setminus K$ mit in X kompaktem K. Man verifiziert, daß dadurch eine Topologie auf Y definiert wird, die auf X die ursprüngliche induziert. Zwei Punkte aus X lassen sich weiterhin durch offene Umgebungen trennen; ist $x \in X$ und ist K eine kompakte Umgebung von x, so sind K und $Y \setminus K$ disjunkte Umgebungen von x und ∞. Die Kompaktheit von Y folgt, weil jede offene Überdeckung eine Menge der Form $Y \setminus K$ mit kompaktem K enthält. Die Eindeutigkeit folgt so: Sei $Y' = X \cup \{\infty'\}$ ein weiterer Raum mit den genannten Eigenschaften. Sei $F\colon Y \to Y'$ die Abbildung, die auf X die Identität ist und ∞ auf ∞' wirft. Dann ist F bijektiv und in jedem Punkt von X stetig. Das Komplement jeder offenen Umgebung von ∞' ist als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Hausdorff-Raumes Y' kompakt. Folglich ist die Urbildmenge dieser Umgebung bei F offen und damit F auch im Punkt ∞ stetig. Nach (1.7) ist F ein Homöomorphismus. □

(5.2) Notiz. *Folgende Aussagen über einen lokal kompakten Hausdorff-Raum sind äquivalent:*

(1) *In der Einpunktkompaktifizierung hat ∞ eine abzählbare Umgebungsbasis.*
(2) *Der Raum ist Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen.* □

Räume mit der in der letzten Notiz genannten Eigenschaft lassen sich in nützlicher Weise durch genügend große kompakte Teile ausschöpfen, wie der nächste Satz belegt. Hat ein lokal kompakter Raum X eine abzählbare Basis, so ist er eine Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen; sind nämlich K_x, $x \in X$, kompakte Umgebungen von x, so wählen wir eine offene Umgebung $U_x \subset K_x$ aus der Basis, und davon überdecken abzählbar viele.

(5.3) Satz. *Sei der lokal kompakte Raum X Vereinigung kompakter Mengen K_i, $i \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Folge $(U_i \mid i \in \mathbb{N})$ offener Mengen U_i mit den nachstehenden Eigenschaften:*

(1) *Für alle i ist $\overline{U}_i$ kompakt.*
(2) *Für alle i ist $\overline{U}_i \subset U_{i+1}$.*
(3) *$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$.*

Beweis. Ist K eine kompakte Teilmenge von X, so gibt es eine kompakte Menge L, die K im Innern enthält; zum Beweis wählen wir zu jedem Punkt $x \in K$ eine kompakte Umgebung $K(x)$, von denen dann endlich viele $K(x_1), \dots, K(x_n)$ die Menge K überdecken und deren Vereinigung L die gewünschte Eigenschaft hat. Wir nennen solche L eine Verdickung von K. Sei U_1 das Innere einer Verdickung von K_1. Induktiv sei U_{n+1} das Innere einer Verdickung von $\overline{U}_n \cup K_{n+1}$. Eine derartige Folge hat die gewünschten Eigenschaften. □

(5.4) Satz. *Der lokal kompakte Hausdorff-Raum M sei abzählbare Vereinigung abgeschlossener Teilmengen M_n, $n \in \mathbb{N}$. Dann enthält mindestens eine der Mengen M_n innere Punkte.*

BEWEIS. Angenommen, die Behauptung stimmt nicht. Da M lokal kompakt ist, gibt es eine kompakte Teilmenge K mit nichtleerem Inneren $K^\circ = V$. Es gibt einen Punkt $v_1 \in V \setminus M_1$, denn andernfalls enthielte M_1 innere Punkte. Es ist $V \setminus M_1$ offen. Also gibt es eine kompakte Umgebung K_1 von v_1 mit $K_1 \subset V \setminus M_1$. Es gibt einen Punkt $v_2 \in K_1^\circ \setminus M_2$ und eine kompakte Umgebung $K_2 \subset K_1^\circ \setminus M_2$ von v_2. Auf diese Weise erhält man induktiv kompakte Mengen $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots$, so daß $K_n \cap M_j = \emptyset$ für $j \leq n$. Die Mengen K_i sind in dem kompakten Raum K abgeschlossen, also ist $\bigcap_{i=1}^\infty K_i \neq \emptyset$. Ein Punkt im Durchschnitt trifft kein M_j, im Widerspruch zu $M = \bigcup M_j$. □

(5.5) Satz. *Sei $f\colon A \to B$ eine Identifizierung und C lokal kompakt. Dann ist auch* $\mathrm{id} \times f\colon C \times A \to C \times B$ *eine Identifizierung.*

BEWEIS. Sei $U \subset C \times B$ und $V = (\mathrm{id} \times f)^{-1}(U)$ offen. Wir haben zu zeigen, daß U offen ist. Sei $(c, b) \in U$, sei $a \in V$ und $f(a) = b$. Da C lokal kompakt ist, enthält jede Umgebung von c ein kompakte Umgebung. Also hat c eine kompakte Umgebung K mit $K \times a \subset V$. Die Menge

$$W = \{x \in A \mid K \times x \subset V\} = \{x \in A \mid K \times f(x) \subset U\}$$

ist nach (1.4) offen in A. Es gilt $f^{-1}f(W) = W$, und deshalb ist nach Definition der Quotienttopologie $f(W)$ offen in B. Also enthält U die Umgebung $K \times f(W)$ von (c, b). □

Im allgemeinen ist das Produkt zweier Identifizierungen keine Identifizierung; siehe dazu IV.2

(5.6) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ ist S^n.

2. Mannigfaltigkeiten haben die in (5.2) genannte Eigenschaft.

6 Eigentliche Abbildungen

Mit dem Begriff der eigentlichen Abbildung wird die Kompaktheit für Abbildungen ausgenutzt. Dabei wird die Kompaktheit durch eine Eigenschaft beschrieben, die keine Überdeckungen benutzt (6.3). In den Beweisen verwenden wir ein Lemma über abgeschlossene Abbildungen.

(6.1) Lemma. *Eine Mengenabbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Zu jeder Umgebung U von $f^{-1}(y)$ gibt es eine Umgebung V von y mit $f^{-1}(V) \subset U$.*

Beweis. Sei f abgeschlossen und U offene Umgebung von $f^{-1}(y)$. Dann ist $X \backslash U$ abgeschlossen und folglich auch $f(X \backslash U)$. Die offene Umgebung $V = Y \backslash f(X \backslash U)$ hat die gewünschte Eigenschaft.

Sei die genannte Bedingung erfüllt und C in X abgeschlossen. Sei $y \in Y \backslash f(C)$. Dann liegt $f^{-1}(y)$ in der offenen Menge $U = X \setminus C$. Es gibt also eine offene Umgebung V von y mit $Y \subset Y \setminus f(C)$. Demnach ist $Y \setminus f(C)$ offen und also $f(C)$ abgeschlossen. □

(6.2) Satz. *Die folgenden Aussagen über eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ sind äquivalent:*

(1) *f ist abgeschlossen und alle Urbilder $f^{-1}(y)$, $y \in Y$ sind kompakt.*

(2) *Für jeden Raum T ist $f \times \mathrm{id}\colon X \times T \to Y \times T$ abgeschlossen.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Sei W eine offene Umgebung von $f^{-1}(y) \times \{t\}$ in $X \times T$. Da $f^{-1}(y)$ kompakt ist, gibt es Umgebungen U von $f^{-1}(y)$ und V von t, so daß $U \times V \subset W$ ist. Da f abgeschlossen ist, gibt es nach (6.1) eine Umgebung N von y mit $f^{-1}(N) \subset U$. Es ist $N \times V$ eine Umgebung von (y, t), und es gilt

$$(f \times \mathrm{id})^{-1}(N \times V) \subset f^{-1}(N) \times V \subset U \times V \subset W.$$

Das Lemma wiederum sagt nun, daß f abgeschlossen ist.

(2) $\Rightarrow$ (1). Indem wir T als Punktraum ansetzen, sehen wir, daß f abgeschlossen ist. Aus der Voraussetzung (2) folgt, daß für jedes $y \in Y$ auch $\mathrm{pr}\colon f^{-1}(y) \times T \to T$ abgeschlossen ist, weil allgemein mit $f\colon X \to Y$ auch $f\colon f^{-1}(B) \to B$ abgeschlossen ist. Demnach bleibt der folgende Satz zu zeigen. □

(6.3) Satz. *Sei für alle T die Projektion $X \times T \to T$ abgeschlossen. Dann ist X kompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{W}$ eine Menge offener Mengen, die X überdecken. Sei $\mathcal{U}$ die Menge aller endlichen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{W}$. Wie müsen also $X \in \mathcal{U}$ zeigen.

Angenommen, das sei nicht der Fall. Wir konstruieren einen Hilfsraum $X' = X + \{*\}$. Diese Menge wird mit einer Topologie versehen, die eine Basis $\mathcal{B}$ aus den folgen Mengen besitzt:

(1) $X' \setminus U$, $U \in \mathcal{U}$.

(2) $W \cap (X \setminus U)$, $U \in \mathcal{U}$, $W \subset X$ offen.

Das ist eine Basis einer Topologie, weil der Schnitt zweier derartiger Mengen wieder eine Menge dieser Form ist. Sei $D = \{(x, x) \mid X\} \subset X \times X'$ und C die abgeschlossene Hülle von D in $X \times X'$. Wegen der Stetigkeit von $\mathrm{pr}\colon X \times X' \to X'$ ist $\mathrm{pr}(C) = \mathrm{pr}(\overline{D}) \subset \overline{\mathrm{pr}(D)}$. Wegen der vorausgesetzten Abgeschlossenheit von pr ist $\mathrm{pr}(\overline{D})$ abgeschlossen, also $\mathrm{pr}(\overline{D}) \supset \overline{\mathrm{pr}(D)}$. Insgesamt ist also $\mathrm{pr}(C) = \overline{X}$.

Die Menge X ist in X' nicht abgeschlossen. Wäre das nämlich der Fall, so wäre $X' \setminus X = \{*\}$ offen, also Vereinigung von Mengen der Form (1) und (2), was wegen der Annahme $X \neq U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ nicht der Fall ist. Wegen $\mathrm{pr}(C) = \overline{X} \neq X$ gibt es also ein $x \in X$ mit $(x, *) \in C$. Wir zeigen, daß dieser Punkt x in keiner Menge $U \in \mathcal{U}$ liegt, im Widerspruch dazu, daß $\mathcal{U}$ eine Überdeckung ist. Angenommen $x \in U$. Dann ist $U \times (X' \backslash U)$ eine Umgebung von $(x, *)$ in $X \times X'$.

Wegen $C = \overline{D} \ni (x,*)$ trifft diese Umgebung D, und das hieße $U \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Widerspruch. $\square$

Wir nennen eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ *eigentlich*, wenn sie eine der Eigenschaften (1) oder (2) aus (6.2) hat. Die drei folgenden Sätze verifiziert man recht unmittelbar mit dieser Definition.

(6.4) Satz. *Seien $f\colon X \to X'$ und $g\colon X' \to X''$ stetig. Dann gilt:*
(1) *Sind f und g eigentlich, so ist $g \circ f$ eigentlich.*
(2) *Ist $g \circ f$ eigentlich und f surjektiv, so ist g eigentlich.*
(3) *Ist $g \circ f$ eigentlich und g injektiv, so ist f eigentlich.* $\square$

(6.5) Satz. *Sei $f\colon X \to Y$ stetig und injektiv. Dann sind äquivalent:*
(1) *f ist eigentlich.*
(2) *f ist abgeschlossen.*
(3) *f ist ein Homöomorphismus auf einen abgeschlossenen Unterraum.* $\square$

(6.6) Satz. (1) *Sei $f\colon X \to Y$ stetig. Ist f eigentlich, so ist für jedes $B \subset Y$ die Einschränkung $f = f_B\colon f^{-1}(B) \to B$ eigentlich.*
(2) *Sei $(U_j \mid j \in J)$ eine Überdeckung von Y, so daß die kanonische Abbildung $p\colon \coprod_{j\in J} U_j \to Y$ eine Identifizierung ist. Ist jede Einschränkung $f_j\colon f^{-1}(U_j) \to U_j$ eigentlich, so auch f.* $\square$

(6.7) Satz. *Ist $f\colon X \to Y$ eigentlich und $K \subset Y$ kompakt, so ist $f^{-1}(K)$ kompakt.*

Beweis. Nach (6.6) ist $f\colon f^{-1}(K) \to K$ eigentlich und nach (6.2) $K \to P$ für einen Punkt P. Nach (6.4) ist $f^{-1}(K) \to P$ eigentlich und nach (6.2) also $f^{-1}(K)$ kompakt.

Ein direkter Beweis kann so geführt werden. Sei $(U_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung von $f^{-1}(K)$. Für jedes $c \in K$ gibt es ein endliches $J_c \subset J$, so daß $f^{-1}(c)$ in der Vereinigung U_c der U_j, $j \in J_c$, enthalten ist. Die Menge $V_c = Y \setminus f(X \setminus U_c)$ ist offen, da f abgeschlossen ist. Es ist $c \in V_c$, $f^{-1}(V_c) \subset U_c$, und K wird von endlich vielen V_c, etwa $V_{c(1)}, \dots, V_{c(n)}$ überdeckt. Es folgt, daß $f^{-1}(K)$ in $U_{c(1)} \cup \ldots \cup U_{c(n)}$ enthalten ist. $\square$

(6.8) Satz. *Sei f eine stetige Abbildung eines Hausdorff-Raumes X in einen lokal kompakten Hausdorff-Raum Y. Dann ist f genau dann eigentlich, wenn für jede kompakte Menge $K \subset Y$ das Urbild kompakt ist. Ist f eigentlich, so ist X lokal kompakt.*

Beweis. Ist f eigentlich so wissen wir nach (6.7), daß Urbilder kompakter Mengen kompakt sind. Sei umgekehrt (U_j) eine Überdeckung von Y durch relativ kompakte offene Mengen. Dann ist $f^{-1}(\overline{U}_j)$ kompakt und f eingeschränkt auf diese Menge eigentlich, denn eine stetige Abbildung eines kompakten Hausdorff-Raumes in einen Hausdorff-Raum ist eigentlich. Nach (6.6) ist f eigentlich. $\square$

(6.9) Satz. *Folgende Aussagen über eine stetige Abbildung sind äquivalent:*
(1) *f ist eigentlich.*

(2) *Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und y ein Berührpunkt von $f(\mathcal{F})$, so gibt es einen Berührpunkt x von $\mathcal{F}$ mit $f(x) = y$.*
(3) *Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X und konvergiert $f(\mathcal{F})$ gegen y, so gibt es einen Konvergenzpunkt x von $\mathcal{F}$ mit $f(x) = y$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Sei $M \in \mathcal{F}$. Da f abgeschlossen ist, gilt $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$. Als Berührpunkt von $f(\mathcal{F})$ ist y in allen $f(\overline{M})$ enthalten, also $\overline{M} \cap f^{-1}(y)$ nichtleer. Da $f^{-1}(y)$ kompakt ist, gibt es ein $x \in f^{-1}(y)$, das in allen $\overline{M}, M \in \mathcal{F}$ enthalten ist. Letzteres bedeutet, daß x Berührpunkt von $\mathcal{F}$ ist.

(2) $\Rightarrow$ (3) ist klar.

(3) $\Rightarrow$ (1). Wir zeigen zunächst, daß f abgeschlossen ist. Sei $\emptyset \neq A \subset X$ abgeschlossen. Sei $\mathcal{F}$ der Filter aller Mengen, die A enthalten. Dann ist A die Menge der Berührpunkte von $\mathcal{F}$. Sei B die Menge der Berührpunkte von $f(\mathcal{F})$. Dann ist B abgeschlossen und enthält $f(A)$. Wir zeigen $B = f(A)$.

Sei $y \in B$. Jede Umgebung V von y trifft jedes $f(\mathcal{F})$, also ist $f^{-1}(V) \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \supset A$. Demnach bilden die $f^{-1}(V) \cap F$ eine Filterbasis. Sei $\mathcal{U}$ ein feinerer Ultrafilter. Der Ultrafilter $f(\mathcal{U})$ ist feiner als $\mathcal{U}(y)$, konvergiert also gegen y. Nach (3) gibt es einen Konvergenzpunkt x von $\mathcal{U}$ mit $f(x) = y$. Da $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$, ist x Berührpunkt von $\mathcal{F}$, liegt also in A, und demnach liegt y in $f(A)$. Man beendet den Beweis der Eigentlichkeit von f mit dem folgendem Satz, aus dem nämlich folgt, daß mit f auch jedes Produkt $f \times \mathrm{id}(Z)$ abgeschlossen ist. □

(6.10) Satz. *Gilt die Bedingung* (3) *des vorigen Satzes für alle stetigen Abbildungen $f_i \colon X_i \to Y_i$, so auch für das Produkt $f = \prod_i f_i$.*

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf $\prod_i X_i$ und $y = (y_i) \in \prod_i Y_i$ ein Konvergenzpunkt von $f(\mathcal{U})$. Nach (4.9) konvergiert dann $\mathrm{pr}_i(f(\mathcal{U})) = f_i(\mathrm{pr}_i(\mathcal{U}))$ gegen y_i. Nach der Bedingung (3) gibt es dann für jedes i ein $x_i \in X_i$, so daß $f_i(x_i) = y_i$ und $\mathrm{pr}_i(\mathcal{U})$ gegen x_i konvergiert. Dann konvergiert aber nach (4.9) $\mathcal{U}$ gegen $x = (x_i)$, und es gilt $f(x) = y$. □

(6.11) Folgerung. *Ein Produkt eigentlicher Abbildungen ist eigentlich.* □

(6.12) Satz. *Seien $f \colon X \to X'$ und $g \colon X' \to X''$ stetig und sei gf eigentlich. Ist X' ein Hausdorff-Raum, so ist f eigentlich.*

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(\mathrm{id}, f)"] \arrow[d, "f"] & X \times X' \arrow[d, "gf \times \mathrm{id}"] \\ X' \arrow[r, "(g, \mathrm{id})"] & X'' \times X'. \end{tikzcd}$$

Die waagerechten Abbildungen sind Homöomorphismen auf den Graphen von f beziehungsweise auf den vertauschten Graphen von g. Da X' hausdorffsch ist, so ist der Graph von f abgeschlossen und folglich (id, f) nach (6.5) eigentlich. Nach (6.11) ist $gf \times \mathrm{id}$ eigentlich. Wegen der Kommutativität ist dann $(g, \mathrm{id}) \circ f$ eigentlich, und weil (g, id) injektiv ist, so ist f nach (6.4) eigentlich. □

(6.13) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Seien X und Y lokal kompakte Hausdorff-Räume, sei $f: X \to Y$ stetig und sei $f^+: X^+ \to Y^+$ die Erweiterung auf die Einpunkt-Kompaktifizierungen. Genau dann ist f^+ stetig, wenn f eigentlich ist.

2. Sei $f: X \to Y$ eigentlich und $(x_i \mid i \in I)$ ein Netz in X, so daß $(f(x_i) \mid i \in I)$ gegen y konvergiert. Dann gibt es ein Teilnetz, das gegen einen Punkt $x \in f^{-1}(y)$ konvergiert.

3. Die Einschränkung einer eigentlichen Abbildung auf eine abgeschlossene Teilmenge ist eigentlich.

4. Sei $f: X \to Y$ eigentlich und X hausdorffsch. Dann ist der Unterraum $f(X)$ von Y hausdorffsch.

5. Sei $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei R die durch f auf X gegebene Äquivalenzrelation, $p: X \to X/R$ die Quotientabbildung, $h: X/R \to f(X)$ die kanonische Bijektion und $i: f(X) \subset Y$. Dann ist also $f = i \circ h \circ p$ die kanonische Zerlegung von f. Genau dann ist f eigentlich, wenn p eigentlich, h ein Homöomorphismus und $f(X) \subset Y$ abgeschlossen ist.

3 Reelle Funktionen

1 Der Satz von Tietze-Urysohn

Wir beweisen zunächst Erweiterungssätze für stetige reellwertige Funktionen, die unter dem Namen *Satz von Tietze und Urysohn* bekannt sind. Als Vorbereitung dient der nächste Hilfssatz.

(1.1) Lemma. *Sei $D \subset [0,1]$ eine dichte Teilmenge. Jedem $d \in D$ sei eine offene Menge L_d des Raumes X zugeordnet. Im Fall $d < e$ gelte $\overline{L}_d \subset L_e$. Dann ist die Funktion*

$$f\colon X \to [0,1], \quad x \mapsto \inf\{d \in D \mid x \in L_d\}$$

stetig. Ist $D(x) = \{d \in D \mid x \in L_d\}$ leer, so ist das Infimum definitionsgemäß gleich 1, auf dem Komplement aller L_d nimmt also f den Wert 1 an.

Beweis. Die Mengen der Form $[0,a[$ und $]a,1]$, $0 < a < 1$ bilden eine Subbasis der Topologie von $[0,1]$. Es genügt zu zeigen, daß deren Urbilder bei f offen sind. Das folgt aus den mengentheoretischen Relationen

$$\begin{aligned} f^{-1}[0,a[&= \{x|f(x) < a\} = \bigcup(L_d \mid d < a\} \\ f^{-1}]a,1] &= \{x|f(x) > a\} = \bigcup(X \setminus L_d \mid d > a) = \bigcup(X \setminus \overline{L}_d \mid d > a). \end{aligned}$$

Zum Nachweis der letzten Gleichheit benutzt man die Bedingung $\overline{L}_d \subset L_e$ und die Dichtigkeit von D. Die genannten Urbilder sind also offen. □

(1.2) Satz. *Sei X ein T_4-Raum, und seien A und B disjunkte abgeschlossene Mengen in X. Dann gibt es eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$, die auf A nur den Wert 0 und auf B nur den Wert 1 annimmt.*

Beweis. Wir wenden das Lemma mit der Menge der rationalen Zahlen $D = \{m/2^n \mid 0 \le m \le 2^n\}$ an. Die Mengen L_d werden induktiv nach der Zweierpotenz im Nenner wie folgt gewählt. Wir setzen $L_1 = X \setminus B$ und wählen $A \subset L_0 \subset \overline{L}_0 \subset L_1$, was nach der T_4-Eigenschaft von X möglich ist. In den nächsten Schritten schachteln wir $\overline{L_0} \subset L_{1/2} \subset \overline{L}_{1/2} \subset L_1$ sowie

$$\overline{L}_0 \subset L_{1/4} \subset \overline{L}_{1/4} \subset L_{1/2} \subset \overline{L}_{1/2} \subset L_{3/4} \subset \overline{L}_{3/4} \subset L_1$$

und behandeln den allgemeinen Induktionsschritt sinngemäß ebenso. □

(1.3) Satz. *Sei X ein T_4-Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Jede stetige Abbildung $f\colon A \to [0,1]$ besitzt eine stetige Fortsetzung $F\colon X \to [0,1]$.*

Beweis. Sei $0 < \varepsilon \le 1$. Eine ε-Erweiterung von f ist eine stetige Abbildung $g\colon X \to [0,1]$ mit den Eigenschaften

(1) $|g(x)| \le 1 - \varepsilon$ für jedes $x \in X$

(2) $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ für jedes $x \in A$.

Zu g konstruieren wir eine verbesserte Erweiterung Vg. Sei

$$\begin{aligned} C &= \{x \in A \mid f(x) - g(x) \geq \varepsilon/3\} \\ D &= \{x \in A \mid f(x) - g(x) \leq -\varepsilon/3\}. \end{aligned}$$

Wir wählen nach (1.2) eine stetige Funktion $v\colon X \to [-\varepsilon/3, \varepsilon/3]$ mit Werten $-\varepsilon/3$ auf C und $\varepsilon/3$ auf D. Die Funktion $Vg = g - v$ hat die Eigenschaften

(3) $|Vg(x)| \leq 1 - 2\varepsilon/3$ für $x \in X$

(4) $|f(a) - Vg(a)| \leq 2\varepsilon/3$ für $a \in A$

(5) $|g(x) - Vg(x)| \leq \varepsilon/3$ für $x \in X$.

(3) und (5) gelten nach Konstruktion, und (4) wird getrennt auf C, D und dem Komplement verifiziert. Wir wenden diese Konstruktion induktiv an und erhalten eine Folge von ε_n-Erweiterungen (g_n) mit $g_0 = 0$, $g_{n+1} = Vg_n$ und $\varepsilon_n = (2/3)^n$. Ferner gilt dann $|g_m(x) - g_n(x)| \leq (2/3)^p$ für $m, n \geq p$. Die $(g_m(x) \mid m \in \mathbb{N}_0)$ bilden deshalb eine Cauchy-Folge, die g_m konvergieren also punktweise gegen eine Erweiterung F von f, und da die Konvergenz gleichmäßig ist, so ist der Limes stetig. □

(1.4) Satz. *Eine stetige Abbildung $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ einer abgeschlossenen Menge A eines T_4-Raumes X besitzt eine stetige Fortsetzung auf X.*

Beweis. Durch Betrachtung der Komponenten von f kann $n = 1$ und wegen des Homöomorphismus $\mathbb{R} \cong\,]-1,1[$ kann $f\colon A \to\,]-1,1[$ angenommen werden. Sei $G\colon X \to [-1,1]$ eine Erweiterung nach dem vorigen Satz. Sei ferner $u\colon X \to [0,1]$ stetig mit dem Wert 1 auf A und dem Wert 0 auf $G^{-1}\{-1,1\}$. Dann ist $F = G \cdot u$ eine Erweiterung von f mit einem Bild in $]-1,1[$. □

2 Der Satz von Stone-Weierstraß

Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $C(X)$ die Algebra der stetigen Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$. Auf $C(X)$ haben wir die Norm $|f| = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$. Dadurch wird $C(X)$ zu einem Banach-Raum. Wir sagen, eine Unteralgebra A von $C(X)$ *trennt die Punkte*, wenn zu jedem Paar x, y verschiedener Punkte in X eine Funktion in A existiert, die auf x und y verschiedene Werte annimmt. Der Satz von *Stone-Weierstraß* lautet:

(2.1) Satz. *Sei $A \subset C(X)$ eine Unteralgebra, die die Punkte trennt und die konstanten Funktionen enthält. Dann ist die abgeschlossene Hülle von A gleich $C(X)$.*

Beweis. (1) Wir nehmen ohne wesentliche Einschränkung an, das A in $C(X)$ abgeschlossen ist. Wir nehmen zunächst zusätzlich an, daß mit f und g auch $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ zu A gehören. Seien x_1 und x_2 verschiedene Punkte von X und seien a_i reelle Zahlen. Dann gibt es $h \in A$ mit $h(x_i) = a_i$. Nach Voraussetzung gibt es nämlich $g \in A$ mit $g(x_1) \neq g(x_2)$, und dann hat

$$h(x) = x_1 + (x_2 - x_1)\frac{g(x) - g(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)}$$

die gewünschte Eigenschaft.

(2) Sei $f \in C(X)$ und $\varepsilon > 0$. Wir suchen $g \in A$, so daß die Ungleichungen $f - \varepsilon < g < f + \varepsilon$ gelten. Nach (1) wählen wir zu jedem Paar $x, y \in X$ eine Funktion $h_{x,y} \in A$ mit $h_{x,y}(x) = f(x)$ und $h_{x,y}(y) = f(y)$. Zu jedem $y \in X$ gibt es dann eine offene Umgebung U_y, so daß für $z \in U_y$ die Ungleichung $h_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon$ gilt. Werde X durch $U_{y(1)}, \ldots, U_{y(n)}$ überdeckt. Nach unserer Zusatzvoraussetzung liegt dann das Mininum h_x der $h_{x,y(j)}$ in A und erfüllt $h_x < f + \varepsilon$ sowie $h_x(x) = f(x)$. Es gibt sodann zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung V_x von x, so daß für $z \in V_x$ die Ungleichung $f(z) - \varepsilon < h_x(z)$ gilt. Wir überdecken X durch $V_{x(1)}, \ldots, V_{x(m)}$ und bilden das Maximum g der $h_{x(j)}$. Diese Funktion hat die gewünschten Eigenschaften.

(3) Es bleibt zu zeigen, daß die Zusatzvoraussetzung immer erfüllt ist. Wegen $2\max(f, g) = |f + g| + |f - g|$ und $2\min(f, g) = |f + g| - |f - g|$ genügt es zu zeigen, daß mit f auch $|f|$ in A liegt. Sei P ein Polynom in $t \in \mathbb{R}$, so daß für $t \in [-a, a]$ immer $|P(t) - |t|| < \varepsilon$ gilt. Dann folgt $|P(f(x)) - |f(x)|| < \varepsilon$, und $x \mapsto P(f(x))$ liegt in A.

(4) Um geeignete Polynome P zu finden, reduzieren wir durch die Substitution $t \mapsto at$ auf den Fall $a = 1$. Wir setzen $s = t^2$, also $0 \leq s \leq 1$, und definieren induktiv $P_1 = 0$ sowie $P_{n+1}(s) = P_n(s) + \frac{1}{2}[s - P_n(s)^2]$. Diese Polynome konvergieren monoton wachsend und gleichmäßig gegen $\sqrt{s}$. Um das einzusehen, verwendet man die Identität

$$|s| - P_{n+1}(s) = (|t| - P_n(s))\left(1 - \tfrac{1}{2}(|s| + P_n(s))\right),$$

die durch Umformung der Rekursionsformel erhalten wird. Sie liefert induktiv

$$0 \leq P_n(s) \leq P_{n+1}(s) \leq |s|.$$

Daraus folgt zunächst, daß $(P_n(s) \mid n \in \mathbb{N})$ immer konvergiert. Indem wir in der Rekursionsformel zum Limes übergehen, sehen wir, daß der Grenzwert $|s|$ ist. Aus dem Satz von Dini folgt die Gleichmäßigkeit der Konvergenz. Man kann aber auch direkt induktiv die Abschätzung

$$|s| - P_n(s) \leq |s|\left(1 - \tfrac{1}{2}|s|\right)^n < \tfrac{2}{n+1}$$

herleiten und braucht dann nicht den Satz von Dini. □

(2.2) Folgerung. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Jede stetige Funktion $X \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßiger Limes von Polynomen in n Variablen.* □

(2.3) Satz. *Sei $C(X, \mathbb{C})$ der Raum der stetigen Funkionen $X \to \mathbb{C}$ mit Supremumsnorm. Sei der komplexe Untervektorraum A eine Unteralgebra, die die* *konstanten Funktionen enthält, die Punkte trennt und mit f auch die konjugiert-komplexe Funktion $\overline{f}$ enthält. Dann ist die abgeschlossene Hülle von A gleich $C(X, \mathbb{C})$.*

Beweis. Ist f eine beliebige stetige Funktion, so genügt es zu zeigen, daß ihr Real- und Imaginärteil in der Hülle liegen. Das folgt aus dem Satz von Stone-Weierstraß, wenn gezeigt ist, daß die Algebra A_0 der reellwertigen Funktionen in A, die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt. Mit g ist aber der Realteil $\frac{1}{2}(f+\overline{f})$ und der Imaginärteil $\frac{1}{2i}(f-\overline{f})$ in A, also in A_0. Trennt g die Punkte x und y, trennt entweder der Realteil oder der Imaginärteil diese Punkte. Die anderen Voraussetzungen sind offenbar erfüllt. $\square$

(2.4) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Sei X kompakt und $\varphi\colon C(X) \to \mathbb{R}$ ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren. Dann gibt es ein $x \in X$, so daß $\varphi(f) = f(x)$, das heißt φ ist die Auswertung an einem Punkt $x \in X$.

2. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $\int_a^b f(t)t^n\,dt = 0$. Dann ist $f = 0$. Zunächst gilt dann nämlich für jedes Polynom P auch $\int_a^b f(t)P(t)\,dt = 0$. Nach Weierstraß wählen wir dann P so, daß $\|f-P\| < \varepsilon$ ist. Es folgt $|\int_a^b f^2(t)\,dt| = |\int_a^b (f-P)f| \le \varepsilon\|f\|(b-a)$. Aus $\int f^2 = 0$ folgt aber $f = 0$.

3. Zu jeder stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Periode 2π und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, so daß $\|f - T\| < \varepsilon$ ist.

4. Eine Funktion der Form $x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ heißt *trigonometrisches Polynom.* Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und gilt für jedes trigonometrische Polynom T die Gleichung $\int_0^{2\pi} \overline{T(x)} f(x)\,dx = 0$, so ist $f = 0$.

3 Parakompakte Räume

Sei $\mathcal{U} = (U_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung eines Raumes X. Eine offene Überdeckung $\mathcal{B} = (B_j \mid j \in J)$ heißt *Schrumpfung* von $\mathcal{U}$, wenn für jedes $j \in J$ die Inklusion $\overline{B}_j \subset U_j$ besteht. Eine offene Überdeckung $\mathcal{C} = (C_j \mid j \in J)$ heißt *Teilschrumpfung* zu $K \subset J$, wenn $\overline{C}_j \subset U_j$ für $j \in K$ und $C_j = U_j$ für $j \notin K$. Sind (C_j) und (C'_j) Teilschrumpfungen zu K und K', so definieren wir die Relation $C \le C'$ (größergleich) durch $K \subset K'$ und $C_j = C'_j$ für $k \in K$.

(3.1) Lemma. *Ist die offene Überdeckung $(U_j \mid j \in J)$ von X punktal endlich, so ist die Menge aller ihrer Teilschrumpfungen bezüglich $\le$ induktiv geordnet.*

Beweis. Die Behauptung besagt: Ist $\mathcal{C}^s = ((C_j^s), K^s)$ eine vollständig geordnete Menge von Teilschrumpfungen $(s \in S)$, so gibt es eine Teilschrumpfung, die größergleich allen $\mathcal{C}^s$ ist. Wir setzen $K = \bigcup K^s$ und $C_j = C_j^s$ für $j \in K^s$. Damit erhalten wir ein wohldefiniertes System offener Mengen C_j. Behauptung: Es handelt sich um eine Überdeckung. Sei $x \in X$. Die Menge $J(x) = \{j \in J \mid x \in U_j\}$ ist nach Voraussetzung endlich. Ist $j \in J(x) \cap (J \setminus K)$, so ist $x \in U_j$. Ist dagegen $J(x) \subset K$, so gilt wegen der vollständigen Ordnung $J(x) \subset K^s$ für ein geeignetes s. Es ist dann $x \in C_l$ für ein $l \in K^s \subset K$. $\square$

(3.2) Satz. *Eine punktal endliche, offene Überdeckung eines normalen Raumes besitzt eine Schrumpfung.*

Beweis. Nach dem vorigen Lemma und dem Zornschen Lemma der Mengenlehre gibt es eine maximale Teilschrumpfung $((C_j \mid j \in J), K)$ einer punktal endlichen offenen Überdeckung (U_j). Sei $k \notin K$ und $L = K \cup \{k\}$. Sei D das Komplement von $(\bigcup_{j \in K} C_j) \cup (\bigcup_{j \notin L} U_j)$. Dann ist D eine abgeschlossene Teilmenge, die in U_k liegt, weil (C_j) eine Überdeckung ist. Wir wählen eine offene Teilmenge C_k, die $D \subset C_k \subset \overline{C}_k \subset U_k$ erfüllt, ersetzen U_k durch C_k und erhalten eine größere Teilschrumpfung. Das widerspricht der Maximalität, also ist $K = J$. □

Ein Raum X wird *parakompakt* genannt, wenn er Hausdorff-Raum ist und jede offene Überdeckung eine offene, *parakompakt* lokal endliche Verfeinerung besitzt. Ein abgeschlossener Teilraum eines parakompakten Raumes ist wieder parakompakt. Ein kompakter Raum ist offenbar parakompakt.

(3.3) Satz. *Ein parakompakter Raum ist normal.*

Beweis. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Seien A und B disjunkte abgeschlossene Mengen im Hausdorff-Raum X. Dann gibt es trennende offene Umgebungen unter den folgenden Umständen:

(1) $(U_j \mid j \in J)$ ist eine lokal endliche Familie offener Mengen in X, die A überdeckt.

(2) Zu jedem j gibt es eine offene Umgebung V_j von B, die zu U_j disjunkt ist.

Da nämlich (U_j) lokal endlich ist, gibt es zu jedem $y \in B$ eine offene Umgebung $W(y)$, so daß $J(y) = \{j \in J \mid W(y) \cap U_j \neq \emptyset\}$ endlich ist. Dann ist

$$W'(y) = W(y) \cap \bigcap\nolimits_{j \in J(y)} V_j$$

eine offene Umgebung von y, die kein U_j trifft. Mithin ist $W = \bigcup_{y \in B} W'(y)$ eine offene Umgebung von B, die disjunkt zur offenen Umgebung $U = \bigcup_{j \in J} U_j$ von A ist.

Sei nun X parakompakt. Wir betrachten zunächst disjunkte abgeschlossene Mengen A und $B = \{b\}$. Wegen der Separiertheit können wir nach eventuell nötigem Übergang zu einer lokal endlichen Verfeinerung die Voraussetzungen der Vorüberlegung erfüllen. Es gibt deshalb zu jedem $b \in B$ eine offene Umgebung V_b von b und eine dazu disjunkte offene Umgebung W_b von A. Wir verfeinern die Überdeckung (V_b) von B durch eine lokal endliche Überdeckung $(U_j \mid j \in J)$. Dann wenden wir nochmals die Vorüberlegung an, aber diesmal mit vertauschten Rollen von A und B. □

(3.4) Satz. *Der lokal kompakte Hausdorff-Raum X sei abzählbare Vereinigung kompakter Mengen. Dann ist X parakompakt. Insbesondere sind Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Basis parakompakt.*

Beweis. Wir wählen eine offene Überdeckung $(U_n \mid n \in \mathbb{N})$ von X mit den in II(5.3) genannten Eigenschaften. Sei $(V_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung von X. Zu jedem Punkt $x \in \overline{U}_n \setminus U_{n-1} = K_n$ gibt es eine in $U_{n+1} \setminus \overline{U}_{n-2}$ gelegene offene Umgebung, die in einer Menge V_j liegt und wovon endlich viele ausgewählt werden, die K_n überdecken. So für jedes n verfahrend, erhalten wir eine lokal endliche Verfeinerung von (V_j). □

(3.5) Satz. *Sei X parakompakt und K kompakt hausdorffsch. Dann ist $X \times K$ parakompakt.*

Beweis. Sei $(U_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung von $X \times K$. Zu jedem $(x, k) \in X \times K$ wählen wir offene Umgebungen $V(x, k)$ von x und $W(x, k)$ von k, so daß $V(x, k) \times W(x, k)$ in einer der Mengen U_j liegt. Wir wählen ein endliches $J(x) \subset K$, so daß die $W(x, k)$, $k \in J(x)$, den Raum K überdecken. Wir setzen $U(x)$ als den Schnitt der $V(x, k)$, $k \in J(x)$ fest. Die $U(x)$ bilden eine offene Überdeckung von X, die durch die offene Überdeckung $(C_a \mid a \in A)$ lokal endlich verfeinert werde. Zu jedem $a \in A$ wählen wir ein x_a mit $C_a \subset U(x_a)$. Dann bilden die $C_a \times W(x_a, k)$, $a \in A$, $k \in J(x_a)$ eine lokal endliche Verfeinerung von (U_j).□

4 Partition der Eins

Ist $t \colon X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so heißt die abgeschlossene Hülle von $t^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0)$ der *Träger* $\mathrm{Tr}(t)$ von t. Eine Familie $(t_j \colon X \to \mathbb{R} \mid j \in J) = T$ von stetigen Funktionen heißt *lokal endlich*, wenn die zugehörige Familie der Träger $(\mathrm{Tr}(t_j) \mid j \in J)$ lokal endlich ist. Wir nennen T eine *Partition der Eins* oder *Teilung, Zerlegung der Eins*, wenn T lokal endlich ist, wenn alle t_j keine negativen Werte haben und wenn für alle $x \in X$ die Gleichung $\sum_{j \in J} t_j(x) = 1$ gilt. Eine Überdeckung $\mathcal{U} = (U_j \mid j \in J)$ von X heiße *numerierbar*, wenn es eine Partition der Eins T mit $\mathrm{Tr}(t_j) \subset U_j$ für alle $j \in J$ gibt; T heißt dann eine *Numerierung* von $\mathcal{U}$ oder *$\mathcal{U}$ untergeordnet*.

(4.1) Satz. *Jede lokal endliche, offene Überdeckung eines normalen Raumes ist numerierbar.*

Beweis. Sei $U = (U_j \mid j \in J)$ eine lokal endliche Überdeckung des normalen Raumes X und $V = (V_j \mid j \in J)$ eine Schrumpfung von U und $W = (W_j \mid j \in J)$ eine Schrumpfung von V. Nach dem Satz (1.3) von Tietze-Urysohn gibt es stetige Funktionen $\tau_j \colon X \to [0, 1]$, die auf W_j den Wert 1 und auf dem Komplement von V_j den Wert Null annehmen. Die Funktion $\tau = \sum_{j \in J} \tau_j \colon X \to [0, 1]$ ist wohldefiniert und stetig, weil in einer geeigneten Umgebung eines jeden Punktes wegen der lokalen Endlichkeit von V nur endlich viele τ_j von Null verschieden sind. Wir setzen $f_j(x) = \tau_j(x) \cdot \tau^{-1}(x)$. Die Funktionen $(f_j \mid j \in J)$ bilden dann eine Numerierung von U. □

(4.2) Lemma. *Die Überdeckung $V = (V_k \mid k \in K)$ sei Verfeinerung der Überdeckung $U = (U_j \mid j \in J)$. Ist V numerierbar, so auch U.*

Beweis. Sei $(f_k \mid k \in K)$ eine Numerierung von V. Zu jedem $k \in K$ wählen wir ein $a(k) \in J$ mit $V_k \subset U_{a(k)}$. Damit ist eine Abbildung $a\colon K \to J$ gegeben. Wir setzen $g_j(x) = \sum_{k,a(k)=j} f_k(x)$; darunter werde die Nullfunktion verstanden, falls die Summe leer ist. Dann ist g_j stetig; der Träger von g_j ist die Vereinigung der Träger der f_k mit $a(k) = j$ und liegt deshalb in U_j. Ferner ist die Summe der g_j gleich Eins. Die Familie $(g_j \mid j \in J)$ ist lokal endlich: Ist W eine offene Umgebung von x, die nur endlich viele Träger $\mathrm{Tr}(f_k)$, $k \in E \subset J$, E endlich, trifft, so trifft W nur die Träger der g_j mit $j \in a(E)$. □

(4.3) Satz. *Jede offene Überdeckung eines parakompakten Raumes ist numerierbar.*

Beweis. Sei $U = (U_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung des parakompakten Raumes X und $V = (V_k \mid k \in K)$ eine lokal endliche offene Verfeinerung. Da X normal ist, gibt es eine Numerierung $(f_k \mid k \in K)$ von V. Nun wende man das vorstehende Lemma an. □

(4.4) Lemma. *Sei $(f_j\colon X \to [0,\infty[\mid j \in J)$ eine Familie stetiger Funktionen, so daß $U = (f^{-1}]0,\infty[\mid j \in J)$ eine lokal endliche Überdeckung von X ist. Dann ist U numerierbar und besitzt insbesondere eine Schrumpfung.*

Beweis. Da U lokal endlich ist, so ist $f\colon x \mapsto \max(f_j(x) \mid j \in J)$ stetig und überall von Null verschieden. Wir setzen $g_j(x) = f_j(x)f(x)^{-1}$. Dann ist

$$t_j\colon X \to [0,1], \quad x \mapsto \max(2g_j(x) - 1, 0)$$

stetig. Es ist

$$t_j(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad g_j(x) > 1/2.$$

Folglich bestehen die Inklusionen

$$\mathrm{Tr}(t_j) \subset g_j^{-1}[1/4,\infty[\subset f^{-1}]0,\infty[\,.$$

Für ein $x \in X$ und ein $i \in J$ mit $f_i(x) = \max(f_j(x))$ ist $t_i(x) = 1$. Also bilden die Träger der t_j eine lokal endliche Überdeckung von X, und die Funktionen

$$x \mapsto \frac{t_i(x)}{\sum_{j\in J} t_j(x)}$$

sind eine Numerierung von U. □

(4.5) Satz. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{U} = (U_j|j \in J)$ eine Überdeckung von X. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *$\mathcal{U}$ ist numerierbar.*

(2) *Es gibt eine Familie*

$$(s_{a,n}\colon X \to [0,\infty[\mid a \in A,\ n \in \mathbb{N}) = S$$

von stetigen Funktionen $s_{a,n}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) *S, das heißt $(s_{a,n}^{-1}]\,0,\infty\,[)$, verfeinert $\mathcal{U}$.*

(b) *Für jedes n ist $(s_{a,n}^{-1}]0,\infty[\mid a \in A)$ lokal endlich.*

(c) *Zu jedem $x \in X$ gibt es ein (a,n), so daß $s_{a,n}(x) > 0$ ist.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) ist klar.

(2) $\Rightarrow$ (1). $(s_{a,n})$ ist nach Voraussetzung eine abzählbare Vereinigung lokal endlicher Familien. Wir konstruieren daraus zunächst eine lokal endliche Familie. Indem wir $s_{a,n}$ durch $s_{a,n}/(1+s_{a,n})$ ersetzen, können wir annehmen, daß $s_{a,n}$ ein in $[0,1]$ enthaltenes Bild hat. Sei

$$q_r(x) = \sum_{a\in A,\, i<r} s_{a,i}(x), \qquad r \geq 1$$

und $q_r(x) = 0$ für $r = 0$. (Die Summe ist für jedes $x \in X$ endlich.) Dann sind q_r und

$$p_{a,r}(x) = \max(0, s_{a,r}(x) - rq_r(x))$$

stetig. Sei $x \in X$; es gibt dann $s_{a,k}$ mit $s_{a,k}(x) \neq 0$; wir wählen eine derartige Funktion mit minimalem k; für diese ist $q_k(x) = 0$, $p_{a,k}(x) = s_{a,k}(x)$. Also überdecken die Mengen $p_{a,k}^{-1}]0,1]$ ebenfalls X. Sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $N > k$ und $s_{a,k}(x) > \frac{1}{N}$ ist. Dann ist $q_N(x) > \frac{1}{N}$ und folglich $Nq_N(y) > 1$ für alle y in einer geeigneten Umgebung von x. In dieser Umgebung verschwinden alle $p_{a,r}$ mit $r \geq N$. Also ist $(p_{a,n}^{-1}]0,1] \mid a \in A,\ n \in \mathbb{N})$ eine lokal endliche Überdeckung von X, die $\mathcal{U}$ verfeinert. Wir beenden den Beweis mit (4.4). $\square$

(4.6) Satz. *Ein metrisierbarer Raum ist parakompakt.*

Beweis. Sei $(U_j \mid j \in J)$ eine offene Überdeckung des metrischen Raumes (X,d). Die Indexmenge J sei wohlgeordnet. Für $i \in J$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge

$$B_{i,n} = \{x \in X \mid d(x, X\setminus U_i) \geq 2^{-n}; d(x, X\setminus U_j) \leq 2^{-n-1} \text{ für alle } j < i\}.$$

Dazu bilden wir die Funktion

$$s_{i,n}(x) = \max(0, 2^{-n-3} - d(x, B_{i,n})).$$

Sei $x \in X$ gegeben. Sei i der minimale Index, für den $x \in U_i$ ist; er existiert, weil J wohlgeordnet ist. Es gibt ein n, so daß $d(x, X\setminus U_i) > 2^{-n}$ ist, da $X \setminus U_i$ abgeschlossen ist. Für $j < i$ ist dann außerdem $x \in X \setminus U_j$, so daß insgesamt $x \in B_{i,n}$ und $s_{i,n}(x) > 0$ folgt.

Wir zeigen nun: Für $j < i$ sind die Mengen $s_{i,n}^{-1}]0,\infty[$ und $s_{j,n}^{-1}]0,\infty[$ disjunkt. Aus $s_{i,n}(x) > 0$ folgt $d(x, B_{i,n}) < 2^{-n-3}$. Es gibt also ein $y \in B_{i,n}$ mit $d(x,y) < 2^{-n-3}$. Aus der Definition von $B_{i,n}$ ergibt sich insgesamt

$$d(x, X\setminus U_i) \geq 2^{-n} - 2^{-n-3} \qquad d(x, X\setminus U_j) \leq 2^{-n-1} + 2^{-n-3}.$$

Ist $s_{j,n} > 0$, so folgt gleichermaßen

$$d(x, X\setminus U_j) \geq 2^{-n} - 2^{-n-3}.$$

Wegen $2^{-n-1} + 2^{-n-3} < 2^{-n} - 2^{-n-3}$ können nicht beide Ungleichungen für den Index j gleichzeitig bestehen. Außerdem sehen wir, daß aus $s_{i,n}(x) > 0$ die Relation $x \in U_i$ folgt.

Nach dem bisher Gezeigten erfüllen die Funktionen $s_{i,n}$ die Voraussetzungen von (4.5). $\square$

(4.7) Satz. *Sei $(U_j \mid j \in J)$ eine numerierbare Überdeckung von $B \times [0,1]$. Es gibt eine numerierbare Überdeckung $(V_k \mid k \in K)$ von B und eine Familie $(\epsilon(k) \mid k \in K)$ von positiven reellen Zahlen, so daß für $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$ und $|t_1 - t_2| < \epsilon(k)$ ein $j \in J$ mit $V_k \times [t_1, t_2] \subset U_j$ existiert.*

Beweis. Sei $(t_j \mid j \in J)$ eine Numerierung von (U_j). Für jedes r-Tupel $k = (j_1, \dots, j_r) \in J^r$ definieren wir eine stetige Abbildung

$$v_k \colon B \to I,\ x \mapsto \prod_{i=1}^{r} \min\left(t_{j_i}(x,s) \mid s \in \left[\frac{i-1}{r+1}, \frac{i+1}{r+1}\right]\right).$$

Sei $K = \bigcup_{r=1}^{\infty} J^r$. Wir zeigen, daß mit $V_k = v_k^{-1}]0,1]$ und $\epsilon(k) = \frac{1}{2r}$ für $k = (j_1, \dots, j_r)$ die Forderungen des Satzes erfüllt sind. Ist nämlich $|t_1 - t_2| < \frac{1}{2r}$, so gibt es ein i mit $[t_1, t_2] \subset [\frac{i-1}{r+1}, \frac{i+1}{r+1}]$ und folglich $V_k \times [t_1, t_2] \subset U_{j_i}$.

Ferner ist (V_k) eine Überdeckung. Sei $x \in B$ gegeben. Jeder Punkt (x,t) hat eine offene Produktumgebung $U(x,t) \times V(x,t)$, die in einer geeigneten Menge $W(i) = t_i^{-1}]0,1]$ enthalten ist und nur endlich viele $W(j)$ trifft. Es überdecke $V(x,t_1), \dots, V(x,t_n)$ das Intervall $I = [0,1]$, und $\frac{2}{r+1}$ sei eine Lebesguesche Zahl dieser Überdeckung. Wir setzen $U = U(x,t_1) \cap \ldots \cap U(x,t_n)$. Jede Menge der Form $U \times [\frac{i-1}{r+1}, \frac{i+1}{r+1}]$ ist dann in einem geeigneten $W(j_i)$ enthalten. Also liegt x in V_k, $k = (j_1, \dots, j_r)$.

Es gibt nur endlich viele $j \in J$, für die $W(j) \cap (U \times I) \neq \emptyset$ ist. Da $v_k(x) \neq 0$ die Relation $W(j_i) \cap \{x\} \times I \neq \emptyset$ impliziert, ist $(V_k \mid k \in J^r)$ für festes r lokal endlich. Die Numerierbarkeit von $(V_k \mid k \in K)$ folgt somit aus Satz (4.5). $\square$

Eine Familie stetiger Abbildungen $(t_j \colon X \to [0,1] \mid j \in J)$ heißt *summierbare Partition der Eins*, wenn für jedes $x \in X$ die Familie $(t_j(x) \mid j \in J)$ summierbar mit Summe 1 ist.

(4.8) Satz. *Ist $(t_j \mid j \in J)$ eine summierbare Partition der Eins, so ist die Familie $(t_j^{-1}]0,1] \mid j \in J)$ eine numerierbare Überdeckung.*

Beweis. Die Summierbarkeit von $(t_j(a))$ bedeutet: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $E \subset J$, so daß die Ungleichung

$$\sum_{j \in E} t_j(a) > 1 - \varepsilon$$

gilt. In diesem Fall ist

$$V = \{x \mid \sum_{j \in E} t_j(x) > 1 - \varepsilon\}$$

eine offene Umgebung von a. Ist $k \notin E$, $x \in V$ und $t_k(x) > \varepsilon$, so folgt

$$t_k(x) + \sum_{j \in E} t_j(x) > 1.$$

Das ist unmöglich. Also gibt es zu jedem $a \in X$ eine offene Umgebung $V(a)$, so daß nur endlich viele Funktionen t_j auf $V(a)$ Werte größer als ε haben. Sei

$$s_{j,n}(x) = \max(t_j(x) - \frac{1}{n}, 0)$$

für $j \in J$ und $n \in \mathbb{N}$. Nach dem eben Gezeigten bilden die $s_{j,n}$ für festes n eine lokal endliche Familie. Die Behauptung folgt jetzt durch eine Anwendung von Satz (4.5). □

(4.9) Satz. *Sei $(U_c \mid c \in C)$ eine numerierbare Überdeckung. Es existiert eine numerierbare offene Überdeckung $(V_n \mid n \in \mathbb{N})$, in der jedes V_n eine disjunkte Vereinigung offener Mengen ist, die jeweils in einer der Mengen U_c enthalten ist.*

Beweis. Sei $(t_j \mid j \in C)$ eine Numerierung von (U_c). Für jede endliche Menge $S \subset C$ sei

$$U(S) = \{z \in Z \mid i \in S, j \in C \setminus S \Rightarrow t_i(z) > t_j(z)\}.$$

Ist $|S| = |T| = n$ und $U(S) \cap U(T) \neq \emptyset$, so folgt $S = T$. Wir setzen $V_n = \coprod_{|S|=n} U(S)$ und zeigen: $(U_n \mid n > 0)$ ist eine numerierbare Überdeckung.

Auf $U(S)$ haben wir die Funktion

$$q_S(z) = \max(0, \min_{i \in S} t_i(z) - \max_{j \in C \setminus S} t_j(z)).$$

Da (t_j) lokal endlich ist, so ist q_S stetig. Wir definieren $q_n \colon U_n \to [0, \infty[$ durch $q_n \mid U(S) = q_S$. Schließlich setzen wir $v_n = q_n / \sum_{j=1}^{\infty} q_i$ und erhalten damit eine Numerierung von $(V_n \mid n \in \mathbb{N})$. □

(4.10) Satz. *Sei X ein metrischer Raum, E ein normierter Vektorraum und A eine nichtleere abgeschlossene Menge in X. Jede stetige Abbildung $f \colon A \to E$ besitzt eine stetige Fortsetzung $F \colon X \to E$. Dabei kann F so gewählt werden, daß $F(X)$ in der konvexen Hülle von $f(A)$ liegt.*

Beweis. Zu $p \in X \setminus A$ bilden wir

$$U_p = \{x \in X \mid 2d(x,p) < d(p,A)\}.$$

Sei (φ_p) eine der offenen Überdeckung (U_p) von $X \setminus A$ untergeordnete Partition der Eins. Damit definieren wir

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ \sum_{p \in X \setminus A} \varphi_p(x) f(a(p)), & x \in X \setminus A \end{cases}$$

mit einem Punkt $a(p) \in A$, der $d(p, a(p)) < 2d(p,A)$ erfüllt. Die Funktion F ist ihrer Definition nach auf A und $X \setminus A$ stetig. Fraglich ist allein die Stetigkeit in Randpunkten x_0 von A. Für $x \in U_p$ gilt

$$d(x_0,p) \leq d(x_0,x) + d(x,p) < d(x_0,x) + \frac{1}{2} d(p,A) \leq d(x_0,x) + \frac{1}{2} d(p,x_0),$$

also $d(x_0, p) < 2d(x_0, x)$ für $x \in U_p$. Wegen $d(p, a(p)) < 2d(p, A) \leq 2d(p, x_0)$ folgt für $x \in U_p$

$$d(x_0, a(p)) \leq d(x_0, p) + d(p, a(p)) < 3d(p, x_0) < 6d(x_0, x).$$

Für $x \in X \setminus A$ haben wir

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leq \sum_p \varphi_p(x) \|f(a(p)) - f(x_0)\|$$

mit einer Summe über die $p \in X \setminus A$ mit $x \in U_p$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta > 0$ nach Stetigkeit von f so gewählt, daß $\|f(y) - f(x_0)\| < \varepsilon$, sofern $y \in A$ und $d(x_0, y) < 6\delta$. Ist $x \in X \setminus A$ und $d(x, x_0) < \delta$, so ist für p mit $x \in U_p$ nach der obigen Abschätzung $d(x_0, a(p)) < 6\delta$, also $\|f(a(p)) - f(x_0)\| < \varepsilon$, und insgesamt ergibt sich $\|F(x) - F(x_0)\| \leq \sum \varphi_p(x)\varepsilon = \varepsilon$. □

Die im Beweis von (4.7) gefundene Verfeinerung ist der Produktstruktur angepaßt. Der nächste Satz zeigt, daß numerierbare Überdeckungen immer derartige Verfeinerungen haben. Der Satz verallgemeinert (4.7).

(4.11) Satz. *Sei $\mathcal{U} = (U_j \mid j \in J)$ eine numerierbare Überdeckung des Produktes $X \times K$ mit einem K kompakten Hausdorff-Raum K. Dann gibt es eine numerierbare Überdeckung $(V_i \mid i \in I)$ von X und zu jedem $i \in I$ eine endliche numerierbare Überdeckung $(W_\ell \mid \ell \in L_i)$ von K, so daß die $V_i \times W_\ell$, $\ell \in L_i$, eine numerierbare Überdeckung von $X \times K$ bilden, die (U_j) verfeinert.*

Beweis. Wir verwenden einige Begriffsbildungen, die erst in späteren Abschnitten eingeführt werden. Sei $B(\mathcal{U})$ die geometrische Realisierung des Nerven $N(\mathcal{U})$ von $\mathcal{U}$ mit der metrischen Topologie. Sei $(t_j \mid j \in J)$ eine Numerierung von $\mathcal{U}$. Wir erhalten eine stetige Abbildung in den Abbildungsraum mit der Supremumsmetrik $\tau\colon X \to B(\mathcal{U})^K$ durch die Festsetzung $\tau(x)(k) = \sum_{j \in J} t_j(x, k)[j]$. (Der Raum $B(\mathcal{U})$ ist eine Menge von Funktionen $f\colon J \to [0, 1]$, die wir als $\sum f(j)[j]$ schreiben.)

Wir zeigen zunächst, daß $B(\mathcal{U})^K \times K$ eine geeignete Überdeckung hat, die wir dann vermöge $\tau \times \mathrm{id}$ auf $X \times B$ zurückziehen. Zu diesem Zweck betrachten wir die Menge A aller Funktionen $\mathcal{K}(a) \to J$, worin $\mathcal{K}(a)$ eine endliche numerierbare Überdeckung von K durch kompakte Mengen ist. Zu jeder Funktion betrachten wir

$$V_a = \{x \in X \mid x \times C \subset U_{a(C)},\, C \in \mathcal{K}_a\}.$$

Wir behaupten:

(1) $(V_a \mid a \in A)$ ist eine numerierbare Überdeckung von X.
(2) $(V_a \times C \mid a \in A,\, c \in \mathcal{K}_a)$ ist eine numerierbare Überdeckung von $X \times K$, die $\mathcal{U}$ verfeinert.

Wir verwenden dazu analoge Mengen in $B(\mathcal{U})^K \times K$. Es sei λ_j die zum Index j gehörende baryzentrische Koordinate $\lambda_j\colon B(\mathcal{U}) \to [0, 1]$. Sei

$$B_a = \{f \in B(\mathcal{U})^K \mid \lambda_{a(K)} \circ f(c) \neq 0,\, c \in C,\, C \in \mathcal{K}_a\}.$$

Dann gilt

$$V_a \supset \tau^{-1}(B_a);$$

ist nämlich $\tau(x) \in B_a$, so bedeutet das $t_{a(K)}(x,c) \neq 0$, $c \in C$, $C \in \mathcal{K}_a$, das heißt

$$x \times C \subset t_{a(C)}^{-1}]0,1] \subset U_{a(C)}.$$

Um (V_a) als numerierbare Überdeckung zu erkennen, genügt es also zu zeigen, daß (B_a) eine numerierbare Überdeckung von $B(\mathcal{U})^K$ ist. Nun ist letzterer Raum metrisch und deshalb parakompakt. Also genügt es zu zeigen, daß die offenen Kerne (B_a°) eine Überdeckung bilden.

Sei $f \in B(\mathcal{U})^K$ gegeben. Die Mengen $\lambda_j^{-1}]0,1]$ bilden eine offene Überdeckung von $B(\mathcal{U})$. Es gibt deshalb eine Funktion $a \in A$ mit $f(C) \subset \lambda_{a(C)}^{-1}]0,1]$ für alle $C \in \mathcal{K}_a$, das heißt $f \in B_a$.

Da auch $B(\mathcal{U})^K \times K$ nach Satz (4.5) parakompakt ist, so ist die Familie $(B_a \times C \mid a \in A,\, C \in \mathcal{K}_a)$ numerierbar. Damit folgt (2). $\square$

5 Erweiterung von Schnitten

4 Abbildungsräume

1 Die Kompakt-Offen-Topologie

Mit Y^X oder $C(X,Y)$ bezeichnen wir die Menge der stetigen Abbildungen des Raumes X in den Raum Y. Für $K \subset X$ und $U \subset Y$ sei

$$W(K,U) = \{f \in Y^X \mid f(K) \subset U\}.$$

Die *Kompakt-Offen-Topologie* (kurz: KO-Topologie) auf Y^X ist diejenige Topologie, die als Subbasis alle Mengen der Form $W(K,U)$ für kompaktes $K \subset X$ und offenes $U \subset Y$ hat.

(1.1) Satz. *Sei $\mathcal{S}$ Subbasis der Topologie auf Y und sei X ein Hausdorff-Raum. Dann bilden die Mengen $W(K,U)$, $K \subset X$ kompakt, $U \in \mathcal{S}$, eine Subbasis der* KO-*Topologie auf Y^X.*

Beweis. Sei $K \subset X$ kompakt und $V \subset Y$ offen. Es genügt zu zeigen: Zu jedem $u \in W(K,V)$ gibt es endlich viele kompakte Mengen $K_i \subset X$ und offene Mengen $U_i \in \mathcal{S}$, so daß

(1) $$u \in \bigcap\nolimits_i W(K_i,U_i) \subset W(K,V).$$

Nach Definition einer Subbasis ist V eine Vereinigung von $(V_a \mid a \in A)$, wobei V_a ein endlicher Durchschnitt von Mengen aus $\mathcal{S}$ ist. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele der V_a, etwa $V_{a(1)}, \ldots, V_{a(n)}$, so daß

$$K \subset u^{-1}(V_{a(1)}) \cup \ldots \cup u^{-1}(V_{a(n)}).$$

Zu jedem Punkt $x \in K$ wählen wir einen Index $a(x) \in \{a(1), \ldots, a(n)\}$ mit $x \in u^{-1}(V_{a(x)})$. Da K als kompakter Hausdorff-Raum normal ist, gilt für eine geeignete Umgebung A_x von x in K

$$x \in A_x \subset \overline{A}_x \subset u^{-1}(V_{a(x)}).$$

Die Menge $\overline{A}_x$ ist als abgeschlossene Teilmenge von K kompakt. Endlich viele A_x überdecken K, etwa die A_x für x aus einer endlichen Menge E. Dann gilt

(2) $$u \in \bigcap\nolimits_{x \in E} W(\overline{A}_x, V_{a(x)}) \subset W(K,V).$$

Da für endlich viele $S_r \in \mathcal{S}$ immer die Relation $\bigcap_r W(L,S_r) = W(L, \bigcap_r S_r)$ erfüllt ist, folgt aus (2) eine Aussage der verlangten Art (1). □

Seien X, Y und Z topologische Räume. Ist $f: X \times Y \to Z$ stetig, so ist $\overline{f}(x): Y \to Z$, $y \mapsto f(x,y)$ für jedes $x \in X$ stetig. Deshalb erhalten wir eine Mengenabbildung $\overline{f}: X \to Z^Y$. Die Abbildungen f und $\overline{f}$ heißen zueinander *adjungiert.*

(1.2) Satz. *Wird Z^Y mit der* KO-*Topologie versehen, so ist $\overline{f}$ stetig.*

Beweis. Sei $K \subset Y$ kompakt, $U \subset Z$ offen, $x \in X$ und $\overline{f}(x) \in W(K, U)$. Dann ist $f(\{x\} \times K) \subset U$. Da K kompakt ist, gilt für eine geeignete Umgebung V von x in X die Inklusion $V \times K \subset f^{-1}(U)$. Das heißt aber $\overline{f}(V) \subset W(K, U)$. Damit ist die Stetigkeit von $\overline{f}$ im Punkt x gezeigt. □

Aus (1.2) erhalten wir eine Abbildung $\alpha \colon Z^{X \times Y} \to (Z^Y)^X$, $f \mapsto \overline{f}$.

(1.3) Satz. *Die Abbildung α hat die folgenden Eigenschaften:*

(1) *Ist X Hausdorff-Raum, so ist α stetig.*
(2) *Ist Y lokal kompakt, so ist α bijektiv.*
(3) *Sind X und Y Hausdorff-Räume, so ist α eine Einbettung.*
(4) *Sind X und Y Hausdorff-Räume und ist Y lokal kompakt, so ist α ein Homöomorphismus.*

Beweis. (1) Sei $K \subset X$ kompakt und $V = W(L, U)$ mit kompaktem $L \subset Y$ und offenem $U \subset Z$. Nach (1.1) bilden die Mengen der Form $W(K, V)$ eine Subbasis der Topologie auf $(Z^Y)^X$. Es genügt zu zeigen, daß ihr Urbild bei α offen ist. Das folgt aus der Gleichheit $\alpha^{-1}W(K, V) = W(K \times L, U)$.

(2) Lokal kompakt heißt: In jeder Umgebung U eines Punktes y gibt es eine kompakte Umgebung von y. Sei $f \colon X \times Y \to Z$ eine Mengenabbildung und sei $\overline{f}$ stetig. Sei $(x_0, y_0) \in X \times Y$ und sei U eine offene Umgebung von $f(x_0, y_0)$. Da $\overline{f}(x_0)$ stetig ist, gibt es eine kompakte Umgebung K von y_0, für die $f(\{x_0\} \times K) \subset U$ ist. Da $\overline{f}$ stetig ist, so ist $V = \overline{f}^{-1} W(K, U)$ eine offene Umgebung von x_0. Es gilt dann $f(V \times K) \subset U$, und wir sehen, daß f im Punkt (x_0, y_0) stetig ist.

(3) Aus mengentheoretischen Gründen ist α immer injektiv. Nach (1) ist α stetig. Wir zeigen zunächst, daß Mengen der Form $W(K \times L, U)$ für kompaktes $K \subset X, L \subset Y$ und offenes $U \subset Z$ eine Subbasis für die KO-Topologie auf $Z^{X \times Y}$ bilden. Sei $f \in W(M, U)$, $M \subset X \times Y$ kompakt, $U \subset Z$ offen. Sei $\mathrm{pr}_i(M) = M_i$. Dann ist $M_1 \times M_2 \subset X \times Y$ ein kompakter Hausdorff-Raum. Ferner gilt $M \subset f^{-1}(U) \cap (M_1 \times M_2)$. Da $M_1 \times M_2$ normal ist, gibt es zu jedem $(x, y) \in M$ kompakte Umgebungen K_x von x in M_1 und L_y von y in M_2, so daß

$$K_x \times L_y \subset f^{-1}(U) \cap (M_1 \times M_2)$$

gilt. Endlich viele $K_x \times L_y$ überdecken M, etwa $K_{x(1)} \times L_{y(1)}, \dots, K_{x(m)} \times L_{y(m)}$. Dann ist

$$f \in \bigcap_{i=1}^{m} W(K_{x(i)} \times L_{y(i)}, U) \subset W(M, U).$$

Es ist

$$\alpha W(K \times L, U) = W(K, W(L, U)) \cap \alpha(Z^{X \times Y}).$$

Also ist $\alpha W(K \times L, U)$ offen im Bild von α. Da die Mengen $W(K \times L, U)$ eine Subbasis bilden, so ist α eine offene Abbildung auf das Bild von α.

(4) folgt aus (1) - (3). □

Aus (1.2) und (1.3.2) folgt:

(1.4) Notiz. *Sei Y lokal kompakt. Dann ist $\overline{f}\colon X \to Z^Y$ genau dann stetig, wenn $f\colon X \times Y \to Z$ stetig ist.* $\square$

Die Abbildung $e\colon Y^X \times X \to Y$, $(f,x) \mapsto f(x)$ heißt *Auswertung.* Deren Adjungierte ist die Identität von Y^X. Aus (1.3) entnehmen wir:

(1.5) Notiz. *Sei X lokal kompakt. Dann ist die Auswertung $Y^X \times X \to Y$ stetig.* $\square$

Wir untersuchen nun die funktoriellen Eigenschaften der Abbildungsräume mit KO-Topologie. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ induziert durch Zusammensetzung Abbildungen $f^Z\colon X^Z \to Y^Z$, $g \mapsto fg$ und $Z^f\colon Z^Y \to Z^X$, $g \mapsto gf$.

(1.6) Satz. *f^Z und Z^f sind stetig.*

Beweis. Sei $W(K,U) \subset Y^Z$. Aus $(f^Z)^{-1}W(K,U) = W(K, f^{-1}U)$ folgt die Stetigkeit von f^Z. Sei $W(K,U) \subset Z^X$. Mittels $(Z^f)^{-1}W(K,U) = W(fK,U)$ folgt die Stetigkeit von Z^f. $\square$

(1.7) Satz. *Sei $i\colon Z \subset Y$. Dann ist $i^X\colon Z^X \to Y^X$ eine Einbettung.*

Beweis. Nach (1.6) ist i^X stetig. Es bleibt zu zeigen: Ist $W \subset Z^X$ offen, so gibt es eine offene Menge $W_1 \subset Y^X$ mit $(i^X)^{-1}W_1 = W$. Dazu genügt es, W von der Form $W = W(K,U)$ anzunehmen. Sei $U = Z \cap V = i^{-1}V$ mit offenem V aus Y. Aus

$$(i^X)^{-1}W(K,V) = W(K, i^{-1}V) = W(K,U)$$

folgt die Behauptung. $\square$

(1.8) Satz. *Seien X und Y Hausdorff-Räume. Dann ist*

$$\pi\colon U^X \times V^Y \to (U \times V)^{X \times Y},\ (f,g) \mapsto f \times g$$

stetig.

Beweis. Nach (1.1) bilden die Mengen der Form $W(K, A_1 \times A_2)$, $K \subset X \times Y$ kompakt, $A_1 \subset U$ und $A_2 \subset V$ offen, eine Subbasis der Topologie des Raumes $(U \times V)^{X \times Y}$. Es ist

$$\pi^{-1}W(K, A_1 \times A_2) = W(\mathrm{pr}_1 K, A_1) \times W(\mathrm{pr}_2 K, A_2).$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Eine Abbildung $X \to Y \times Z$ ist „dasselbe“ wie ein Paar von Abbildungen $X \to Y$, $X \to Z$. In diesem Sinne erhalten wir eine tautologische Bijektion

$$\tau\colon (Y \times Z)^X \to Y^X \times Z^X.$$

(1.9) Satz. *Für einen Hausdorff-Raum X ist die voranstehende Abbildung τ ein Homöomorphismus.*

Beweis. Sei $d: X \to X \times X$ die Diagonale. Die Abbildung

$$(Y \times Z)^X \to (Y \times Z)^X \times (Y \times Z)^X \to Y^X \times Z^X, \; f \mapsto (f, f) \mapsto (f_1, f_2)$$

mit $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$ ist nach (1.6) immer stetig und

$$Y^X \times Z^X \to (Y \times Z)^{X \times X} \to (Y \times Z)^X, \; (f, g) \mapsto f \times g \mapsto (f \times g)d$$

ist nach (1.6) und (1.8) stetig. Sie sind invers zueinander. □

(1.10) Satz. *Seien X und Y lokal kompakt. Dann ist die Komposition von Abbildungen $Z^Y \times Y^X \to Z^X$, $(g, f) \mapsto gf$ stetig.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $Z^Y \times Y^X \times X \to Z$, $(g, f, x) \mapsto gf(x)$ stetig ist (1.3). Diese Abbildung läßt sich aber als Komposition

$$Z^Y \times Y^X \times X \to Z^Y \times Y \to Z, \quad (g, f, x) \mapsto (g, f(x)) \mapsto gf(x)$$

mittels zweier stetiger Auswertungen schreiben. □

Wir beweisen noch einmal den Satz II(5.5).

(1.11) Satz. *Sei Z lokal kompakt und $p: X \to Y$ eine Identifizierung. Dann ist $p \times \mathrm{id}(Z): X \times Z \to Y \times Z$ eine Identifizierung.*

Beweis. Wegen der universellen Eigenschaft einer Identifizierung genügt es zu zeigen: Sei U ein beliebiger Raum und $h: Y \times Z \to U$ eine Mengenabbildung und $k = h(p \times \mathrm{id})$ stetig; dann ist auch h stetig. Durch Übergang zur adjungierten Abbildung erhalten wir $\overline{k} = \overline{h}p$. Es ist $\overline{h}$ stetig, da p eine Identifizierung ist. Nach (1.3) ist deshalb h stetig. □

(1.12) Satz. *Sind $f, g: X \to Y$ homotop, so sind für jeden Raum Z auch f^Z und g^Z homotop, sowie Z^f und Z^g.*

Beweis. Sei $H: X \times I \to Y$ eine Homotopie von f nach g. Man verifiziert, daß $c: X^Z \times I \to (X \times I)^Z, (\varphi, t) \mapsto (z \mapsto (\varphi(z), t))$ stetig ist (Aufgabe). Die Zusammensetzung

$$H^Z \circ c: X^Z \times I \to (X \times I)^Z \to Y^Z$$

ist dann nach (1.5) stetig und eine Homotopie von f^Z nach g^Z.

Die Zusammensetzung

$$e \circ (\alpha \times \mathrm{id}) \circ (Z^H \times \mathrm{id}): Z^Y \times I \to Z^{X \times I} \times I \to (Z^X)^I \times I \to Z^X$$

ist ebenfalls stetig und eine Homotopie von Z^f nach Z^g. □

(1.13) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Mit Hilfe der Abbildungsräume kann man den Homotopiebegriff in „dualer“ Weise formulieren: Seien $e_0, e_1: Y^I \to Y$ die Evaluationen an den Stellen $0, 1$. Eine stetige Abbildung $h: X \to Y^I$ entspricht dann einer Homotopie von $h_0 = e_0 h$ nach $h_0 = e_1 h$.

2. Sind X und Y sowie U und V h-äquivalent, so sind X^U und Y^V h-äquivalent.

3. Ist Y lokal kompakt, so induziert der Übergang zur adjungierten Abbildung eine Bijektion von Homotopieklassen $[X \times Y, Z] \cong [X, Z^Y]$.

4. Betrachte die beiden Diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} A \times X & \longrightarrow & B \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \times X & \longrightarrow & D \times X, \end{array}$$

wobei das rechte durch Produkt mit X aus dem linken entsteht. Ist das linke ein Pushout in TOP und X lokal kompakt, so ist auch das rechte ein Pushout.

5. Die KO-Topologie auf der Menge der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die übliche Topologie.

6. Sei X kompakt und Y ein metrischer Raum. Die KO-Topologie auf Y^X wird durch die Supremum-Metrik induziert.

7. Ein Raum X zusammen mit einem Punkt $x \in X$, der als *Grundpunkt* bezeichnet wird, heißt *punktierter Raum*. Eine stetige Abbildung, die Grundpunkte auf Grundpunkte abbildet, heißt *punktierte Abbildung*. Eine Homotopie, die zu jedem Zeitpunkt eine punktierte Abbildung ist, heißt *punktierte Homotopie*. Diese Begriffe sind in der Homotopietheorie wichtig. Seien (X, x), (Y, y) und (Z, z) punktierte Räume. Mit $C(X, Y)^0$ bezeichnen wir den Raum aller punktierten Abbildungen mit der KO-Topologie (Teilraum von $C(X, Y)$). In $C(X, Y)^0$ verwenden wir die konstante Abbildung als Grundpunkt. Ist $f: X \times Y \to Z$ gegeben, so ist die Adjungierte $\bar{f}: X \to C(Y, Z)$ genau dann eine punktierte Abbildung nach $C(X, Y)^0$, wenn der Teilraum $X \times y \cup x \times Y$ durch f auf den Grundpunkt abgebildet wird. Sei

$$p: X \times Y \to X \wedge Y = X \times Y / (X \times y \cup x \times Y)$$

die Quotientabbildung. Ist $g: X \wedge Y \to Z$ gegeben, so sei die Adjungierte von $g \circ p$ mit $\alpha^0 g$ bezeichnet und als Element von $C(X, C(Y, Z)^0)^0$ aufgefaßt. Auf diese Weise erhält man eine Abbildung

$$\alpha^0: C(X \wedge Y, Z)^0 \to C(X, C(Y, Z)^0)^0.$$

Ist Y lokal kompakt, so ist α^0 bijektiv und induziert eine Bijektion

$$[X \wedge Y, Z]^0 \cong [X, C(Y, Z)^0]^0$$

der punktierten Homotopiemengen.

8. Sei $(Y, *)$ ein punktierter Raum und (X, A) ein Raumpaar. Sei $p: X \to X/A$ die Quotientabbildung. Wir betrachten X/A als punktiert mit dem Grundpunkt A. Sei $C((X, A), (Y, *))$ der Unterraum von $C(X, Y)$ aller Abbildungen, die A auf den Grundpunkt werfen. Zusammensetzung mit p induziert eine bijektive stetige Abbildung $C(X/A, Y)^0 \to C((X, A), (Y, *))$; und diese eine Bijektion von Homotopiemengen $[X/A, Y]^0 \to [(X, A), (Y, *)]$.

2 Kompakt erzeugte Räume

Wir bezeichnen mit kh-TOP die volle Unterkategorie von TOP der kompakten Hausdorff-Räume (kh-Räume). Einen kh-Raum nennen wir für die Zwecke der folgenden Untersuchungen *Testraum* und eine stetige Abbildung $f\colon C \to X$ eines Testraumes C eine *Testabbildung* oder *testend*. Analoge Bezeichnungen sind *Testumgebung* und *Testteilraum* für Umgebungen oder Teilräume, die kh-Räume sind.

Ein Raum X heißt *schwach hausdorffsch* oder *sh-Raum*, wenn das Bild jeder Testabbildung abgeschlossen ist. Diese Bedingung können wir als eine Art Trennungsaxiom interpretieren:

(2.1) Notiz. *Ein Hausdorff-Raum ist schwach hausdorffsch. Ein sh-Raum ist ein T_1-Raum.*

Beweis. Ist X hausdorffsch und $f\colon K \to X$ eine Testabbildung, so ist $f(K)$ nach II(1.3) kompakt und nach II(1.5) in X abgeschlossen. Ist X ein sh-Raum, so sind die Bilder von einpunktigen Räumen abgeschlossen. □

(2.2) Notiz. *Ein Raum X ist genau dann ein sh-Raum, wenn jede Testabbildung $f\colon K \to X$ eigentlich ist. Ist X sh-Raum, so hat jede Testabbildung ein hausdorffsches Bild.*

Beweis. Sei X sh-Raum. Eine abgeschlossene Menge $L \subset K$ ist kompakt hausdorffsch, also ist $f|L$ eine Testabbildung und hat demnach ein abgeschlossenes Bild $f(L)$. Folglich ist f abgeschlossen. Für jedes $x \in X$ ist $f^{-1}(x)$ als Urbild des abgeschlossenen Punktes abgeschlossen in K, also kompakt.

Da eigentliche Abbildungen abgeschlossene Bilder haben, folgt auch die Umkehrung.

Ein eigentliches Bild eines kh-Raumes ist ein kh-Raum II(1.8). Also hat jede Testabbildung als eigentliche Abbildung ein hausdorffsches Bild. □

(2.3) Notiz. *Ein Unterraum eines sh-Raumes ist ein sh-Raum. Produkte von sh-Räumen sind sh-Räume.*

Beweis. Sei $B \subset X$ und $f\colon K \to B$ eine Testabbildung. Dann hat f ein in X abgeschlossenes Bild, wenn X ein sh-Raum ist, und dieses ist dann auch in B abgeschlossen.

Seien $(X_j \mid j \in J)$ sh-Räume und sei $f\colon K \to \prod_j X_j$ eine Testabbildung mit den Komponenten $f_j\colon K \to X_j$. Wir schreiben f als Komposition der Diagonale $\Delta\colon K \to \prod_j K$ und des Produktes $\prod_j f_j$. Nach (2.2) sind die f_j eigentlich und nach II(6.11) ist $\prod_j f_j$ eigentlich. Da K hausdorffsch ist, so ist $\Delta(K)$ in $\prod_j K$ abgeschlossen. Also ist $f(K)$ als Bild einer abgeschlossenen Menge bei einer eigentlichen Abbildung abgeschlossen. □

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt *k-abgeschlossen* (*k-offen*), wenn für jede Testabbildung $f\colon K \to X$ das Urbild $f^{-1}(A)$ in K abgeschlossen (offen) ist. Die k-offenen Mengen von $(X, \mathcal{T})$ bilden eine Topologie $k\mathcal{T}$

auf X. Die folgende Notiz dient zur Erläuterung dieser Definition. Wir nennen eine Topologie $\mathcal{S}$ auf X kh-definierbar, wenn es eine Familie $(f_j\colon K_j \to X \mid j \in J)$ von Testabbildungen gibt, so daß gilt: $A \subset X$ ist $\mathcal{S}$-abgeschlossen $\Leftrightarrow$ für alle $j \in J$ ist $f_j^{-1}(A)$ abgeschlossen in K_j. Diese Bedingung können wir auch so formulieren: Die kanonische Abbildung $\langle f_j \rangle\colon \coprod_j K_j \to (X, \mathcal{S})$ ist eine Identifizierung. Eine kh-definierbare Topologie ist feiner als $\mathcal{T}$. Wir definieren eine Partialordnung auf der Menge der kh-definierbaren Topologien durch $\mathcal{S}_1 \le \mathcal{S}_2 \Leftrightarrow \mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2$.

(2.4) Notiz. *Die Topologie $k\mathcal{T}$ ist die bezüglich der genannten Partialordnung maximale kh-definierbare Topologie.*

Beweis. Nach dem Zornschen Lemma gibt es eine maximale kh-definierbare Topologie $\mathcal{S}$. Falls diese Topologie nicht gleich $k\mathcal{T}$ ist, so gibt es eine $\mathcal{S}$-offene Menge U, die nicht k-offen ist. Es gibt dann eine Testabbildung $t\colon K \to X$, so daß $t^{-1}(U)$ nicht offen ist. Wenn wir t zur definierenden Familie von $\mathcal{S}$ hinzunehmen, sehen wir daß $\mathcal{S}$ nicht maximal ist. $\square$

(2.5) Folgerung. *Die k-Räume sind also genau die Räume, die Quotient einer topologischen Summe von kh-Räumen sind.* $\square$

Wir schreiben $kX = k(X) = (X, k\mathcal{T})$. Jede abgeschlossene (offene) Menge ist offenbar auch k-abgeschlossen (k-offen). Deshalb ist $k\mathcal{T}$ feiner als $\mathcal{T}$ und die identitische Abbildung $\iota = \iota_X\colon kX \to X$ stetig. Sei $f\colon K \to X$ eine Testabbildung. Dieselbe Mengenabbildung $f\colon K \to kX$ ist dann ebenfalls stetig. Ist nämlich $U \subset kX$ offen, so ist $U \subset X$ k-offen, also $f^{-1}(U) \subset K$ offen. Also induziert ι_X für jeden kh-Raum K eine Bijektion

$$\textbf{(2.6)} \qquad \mathrm{TOP}(K, kX) \xrightarrow{\cong} \mathrm{TOP}(K, X), \quad f \mapsto \iota_X \circ f.$$

Deshalb haben X und kX dieselben k-offenen Mengen, das heißt es ist $k(kX) = kX$.

Ein topologischer Raum X heißt *k-Raum*, wenn die k-abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind, wenn also $X = kX$ ist. Wegen $k(kX) = kX$ ist kX immer ein k-Raum.

Ein Raum heißt *kompakt hausdorffsch erzeugt* oder *shk-Raum*, wenn er ein sh-Raum und ein k-Raum ist. Insgesamt haben wir die vollen Unterkatorien sh-TOP, k-TOP und shk-TOP von TOP der entsprechend notierten Räume.

(2.7) Notiz. *Folgende Aussagen über einen Raum X sind äquivalent:*

(1) *X ist ein k-Raum.*
(2) *Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist (genau dann) stetig, wenn für jede Testabbildung $t\colon K \to X$ die Komposition ft stetig ist.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Sei $U \subset Y$ offen. Um $f^{-1}(U)$ als offen nachzuweisen, genügt es, diese Menge als k-offen zu erkennen, da X ein k-Raum ist. Sei $t\colon K \to X$ Testabbildung und ft stetig. Dann ist $k^{-1}(f^{-1}(U)$ offen, und das zeigt die gewünschte k-Offenheit.

(2) $\Rightarrow$ (1). Wir zeigen, daß die Identität $X \to kX$ stetig ist. Das folgt aus (2) und weil X und kX dieselben Testabbildungen haben (2.6). □

(2.8) Notiz. *Sei $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist dieselbe Mengenabbildung $kf\colon kX \to kY$ stetig.*

Beweis. Nach (2.7) genügt es zu zeigen, daß für jede Testabbildung $t\colon K \to kX$ die Komposition $k(f) \circ t$ stetig ist. Das folgt aber aus (2.6). □

Die Zuordnungen $X \mapsto kX$, $f \mapsto kf$ liefern einen Funktor k; außerdem haben wir den Inklusionsfunktor i.

$$k\colon \mathrm{TOP} \to \text{k-TOP}, \qquad i\colon \text{k-TOP} \to \mathrm{TOP}$$

(2.9) Notiz. *Der Funktor k ist rechtsadjungiert zum Funktor i.*

Beweis. Eine in X und Y natürliche Bijektion $\text{k-TOP}(Y, kX) \cong \mathrm{TOP}(iY, X)$ wird durch $f \mapsto \iota \circ f$ gegeben. Diese Abbildung ist sicherlich injektiv. Ist Y ein k-Raum und $f\colon Y \to X$ stetig, so ist $kf\colon Y = kY \to kX$ stetig; damit erkennt man die Surjektivität. □

(2.10) Notiz. *Sei X ein sh-Raum. Dann ist $A \subset X$ genau dann k-abgeschlossen, wenn für jeden kh-Raum $K \subset X$ die Menge $A \cap K$ in K abgeschlossen ist. Insbesondere ist X genau dann ein k-Raum, wenn gilt: $A \subset X$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ für jeden kh-Raum $K \subset X$ ist $A \cap K$ in K abgeschlossen.* □

Beweis. Sei A k-abgeschlossen. Die Inklusion $K \subset X$ eines kh-Raumes ist eine Testabbildung. Also ist $A \cap K$ in K abgeschlossen.

Erfülle umgekehrt A die genannte Bedingung und sei $f\colon L \to X$ eine Testabbildung. Da X ein sh-Raum ist, ist $f(L)$ ein kh-Raum und folglich $f(L) \cap A$ in $f(L)$ abgeschlossen. Dann ist $f^{-1}(A) = f^{-1}(f(L) \cap A)$ in $L = f^{-1}f(L)$ abgeschlossen. Das zeigt: A ist k-abgeschlossen. □

Ist X ein sh-Raum, so ist A in $k(X)$ genau dann abgeschlossen, wenn der Schnitt von A mit jeder kh-Menge K in X abgeschlossen ist (2.8). In diesem Fall läßt sich also $k(X)$ durch interne Eigenschaften von X gewinnen. Ist X ein sh-Raum, so auch kX. Die shk-Räume sind eine für viele Zwecke bequeme Klasse von Räumen.

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *quasi-stetig*, wenn die Zusammensetzung mit jeder Testabbildung $K \to X$ stetig ist. Stetige Abbildungen sind offenbar quasi-stetig. Die Komposition quasi-stetiger Abbildungen ist quasi-stetig. Wir erhalten damit die Kategorie QU der topologischen Räume und quasi-stetigen Abbildungen. TOP ist eine Unterkategorie von QU; in QU gibt es aber eventuell mehr Morphismen zwischen zwei topologischen Räumen als in TOP. Wegen (2.7) können wir sagen: X ist genau dann ein k-Raum, wenn jede quasi-stetige Abbildung $X \to Y$ stetig ist.

Die Aussage (5) des folgenden Satzes charakterisiert noch einmal die k-Räume unter den sh-Räumen wie in (2.10).

(2.11) Satz. *Jede der folgenden Bedingungen ist hinreichend dafür, daß X ein k-Raum ist:*

(1) *X ist metrisierbar.*
(2) *Jeder Punkt von X hat eine abzählbare Umgebungsbasis.*
(3) *Jeder Punkt von X hat eine Umgebung, die kompakt und hausdorffsch ist.*
(4) *Zu jedem $Q \subset X$ und jedem Berührpunkt x von Q gibt es einen Testteilraum K von X, so daß x Berührpunkt von $Q \cap K$ in K ist.*
(5) *Für alle $Q \subset X$ gilt: Aus $Q \cap K$ offen (abgeschlossen) in K für alle Testteilräume $K \subset X$ folgt, daß Q offen (abgeschlossen) in X ist.*

Beweis. (1) ist ein Spezialfall von (2).
(2) Sei $Q \subset X$ und sei $f^{-1}(Q)$ abgeschlossen für alle testenden $f\colon C \to X$. Wir haben zu zeigen, daß Q abgeschlossen ist. Sei also a Berührpunkt von Q und sei $(U_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine Umgebungsbasis von a. Für jedes n wählen wir ein $a_n \in Q \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Dann konvergiert die Folge (a_n) gegen a. Der Teilraum $K = \{0, 1, 2^{-1}, 3^{-1}, \ldots\}$ von $\mathbb{R}$ ist kompakt. Die Abbildung $f\colon K \to X$, $f(0) = a$, $f(n^{-1}) = a_n$ ist stetig. Es ist $n^{-1} \in f^{-1}(Q)$. Da nach Voraussetzung $f^{-1}(Q)$ in K abgeschlossen ist, so ist $0 \in f^{-1}(Q)$, also $a = f(0) \in Q$. Also enthält Q alle seine Berührpunkte und ist demnach abgeschlossen.
(3) $\Rightarrow$ (4). Sei $Q \subset X$ und a Berührpunkt von Q. Wir wählen eine Testumgebung K von a und zeigen, daß a Berührpunkt von $Q \cap K$ in K ist. Sei dazu U eine Umgebung von a in K. Dann gibt es eine Umgebung U' von a in X mit $U' \cap K \subset U$. Da $U' \cap K$ Umgebung von a in X ist und a Berührpunkt von Q, folgt

$$U \cap (Q \cap K) \supset (U' \cap K) \cap (Q \cap K) = (U' \cap K) \cap Q \neq \emptyset.$$

Also ist a Berührpunkt von $Q \cap K$ in K.
(4) $\Rightarrow$ (5). Sei $Q \cap K$ abgeschlossen in K für alle Testteilräume $K \subset X$. Sei a Berührpunkt von Q. Nach (4) gibt es einen Testteilraum K_0 von X, so daß a Berührpunkt von $Q \cap K_0$ in K_0 ist. Nach Voraussetzung von (5) ist $Q \cap K_0$ abgeschlossen. Demnach ist $a \in Q \cap K_0 \subset Q$.
(5) Sei $f^{-1}(Q)$ abgeschlossen in K für alle testenden $f\colon K \to X$. Insbesondere ist dann für Testteilräume $L \subset X$ die Menge $Q \cap L$ in L abgeschlossen. Nach (5) ist dann Q in X abgeschlossen. Also ist X ein k-Raum. □

(2.12) Satz. *Sei $p\colon Y \to X$ eine Identifizierung und Y ein k-Raum. Dann ist auch X ein k-Raum.*

Beweis. Sei $B \subset X$ k-abgeschlossen. Wir haben zu zeigen, daß B abgeschlossen ist, also, da p eine Identifizierung ist, daß $p^{-1}(B)$ abgeschlossen in Y ist. Sei $g\colon D \to Y$ eine Testabbildung. Dann ist $g^{-1}(p^{-1}(B)) = (pg)^{-1}(B)$ abgeschlossen in D, da B k-abgeschlossen ist. Da Y ein k-Raum ist, so ist also $p^{-1}(B)$ abgeschlossen in Y. □

(2.13) Satz. *Ein abgeschlossener (oder offener) Unterraum eines k-Raumes ist ein k-Raum. Dasselbe gilt für shk-Räume.*

Beweis. Sei A abgeschlossen und $B \subset A$ eine Teilmenge, so daß $f^{-1}(B)$ abgeschlossen in C ist für alle Testabbildungen $f\colon C \to A$. Zu zeigen ist: B ist abgeschlossen in A oder, dazu äquivalent, in X.

Ist $g\colon D \to X$ testend, so ist $g^{-1}(A)$ in D abgeschlossen und folglich kompakt, da D kompakt ist. Durch Einschränkung von g erhalten wir eine stetige Abbildung $h\colon g^{-1}(A) \to A$. Es ist $h^{-1}(B) = g^{-1}(B)$ abgeschlossen in $g^{-1}(A)$ und folglich in D, und mithin ist B abgeschlossen in X.

Sei U offen im k-Raum X. Wir schreiben X als Quotient $q\colon z \to X$ gemäß (2.5). Dann ist $q\colon q^{-1}(U) \to U$ eine Identifizierung und $q^{-1}(U)$ als topologische Summe von lokal kompakten Hausdorff-Räumen ein k-Raum. Also ist der Quotient U ein k-Raum.

Die zweite Aussage des Satzes folgt, wenn man noch (2.3) bedenkt. □

Im allgemeinen ist ein Unterraum eines k-Raumes kein k-Raum (2.27). Sei X ein k-Raum und $i\colon A \subset X$ die Inklusion. Dann ist $k(i)\colon k(A) \to X = k(X)$ stetig. Der folgende Satz zeigt, daß $k(i)$ in der Kategorie k-TOP die formale Eigenschaft eines Teilraums hat.

(2.14) Satz. *Eine Abbildung $h\colon Z \to k(A)$ eine k-Raumes Z nach $k(A)$ ist genau dann stetig, wenn $k(i) \circ h$ stetig ist.*

Beweis. Mit h ist auch $k(i) \circ h$ stetig. Sei, umgekehrt, $k(i)h$ stetig. Es ist $k(i) = i \circ \iota_A$. Da i die Inklusion eines Unterraums ist, so ist $\iota_A \circ h$ stetig. Nach Satz (2.9) ist also h stetig. □

(2.15) Satz. *Das Produkt in* TOP *eines k-Raumes X mit einem lokal kompakten Hausdorff-Raum Y ist ein k-Raum.*

Beweis. Ein lokal kompakter Haudorff-Raum ist nach (2.11.3) ein k-Raum. Wir schreiben X als Quotient von $q\colon Z \to X$, worin Z eine Summe von kh-Räumen ist (2.5). Da das Produkt einer Identifizierung mit einem lokal kompakten Raum wieder eine Identifizierung ist (1.10), so sehen wir, daß $X \times Y$ Quotient des lokal kompakten Hausdorff-Raumes, also k-Raumes $Z \times Y$, ist und demnach ein k-Raum (2.12). □

Im allgemeinen ist das topologische Produkt zweier k-Räume kein k-Raum (2.27). Deshalb sucht man nach einem kategorientheoretischen Produkt in der Kategorie k-TOP. Sei $(X_j \mid j \in J)$ eine Familie von k-Räumen. Sei $\prod_j X_j$ ihr gewöhnliches topologisches Produkt (das ist ein Produkt in der Kategorie TOP). Wir haben stetige Abbildungen

$$p_j = k(\mathrm{pr}_j)\colon k(\prod_j X_j) \to k(X_j) = X_j.$$

Der folgende Satz ist ein Spezialfall der Aussage, daß ein rechtsadjungierter Funktor Limites respektiert.

(2.16) Satz. *$(p_j\colon k(\prod_j X_j) \to X_j \mid j \in J)$ ist ein Produkt der $(X_j \mid j \in J)$ in der Kategorie* k-TOP.

Beweis. Wir benutzen (2.9) und die universelle Eigenschaft des topologischen Produktes und erhalten, in Kurzform geschrieben, für einen k-Raum B die kanonischen Bijektionen

$$\text{k-TOP}(B, k(\prod X_j)) = \text{TOP}(B, \prod X_j) \cong \prod \text{TOP}(B, X_j) = \prod \text{k-TOP}(B, X_j),$$

und das ist die Behauptung. □

Für zwei Faktoren wollen wir das soeben definierte Produkt in k-TOP auch durch $X \times_k Y$ bezeichnen. Die nächste Notiz zeigt, daß die sh-Räume in der Kategorie k-TOP die formal-hausdorffschen sind.

(2.17) Notiz. *Ein k-Raum X ist genau dann ein sh-Raum, wenn die Diagonale D_X des Produktes $X \times_k X$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Sei X ein sh-Raum. Um D_X als abgeschlossen nachzuweisen, müssen wir für jede Testabbildung $f\colon K \to X \times_k X$ das Urbild $f^{-1}(D_X)$ als abgeschlossen erkennen. Sei $f_j\colon K \to X$ die j-te Komponente von f. Dann ist $L_j = f_j(K)$ ein kh-Raum, da X ein sh-Raum ist. Also ist $L = L_1 \cup L_2 \subset X$ ein kh-Rau. Wegen $f^{-1}D_X = f^{-1}L$ ist diese Menge abgeschlossen.

Sei D_X ihn $X \times_k X$ abgeschlossen und $f\colon K \to X$ eine Testabbildung. Um $f(K) \subset X$ als abgeschlossen nachzuweisen, testen wir mit $g\colon L \to X$. Wir haben $g^{-1}f(K) \subset L$ als abgeschlossen zu erkennen. Es gilt

$$g^{-1}f(K) = \mathrm{pr}_2((f \times g)^{-1}D_X).$$

Da D_X abgeschlossen ist, so ist das Urbild bei $f \times g$ abgeschlossen, also auch pr_2 davon als kompakte Menge in einem Hausdorff-Raum. □

Sind X und Y topologische Räume, so bezeichnen wir den Abbildungsraum X^Y mit der KO-Topologie auch mit $T(X, Y)$.

(2.18) Satz. *Seien X und Y k-Räume und sei $f\colon X \times_k Y \to Z$ stetig. Die adjungierte Abbildung $f^\wedge\colon X \to kT(Y, Z)$, die als Mengenabbildung existiert, ist stetig.*

Beweis. Die Abbildung $f^\wedge\colon X \to kT(Y, Z)$ ist nach (2.7) stetig, wenn für alle Testabbildungen $t\colon C \to X$ die Verkettung $f^\wedge \circ t$ stetig ist. Es ist $f^\wedge \circ t = (f \circ (t \times \mathrm{id}_Y))^\wedge$. Also genügt es, X als kh-Raum anzunehmen. Dann ist aber nach (2.15) $X \times_k Y = X \times Y$ und deshalb $f^\wedge\colon X \to T(Y, Z)$ stetig (1.2) und folglich nach (2.7) auch $f^\wedge\colon X \to kT(Y, Z)$ stetig. □

(2.19) Satz. *Sei Y ein k-Raum. Die Auswertung*

$$e_{Y,Z}\colon kT(Y, Z) \times_k Y \to Z, \quad (f, y) \mapsto f(y)$$

ist stetig.

Beweis. Sei $t\colon C \to kT(Y, Z) \times_k Y$ eine Testabbildung. Die Stetigkeit von $e_{Y,Z} \circ t$ ist zu zeigen. Seien $t_1^\wedge\colon C \to T(Y, Z)$ und $t_2\colon C \to Y$ die beiden stetigen Komponenten von t. Wir zeigen zunächst: Die zu $t_1^\wedge$ adjungierte Abbildung $t_1\colon C \times Y \to Z$

ist stetig. Nach (1.4) ist diese Stetigkeit äquivalent zur Stetigkeit der anderen adjungierten Abbildung $t_1^\vee\colon Y \to T(C,Z)$. Um deren Stetigkeit zu zeigen, setzen wir mit einer Testabbildung $s\colon D \to Y$ zusammen. Es ist $t_1^\vee \circ s = T(s,Z) \circ t_1^\wedge$ aber stetig. Ferner gilt $e_{Y,Z} \circ t = t_1 \circ (\mathrm{id}, t_2)$, und die rechte Seite ist stetig. □

Eine Kombination von (2.18) und (2.19) liefert die folgende *universelle Eigenschaft der Auswertung* $e_{Y,Z}$ für den k-Raum X:

(2.20) Notiz. *Seien X und Y k-Räume. Die Zuordnungen $f \mapsto f^\wedge$ und $g \mapsto e_{Y,Z} \circ (g \times \mathrm{id}_Y) = g^\sim$ sind zueinander inverse Bijektionen*

$$\mathrm{TOP}(X \times_k Y, Z) \cong \mathrm{TOP}(X, kT(Y,Z))$$

zwischen den genannten Mengen von stetigen Abbildungen. □

Die voranstehende Bijektion wird nun als Homöomorphismus zwischen den zugehörigen Abbildungsräumen nachgewiesen.

(2.21) Satz. *Seien X, Y und Z k-Räume. Da $e_{Y,Z}$ stetig ist, wird eine Mengenabbildung*

$$\lambda\colon kT(X, kT(Y,Z)) \to kT(X \times_k Y, Z), \quad f \mapsto e_{Y,Z} \circ (f \times \mathrm{id})$$

induziert. Die Abbildung λ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} kT(X, kT(Y,Z)) \times_k X \times_k Y & \xrightarrow{e_1 \times \mathrm{id}} & kT(Y,Z) \times_k Y \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda \times \mathrm{id} \times \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle e_2} \\ kT(X \times_k Y, Z) \times_k X \times_k Y & \xrightarrow{e_3} & Z \end{array}$$

mit $e_1 = e_{X,kT(Y,Z)}$, $e_2 = e_{Y,Z}$ und $e_3 = e_{X \times_k Y, Z}$. Da $e_1 \times \mathrm{id}$ und e_2 stetig sind, folgt aus der universellen Eigenschaft von e_3, daß λ stetig ist, mit der Bezeichnung aus (2.20) gilt nämlich $e_2 \circ (e_1 \times \mathrm{id}) = \lambda^\sim$. Wegen der universellen Eigenschaft von e_1 gibt es genau eine stetige Abbildung

$$\mu\colon kT(X \times_k Y, Z) \to kT(X, kT(Y,Z)), \quad f \mapsto f^\wedge,$$

so daß $e_1 \circ (\mu \times \mathrm{id}(X)) = e_3^\wedge$ ist, wobei $e_3^\wedge\colon kT(X \times_k Y, Z) \times_k X \to kT(Y,Z)$ die Adjungierte von e_3 bezüglich der Variablen Y ist. Da λ und μ zueinander inverse Mengenabbildungen sind, handelt es sich um Homöomorphismen. □

(2.22) Satz. *Seien X und Y k-Räume. Seien $f\colon X \to X'$ und $g\colon Y \to Y'$ Identifizierungen. Dann ist auch $f \times g\colon X \times_k Y \to X' \times_k Y'$ eine Identifizierung.*

Beweis. Ohne wesentliche Einschränkung sei $g = \mathrm{id}$, da die Verkettung von Identifizierungen wieder eine ist. Der Beweis wird mit (2.21) wie für (1.11) geführt. □

(2.23) Notiz. *Sei $f\colon X \to Y$ eine Identifizierung und X ein shk-Raum. Genau dann ist Y ein shk-Raum, wenn $R = \{(x_1, x_) \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ in $X \times_k X$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Es ist R das Urbild von D_Y bei $f \times f$. Da $f \times_k f$ nach (2.22) eine Identifizierung ist, so ist D_Y genau dann abgeschlossen, wenn R abgeschlossen ist. Nun wenden wir (2.12) und (2.17) an. □

Sei $(X_j \mid j \in J)$ eine Familie von k-Räumen. Dann ist die topologische Summe $\sum_{j \in J} X_j$ ein k-Raum. Das Produkt in k-TOP ist mit der Summenbildung verträglich.

(2.24) Notiz. *Sei*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & B \arrow[d, "J"] \\ X \arrow[r, "F"] & Y \end{tikzcd}$$

ein Pushout topologischer Räume und sei $j\colon A \subset X$ abgeschlossen. Seien X und B shk-Räume. Dann ist Y ein shk-Raum.

Beweis. Als Quotient des k-Raumes $X + B$ ist Y ein k-Raum. Als abgeschlossener Teil von X ist A ein shk-Raum. Man verifiziert, daß die Relation zur Definition von Y abgeschlossen in $(X + B) \times_k (X + B)$ ist. Nun wendet man (2.23) an. □

(2.25) Notiz. *Seien Y und Z k-Räume und sei Z ein sh-Raum. Dann ist der Abbildungsraum $kT(Y, Z)$ ein sh-Raum. Insbesondere ist also für shk-Räume Y und Z auch $kT(Y, Z)$ ein shk-Raum.*

Beweis. Sei $f^\wedge\colon K \to kT(Y, Z)$ eine Testabbildung. Wir haben zu zeigen, daß sie ein abgeschlossenes Bild hat, also ein k-abgeschlossenes. Sei dazu $g^\wedge\colon L \to kT(Y, Z)$ eine weitere Testabbildung. Es bleibt somit schließlich zu zeigen, daß das Urbild M von $f^\wedge(K)$ bei $g^\wedge$ abgeschlossen ist. Wir benutzen die adjungierten Abbildungen $f\colon K \times Y \to Z$ und $g\colon L \times Y \to Z$. Für $y \in Y$ sei

$$i_y\colon K \times L \to (K \times Y) \times_k (L \times Y), \quad (k, l) \mapsto (k, y, l, y).$$

Damit gilt

$$M = \mathrm{pr}_2 \left(\bigcap\nolimits_{y \in Y} ((f \times g) i_y)^{-1} D_Z \right).$$

Da Z ein sh-Raum ist, also die Diagonale D_Z abgeschlossen (2.17) ist, so ist M abgeschlossen. □

Für die Zwecke der Homotopietheorie betrachten wir nun noch punktierte Räume. Sei $(X_j \mid j \in J)$ eine Familie von punktierten k-Räumen. Sei $\prod_j X_j$ deren Produkt in k-TOP. Sei $W_J X_j$ die Teilmenge der Punkte des Produktes, für die wenigstens eine Koordinate gleich dem Grundpunkt ist. Das *Smash-Produkt* $\bigwedge_j X_j$ ist der Quotientraum $(\prod_j X_j)/W_J X_j$. Ist $J = \{1, \dots, n\}$, so schreiben wir dafür $X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$. Eine Familie von punktierten Abbildungen $f_j\colon X_j \to Y_j$ induziert eine punktierte Abbildung $\bigwedge f_j\colon \bigwedge_j X_j \to \bigwedge_j Y_j$.

Seien X und Y punktierte k-Räume. Sei $T^0(X,Y) \subset TX,Y)$ der Teilraum der punktierten Abbildungen. Eine punktierte Abbildung $f\colon X \wedge Y \to Z$ setzen wir mit der Projektion $p\colon X \times_k Y \to X \wedge Y$ zusammen. Die Adjungierte $(fp)^\wedge\colon X \to kT(Y,Z)$ ist stetig und hat ein in $kT^0(Y,Z)$ gelegenes Bild. Wegen (2.14) erhalten wir eine stetige Abbildung $X \to kT^0(Y,Z)$, die wir in diesem Fall auch als $f^\wedge$ notieren.

Die Auswertung $e_{Y,Z}$ induziert eine Abbildung $e^0_{Y,Z}$, die das folgende Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{tikzcd}
kT^0(Y,Z) \times_k X \arrow[r, "k(i) \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "p"] & kT(Y,Z) \times_k X \arrow[d, "e_{Y,Z}"] \\
kT^0(Y,Z) \wedge X \arrow[r, "e^0_{Y,Z}"] & Y
\end{tikzcd}$$

Darin ist i die Inklusion und p die Quotientabbildung. Aus der Stetigkeit von $k(i)$ und $e_{Y,Z}$ folgt die Stetigkeit der punktierten Auswertung $e^0_{Y,Z}$. Formal ähnlich wie Satz (2.21) beweist man:

(2.26) Satz. *Seien X, Y und Z punktierte k-Räume. Die Zuordnung*

$$\mu^0\colon kT^0(X \wedge Y, Z) \to kT^0(X, kT^0(Y,Z)), \quad f \mapsto f^\wedge$$

ist ein Homöomorphismus. □

(2.27) Beispiel. Wir geben jetzt ein Beispiel für die folgenden Aussagen an.

(1) Das Produkt von Identifizierungen ist im allgemeinen keine Identifizierung.
(2) Das Produkt von kompakt erzeugten Räumen ist im allgemeinen nicht kompakt erzeugt.
(3) Ein Teilraum eines kompakt erzeugten Raumes ist im allgemeinen nicht kompakt erzeugt.

Der Raum $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ entstehe aus $\mathbb{R}$, indem der Teilraum $\mathbb{Z}$ zu einem Punkt identifiziert wird (also keine Faktorgruppe!). Sei $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die kanonische Projektion.

Wir zeigen zunächst: Ist $K \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ kompakt, so gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, so daß $K \subset p[-l,l]$ ist. Zum Beweis sei angenommen, das sei nicht so. Dann gibt es zu jedem $l \in \mathbb{N}$ ein $x_l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mit $|x_l| > l$ und $p(x_l) \in K$. Die Folge der $p(x_l)$ hat dann keinen Häufungspunkt in K, im Widerspruch zur Kompaktheit von K.

Wir zeigen, daß die Abbildung

$$p \times \mathrm{id}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$$

nicht identifizierend ist. Aus dem Beweis werden sich auch die anderen beiden Aussagen ergeben.

Sei dazu $(r_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine streng monoton fallende Folge rationaler Zahlen mit dem Grenzwert $\sqrt{2}$. Sei

$$F = \left\{ \left(m + \frac{1}{2n}, \frac{r_n}{m} \right) \mid n, m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}.$$

Wir weisen die folgenden Eigenschaften nach.

(1) F ist abgeschlossen in $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$.

(2) F ist saturiert bezüglich $p \times \mathrm{id}$.

(3) $G = (p \times \mathrm{id})(F)$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$.

Zu (1). Die einzigen Berührpunkte von F in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die nicht zu F gehören, bilden die diskrete Menge $\{(m, m^{-1}\sqrt{2} \mid m \in \mathbb{N}\}$. Demnach gehören alle Berührpunkte von F in $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ schon zu F. Also ist F in $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ abgeschlossen.

Zu (2). Das wird leicht nachgeprüft.

Zu (3). Zunächst einmal ist $(p(0), 0) \notin G$. Wir zeigen, daß $z = (p(0), 0)$ Berührpunkt von G ist. Sei U eine Umgebung von z. Dann gibt es eine Umgebung V von $p(0)$ in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß $V \times (\,]-\varepsilon, \varepsilon[\cap \mathbb{Q}) \subset U$ ist. Sei $m^{-1}\sqrt{2} < 2^{-1}\varepsilon$. Es ist $p^{-1}(V)$ eine Umgebung von m in $\mathbb{R}$, denn $m \in p^{-1}p(0) \subset p^{-1}(V)$. Demnach gibt es ein $\delta > 0$ mit $]m - \delta, m + \delta[\subset p^{-1}(V)$. Sei

$$\frac{1}{2n} < \delta \quad \text{und} \quad r_n - \sqrt{2} < m\frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt

$$(p \times \mathrm{id})(m + \frac{1}{2n}, \frac{r_n}{m}) \in V \times (\,]-\varepsilon, \varepsilon[\cap \mathbb{Q}) \subset U,$$

denn

$$m + \frac{1}{2n} \in]m - \delta, m + \delta[\subset p^{-1}(V)$$

$$0 < \frac{r_n}{m} = \frac{\sqrt{2}}{m} + \frac{r_n - \sqrt{2}}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist $U \cap G \neq \emptyset$ und demnach z Berührpunkt von G.

Wir sehen jetzt, daß $p \times \mathrm{id}$ keine Identifizierung ist, weil es eine gesättigte abgeschlossene Menge F gibt, deren Urbild nicht abgeschlossen ist.

Der Raum $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ ist nicht kompakt erzeugt. Zum Nachweis sei $s\colon K \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ eine Testabbildung. Wir zeigen, daß $s^{-1}(G)$ in K abgeschlossen ist, obgleich G nicht abgeschlossen ist. Die beiden Projektionen $\mathrm{pr}_i\, s(K)$ sind als kompakte Teilräume in Hausdorff-Räumen kompakt und hausdorffsch. Es gibt also ein $l \in \mathbb{N}$, so daß $\mathrm{pr}_1\, s(K) \subset p[-l, l]$ ist. Wegen

$$s(K) \subset \mathrm{pr}_1(K) \times \mathrm{pr}_2\, s(K) \subset p[-l - l] \times \mathrm{pr}_2\, s(K)$$

folgt $s^{-1}(G) = s^{-1}(G \cap p[-l, l] \times \mathrm{pr}_2\, s(K))$. Die Menge $G \cap p[-l, l] \times \mathrm{pr}_2\, s(K)$ ist aber endlich. Nach Konstruktion ist nämlich F abgeschlossener diskreter Teilraum von $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$. Ferner ist $F \cap [-l, l] \times \mathrm{pr}_2\, s(K)$ endlich als abgeschlossener diskreter Teilraum des kompakten Raumes $[-l, l] \times \mathrm{pr}_2\, s(K)$. Damit ist auch

$$(p \times \mathrm{id})(F \cap [-l, l] \times \mathrm{pr}_2\, s(K)) = G \cap p[-l, l] \times \mathrm{pr}_2\, s(K)$$

endlich. Eine endliche Menge in einem Hausdorff-Raum ist aber abgeschlossen und damit $s^{-1}(G)$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen.

Das Produkt $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ ist nach (2.12) und (2.15) kompakt erzeugt. Der Teilraum $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ trägt die Produkttopologie und ist, wie wir gesehen haben, nicht kompakt erzeugt. $\diamond$

(2.28) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Sei $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$, sei X_j ein shk-Raum und seien die $X_j \subset X_{j+1}$ abgeschlossen. Dann ist $X = \cup_j X_j$ mit der Kolimes-Topologie ein shk-Raum. Sind die X_i k-Räume, so ist X als Quotient des k-Raumes $\coprod_i X_i$ ein k-Raum. Sind die X_i sh-Räume, also T_1-Räume, so hat jede Testabbildung $f\colon K \to X$ ein Bild, das in einem X_i liegt und dort abgeschlossen ist. Sind alle $X_i \subset X_{i+1}$ abgeschlossen, so ist das Bild auch in X abgeschlossen und demnach X ein sh-Raum.

2. Seien X und Y k-Räume. Der Übergang zur adjungierten Abbildung induziert Bijektionen von Homotopiemengen $[X \times_k Y, Z] \cong [X, kT(Y,Z)]$ und $[X \wedge Y, Z]^0 \cong [X, kT^0(Y,Z)]^0$.

5 Transformationsgruppen

1 Topologische Gruppen

Eine *topologische Gruppe* $(G, m, \mathcal{O})$ besteht aus einer Gruppe (G, m) mit der Multiplikation $m: G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto m(g, h) = gh$ und einer Topologie $\mathcal{O}$ auf G, so daß die Abbildung m und der Übergang zum Inversen $\iota: G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$ stetig sind. Das neutrale Element werde mit e bezeichnet. In einer topologischen Gruppe G sind die *Linkstranslationen* $l_g: G \to G$, $x \mapsto gx$ stetig und wegen $l_g l_h = l_{gh}$ und $l_e = \mathrm{id}$ sogar Homöomorphismen.

Ein Homomorphismus $f: G \to H$ zwischen topologischen Gruppen ist genau dann stetig, wenn er am neutralen Element e stetig ist. Sei nämlich $f(g) = h$ und V eine Umgebung von h. Dann ist $h^{-1}V = \{h^{-1}x \mid x \in V\}$ eine Umgebung von e. Ist f in e stetig, so gibt es eine Umgebung U von e in G, so daß $f(U) \subset h^{-1}V$ ist. Dann ist gU eine Umgebung von g, und weil f ein Homomorphismus ist, gilt $f(gU) = f(g)f(U) = hf(U) \subset hh^{-1}V = V$. Also ist f auch im Punkt g stetig.

Sind A und B Teilmengen einer Gruppe G, so verwenden wir die Bezeichnungen $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$, $A^2 = AA$, $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$ und ähnlich geartete.

(1.1) Satz. *Sei G eine topologische Gruppe und $\mathcal{U}$ eine offene Umgebungsbasis von e. Dann gilt:*

(1) *Zu jedem $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}$, so daß $V^2 \subset U$.*
(2) *Zu jedem $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}$, so daß $V^{-1} \subset U$.*
(3) *Zu jedem $U \in \mathcal{U}$ und jedem $x \in U$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}$, so daß $xV \subset U$.*
(4) *Zu jedem $U \in \mathcal{U}$ und jedem $x \in G$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}$, so daß $xVx^{-1} \subset U$.*

Sei umgekehrt G eine Gruppe und $\mathcal{U}$ ein System von nichtleeren Teilmengen von G mit den Eigenschaften (1) - (4) und so, daß der Schnitt zweier Mengen in $\mathcal{U}$ wieder eine Menge aus $\mathcal{U}$ enthält. Dann ist $\{xU \mid x \in G,\ u \in \mathcal{U}\}$ eine Basis für eine Topologie auf G, die G zu einer topologischen Gruppe macht.

Beweis. Sei G eine topologische Gruppe. Dann folgen (1) und (2) aus der Stetigkeit der Multiplikation und des Inversen bei e. Ferner folgt (3), weil U offen und l_x stetig ist. Schließlich folgt (4), weil $g \mapsto xgx^{-1}$ ein Homöomorphismus ist.

Sei umgekehrt ein System $\mathcal{U}$ mit den genannten Eigenschaften gegeben. Ist $U \in \mathcal{U}$ und sind $V \in \mathcal{U}$ und dann $W \in \mathcal{U}$ so gewählt, daß $V^2 \subset U$ und $W^{-1} \subset V$ gilt, so ist, da $V \cap W \neq \emptyset$ ist, $e \in VW^{-1} \subset VV \subset U$. Also enthalten alle $U \in \mathcal{U}$ das neutrale Element.

Sei $\mathcal{U}(x)$ das System aller Obermengen von xU, $U \in \mathcal{U}$. Wir verwenden Satz I(2.4). Die dort genannten Bedingungen (1) - (3) sind offenbar erfüllt. Es bleibt zu zeigen: Zu $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es $V \in \mathcal{U}(x)$, so daß $U \in \mathcal{U}(v)$ für alle $v \in V$ ist. Wir wählen $xA \subset U$, $A \in \mathcal{U}$. Dann wählen wir $B \in \mathcal{U}$ mit $B^2 \subset A$. Wir setzen $V = xB$. Dann gilt für $v = xb \in V$ jedenfalls $vB = xbB \subset xB^2 \subset xA$. Also ist

U Obermenge von $vB \in \mathcal{U}(v)$ und damit Umgebung aller Punkte von V. Nach I(2.4) bilden also die $\mathcal{U}(x)$ das System der Umgebungen einer Topologie auf G.

Wir haben zu zeigen, daß m und ι stetig sind. Sei ghU, $U \in \mathcal{U}$, eine Umgebung von gh. Es gibt $V, W \in \mathcal{U}$ mit $(h^{-1}Vh)W \subset U$, also $gVhW \subset ghU$. Damit ist die Stetigkeit von m im Punkte (g,h) gezeigt. Zu $g \in G$ und $U \in \mathcal{U}$ wählen wir $V \in \mathcal{U}$ mit $gVg^{-1} \subset U$ und $W \in \mathcal{U}$ mit $W^{-1} \subset V$. Dann gilt $(gW)^{-1} = W^{-1}g^{-1} \subset Vg^{-1} \subset g^{-1}U$. Also ist ι im Punkt g stetig. □

(1.2) Notiz. *Sei G eine topologische Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe im Sinne der Algebra. Dann ist H mit der Teilraumtopologie eine topologische Gruppe und ebenso die abgeschlossene Hülle. Ist H ein Normalteiler, so auch $\overline{H}$.*

Beweis. $m\colon H \times H \to H \subset G$ ist jedenfalls stetig und nach einer Grundeigenschaft der Teilraumtopologie dann auch $m\colon H \times H \to H$. Ebenso für das Inverse. Aus $m(H \times H) \subset H$ folgt $m(\overline{H} \times \overline{H}) = m(\overline{H \times H}) \subset \overline{m(H \times H)} \subset \overline{H}$. Ebenso für das Inverse. Im Falle eines Normalteilers arbeitet man mit der Stetigkeit con $c\colon G \times H \to H$, $(g,h) \mapsto ghg^{-1}$. □

Ist (G,m) eine Gruppe und wird die Menge G mit der diskreten Topologie $\mathcal{T}$ versehen, so ist $(G,m,\mathcal{T})$ eine topologische Gruppe. Derartige topologische Gruppen werden als *diskrete Gruppen* bezeichnet.

Die additiven Gruppen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und der Quaternionen $\mathbb{H}$ sind mit ihrer üblichen Topologie topologische Gruppen, ebenso die zugehörigen multiplikativen Gruppen $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ und $\mathbb{H}^*$ der von Null verschiedenen Elemente. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^*_+$ der positiven reellen Zahlen ist eine offene Untergruppe von $\mathbb{R}^*$ und ebenfalls eine topologische Gruppe. Die komplexen Zahlen vom Betrag 1 bilden bezüglich der Multiplikation eine kompakte topologische Gruppe $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Die Quaternionen der Norm 1 liefern die Struktur einer topologischen Gruppe auf der Sphäre S^3. Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ ist ein stetiger Homomorphismus mit dem Logarithmus als Umkehrung. Deshalb sind diese beiden Abbildungen Isomorphismen von topologischen Gruppen. Die komplexe Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist ein surjektiver Homomorphismus mit dem Kern $\{2\pi i n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, der eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{C}$ ist.

Im Vektorraum $M_n(\mathbb{R})$ der reellen (n,n)-Matrizen sei $GL(n,\mathbb{R})$ der Teilraum der invertierbaren Matrizen I(1.7). Die Matrizenmultiplikation und der Übergang zum Inversen sind stetig. Damit wird $GL(n,\mathbb{R})$ zu einer topologischen Gruppe. Ähnlich wird $GL(n,\mathbb{C})$ erhalten. Diese Gruppen heißen *allgemeine lineare Gruppen*

Sei $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot A = E\}$ die Gruppe der orthogonalen (n,n)-Matrizen (A^t Transponierte von A; E Einheitsmatrix). Die Menge $O(n)$ ist in $M_n(\mathbb{R})$ abgeschlossen und beschränkt. Deshalb ist die *orthogonale Gruppe $O(n)$* eine kompakte topologische Gruppe. Der offene Teil $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$ von $O(n)$ ist die *spezielle orthogonale Gruppe*. Ähnlich wird gezeigt, daß die *unitäre Untergruppe* $U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid A^t \cdot \bar{A} = E\}$ eine kompakte topologische Gruppe ist. Es gilt $SO(2) \cong U(1) \cong S^1$, als topologische Gruppen betrachtet. Die *spezielle unitäre Gruppe $SU(n)$* ist die kompakte Untergruppe von $U(n)$ der Matrizen mit der Determinante 1.

Sind G und H topologische Gruppen, so ist das direkte Produkt $G \times H$ mit der Produkttopologie eine topologische Gruppe. Ebenso bildet man das topologische Produkt einer beliebigen Familie von topologischen Gruppen. Eine zum n-fachen Produkt $S^1 \times \cdots \times S^1$ isomorphe Gruppe wird als *n-dimensionaler Torus* bezeichnet.

Eine Teilmenge H eines topologischen Raumes G heiße *lokal abgeschlossen*, wenn jedes $x \in H$ eine Umgebung V_x in G hat, so daß $H \cap V_x$ in G abgeschlossen ist.

(1.3) Satz. (1) *Die Teilmenge A eines Raumes X sei lokal abgeschlossen. Dann ist sie Durchschnitt $A = U \cap C$ einer offenen Menge U und einer abgeschlossenen Menge C; als C kann $\overline{A}$ gewählt werden. Ist X regulär, so ist ein Schnitt $U \cap C$ einer offenen Menge U und einer abgeschlossenen Menge C lokal abgeschlossen.*

(2) *Eine lokal kompakte Menge A eines Hausdorff-Raumes X ist lokal abgeschlossen.*

(3) *Eine lokal abgeschlossene Menge A eines lokal kompakten Raumes ist lokal kompakt.*

Beweis. (1) Sei A lokal abgeschlossen. Sei V_x eine Umgebung von $x \in A$, so daß $A \cap V_x$ abgeschlossen in X ist. Sei $z \in \overline{A} \cap V_x^\circ$. Für eine Umgebung U von z in X ist $U \cap V_x$ ebenfalls eine Umgebung von z, also ist $U \cap V_x \cap A \neq \emptyset$, also ist z Berührpunkt von $A \cap V_x$ und liegt deshalb in dieser Menge, da sie abgeschlossen ist. Es folgt $\overline{A} \cap V_x^\circ \subset A \cap V_x$ und damit

$$A = \bigcup\nolimits_{x \in A} A \cap V_x \supset \bigcup\nolimits_{x \in A} \overline{A} \cap V_x^\circ = \overline{A} \cap \left(\bigcap\nolimits_{x \in A} V_x^\circ\right) \supset A.$$

Also ist $A = \overline{A} \cap V$ mit der offenen Menge $V = \bigcup V_x^\circ$.

Sei umgekehrt $A = C \cap V$ mit abgeschlossenem C und offenem U und X regulär. Dann bilden die abgeschlossenen Umgebungen eines jeden Punktes von X eine Umgebungsbasis. Zu $x \in A$ gibt es deshalb eine in U enthaltene abgeschlossene Umgebung V_x. Es folgt, daß $V_x \cap A = V_x \cap C \cap U = V_x \cap C$ in X abgeschlossen ist.

(2) Sei $K_x \subset A$ eine kompakte Umgebung von x in A und somit in X. Da X hausdorffsch ist, so ist K_x in X abgeschlossen, also $A \cap K_x = K_x$ abgeschlossen in X.

(3) Sei $A = C \cap U$ und V_x eine kompakte Umgebung von $x \in A$, die in U liegt. Dann ist $A \cap V_x = C \cap U \cap V_x = C \cap V_x$ abgeschlossen in V_x, also kompakt, und damit eine kompakte Umgebung von x in A. □

(1.4) Satz. *Sei H eine Untergruppe der topologischen Gruppe G. Ist H lokal abgeschlossen, so ist H abgeschlossen in G.*

Beweis. Sei $H = \overline{H} \cap V$ mit einer in G offenen Menge V. Aus $H = \overline{H} \cap V$ folgt $e \in V$. Sei $x \in \overline{H}$. Da Vx Umgebung von x ist und x Berührpunkt von H, gibt es ein $z \in H$, so daß $z \in Vx$, also $zx^{-1} \in V$. Da $\overline{H}$ eine Untergruppe ist, so ist

$zx^{-1} \in \overline{H}$. Aus $zx^{-1} \in \overline{H} \cap V = H$ und $z \in H$ folgt $x \in H$. Wir haben damit $H = \overline{H}$ gezeigt. □

(1.5) Satz. *Sei G eine topologische Gruppe.*

(1) *Die Zusammenhangskomponente C des neutralen Elementes ist ein abgeschlossener Normalteiler.*
(2) *Eine offene Untergruppe U ist auch abgeschlossen in G.*
(3) *Ist G zusammenhängend und V eine Umgebung des neutralen Elementes, so ist $G = \bigcup_{n \geq 1} V^n$, das heißt, G wird von V erzeugt.*

Beweis. (1) Als Komponente ist C abgeschlossen. Mit C ist auch gCg^{-1} zusammenhängend. Da der Durchschnitt dieser beiden Mengen nicht leer ist, so ist ihre Vereinigung zusammenhängend und deshalb in C enthalten. Das zeigt $gCg^{-1} \subset C$ für alle $g \in G$. Da CC als stetiges Bild der zusammenhängenden Menge $C \times C$ zusammenhängend ist und das neutrale Element enthält, ist $CC \subset C$. Ebenso sieht man, daß $C^{-1} \subset C$ ist. Also ist C auch Untergruppe.

(2) Alle Nebenklassen gU sind offen. Also ist die Vereinigung der von U verschiedenen Nebenklassen offen und deren Komplement U abgeschlossen.

(3) Sei W eine in V enthaltene offene Umgebung des neutralen Elementes mit $W = W^{-1}$; sie existiert nach (1.7.1) . Dann ist $\bigcup_{n \geq 1} W^n$ eine Untergruppe und offen (siehe (2.1.1)). Da sie nach (2) auch abgeschlossen ist, stimmt sie wegen des Zusammenhangs von G mit G überein. □

(1.6) Satz. *Sei G eine kompakte hausdorffsche Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe. Dann ist $gHg^{-1} = H$ genau dann, wenn $gHg^{-1} \subset H$ gilt.*

Beweis. Sei $gHg^{-1} \subset H$. Wir betrachten $c\colon G \times G \to G$, $(x,k) \mapsto xkx^{-1}$ und setzen $A = \{g^n \mid n = 0,1,2,\dots\}$. Dann gilt $c(A \times H) \subset H$, und wegen der Stetigkeit, weil H abgeschlossen ist, $c(\overline{A} \times H) \subset H$. Wenn wir zeigen, daß $g^{-1} \in \overline{A}$ ist, so gilt $g^{-1}Hg \subset H$. Also genügt es zu zeigen, daß $\overline{A}$ eine Untergruppe ist.

Sei B die Untergruppe $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Die Hülle $\overline{B}$ ist dann ebenfalls eine Untergruppe. Falls e ein Umgebung in $\overline{B}$ hat, die nur e enthält, so ist $\overline{B}$ diskret ($\{e\}$ ist offen, $\{h\} = \{l_h(e)\}$ ist offen, also ist jede Teilmenge offen). Da $\overline{B}$ auch kompakt ist, ist diese Menge endlich, und dann gilt $g^n = e$ für ein $n > 0$. Also nehmen wir an, daß keine derartige Umgebung von e existiert. Sei U eine Umgebung von e in G. Dann ist auch $V = U \cap U^{-1}$ eine Umgebung. Die Menge $V \cap \overline{B}$ enthält $x \neq e$, und da G is hausdorffsch ist, enthält $V \cap B$ die Menge $g^n \neq e$. Wegen $V = V^{-1}$ können wir $n > 0$ annehmen. Dann ist $g^{n-1} \in (g^{-1}V) \cap A$. Also sind alle derartigen Schnitte nichtleer, und folglich ist $g^{-1} \in \overline{A}$. Das impliziert aber $\overline{A} = \overline{B}$. □

(1.7) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Sei U eine Umgebung von e in der topologischen Gruppe G. Es gibt eine Umgebung V von e mit den Eigenschaften $V = V^{-1}$ und $V^2 \subset U$. Für ein solches V ist $\overline{V} \subset U$. Hat G abgeschlossene Punkte, so ist G regulär.

2. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei $f_\lambda\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto \exp(2\pi i \lambda n)$. Sei $\mathcal{O}(\lambda)$ die gröbste Topologie, so daß f_λ stetig ist. Damit wird $\mathbb{Z}$ eine topologische Gruppe.

Es ist möglich, $\mathbb{Z}$ so zu einer topologischen Gruppe zu machen, daß die Topologie keine abzählbare Basis hat.

3. Der n-dimensionale Torus $T(n)$ besitzt Elemente x, so daß $\{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $T(n)$ ist. Falls $T(n) = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ gesetzt wird, so hat $x = (x_1, \dots, x_n)$ genau dann diese Eigenschaft, wenn $\{1, x_1, \dots, x_n\}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig ist.

4. Eine topologische hausdorffsche Gruppe G heißt *topologisch zyklisch*, wenn es ein $g \in G$ gibt, so daß $\{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ in G dicht ist. Die topologisch zyklischen kompakten Lieschen Gruppen haben die Form $T(n) \times \mathbb{Z}/k$, siehe [**?**, p.39]. Hier und sonst wird $\mathbb{Z}/k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ abgekürzt.

5. Sei G eine Gruppe und $H_1 \subset H_2 \subset \dots$ eine Sequenz von Normalteilern. Dann kann die Menge der H_i als eine Umgebungsbasis des neutralen Elementes nach Satz (1.1) gewählt werden. Wählen wir $H_i = p^i\mathbb{Z}$ mit einer Primzahl p, so erhalten wir die p-adische Topologie auf $\mathbb{Z}$.

6. Die ganzen p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ bilden eine kompakte topologische Gruppe ($p \in \mathbb{N}$ Primzahl). Sie läßt sich als (inverser) Limes der Reduktionshomomorphismen

$$\mathbb{Z}/p \leftarrow \mathbb{Z}/p^2 \leftarrow \mathbb{Z}/p^3 \leftarrow \dots$$

mit der Limestopologie definieren. Die Reduktionshomomorphismen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n$ induzieren einen Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$, dessen Bild dicht ist. Die Folge $(p^n \mid n \in \mathbb{N})$ ist in $\mathbb{Z}_p$ eine Nullfolge.

7. Eine diskrete Untergruppe der additiven Gruppe $\mathbb{R}^n$ ist eine freie abelsche Gruppe, die von linear unabhängigen Vektoren erzeugt wird.

2 Transformationsgruppen

Sei G eine (multiplikativ geschriebene) topologische Gruppe mit neutralem Element e. Eine stetige *Linksoperation* von G auf dem Raum X (als nichtleer unterstellt) ist eine stetige Abbildung $\rho\colon G \times X \to X$ mit den Eigenschaften:

(1) $\rho(g, \rho(h, x)) = \rho(gh, x)$ für $g, h \in G,\ x \in X$.

(2) $\rho(e, x) = x$ für $x \in X$.

Ein *G-Raum* ist ein Paar (X, ρ), das aus einem Raum X und einer Operation ρ von G auf X besteht. Statt G-Raum sagen wir auch *Transformationsgruppe.* Meist schreibt man kürzer $\rho(g, x) = gx$. Dann nehmen die Axiome (1) und (2) die Gestalt $g(hx) = (gh)x$ und $ex = x$ an. Eine *Rechtsoperation* ist eine stetige Abbildung $X \times G \to X,\ (x, g) \mapsto xg$ mit den Eigenschaften $(xh)g = x(hg)$ und $xe = x$. In einem topologischen Kontext sollen Operationen immer als stetig angenommen werden, sofern nichts anderes gesagt wird. Die Axiome (1) und (2) ohne weitere Voraussetzung einer Stetigkeit definieren eine Operation der Gruppe (ohne Topologie) G auf der Menge X; das ist also ein algebraischer Begriff.

Sei (X, ρ) ein G-Raum. Dann ist $R = \{(x, gx) \mid x \in X, g \in G\}$ eine Äquivalenzrelation auf X. Der Raum der Äquivalenzklassen mit der Quotienttopologie wird mit X/G bezeichnet und *Orbitraum* oder *Bahnenraum* der Operation genannt. Die Äquivalenzklasse von x heißt *Orbit* von x oder *Bahn* durch x. Für jedes $x \in X$ ist $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ eine Untergruppe von G, die *Standgruppe* oder *Isotropiegruppe* von x. Wegen $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ tritt mit einer Untergruppe auch jede konjugierte als Isotropiegruppe auf. Ist $H \subset G$ Untergruppe, so heißt $X^H = \{x \in X \mid hx = x$ für alle $h \in H\}$ die *H-Fixpunktmenge* des G-Raumes X.

Seien X und Y G-Räume und $f: X \to Y$ eine Abbildung. Sie heißt *G-Abbildung* oder *G-äquivariante Abbildung*, wenn für $g \in G$ und $x \in X$ immer $gf(x) = f(gx)$ gilt. Allgemein weist das Wort äquivariant auf eine Gruppenoperation hin. Eine G-Abbildung $f: X \to Y$ induziert durch Übergang zu den Bahnen eine Abbildung $f/G: X/G \to Y/G$, die stetig ist, falls f stetig war. Für eine G-Abbildung f gilt immer $G_x \subset G_{f(x)}$ und $f(X^H) \subset f(X)^H$. Eine Teilmenge A des G-Raumes X ist *G-invariant* oder *G-stabil*, wenn $a \in A$ und $g \in G$ immer $ga \in A$ impliziert. Eine G-stabile Teilmenge A nennen wir auch *G-Unterraum*; sie trägt eine stetige G-Operation $(g, a) \mapsto ga$.

Aus systematischen Gründen wäre es besser, den Orbitraum einer Linksoperation mit $G \backslash X$ und den einer Rechtsoperation mit X/G zu bezeichnen. Soweit wir nur mit Linksoperationen zu tun haben, bleiben wir bei der Bezeichnung X/G für den Orbitraum.

Eine Operation heißt *frei*, wenn sämtliche Isotropiegruppen trivial sind; *effektiv*, wenn $x \mapsto gx$ für $g \neq e$ niemals die Identität ist; *transitiv*, wenn sie nur aus einer Bahn besteht. Wir nennen $l_g: X \to X$, $x \mapsto gx$ die *Linkstranslation* mit g. Die Regeln $l_g l_h = L_{gh}$ und $l_e = \mathrm{id}$ zeigen, daß l_g ein Homöomorphismus ist.

Sei X ein G-Raum, $g \in G$, $A \subset G$ und $B \subset X$. Wir setzen $gB = \{gx \mid x \in B\}$ und $AB = \{gx \mid g \in A, x \in B\}$.

(2.1) Satz. *Sei $r: G \times X \to X$ eine G-Operation, $A \subset G$ und $B \subset X$.*

(1) *Ist $B \subset X$ offen, so auch $AB \subset X$.*
(2) *Die Quotientabbildung $p: X \to X/G$ ist offen.*
(3) *Sind A und B kompakt, so ist AB kompakt.*
(4) *Ist A kompakt, so ist die Einschränkung von $A \times X \to X$ von r eigentlich. Ist außerdem B abgeschlossen, so ist AB abgeschlossen.*
(5) *Ist G kompakt, so ist p eigentlich.*
(6) *Ist G kompakt und X separiert, so ist X/G separiert.*
(7) *Sei G kompakt, A eine abgeschlossene G-stabile Teilmenge und U eine Umgebung von A in X. Dann enthält U eine G-stabile Umgebung von A.*

Beweis. (1) Es ist $l_a(B)$ offen, also auch $\bigcup_{a \in A} l_a(B)$. (2) Sei $U \subset X$ offen. Dann ist $p^{-1}(pU) = \bigcup_{g \in G} gU$ offen, also auch $p(U)$. (3) $A \times B$ ist kompakt, also auch $AB = r(A \times B)$. (4) Der Homöomorphismus $A \times X \to A \times X$, $(s, x) \mapsto (s, sx)$ verwandelt r in die Projektion $\mathrm{pr}: A \times X \to X$, und diese ist wegen der Kompaktheit von A abgeschlossen. (5) Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist $p^{-1}p(A) = GA$ nach (3) abgeschlossen. Also ist $p(A)$ nach Definition der Quotienttopologie abgeschlossen. Die Urbilder von Punkten sind Bahnen, und diese sind als stetige Bilder von G kompakt. (6) Mit p ist auch $p \times p$ eigentlich. Also ist das Bild der Diagonale bei $p \times p$ abgeschlossen. (7) Sei U offen. Dann ist $p(X \setminus U)$ disjunkt zu $p(A)$, denn andernfalls enthielten die Bahnen durch A Punkte außerhalb von U. Nach (6) ist $X \setminus p^{-1}p(X \setminus U)$ offen und eine in U enthaltene G-stabile Umgebung von A. $\square$

(2.2) Satz. (1) *Ist H eine Untergruppe der topologischen Gruppe G, so werde die Menge G/H der Rechtsnebenklassen gH mit der Quotienttopologie bezüglich der kanonischen Projektion $p\colon G \to G/H$, $g \mapsto gH$ versehen. Dann ist die Linkstranslation $l\colon G \times G/H \to G/H$, $(x, gH) \mapsto xgH$ eine stetige Operation. Ein Raum G/H mit der G-Operation des letzten Satzes heißt* homogener Raum.

(2) *Ein homogener Raum G/H ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn H in G abgeschlossen ist. Speziell ist G hausdorffsch, wenn $\{e\}$ abgeschlossen ist.*

(3) *Ist H Normalteiler in G, so ist die Faktorgruppe G/H mit der Quotienttopologie eine topologische Gruppe.*

Beweis. (1) Wir gehen von der Relation $pm = l(\mathrm{id} \times p)$ mit der Gruppenmultiplikation m aus. Da p eine offene Abbildung ist, so ist auch $\mathrm{id} \times p$ offen und mithin eine Identifizierung. Da pm stetig ist, folgt die Stetigkeit von l.

(2) Wir verwenden I(6.3). Die Quotientabbildung $p\colon G \to G/H$ stetig, surjektiv und offen. Es gilt $R = \{(x, y) \mid p(x) = p(y)\} = \{(g, gh) \mid g \in G,\ h \in H\}$. Wegen der Stetigkeit von $f\colon G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ ist $f^{-1}(H) = R$ abgeschlossen, falls H abgeschlossen ist. Die Umkehrung folgt mittels $H = p^{-1}(eH)$.

(3) Wie für (1). □

Ist X ein G-Raum und $x \in X$, so induziert die Abbildung $G \to X, g \mapsto gx$, eine injektive stetige G-Abbildung $G/G_x \to X$, deren Bild die Bahn Gx durch x ist. Im allgemeinen liegt kein Homöomorphismus vor, wohl aber, wenn G kompakt und X separiert ist.

(2.3) Beispiele. Sei A eine G-stabile Teilmenge des G-Raumes X. Dann trägt A/G die Teilraumtopologie von X/G. Insbesondere ist $X^G \to X \to X/G$ eine Einbettung. Ist $f\colon X \to Y$ nämlich offen, so sind auch alle Einschränkungen $f^{-1}(B) \to B$ von f offen.

Ist X ein Raum mit abgeschlossenen Punkten, so sind die Isotropiegruppen abgeschlossene Untergruppen, denn G_x ist das Urbild von x bei der stetigen Abbildung $G \to X, g \mapsto gx$. Ist X ein Hausdorff-Raum, so sind Fixpunktmengen abgeschlossen, denn $X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$ ist das Urbild der Diagonale bei $X \to X \times X$, $x \mapsto (x, gx)$ und $X^H = \bigcap_{g \in H} X^g$.

Sei H abgeschlossen in G. Dann ist G/H hausdorffsch, also $F = G/H^H$ abgeschlossen. Folglich ist das Urbild $\{g \in G \mid g^{-1}Hg \subset H\}$ in G abgeschlossen. Ebenso ist auch der Normalisator $NH = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\}$ von H in G abgeschlossen. ◇

Eine Operation $G \times V \to V$ auf einem reellen (komplexen) Vektorraum V heißt reelle (komplexe) *Darstellung*, wenn alle Linkstranslationen lineare Abbildungen sind. Nach Wahl einer Basis in dem n-dimensionalen Raum V ist eine Darstellung durch einen stetigen Homomorphismus von G nach $GL(n, \mathbb{R})$ oder $GL(n, \mathbb{C})$ gegeben. Ein Homomorphismus $G \to O(n)$ oder $G \to U(n)$ heißt *orthogonale* oder *unitäre Darstellung*. Geometrisch wird eine orthogonale Darstellung durch eine Operation $G \times V \to V$ mit *invariantem Skalarprodukt* $\langle -, - \rangle$ gegeben. Das Skalarprodukt heißt dabei *invariant*, wenn $\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle

$g \in G$ und $v, w \in V$ gilt. In einer orthogonalen Darstellung ist die Einheitssphäre $S(V) = \{v \in V \mid \langle v, v\rangle = 1\}$ G-stabil.

(2.4) Beispiel. Die Matrizenmultiplikation $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ liefert die *Standarddarstellung*. Durch Einschränkung auf eine Untergruppe erhalten wir die Standarddarstellung dieser Untergruppe. Durch Matrizenmultiplikation erhalten wir auf diese Weise auch eine Operation $SO(n+1) \times S^n \to S^n$. Die Standgruppe von $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ist zu $SO(n)$ kanonisch isomorph und werde mit dieser Gruppe identifiziert. Wir erhalten einen $SO(n+1)$-Homöomorphismus $SO(n+1)/SO(n) \cong S^n$. Ähnlich gewinnt man $U(n+1)$-Homöomorphismen $U(n+1)/U(n) \cong S^{2n+1}$. $\diamond$

Ist E ein Raum mit linker G-Operation und F einer mit rechter G-Operation, so wird mit $F \times_G E$ der Orbitraum der Operation

$$G \times (F \times E) \to F \times E, \quad (g, x, y) \mapsto (xg^{-1}, gy)$$

bezeichnet. Eine G-Abbildung $f\colon E_1 \to E_2$ induziert eine stetige Abbildung $F \times_G f\colon F \times_G E_1 \to F \times_G E_2$ der Orbiträume, auf Repräsentanten durch $(x, y) \mapsto (x, f(y))$ gegeben. Trägt F außerdem eine linke K-Operation, die mit der G-Operation vertauschbar ist (das heißt $k(xg) = (kx)g$), so wird auf $F \times_G E$ durch $(k, (x, y)) \mapsto (kx, y)$ eine K-Operation induziert. Das läßt sich insbesondere anwenden, wenn $F = K$ ist, G eine Untergruppe von K und die fraglichen Operationen durch Translation gegeben sind. Die Zuordnungen $E \mapsto K \times_G E$ und $f \mapsto K \times_G f$ liefern einen Funktor von G-Räumen zu K-Räumen. Wir bezeichnen diesen Funktor als *Induktion*

$$\mathrm{ind}_G^K\colon G\text{-TOP} \to K\text{-TOP}.$$

Er ist linksadjungiert zum Funktor *Restriktion*

$$\mathrm{res}_G^K\colon K\text{-TOP} \to G\text{-TOP},$$

bei dem ein K-Raum durch Strukturvergessen als G-Raum aufgefaßt wird. Die natürliche Adjunktionsisomorphie

$$\mathrm{Hom}_K(\mathrm{ind}_K^G X, Y) \cong \mathrm{Hom}_G(X, \mathrm{res}_G^K Y)$$

ordnet einer G-Abbildung $f\colon X \to Y$ die K-Abbildung $(k, x) \mapsto kf(x)$ zu; in der umgekehrten Richtung schränkt man eine Abbildung auf $X = G \times_G X \subset K \times_G X$ ein.

Ist X ein K-Raum, so ist $K \times_G X \to K/G \times X$, $(k, x) \mapsto (kG, kx)$ ein K-Homöomorphismus.

(2.5) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Die Spur $SU(2) \to [-2, 2]$, $A \to \mathrm{Spur}(A)$ ist konjugationsinvariant und induziert einen Homöomorphismus des Orbitraumes der Operation

$$SU(2) \times SU(2) \to SU(2), \quad (A, B) \mapsto ABA^{-1}$$

auf $[-2, 2]$.

2. Die zyklische Gruppe $G = \mathbb{Z}/m \subset S^1$ der m-ten Einheitswurzeln operiere auf $\mathbb{C}$ durch $(\zeta, z) \mapsto \zeta z$. Die Abbildung $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^m$ läßt sich über die Orbitabbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/G$ faktorisieren und induziert einen Homöomorphismus $\mathbb{C}/G \cong \mathbb{C}$.

3. Die Darstellung $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(t, (x, y)) \mapsto (tx, t^{-1}y)$ der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}^*$ besitzt kein invariantes Skalarprodukt. Der Orbitraum ist nicht hausdorffsch. Die Bahnen sind Untermannigfaltigkeiten, aber nicht alle abgeschlossen. Der Nullpunkt hat keine beschränkte $\mathbb{R}^*$-stabile Umgebung. Nimmt man den Nullpunkt heraus, so ist die Operation frei, die Bahnen sind abgeschlossen, der Orbitraum nicht hausdorffsch; der Orbitraum ist lokal euklidisch (die Gerade mit 2 Nullpunkten).

4. Sei G eine topologische Gruppe und seien X und Y G-Räume. Mit $C_G(X, Y)$ werde der Raum der G-Abbildungen $X \to Y$ mit der KO-Topologie bezeichnet. Sei G kompakt und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Dann gibt es einen kanonischen Homöomorphismus $X^H \cong C_G(G/H, X)$.

5. Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Sei $H(X)$ die Gruppe der Homöomorphismen von X mit der Zusammensetzung als Verknüpfung. Dann ist $H(X)$ mit der KO-Topologie eine topologische Gruppe und $H(X) \times X \to X$, $(f, x) \mapsto f(x)$ eine stetige Operation.

6. Der Raum $C(S^1, S^1)$ mit KO-Topologie wird eine topologische Gruppe, wenn man als Verknüpfung die punktweise Multiplikation der Abbildungen verwendet.

7. Es gibt zwei stetige Homomorphismen $e: C(S^1, S^1) \to S^1$, $f \mapsto f(1)$ und $d: C(S^1, S^1) \to \mathbb{Z}$, $f \mapsto \operatorname{Grad}(f)$. Sei $M^0(S^1)$ der Kern von (e, d). Sei $f_n: S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$. Der Homomorphismus

$$s: S^1 \times \mathbb{Z} \to C(S^1, S^1),\ (\alpha, n) \mapsto \alpha f_n$$

ist stetig. Die Abbildung

$$M^0(S^1) \times (S^1 \times \mathbb{Z}) \to C(S^1, S^1), \quad (f, (\alpha, n)) \mapsto f \cdot s(\alpha, n)$$

ist ein Isomorphismus von topologischen Gruppen. Aus der Überlagerungstheorie (Hochheben über $\mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto \exp(it)$) folgt, daß $M^0(S^1)$ isomorph zum Raum V der stetigen Funktionen $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x)$ ist oder, äquivalent, zum Raum der stetigen Funktionen $\alpha: S^1 \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(1) = 0$. Der Raum V trägt die Supremum-Norm und die induzierte KO-Topologie.

Aus dem angegebenen Isomorphismus folgt, daß $C(S^1, S^1)$ eine unendlichdimensionale Mannigfaltigkeit ist.

8. Sei $M(S^1)$ die Gruppe der Homöomorphismen $S^1 \to S^1$ vom Grad 1 mit KO-Topologie. Jedes Element $\lambda \in S^1$ liefert den Homöomorphismus $f_\lambda: z \mapsto \lambda x$. Damit wird S^1 eine Untergruppe von $M(S^1)$. Sei $M_1(S^1)$ die Untergruppe aller Homöomorphismen f mit $f(1) = 1$. Dann ist

$$S^1 \times M_1(S^1) \to M(S^1), (\lambda, h) \mapsto f_\lambda \circ h$$

ein Homomorphismus. Nach Hochhebungstheorie ist $M_1(S^1)$ homöomorph zum Raum H aller Homöomorphismen $f: [0, 1] \to [0, 1]$ mit $f(0) = 0$. Der Raum H ist zusammenziehbar; eine Kontraktion wird durch $f_t(x) = (1 - t)f(x) + tx$ geliefert. Folglich ist die Inklusion $S^1 \to M(S^1)$ eine Homotopieäquivalenz. Der Raum $H(S^1)$ aller Homöomorphismen von S^1 ist zu $O(2)$ homotopieäquivalent.

3 Projektive Räume

Viele wichtige Räume in der Geometrie sind homogene Räume. Wir behandeln als Beispiel die projektiven Räume.

Sei $P(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}P^n$ die Menge der eindimensionalen Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^{n+1}$. Ein eindimensionaler Unterraum V wird durch $x \in V \setminus 0$ aufgespannt. Genau dann spannen x und y denselben Unterraum auf, wenn für ein $\lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus 0$ die Gleichung $x = \lambda y$ gilt. Wir betrachten deshalb auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt } \lambda \in \mathbb{R}^*, \text{ so daß } x = \lambda y.$$

Wir sehen $P(\mathbb{R}^{n+1})$ als Menge der Äquivalenzklassen an. Mit anderen Worten: $P(\mathbb{R}^{n+1})$ ist der Orbitraum der Operation

$$\mathbb{R}^* \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0) \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x.$$

Die Quotientabbildung $p\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \to P(\mathbb{R}^{n+1})$ benutzen wir dazu, $P(\mathbb{R}^{n+1})$ mit der Quotienttopologie zu versehen. Wir setzen $p(x_0, \dots, x_n) = [x_0, \dots, x_n]$ und nennen $x_0, \dots, x_n$ die *homogenen Koordinaten* des Punktes $[x_0, \dots, x_n]$.

In analoger Weise wird die Menge $P(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{C}P^n$ der eindimensionalen komplexen Unterräume des $\mathbb{C}^{n+1}$ als Orbitraum der Operation

$$\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0) \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0, \quad (\lambda, z) \mapsto \lambda z$$

angesehen. Wir haben wiederum eine Quotientabbildung

$$p\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \to P(\mathbb{C}^{n+1}), \quad (z_0, \dots, z_n) \mapsto [z_0, \dots, z_n].$$

Wir beschreiben die projektiven Räume noch in anderer Weise als Orbiträume. Die Untergruppe $G = \{\pm 1\} \subset \mathbb{R}^*$ operiert auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ durch $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ (*antipodische Involution* genannt). Die Inklusion $i\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ induziert eine stetige Abbildung $\iota\colon S^n/G \to (\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0)/\mathbb{R}^*$ der Orbiträume, die nach Konstruktion bijektiv ist. Die Abbildung $j\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \to S^n, \mapsto |x|^{-1}x$ induziert eine stetige Umkehrabbildung. Der Quotient S^n/G ist kompakt, weil S^n kompakt ist. Nach (12.1) ist der Quotient ein Hausdorff-Raum. Der $\mathbb{C}P^n$ wird analog behandelt. Allerdings muß hier die Operation $S^1 \times S^{2n+1} \to S^{2n+1}$, $(\lambda, z) \mapsto \lambda z$ von S^1 auf der Einheitssphäre $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$ verwendet werden.

Projektive Räume lassen sich als homogene Räume auffassen. Wir betrachten die Operation von $O(n+1)$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$ durch Matrizenmultiplikation. Ist $V \in P(\mathbb{R}^{n+1})$ ein eindimensionaler Unterrraum und $A \in O(n+1)$, so ist $AV \in P(\mathbb{R}^{n+1})$. Dadurch erhalten wir eine Operation $O(n+1) \times P(\mathbb{R}^{n+1}) \to P(\mathbb{R}^{n+1})$. Die Operation ist transitiv. Die Standgruppe des von $(1, 0, \dots, 0) = e_1$ erzeugten Unterraums E_1 besteht aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in O(1),\ B \in O(n).$$

Wir fassen diese Matrizen als Untergruppe $O(1) \times O(n)$ von $O(n+1)$ auf. Durch $A \mapsto Ae_1$ wird ein $O(n+1)$-äquivarianter Homöomorphismus

$$b: O(n+1)/O(1) \times O(n) \cong P(\mathbb{R}^{n+1})$$

induziert. Die Operation von $O(n+1)$ auf $P(\mathbb{R}^{n+1})$ ist stetig, was aus der Stetigkeit der Operation $O(n+1) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0) \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ und der Definition der Quotienttopologie leicht folgt. Also ist b eine bijektive stetige Abbildung eines kompakten Raumes in einen hausdorffschen Raum. In gleicher Weise wird ein $U(n+1)$-äquivarianter Homöomorphismus $U(n+1)/U(1) \times U(n) \cong P(\mathbb{C}^{n+1})$ gewonnen.

4 Eigentliche Operationen

Eine Operation $\rho: G \times X \to X$ heißt *eigentlich*, wenn die zugehörige Abbildung $\theta = \theta_\rho: G \times X \to X \times X$, $(g,x) \mapsto (x, gx)$ eigentlich ist. Das Bild R von θ ist der Graph der Orbitrelation und besteht aus den (x,y) in derselben Bahn. Wir nennen die Operation *schwach eigentlich*, wenn $\theta': G \times X \to R$, $(g,x) \mapsto (x,gx)$ eigentlich ist.

(4.1) Notiz. *Eine Operation ist genau dann eigentlich, wenn sie schwach eigentlich ist und R in $X \times X$ abgeschlossen.*

Beweis. Ist θ eigentlich, so ist das Bild R abgeschlossen. Ist $j: R \subset X \times X$ abgeschlossen, so ist j eigentlich und deshalb auch $\theta = j \circ \theta'$ eigentlich. □

(4.2) Notiz. *Operiert G eigentlich auf X, so ist X/G ist hausdorffsch. Ist ferner G hausdorffsch, so auch X.*

Beweis. Da θ eigentlich ist, so ist $R = \operatorname{Bild}\theta$ in $X \times X$ abgeschlossen, und die Behauptung folgt mit I(6.3) und (2.1.2). Ist $\{e\} \subset G$ abgeschlossen, so ist $i: X \to G \times X$, $x \mapsto (e,x)$ ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge. Nach II(6.4)(6.5) ist $\theta \circ i$ eigentlich; das Bild ist die Diagonale von X, die also abgeschlossen ist. □

(4.3) Satz. *Operiert G eigentlich auf X, so gilt:*

(1) *$\omega: G \to X$, $g \mapsto gx$ ist eigentlich.*
(2) *G_x ist für alle $x \in X$ kompakt.*
(3) *Die kanonische Abbildung $\omega': G/G_x \to Gx$ ist ein Homöomorphismus.*
(4) *Gx ist in X abgeschlossen.*

Beweis. (1) (2) Es ist $\theta^{-1}(\{x\} \times X) = G \times \{x\}$. Nach II(6.6) ist deshalb $G \times \{x\} \to \{x\} \times X$, $(g,x) \mapsto (x,gx)$ eigentlich und folglich $G_x = \omega^{-1}(x)$ kompakt. (3) Wir haben die eigentliche Komposition

$$\omega: G \to G/G_x \to Gx \to X.$$

Die erste Abbildung ist surjektiv, die dritte injektiv, also ist ω' eigentlich und nach II(6.5) ein Homöomorphismus. (4) Es ist Gx als Bild der eigentlichen Abbildung ω abgeschlossen. □

(4.4) Satz. *Eine freie G-Operation auf X ist genau dann schwach eigentlich, wenn die* Translationsabbildung $t: R \to G$, $(x, gx) \mapsto g$ *stetig ist. Letzteres ist äquivalent dazu, daß θ' ein Homöomorphismus ist.*

Beweis. Da G frei operiert, ist θ injektiv und t wohldefiniert. Die stetige Abbildung θ' hat $\psi': R \to G \times X$, $(x, y) \mapsto (t(x, y), x)$ als mengentheoretisches Inverses. Es ist ψ' genau dann stetig, wenn t stetig ist. Es ist deshalb θ' genau dann ein Homöomorphismus, wenn φ stetig ist. □

Zu jeder freien Rechtsoperation auf E und jedem G-Linksraum F haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & E \\ \downarrow P & & \downarrow p \\ E \times_G F & \xrightarrow{q} & E/G. \end{array}$$

Hierin sind P und p Orbitabbildungen und $q = \mathrm{pr}_1 / G$.

(4.5) Folgerung. *Jede Gruppe operiert eigentlich auf sich selbst durch Linkstranslation.* □

(4.6) Satz. *Die freie Operation auf E ist genau dann schwach eigentlich, wenn für alle G-Räume F das vorstehende Diagramm ein Pullback ist.*

Beweis. Wir vergleichen das Diagramm mit dem kanonischen Pullback

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{b} & E \\ \downarrow a & & \downarrow p \\ E \times_G F & \xrightarrow{q} & E/G, \end{array}$$

worin $X = \{((x, f), y) \in (E \times_G F) \times E \mid p(x) = p(y)\}$ und $a = \mathrm{pr}_2$, $b = \mathrm{pr}_1$ ist. Es gibt dann genau eine Abbildung $\lambda: E \times F \to X$ mit $b\lambda = \mathrm{pr}_1$, $a\lambda = P$, in Formeln $\lambda(x, f) = ((x, f), x)$. Das fragliche Diagramm ist genau dann ein Pullback, wenn λ ein Homöomorphismus ist. Sei dieses für den linken G-Raum G der Fall. Wir haben den Homöomorphismus $E \times_G G \to E, (x, g) \mapsto xg$. Er verwandelt q in p, X in R und λ in $(x, g) \mapsto (xg, x)$. Letzteres ist, in anderer Notation θ'. Ist also das Diagramm für $F = G$ ein Pullback, so ist θ' ein Homöomorphismus.

Sei umgekehrt die Operation schwach eigentlich. Die Abbildung

$$\tilde{\mu}: \tilde{X} = \{((x, f), y) \mid p(x) = p(y)\} \to E \times F, \quad ((x, f), y) \mapsto (y, t(x, y)^{-1} f)$$

ist stetig. Man verifiziert, daß $\tilde{\mu}$ eine Abbildung $\mu: X \to E \times F$ induziert. Es ist

$$\mu\lambda(x, f) = \mu((x, f), x) = (x, t^{-1}(x, x)f) = (x, f).$$

Also ist μ eine Umkehrung von λ. $\square$

(4.7) Satz. *Sei die freie G-Operation auf E schwach eigentlich. Die Schnitte von $q\colon E \times_G F \to E/G$ entsprechen den Abbildungen $f\colon E \to F$ mit der Eigenschaft $f(xg) = g^{-1}f(x)$; dabei wird f der Schnitt $s_f\colon x \mapsto (x, f(x))$ zugeordnet.*

Beweis. Es ist klar, daß s_f ein stetiger Schnitt ist. Sei umgekehrt $s\colon B \to E \times_G F$ ein stetiger Schnitt. Wir verwenden das Pullbackdiagramm gemäß (4.5). Es liefert uns zu dem Schnitt s einen induzierten Schnitt t von pr_1, der aufgrund der universellen Eigenschaft eines Pullbacks durch die Bedingungen $\mathrm{pr}_1 \circ t = \mathrm{id}$, $P \circ t = s \circ p$ eindeutig bestimmt ist. Sei $f = \mathrm{pr}_2 \circ t\colon E \to F$. Es gilt $\mathrm{pr}_1\, t(xg) = xg = \mathrm{pr}_1(t(x)g)$, weil t ein Schnitt und pr_1 eine G-Abbildung ist. (Die Operation auf $E \times F$ ist hier von rechts $(e, f, g) \mapsto (eg, g^{-1}f)$.) Es gilt $Pt(xg) = sp(xg) = sp(x) = Pt(x) = P(t(x)g)$, weil t induzierter Schnitt und P eine Orbitabbildung ist. Da $t(xg)$ und $t(x)g$ dasselbe Bild bei P und pr_1 haben, sind diese Elemente gleich, und durch Anwenden der G-Abbildung pr_2 folgt schließlich $f(xg) = g^{-1}f(x)$. $\square$

(4.8) Satz. *Sei die freie G-Operation auf E schwach eigentlich. Dann ist $p\colon E \to E/G = B$ genau dann isomorph zu* $\mathrm{pr}\colon B \times G \to B$, *wenn p einen Schnitt hat.*

Beweis. Sei s ein Schnitt von p. Dann sind $B \times G \to E$, $(b, g) \mapsto s(b)g$ und $E \to B \times G$, $x \mapsto (p(x), t(spx, x))$ zueinander inverse G-Homöomorphismen, die mit den Projektionen auf B verträglich sind. Umgekehrt hat pr sicher einen Schnitt und damit auch die dazu isomorphe Abbildung p. $\square$

(4.9) Satz. *Seien X und Y freie G-Räume und $\Phi\colon X \to Y$ eine G-Abbildung. Ist $\varphi = \Phi/G$ ein Homöomorphismus und Y schwach eigentlich, so ist Φ ein Homöomorphismus.*

Beweis. Zunächst folgt, daß auch X schwach eigentlich ist, weil die Translationsabbildung von X aus derjenigen von Y durch Komposition mit $\Phi \times \Phi$ hervorgeht. Wir haben eine Umkehrabbildung $\Psi\colon Y \to X$ zu konstruieren. Sie entspricht gemäß (4.7) einem Schnitt von $\pi_Y\colon (Y \times X)/G \to Y/G$. Wir haben den Schnitt $s\colon x \mapsto (x, \Phi(x))$ von $\pi_X\colon (X \times Y)/G \to X/G$. Sei ψ die stetige Umkehrung von φ. Mit der Vertauschung der Faktoren $\tau\colon (X \times Y)/G \to (Y \times X)/G$ bilden wir $t = \tau \circ s \circ \psi$. Man rechnet nach, daß t ein Schnitt von π_Y ist. $\square$

(4.10) Satz. *Sei $r\colon E \times G \to G$ eine freie Operation der diskreten Gruppe G. Dann sind äquivalent:*

(1) *Zu jedem $x \in E$ gibt es eine offene Umgebung U, so daß $U \cap Ug = \emptyset$ ist für alle $g \neq e$.*

(2) *$t^{-1}(e)$ ist offen in R.*

(3) *t ist stetig.*

(4) *Die Operation ist schwach eigentlich.*

Beweis. (1) ⇒ (2). Sei $(x,y) \in t^{-1}(e)$, also $x = y$. Sei U offene Umgebung von x nach (1). Dann ist $(U \times U) \cap R \subset t^{-1}(e)$, denn $(u, ug) \in U \times U$ impliziert $ug \in U \cap Ug$, was nur für $g = e$ möglich ist.
(2) ⇒ (1). Es ist $t(x,x) = e$. Da $t^{-1}(e)$ offen ist, gibt es eine offene Umgebung U von x in E, so daß $(U \times U) \cap C \subset t^{-1}(e)$ ist. Sei $U \cap Ug \neq \emptyset$, etwa $v = ug$ für $u, v \in U$. Dann ist $(u,v) = (u, ug) \in (U \times U) \cap C$, also $t(u, ug) = g = e$.
(2) ⇔ (3) Für $h \in G$ sei $R_h \colon R \to R$, $(x,y) \mapsto (x, yh)$ und $r_h \colon G \to G$, $g \mapsto gh$. Dann gilt $tR_h = r_h t$. Da R_h und r_h Homöomorphismen sind, ist mit $t^{-1}(e)$ auch $t^{-1}(h)$ offen.
(3) ⇔ (4) Das wissen wir aus (4.4) □

Wir nennen eine Operation *blätternd*, wenn sie die Eigenschaften (1) – (4) des letzten Satzes hat. Der Orbitraum einer freien blätternden Operation $E \times G \to E$ ist genau dann hausdorffsch, wenn die Menge R in $E \times E$ abgeschlossen ist, wenn also die Operation eigentlich ist.

(4.11) Satz. *Sei $G \times X \to X$ eine eigentliche Operation, $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, $A \subset X$ eine G-stabile Teilmenge. Dann sind die Einschränkungen $H \times X \to X$ und $G \times A \to A$ eigentlich.*

Beweis. Diese Aussagen folgen mit II(6.4)(6.5). □

(4.12) Wir sagen, eine Operation $G \times X \to X$ habe *kompakte Wiederkehr*, wenn gilt: Zu jedem Paar $(x,y) \in X \times X$ gibt es offene Umgebungen V_x und V_y von x und y, so daß $\{g \in G \mid gV_x \cap V_y \neq \emptyset\}$ in einer kompakten Menge $K \subset G$ liegt.◇

(4.13) Satz. *Sei $G \times X \to X$ eine Operation mit kompakter Wiederkehr. Dann ist θ abgeschlossen, also insbesondere R abgeschlossen und X/G hausdorffsch. Ist außerdem X ein T_1-Raum, so ist die Operation eigentlich.*

Beweis. Sei $A \subset G \times X$ abgeschlossen. Um $\theta(A)$ als abgeschlossen nachzuweisen, müssen wir nach II(4.1) für jedes in $X \times X$ konvergente Netz (x_j, y_j) von Punkten aus $\theta(A)$ zeigen, daß der Grenzwert in $\theta(A)$ liegt. Sei $(x,y) = \lim(x_j, y_j)$ und $y_j = g_j x_j$ mit $(g_j, x_j) \in A$. Wir wählen Umgebungen V_x und V_y von x und y und eine kompakte Menge K nach (4.12). Wir können $x_j \in V_x$ und $y_j \in V_y$ annehmen. Dann liegt g_j in K, und da K kompakt ist, gibt es ein in K konvergentes Teilnetz, wiederum (g_j) genannt. Ist $g = \lim g_j$, so gilt $(g, x) = \lim(g_j, x_j) \in A$, da A abgeschlossen ist, und aus der Stetigkeit von θ folgt $(x,y) = \theta(g,x)$. Also ist $\theta(A)$ abgeschlossen.

Das Urbild $\theta^{-1}(x,y) = D \times \{x\}$, mit $D = \{g \in G \mid gx = y\} \subset K$, ist homöomorph zu einer Nebenklasse der Standgruppe G_x, also homöomorph zu G_x. Hat X (also auch $X \times X$) abgeschlossene Punkte, so ist D abgeschlossen im kompakten Raum K, also kompakt. □

(4.14) Notiz. *Sei X/G hausdorffsch. Dann hat die Operation genau dann kompakte Wiederkehr, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung V_x besitzt, so daß $\{g \in G \mid gV_x \cap V_x \neq \emptyset\}$ in einer kompakten Menge $K \subset G$ liegt.*

Beweis. Da X/G hausdorffsch ist, also $R = \mathrm{Bild}\,\theta$ abgeschlossen, gibt es für Punkte x und y, die nicht in derselben Bahn liegen, offene Umgebungen V_x und V_y, so daß $(V_x \times V_y) \cap R = \emptyset$ ist. Dann ist auch $\{g \in G \mid gV_x \cap V_y \neq \emptyset\}$ leer. Ist $\{g \in G \mid gV_x \cap V_x \neq \emptyset\} \subset K$ und ist $y = hx$, $h \in G$, so folgt die Inklusion $\{g \in G \mid gV_x \cap hV_x \neq \emptyset\} \subset hK$. □

(4.15) Satz. *Operiere G eigentlich auf X. Sei G lokal kompakt. Dann hat die Operation kompakte Wiederkehr.*

Beweis. Sei $U \subset G$ eine beliebige Teilmenge, die in einer kompakten Teilmenge K von G enthalten ist. Angenommen, die Operation habe keine kompakte Wiederkehr. Nach (4.14) gibt es deshalb zu jeder Umgebung V von x ein $g_V \notin U$ und ein $x_V \in V$, so daß $g_V x_V \in V$ ist. Da θ eigentlich ist, gibt es nach der Version von II(6.9) für Netze ein konvergentes Teilnetz (g_j, x_j).

Der Limes hat wegen der Stetigkeit von θ die Form (g, x) mit $g \in G_x$. Da G_x kompakt ist (4.3), wird G_x von endlich vielen Mengen hW überdeckt, wobei W eine offene Umgebung von e ist, die in einer kompakten Menge L enthalten ist (da G lokal kompakt ist). Wir können deshalb die noch nicht spezifizierte Menge U als offene Umgebung von G_x wählen. Es folgt der Widerspruch $g \in G_x$, $g \notin U$. □

Aus (4.13,14,15) folgt nun:

(4.16) Korollar. *Eine lokal kompakte Gruppe operiert genaun dann eigentlich auf einem T_1-Raum, wenn sie kompakte Wiederkehr hat.* □

(4.17) Satz. *Die diskrete Gruppe G operiere mit kompakter Wiederkehr auf dem Hausdorff-Raum X. Dann sind die Isotropiegruppen G_x endlich. Ferner gilt: Jeder Punkt $x \in X$ hat eine G_x-stabile offene Umgebung U mit den Eigenschaften:*

(1) *Für $g \notin G_x$ ist $U \cap gU = \emptyset$.*

(2) *Die durch die Inklusion $U \subset X$ induzierte Abbildung $U/G_x \to X/G$ ist ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge.*

Beweis. Da G diskret ist, sind kompakte Mengen in G endlich. Zu jedem Paar $x, y \in X$ gibt es deshalb offene Umgebungen V_x, V_y, so daß $\{g \in G \mid gV_x \cap V_y \neq \emptyset\}$ endlich ist. Insbesondere ist $G_x \subset \{g \in G \mid gV_x \cap V_x \neq \emptyset\}$ endlich.

Sei U_0 eine offene Umgebung von x, so daß $K = \{g \in G \mid gU_0 \cap U_0 \neq \emptyset\}$ endlich ist. Seien $g_1, \ldots, g_n$ die Elemente von $K \setminus G_x$. Die Punkte $x_i = g_i x$ sind dann von x verschieden. Da X hausdorffsch ist, gibt es offene Umgebungen V_i von x und V_i' von x_i, die disjunkt sind. Sei $U_i = V_i \cap g_i^{-1} V_i'$. Das ist eine offene Umgebung von x, und es gilt $U_i \cap g_i U_i \subset V_i \cap V_i' = \emptyset$. Sei $U' = U_0 \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Das ist eine offene Umgebung von x mit $U' \cap gU' = \emptyset$ für $g \notin G_x$. Die offene Umgebung

$$U = \bigcap_{g \in G_x} gU'$$

von x ist G_x-stabil, und es gilt $U \cap gU = \emptyset$ für $g \notin G_x$. Nach Konstruktion ist $U/G_x \to X/G$ injektiv, stetig und offen. □

Nach (4.13) ist die Operation im voranstehenden Satz eigentlich, der Orbitraum also auch hausdorffsch. Nach (4.15) läßt sich der letzte Satz auf jede eigentliche Operation einer diskreten Gruppe anwenden.

(4.18) Satz. *Es sei $\rho\colon G \times X \to X$ eine eigentliche Linksoperation. Ferner sei $X \times K \to X$ eine damit vertauschbare Rechtsoperation einer kompakten Gruppe K. Sei $p\colon X \to X/K$ die Orbitabbildung und $\bar\rho\colon G \times X/K \to X/K$ die induzierte Operation, die p G-äquivariant macht. Dann ist $\bar\rho$ eine eigentliche Operation. Insbesondere ist die Operation von G auf G/K eigentlich.*

Beweis. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\theta_\rho"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times p"] & X \times X \arrow[d, "p \times p"] \\ G \times X/K \arrow[r, "\theta_{\bar\rho}"] & X/K \times X/K. \end{tikzcd}$$

Die senkrechten Pfeile sind Orbitabbildungen kompakter Gruppen und deshalb eigentlich. Nach II(6.4) ist $\theta_{\bar\rho}$ eigentlich. Wegen (4.5) operiert jede Gruppe eigentlich auf sich selbst durch Linkstranslationen. □

(4.19) Satz. *Die topologische Gruppe G sei hausdorffsch, lokal kompakt und habe eine abzählbare Basis. Sei X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum und $G \times X \to X$ eine transitive Operation. Dann ist für jedes $x \in X$ die Abbildung $b\colon G \to X$, $g \mapsto gx$ offen und die induzierte Abbildung $\bar b\colon G/G_x \to X$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. Ist b offen, so folgt, daß $\bar b$ ein Homöomorphismus ist. Sei W eine Umgebung von e, $(B_i \mid i \in \mathbb{N})$ eine abzählbare Basis und $g_i^{-1} \in B_i$. Ist $g \in G$, so gibt es ein j mit $B_j \subset Wg^{-1}$. Es folgt $g \in g_jW$. Also überdecken die g_jW die Gruppe.

Sei $V \subset G$ offen, $g \in V$. Es gibt eine kompakte Umgebung W von e, so daß $W = W^{-1}$ und $gW^2 \subset V$. Es ist G Vereinigung der g_jW. Da die Operation transitiv ist, gilt $X = \bigcup g_jWx$. Da W kompakt ist und b stetig, so ist g_jWx kompakt und deshalb abgeschlossen in X. Nun gilt: Ist der lokal kompakte Hausdorff-Raum abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen $M_n, n \in \mathbb{N}$, so enthält mindestens eine der Mengen M_n innere Punkte II(5.4). Deshalb enthält ein g_jWx einen inneren Punkt und folglich enthält Wx einen inneren Punkt wx. Dann ist x innerer Punkt von $w^{-1}Wx \subset W^2x$ und somit $gx = p(g)$ ein innerer Punkt von $gW^2x \subset Vx = p(V)$. Mithin ist p offen. □

Wir betrachten nun allgemeiner Operationen der lokal kompakten, hausdorffschen Gruppe G mit abzählbarer Basis auf dem lokal kompakten Hausdorffraum X. Aus (1.4) und (4.18) folgt dann:

(4.20) Satz. *Ein Orbit ist genau dann lokal kompakt, wenn er lokal abgeschlossen ist. Ist er lokal abgeschlossen, so ist er also ein homogener Raum nach der*

Standgruppe eines seiner Punkte. Da andererseits G_x abgeschlossen ist, so ist G/G_x immer lokal kompakt und hausdorffsch. Deshalb sind also nur in diesen Fällen die Bahnen homogene Räume. □

(4.21) Folgerung. *Sei $\varphi: G \to H$ ein stetiger surjektiver Homomorphismus zwischen lokal kompakten, hausdorffschen Gruppen. Hat G eine abzählbare Basis, so ist φ offen und induziert einen Homöomorphismus $G/\mathrm{Kern}\,\varphi \cong H$.* □

(4.22) Aufgaben und Ergänzungen.

1. Die Gruppe $SL(2,\mathbb{R})$ operiert auf der oberen Halbebene $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ durch

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

Die Standgruppe des Elementes i besteht aus den Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $ai + b = i(ci + d)$, $a = d$, $b = -c$, $ad - bc = a^2 + b^2 = 1$, ist also gleich $SO(2)$. Die induzierte Bijektion $SL(2,\mathbb{R})/SO(2) \cong H$ ist ein Homöomorphismus. Also operiert $SL(2,\mathbb{R})$ eigentlich auf H.

Sei $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{R})$ diskret. Eine solche Gruppe heißt *Fuchssche Gruppe*. Der Orbitraum $\Gamma\backslash H$ ist in kanonischer Weise eine Riemannsche Fläche. Die Menge der Punkte mit nichttrivialer Standgruppe ist diskret. Die Standgruppen sind zu Untergruppen von $SO(2)$ konjugiert, also endliche zyklische Gruppen. Man kann zeigen, daß in geeigneten lokalen Koordinaten die Standgruppe wie eine Drehung operiert. Es ist $H \to \Gamma\backslash H$ eine verzweigte Überlagerung im Sinne der Funktionentheorie.

2. Sei die Operation schwach eigentlich. Dann gelten (4.3) (1)-(3).

Ein wichtiges beweistechnisches Hilfsmittel zur Untersuchung Liescher (und allgemeiner: lokal kompakter) Gruppen ist das *invariante (Haarsche) Integral*. Für kompakte Liesche Gruppen G gewinnt man es aus der bekannten Integrationstheorie von Differentialformen wie folgt. Man wählt eine Determinantenform $\omega(e)$ auf dem Tangentialraum T_eG und transportiert diese vermöge des Differentials der Linkstranslation mit g auf den Raum T_gG. Das Resultat ist eine glatte Volumenform ω auf G. Durch Multiplikation mit einem Skalar kann man $\int_G \omega = 1$ erreichen. Ist $f: G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so wird das invariante Integral $\int_G f(g)dg$ als Integral $\int_G f\omega$ über die Differentialform $f\omega$ erklärt. Das Integral heißt linksinvariant, weil die Funktionen $g \mapsto f(hg)$, $h \in G$ alle dasselbe Integral haben. Für eine kompakte Gruppe ist ein linksinvariantes Integral auch rechtsinvariant, denn $f \mapsto \int_G f(gh)dg$ ist ebenfalls ein linksinvariantes Integral, also von der Form $\lambda(h)\int_G f(g)dg$ für eine positive Zahl $\lambda(h)$. Dadurch wird ein Homomorphismus $\lambda: G \to \mathbb{R}^*_+$ definiert, der wegen der Kompaktheit von G trivial sein muß. Für Einzelheiten siehe [**?**].

Eine wichtige Anwendung des invarianten Integrals ist die Existenz invarianter Skalarprodukte in Darstellungsräumen V. Ist $b: V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt, so ist

$$\langle v, w\rangle = \int_G b(gv, gw)dg$$

ein invariantes Skalarprodukt. Ist U ein G-stabiler Unterraum von V, so ist $U^\perp$, das orthogonale Komplement bezüglich des invarianten Skalarproduktes, wieder G-stabil.

??????????????

Wir benutzen die Methode der Transformationsgruppen, um weitere Resultate über projektive Räume herzuleiten. Die komplexe Konjugation

(4.23) $$\tau\colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2, \quad [z_0, z_1, z_2] \mapsto [\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2]$$

liefert eine Operation der Gruppe $\mathbb{Z}/2$. Sei $S = \mathbb{C}P^2/\tau$ der Orbitraum.

(4.24) Satz. *Der Orbitraum S ist homöomorph zur Sphäre S^4.*

Wir geben einen auf Massey [**?**] zurückgehenden Beweis. Er wird durch einige Hilfssätze vorbereitet. Zunächst verifiziert man:

(4.25) Notiz. *Durch $t\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$, $[x_0, x_1] \mapsto [\bar{x}_1, -\bar{x}_0]$ wird eine freie Involution auf $\mathbb{C}P^1$ definiert.* □

Auf $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ betrachten wir die Operation der Gruppe D, die von der Vertauschung $v\colon (x,y) \mapsto (y,x)$ und den beiden freien Involutionen (4.2) auf den Faktoren erzeugt wird.

(4.26) Notiz. *Die Gruppe D ist die Diedergruppe D_8 der Ordnung* 8.

Beweis. Die Gruppe D_8 hat die Präsentation

$$D_8 = \langle\, A, v \mid A^4 = 1 = v^2,\ vAv^{-1} = A^{-1} \,\rangle.$$

Für A verwenden wir $A\colon (x,y) \mapsto (ty, x)$. Man verifiziert dann zusammen mit dem obigen v die Relationen. □

Wir verwenden die folgenden Untergruppen von D, die durch die Wirkung auf ein allgemeines Element (x,y) beschrieben werden.

$$\begin{array}{rcll} L & = & \langle\, v \,\rangle \cong \mathbb{Z}/2 & \{(x,y),(y,x)\} \\ K & \cong & \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 & \{(x,y),(tx,y),(tx,ty),(x,ty)\} \\ H & = & \langle\, A^2, v \,\rangle \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 & \{(x,y),(tx,ty),(y,x),(ty,tx)\}. \end{array}$$

Es ist $L \subset H$.

Ist X ein topologischer Raum und X^r das r-fache kartesische Produkt von X mit sich selbst, so operiert die symmetrische Gruppe S_r auf X durch Vertauschung der Faktoren. Der Orbitraum $SP^r(X) = X^r/S_r$ heißt *r-te symmetrische Potenz* von X.

(4.27) Satz. *$SP^r(\mathbb{C}P^1)$ ist kanonisch homöomorph zu $\mathbb{C}P^r$.*

Beweis. Der Satz spiegelt die Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren wieder. (Polynome, die sich um einen konstanten Faktor unterscheiden, werden identifiziert.) Ein Punkt $[a,b] \in \mathbb{C}P^1$ werde mit der entsprechenden Äquivalenzklasse

$ax + by$ dieses linearen Polynoms identifiziert. Allgemein wird $[a_0, a_1, \dots, a_r] \in \mathbb{C}P^r$ mit der Klasse des homogenen Polynoms vom Grad r

$$a_0 x^r + a_1 x^{r-1} y + \cdots + a_r y^r$$

identifiziert. Ein Homöomorphisms $SP^r(\mathbb{C}P^1) \to \mathbb{C}P^r$ wird durch das Produkt

$$(a_j x + b_j y \mid j = 0, \dots, r) \mapsto \prod\nolimits_{j=0}^{r} (a_j x + b_j y)$$

induziert. Diese Abbildung ist wohldefiniert und faktorisiert über den Orbitraum $SP^r(\mathbb{C}P^1)$. Jedes Polynom läßt sich in Linearfaktoren zerlegen, deshalb ist die Abbildung surjektiv. Die Zerlegung in Linearfaktoren ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren und skalare Multiplikation eindeutig, deshalb ist die Abbildung injektiv. Da ein kompakter Raum in einen hausdorffschen abgebildet wird, handelt es sich um einen Homöomorphismus. $\square$

Im Falle $n = 2$ wird der vorstehende Homöomorphismus durch

(4.28) $$\alpha\colon \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^2, \quad [x_0, x_1], [y_0, y_1] \mapsto [x_0 y_0, x_0 y_1 + x_1 y_0, x_1 y_1]$$

induziert. Man rechnet nach:

(4.29) Notiz. *Die Abbildung $t \times t$ wird durch α in die Involution*

$$\tilde{\tau}\colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2, \quad [z_0, z_1, z_2] \mapsto [\bar{z}_2, -\bar{z}_1, \bar{z}_0]$$

transformiert, das heißt es gilt $\alpha(t \times t) = \tilde{\tau}\alpha$. $\square$

Die Konjugation $\tilde{\tau}$ aus (4.7) ist durch Basiswechsel in die anfängliche Konjugation τ aus (4.1) überführbar. Der Automorphismus

$$\gamma\colon [z_0, z_1, z_2] \mapsto [z_0 + z_2, iz_1, i(z_0 - z_2)]$$

leistet dies, es gilt $\gamma \circ \tilde{\tau} = \tau \circ \gamma$. Dahinter steckt die folgende allgemeine Aussage aus der linearen Algebra. Eine konjugiert-lineare Abbildung $J\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mit $J^2 = \mathrm{id}$ heißt *reelle Struktur* auf $\mathbb{C}^n$. Sind J_1 und J_2 reelle Strukturen auf $\mathbb{C}^n$, so gibt es einen linearen Automorphismus $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, der $fJ_1 = J_2 f$ erfüllt.

Vermöge des Isomorphismus (4.5) $\alpha\colon (\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)/L \cong \mathbb{C}^2$ wird die H/L-Operation also bis auf einen linearen Automorphismus γ in die Konjugation τ überführt. Demnach folgt (4.2) aus

(4.30) Satz. *Der Orbitraum $(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)/H$ ist homöomorph zu S^4.*

Zum Beweis dieses Satzes notieren wir zunächst:

(4.31) Notiz. *D/H operiert frei auf $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)/H$. Demnach ist $(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)/H \to (\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)/D$ eine nichttriviale zweifache Überlagerung.*

Beweis. Die Freiheit verifiziert man. Die Überlagerung ist nichttrivial, weil der Totalraum zusammenhängend ist. $\square$

Die Gruppe D/K wird von v erzeugt. Deshalb gilt:

(4.32) Notiz. *D/K operiert auf $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^1/K = \mathbb{C}P^1/t \times \mathbb{C}P^1/t$ durch Vertauschung der Faktoren.* □

Der Beweis von (4.8) und damit von (4.2) beruht nun auf den folgenden Aussagen:

$$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1/D \cong \mathbb{R}P^4, \qquad SP^2(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{R}P^4.$$

Aus der ersten folgt nämlich mittels (4.9) sofort (4.8), weil S^4 die einzige nichtriviale zweifache Überlagerung von $\mathbb{R}P^4$ ist. Wegen (4.10) wissen wir, daß $(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)/D \cong SP^2(\mathbb{R}P^2)$ ist, so daß die zweite Homöomorphie schließlich die erste liefert. Es bleiben also die symmetrischen Potenzen von $\mathbb{R}P^2$ zu bestimmen. Dazu dient eine allgemeine Überlegung.

(4.33) Satz. *Der kompakte Hausdorff-Raum X trage eine freie Involution $T: X \to X$. Sie induziert eine Involution $P^{2n}(T)$ auf $SP^{2n}(X)$. Es gibt einen kanonischen Homöomorphismus $SP^{2n}(X)^U \cong SP^n(X/T)$.*

Beweis. Wir verwenden $\iota: X^n \to X^{2n}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, Tx_1, \ldots, x_n, Tx_n)$. Diese Abbildung induziert eine Abbildung $SP^n(X/T) \to SP^{2n}(X)^U$, die man als bijektiv nachwiest. □

Wir betrachten nun den Homöomorphismus (4.5) und die Involution $T = t$ aus (4.1). Bei diesem Homöomorphismus geht $SP^r(T)$ in die Involution

(4.34) $$[z_0, \ldots, z_r] \mapsto [\bar{z}_r, -\bar{z}_{r-1}, \bar{z}_{r-2}, \ldots]$$

über. Diese Involution entsteht aus einer reellen Struktur auf $\mathbb{C}^{r+1}$ und ist, wie oben bemerkt wurde, linear konjugiert zur Standardkonjugation $[z_i] \mapsto [\bar{z}_i]$. Demnach ist die Fixpunktmenge homöomorph zu $\mathbb{R}P^r$ in der üblichen reellen Einbettung. Mittels (4.1) erhalten wir jetzt Homöomorphismen

$$SP^n(\mathbb{R}P^2) \cong SP^n(\mathbb{C}P^1/T) \cong SP^{2n}(\mathbb{C}P^1)^U \cong (\mathbb{C}P^{2n})^U \cong \mathbb{R}^{2n}.$$

Das blieb aber gerade noch (für $n = 2$) zum Beweis von (4.2) zu zeigen.

Die Gruppe $SO(3)$ operiert auf $\mathbb{R}P^2$ und damit auch auf $SP^n(\mathbb{R}^2)$. Welche Operation auf $\mathbb{R}P^{2n}$ entsteht daraus durch den Homöomorphismus (4.14)? Analog: Welche $SU(2)$-Operation auf $\mathbb{C}P^n$ entsteht durch (4.5) aus der kanonischen $SU(2)$-Operation auf $\mathbb{C}P^1$?.

Wir widmen uns zunächst der zweiten Frage. Sei $H(r)$ der komplexe Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad r in zwei Unbestimmten. Dieser Raum hat die Dimension $r+1$. Durch lineare Tranformation der Variablen wird $H(r)$ zu einer $SU(2)$-Darstelung. Es gilt: Die irreduziblen komplexen $SU(2)$-Darstellungen sind genau die Darstellungen $H(r)$ für $r \in \mathbb{N}_0$ [**?**, p.]. Der Isomorphismus $SP^r(\mathbb{R}^1) \cong P(H(r))$ ist mit der $SU(2)$-Operation verträglich. Als Modell für $\mathbb{R}P^2$ verwenden wir $\mathbb{C}P^1/t$. Die Abbildung $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, $z \mapsto (z, tz)$ induziert eine Einbettung

$$\sigma: \mathbb{C}P^1/t \to SP^2(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{C}P^2.$$

Das Bild ist die Fixpunktmenge von $\tilde{\tau}$, siehe (4.7). Man rechnet nach:

(4.35) Notiz. *σ ist $SU(2)$-äquivariant.*

Beweis. Für $A \in SU(2)$ hat man $tA = At$ zu zeigen, da $\sigma Ax = (Ax, tAx)$ und $(A \times A)\sigma(x) = (Ax, Atx)$ ist. (Eine Erklärung für diese Tatsache liegt auch darin, daß t der antipodischen Involution auf $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ entspricht und $A \in SU(2)$ wie eine Drehung auf S^2 wirkt.) □

Da $SP^2(t)$ auf $SP^2(\mathbb{C}P^1)$ in die Involution $\tilde{\tau}$ auf $\mathbb{C}P^2$ übergeht, so ist die Darstellung auf $H(r)$ mit der konjugiert-linearen Abbildung $\tilde{\tau}$ verträglich und liefert deshalb eine reelle Struktur auf dieser Darstellung.

Auf der Fixpunktmenge einer reellen Struktur wird eine reelle Darstellung induziert. Die Darstellungen von $SU(2)$ der ungeraden Dimension $H(2r)$, $r \in \mathbb{N}_0$, das heißt die geraden symmetrischen Potenzen, liefern also eine Darstellung von $SO(3) \cong SU(2)/\{\pm E\}$. Außerdem tragen sie eine reelle Struktur. Es gilt: Die irreduziblen komplexen Darstellungen von $SO(3) \cong SU(2)/\{\pm E\}$ sind genau die Darstellungen $H(2r)$; alle diese Darstellungen tragen eine reelle Struktur [**?**, p.]. Wir haben nun generell ein Diagramm von $SU(2)$-Operationen und äquivarianten Abbildungen (bzw. Isomorphismen)

$$SP^n(\mathbb{C}P^1/t) \xrightarrow{\sigma} SP^{2n}(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{C}P^{2n},$$

wobei das Bild von σ in der Fixpunktmenge einer reellen Struktur $\bar{\tau}$ liegt. (Es entspricht $\bar{\tau}$ bei dem Isomorphismus der Abbildung $SP^{2n}(t)$.) Somit gehört die reelle irreduzible Darstellung auf $\mathbb{R}P^{2n}$ zu dem Isomorphismus $SP^n(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{R}P^{2n}$.

6 Bündel

1 Prinzipalbündel

Für die geometrische Untersuchung stetiger Abbildungen $p: E \to B$ hat sich der folgende Gesichtspunkt als erfolgreich erwiesen: p wird als stetige Familie der Urbilder $p^{-1}(b)$ betrachtet, die durch B parametrisiert werden. In diesem Kontext nennt man E den *Totalraum*, labeltotalraum B die *Basis* und $p^{-1}(b)$ die *Faser* von p über b. Besonders wichtig ist der Fall, daß alle Fasern homöomorph zu einem festen Raum F sind. Im einzelnen muß man festlegen, wie benachbarte Fasern miteinander verglichen werden sollen. Das geschieht durch die lokal trivialen Abbildungen, die lokal wie die Projektion eines Produktes auf einen Faktor aussehen.

Sei $p: E \to B$ eine stetige Abbildung und $U \subset B$ eine offene Teilmenge. Eine *lokale Trivialisierung* mit *typischer Faser* F über U ist ein Homöomorphismus

$$\varphi: p^{-1}(U) \to U \times F, \quad z \mapsto (\varphi_1(z), \varphi_2(z)),$$

für den $\mathrm{pr}_1\, \varphi(z) = \varphi_1(z) = p(z)$ gilt. Die Abbildung p heißt *lokal trivial* mit *typischer Faser* F, wenn jeder Punkt $b \in B$ eine offene Umgebung U besitzt, über der eine lokale Trivialisierung mit typischer Faser F existiert. Eine lokal triviale Abbildung heißt auch *Bündel* oder *Faserbündel* und eine lokale Trivialisierung *Bündelkarte*. Eine *Überlagerung* ist eine lokal triviale Abbildung mit diskreter Faser F. Ist F diskret, so ist $U \times F$ homöomorph zur topologischen Summe $\coprod_{x\in F} U \times \{x\}$. Die Summanden $U \times \{x\}$ sind alle zu U homöomorph, und $\varphi^{-1}(U \times \{x\})$ wird durch p topologisch abgebildet. Eine Überlagerung ist deshalb ein lokaler Homöomorphismus. Die Summanden $\varphi^{-1}(U \times \{x\})$ sind die *Blätter* der Überlagerung über U. Ist F endlich, so nennt man $|F| = n$ die *Blätterzahl* der Überlagerung und spricht von einer endlichen (genauer: n-fachen) Überlagerung.

Sei G eine topologische Gruppe, $r: E \times G \to E$, $(x, g) \mapsto xg$ eine stetige Rechtsoperation und $p: E \to B$ eine stetige Abbildung. Das Paar (p, r) ist ein *G-Prinzipalbündel*, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(1) Für $x \in E$ und $g \in G$ gilt $p(xg) = p(x)$.

(2) Zu jedem $b \in B$ gibt es eine offene Umgebung U und einen G-Homöomorphismus $\varphi: p^{-1}(U) \to U \times G$, der eine lokale Trivialisierung von p über U mit typischer Faser G ist. Dabei operiert G auf $p^{-1}(U)$ durch Einschränkung der Operation auf E und auf $U \times G$ durch Rechtstranslation $((u, x), g) \mapsto (u, xg)$ auf dem zweiten Faktor.

Im Gegensatz zu einer beliebigen lokal trivialen Abbildung sind also bei einem Prinzipalbündel die Bündelkarten noch zusätzlich mit der Gruppenoperation verträglich. Wie üblich wird die Gruppenoperation auf E meist unterstellt, und wir sagen dann einfach, $p: E \to B$ ist ein G-Prinzipalbündel. Wegen (1) induziert p eine Abbildung $\overline{p}: E/G \to B$. Aus (2) folgt, daß G auf E frei operiert und $\overline{p}$ ein Homöomorphismus ist, denn eine lokal triviale Abbildung ist eine Identifizierung.

Ein Bündel $p\colon E \to B$ heißt *trivial*, wenn es eine Bündelkarte (eine Trivialisierung) über B gibt. Prinzipalbündel lassen sich genauso mit Linksoperationen definieren; man spricht zur Unterscheidung auch von Rechts- und Linksprinzipalbündeln.

(1.1) Satz. *Sei ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ B & \xrightarrow{\mathrm{id}} & B \end{array}$$

aus G-Prinzipalbündeln p, q und einer G-Abbildung f gegeben. Dann ist f ein G-Homöomorphismus.

Beweis. Offenbar ist f bijektiv. Da die Stetigkeit von f^{-1} lokal nachgewiesen werden kann, genügt es, triviale Bündel zu betrachten. Dann hat f die Form

$$f\colon B \times G \to B \times G, \quad f(b,g) = (b, \varphi(b,g)) = (b, \varphi(b,e)g),$$

$B \to G,\ b \mapsto \varphi(b,e)$ ist stetig, und $(b,g) \mapsto (b, \varphi(b,e)^{-1}g)$ ist eine Umkehrung von f. □

Sei $p\colon X \to B$ ein G-Prinzipalbündel und $f\colon C \to B$ stetig. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm (Pullback)

$$\textbf{(1.2)} \qquad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ C & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

in dem $Y = \{(c,x) \mid f(c) = p(x)\} \subset C \times X$ ist und q und F Einschränkungen der Projektionen auf die Faktoren sind. Die G-Operation auf X induziert eine auf $C \times X$, nämlich $(c,x)g = (c,xg)$ und eine auf der G-stabilen Teilmenge Y. Ist p trivial über $V \subset B$, so ist q trivial über $f^{-1}(V)$. Deshalb ist q ein G-Prinzipalbündel, genannt das von p durch f *induzierte Bündel*.

Sei umgekehrt ein kommutatives Diagramm (1.2) mit G-Prinzipalbündeln p und q und einer G-Abbildung F gegeben. Dann wird F eine *Bündelabbildung* genannt. Sei $q^*\colon X^* \to C$ das von p durch f induzierte Bündel, mit der zugehörigen Bündelabbildung $f^*\colon X^* \to X$. Es gibt genau eine G-Abbildung $h\colon Y \to X^*$ mit $q^* \circ h = q$ und $F^* \circ h = F$. Nach (1.1) ist h ein G-Homöomorphismus. Deshalb ist bei einer Bündelabbildung (1.2) $q\colon Y \to C$ kanonisch isomorph zum induzierten Bündel, und das Diagramm (1.2) ist dann ein Pullback. Ein *Bündelisomorphismus* von G-Prinzipalbündeln $q_i\colon Y \to C$ ist eine G-Abbildung $h\colon Y_1 \to Y_2$ mit $q_2 h = q_1$; sie ist nach (1.1) umkehrbar stetig.

Wir betrachten nun Prinzipalbündel von einem weiteren Gesichtspunkt. Ein rechter G-Raum U heißt *trivial*, wenn es eine stetige G-Abbildung $f\colon U \to G$ in den G-Raum G mit der Operation durch Rechtstranslation gibt.

(1.3) Notiz. *Ein G-Raum U ist genau dann trivial, wenn $U \to U/G$ isomorph zum trivialen G-Prinzipalbündel* $\mathrm{pr}: U/G \times G \to U/G$ *ist.*

Beweis. Sei $f: U \to G$ gegeben und sei $p: U \to U/G$ die Quotientabbildung. Dann ist $(p, f): U \to U/G \times G$ eine bijektive stetige G-Abbildung über U/G. Ferner faktorisiert $U \to U, u \mapsto u \cdot f^{-1}(u)$ über p und induziert deshalb eine stetige Abbildung $s: U/G \to G$. Man verifiziert, daß

$$U/G \times G \to U, \quad (x, g) \mapsto s(x)g$$

invers zu (p, f) ist. □

Ein rechter G-Raum wird *lokal trivial* genannt, wenn er eine offene Überdeckung durch triviale G-Räume hat. In dieser Terminologie gilt dann:

(1.4) Satz. *Der Totalraum E eines G-Prinzipalbündels ist lokal trivial. Ist E lokal trivial, so ist $E \to E/G$ ein G-Prinzipalbündel.* □

(1.5) Satz. *Sei G eine topologische Gruppe und H eine Untergruppe. Die Quotientabbildung $q: G \to G/H$ ist genau dann ein H-Prinzipalbündel, wenn q einen lokalen Schnitt hat, das heißt wenn es eine offene Umgebung U von eH in G/H und eine stetige Abbildung $s: U \to G$ mit $qs(x) = x$ für $x \in U$ gibt.*

Beweis. Eine lokal triviale Abbildung hat immer lokale Schnitte, wie schon bemerkt wurde. Sei also, umgekehrt, $s: U \to G$ ein lokaler Schnitt von q. Ist s ein Schnitt über U, so ist $x \mapsto gs(g^{-1}x)$ ein Schnitt über gU. Es sind $sq(g)$ und g in derselben Restklasse enthalten. Die H-äquivarianten Abbildungen der Form

$$kq^{-1}(U) \to H, \quad kg \mapsto s(q(g))^{-1}g$$

zeigen, daß G ein lokal trivialer H-Raum ist. □

Sei $E \times G \to E$ eine freie Operation. Wir haben den Unterraum

$$C = C(E) = \{(x, xg) \mid x \in E, g \in G\}$$

und die *Translationsabbildung* oder *Differenzabbildung* $t_E: C(E) \to G$, $(x, xg) \mapsto g$.

(1.6) Notiz. *Ist $p: E \to E/G$ lokal trivial, so ist t_E stetig.*

Beweis. Sei $W \subset E$ eine G-stabile offene Menge und $\psi: U \times G \to W$ eine lokale Trivialisierung. Das Urbild von $(W \times W) \cap C(E)$ bei $\psi \times \psi$ ist

$$\{(u, g, u, h) \mid u \in U, g, h, \in G\},$$

und $t_E(\psi \times \psi)$ ist die stetige Abbildung $(u, g, u, h) \mapsto g^{-1}h$. □

(1.7) Satz. *Die diskrete Gruppe G operiere frei auf E. Dann ist $p: E \to E/G$ genau dann ein G-Prinzipalbündel, wenn die Operation blätternd ist.*

Beweis. □

Aus G-Prinzipalbündeln erhält man assoziierte Faserbündel mit typischer Faser F. Sei $p\colon E \to B$ ein G-Prinzipalbündel und F ein topologischer Raum mit Linksoperation von G. Der Raum $E \times_G F$ entsteht als Orbitraum der Operation $G \times (E \times P) \to E \times F$, $(g, e, f) \mapsto (eg^{-1}, gf)$. Die Projektion $E \times F \to E$ induziert nach Übergang zu den Orbiträumen eine lokal triviale Abbildung $q\colon E \times_G F \to B$, die man als das *zu p assoziierte Faserbündel* mit typischer Faser F bezeichnet. Man nennt G die *Strukturgruppe* des Faserbündels. Die Strukturgruppe enthält eine zusätzliche Information: Die lokalen Trivialisierungen haben nämlich die Eigenschaft, daß über ihren gemeinsamen Definitionsbereichen die Kartenwechsel durch solche Homöomorphismen der Faser gegeben werden, die aus der Operation eines Gruppenelementes hervorgehen. Ein *Schnitt* einer Abbildung $q\colon X \to Y$ ist eine Abbildung $s\colon Y \to X$ mit $qs = \mathrm{id}$. Wir wiederholen hier einen Spezialfall von (4.6).

(1.8) Satz. *Sei $f\colon E \to F$ eine stetige Abbildung eines G-Prinzipalbündels E, die $f(xg) = g^{-1}f(x)$ für $x \in E$ und $g \in G$ erfüllt. Dann wird durch $E \to E \times F$, $x \mapsto (x, f(x))$ nach Übergang zu den Orbiträumen ein Schnitt $s_f\colon B \to E \times_G F$ induziert. Jeder stetige Schnitt des Faserbündels $q\colon E \times_G F \to B$ entsteht auf diese Weise aus genau einer Abbildung f der genannten Art.* □

Sei $E \to B$ ein G-Prinzipalbündel und $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann ist

$$E \times_G G/H \to E/H, \quad (x, gH) \mapsto xgH$$

eine bijektive stetige Abbildung, und

$$E \to E \times_G G/H, \quad x \mapsto (x, eH)$$

induziert eine stetige Umkehrabbildung. Deshalb ist die kanonische Abbildung $E/H \to E/G, xH \mapsto xG$ isomorph zu dem assoziierten Faserbündel $E \times_G G/H \to E/G$ mit Faser G/H. Sind insbesondere Untergruppen $K \subset H \subset G$ gegeben, so ist $G/K \to G/H$ ein Bündel mit Strukturgruppe H und Faser H/K, sofern $G \to G/H$ lokale Schnitte hat.

Ist X ein G-Raum und H ein Normalteiler in G, so operiert die topologische Gruppe G/H auf dem Orbitraum X/H kanonisch durch $(xH, gH) \mapsto xgH$. Die Quotientabbildung $X/H \to X/G$ induziert einen Homöomorphismus $(X/H)/(G/H) \cong X/G$. Insbesondere wird $E/H \to E/G$ auf diese Weise ein G/H-Prinzipalbündel.

(1.9) Beispiel. Sei $V_k(\mathbb{R}^n)$ die Menge der orthonormierten k-Beine $x_1, \dots, x_k$ von Vektoren $x_i \in \mathbb{R}^n$. Sei $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ der von $x_1, \dots, x_k$ aufgespannte Unterraum. Sei $G_k(\mathbb{R}^n)$ die Menge der k-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Wir haben die Abbildung $p\colon V_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$, $(x_1, \dots, x_k) \mapsto \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Die Gruppe $O(n)$ operiert auf $V_k(\mathbb{R}^n)$ und $G_k(\mathbb{R}^n)$ durch

$$(A, (x_1, \dots, x_k)) \mapsto (Ax_1, \dots, Ax_k).$$

Dadurch wird p eine $O(n)$-äquivariante Abbildung. Die Standgruppe von $(x_1, \dots, x_k)$ ist

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \qquad B \in O(n-k), \quad I \text{ Einheitsmatrix}$$

und die Standgruppe von $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ ist

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \qquad (A, B) \in O(k) \times O(n-k).$$

Die Operation von $O(n)$ auf $V_k(\mathbb{R}^n)$ und $G_k(\mathbb{R}^n)$ ist transitiv. Deshalb können wir p mit der kanonischen Abbildung

$$p\colon O(n)/O(n-k) \to O(n)/O(k) \times O(n-k)$$

identifizieren, wobei wir die Standgruppen in der Bezeichnung durch die dazu isomorphen Gruppen ersetzt haben, die aber in der angegebenen Weise als Untergruppen von $O(n)$ zu interpretieren sind. Da die eine Standgruppe in der anderen Normalteiler ist, erhalten wir außerdem p als ein $O(k)$-Prinzipalbündel. Man nennt $V_k(\mathbb{R}^n)$ die *Stiefelschen* und $G_k(\mathbb{R}^n)$ die *Graßmannschen Mannigfaltigkeiten.*

Sei X ein G-Raum, H eine Untergruppe von G und $f\colon X \to G/H$ eine G-Abbildung. Dann ist $A = f^{-1}(eH)$ ein H-Unterraum von X, und wir haben eine induzierte G-Abbildung $F\colon G \times_H A$, $(g, a) \mapsto ga$. Diese Abbildung ist immer bijektiv. Sei $p\colon G \times_H A \to G/H$, $(g, a) \mapsto gH$. Dann gilt $fF = p$.

(1.10) Satz. *Unter einer der folgenden Bedingungen ist F ein Homöomorphismus:*

(1) *Die Quotientabbildung $q\colon G \to G/H$ hat einen lokalen Schnitt.*

(2) *G ist kompakt hausdorffsch und H abgeschlossen.*

Beweis. (1) Sei $U \subset G/H$ offen und $s\colon U \to G$ ein stetiger Schnitt von q. Ist $x \in f^{-1}(U)$, so ist $(sfx)^{-1}x \in A$ und demnach $F^*\colon f^{-1}(U) \to p^{-1}(U)$, $x \mapsto (sfx, (sfx)^{-1}x)$ stetig und invers zu F über U. Mittels Äquivarianz erhält man Homöomorphismen über Mengen gU, $g \in G$.
(2) Unter den genannten Voraussetzungen ist F abgeschlossen (siehe ??). □

Sei $p\colon Y \to B$ ein rechtses G-Prinzipalbündel. Eine *Reduktion der Strukturgruppe* auf die Untergruppe H besteht aus einem H-Prinzipalbündel $q\colon X \to B$ und einem G-Homöomorphimus $r\colon Y \to X \times_H G$ über B. Setzen wir r mit der kanonischen Abbildung $p\colon X \times_G X \to H\backslash Ge$ zusammen, so erhalten wir eine G-Abbildung $f\colon Y \to H\backslash G$. Ist umgekehrt f gegeben, so können wir unter geeigneten Umständen Y als $X \times_H G$ mit $X = f^{-1}(eH)$ schreiben, wie wir eben gesehen haben.

2 Universelle Bündel

Es ist eine bemerkenswerte und wichtige Tatsache, daß sich im wesentlichen alle G-Prinzipalbündel von einem festen Bündel induzieren lassen. Ein G-Bündel $q\colon E \to B$ heiße *numerierbar*, wenn es eine offene Überdeckung $(U_n \mid n \in \mathbb{N})$ von B gibt und dazu stetige Funktionen $(t_n\colon B \to [0,1])$, so daß gilt:

(1) q ist über U_n trivial;
(2) $t_n^{-1}\,]0,1] \subset U_n$;
(3) für jedes $x \in B$ ist $\{n \mid t_n(x) \neq 0\}$ endlich und $\sum_n t_n(x) = 1$.

Gibt es eine endliche derartige Überdeckung, so kann man sie durch Nullfunktionen leicht formal zu einer abzählbar unendlichen ergänzen. Im Abchnitt über Partitionen der Eins werden wir eine andere, äquivalente Definition eines numerierbaren Bündels geben.

Ein G-Prinzipalbündel $p\colon EG \to BG$ heißt *universell*, wenn es numerierbar ist und wenn jedes andere numerierbare G-Prinzipalbündel $q\colon E \to B$ bis auf Homotopie genau eine Bündelabbildung nach p besitzt.

Zwei Bündelabbildungen $\alpha_0, \alpha_1\colon E \to EG$ heißen homotop, wenn es eine stetige Abbildung $\alpha\colon E \times [0,1] \to EG$ gibt, so daß $\alpha_t\colon E \to EG$, $x \mapsto \alpha(x,t)$ für jedes $t \in I$ eine Bündelabbildung ist, wenn also α äquivariant bezüglich der G-Operation $g\cdot(x,t) = (gx,t)$ auf $E\times[0,1]$ ist. Die Abbildung α heißt G-Homotopie von α_0 nach α_1.

Ist $p'\colon E'G \to B'G$ ein weiteres universelles Bündel, so gibt es bis auf Homotopie eindeutige Bündelabbildungen $\beta\colon EG \to E'G$, $\gamma\colon E'G \to EG$. Die Zusammensetzungen $\beta\gamma$ und $\gamma\beta$ müssen als Bündelabbildungen homotop zur Identität sein. Insbesondere sind die Räume BG und $B'G$ homotopieäquivalent. Wegen dieser Eindeutigkeit spricht man von *dem* universellen Bündel $EG \to BG$. Der Raum BG heißt *klassifizierender Raum* zur Gruppe G.

(2.1) Satz. *Zu jeder topologischen Gruppe G gibt es ein universelles G-Prinzipalbündel.*

Der Beweis wird durch eine Konstruktion geführt, die von Milnor stammt [**?**]. Sie benutzt den *Verbund* (engl. Join) von topologischen Räumen.

Sei $(X_j \mid j \in J)$ eine Familie topologischer Räume X_j. Der Verbund

$$X = *_{j\in J} X_j$$

ist der folgendermaßen definierte Raum. Die Elemente von X werden durch J-Tupel

$$(t_j x_j \mid j \in J),\ t_j \in [0,1],\ x_j \in X_j,\ \Sigma t_j = 1$$

repräsentiert, in denen nur endlich viele t_j von Null verschieden sind. Die Tupel $(t_j x_j)$ und $(u_j y_j)$ definieren genau dann dasselbe Element von X, wenn gilt:

(1) Für alle $j \in J$ ist $t_j = u_j$.
(2) Für alle $j \in J$ gilt: $t_j \neq 0$ impliziert $x_j = y_j$.

Demnach gibt es Koordinatenabbildungen

$$t_j\colon X \to [0,1],\ (t_i x_i) \mapsto t_j, \qquad p_j\colon t_j^{-1}]0,1] \to X_j,\ (t_i x_i) \mapsto x_j.$$

Die Topologie auf X sei die gröbste Topologie, für die alle t_j und p_j stetig sind. Diese Topologie wird durch die folgende Eigenschaft charakterisiert: Eine Abbildung $f\colon Y \to X$ eines topologischen Raumes Y ist genau dann stetig, wenn die Abbildungen $t_j f\colon Y \to [0,1]$ und $p_j f\colon f^{-1} t_j^{-1}]0,1] \to X_j$ stetig sind.

Sind die X_j sämtlich G-Räume, so wird durch $(g,(t_j x_j)) \mapsto (t_j g x_j)$ eine stetige G-Operation auf X definiert. Der Milnorsche Raum wird als

$$EG = G * G * G * \ldots,$$

das heißt als Verbund von abzählbar vielen Exemplaren des Raumes G mit der Linksoperation von G, definiert. Wir schreiben $BG = EG/G$ für den Orbitraum und $p\colon EG \to BG$ für die Orbitabbildung.

Ein Teil der universellen Eigenschaft von EG wird durch den folgenden Satz geliefert.

(2.2) Satz. *Sei E ein G-Raum. Je zwei G-Abbildungen $f,g\colon E \to EG$ sind G-homotop.*

Beweis. [?] Wir betrachten Koordinatendarstellungen von $f(x)$ und $g(x)$

$$(t_1(x)f_1(x), t_2(x)f_2(x), \ldots) \quad \text{und} \quad (u_1(x)g_1(x), u_2(x)g_2(x), \ldots)$$

und zeigen, daß f und g zu Abbildungen mit den Koordinatendarstellungen

$$(t_1(x)f_1(x), 0, t_2(x)f_2(x), 0, \ldots) \quad \text{und} \quad (0, u_1(x)g_1(x), 0, u_2(x)g_2(x), \ldots)$$

G-homotop sind, worin 0 ein Element der Form $0 \cdot y$ bezeichnet. Um dieses, etwa für f, zu erreichen, wird eine Homotopie in unendlich vielen Schritten definiert. Der erste Schritt wird, mit dem Homotopieparameter t, durch

$$(t_1 f_1, t t_2 f_2, (1-t) t_2 f_2, t t_3 f_3, (1-t) t_3 f_3, \ldots)$$

beschrieben. Er beseitigt die erste Null in dem oben genannten Endergebnis. Nun iteriere man sinngemäß diese Prozedur. Man erhält eine geeignete Homotopie, indem man auf $[0,\frac{1}{2}]$ die des ersten Schrittes, auf $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ die des zweiten Schrittes usw. verwendet. Die gesamte Homotopie ist stetig, weil an jeder Stelle in den Tupeln nur endlich viele Schritte wirksam sind.

Sind die beiden oben genannten Gestalten erreicht, so werden sie durch

$$((1-t) t_1 f_1, t u_1 g_1, (1-t) t_2 f_2, t u_2 g_2, \ldots)$$

homotop miteinander verbunden. □

Für Verallgemeinerungen ist es nützlich zu beobachten, daß der voranstehende Beweis nur formale Eigenschaften benutzt: Man kann mit einem abzählbaren Verbund irgendeines Raumes arbeiten.

Das Bündel $p\colon EG \to BG$ ist über den Mengen $U_n = V_n/G$ mit $(V_n = t_n^{-1}]0,1])$ trivial, denn man hat eine G-Abbildung $p_n\colon V_n \to G$ (die Koordinatenabbildung des Verbundes), und die Koordinatenfunktionen $t_n\colon EG \to [0,1]$ des Verbundes faktorisieren über BG und zeigen, daß das Bündel numerierbar ist.

Die Definition des Verbundes ist so eingerichtet, daß sich folgender Satz unmittelbar ergibt:

(2.3) Satz. *Ein numerierbares Bündel $q\colon E \to B$ besitzt eine Bündelabbildung nach $p\colon EG \to BG$.*

Beweis. Seien (U_n) und (t_n) die Daten, die zu einem numerierbaren Bündel gehören. Sei $W_n = p^{-1}U_n$ und $s_n = t_n \circ q$. Da q über U_n trivial ist, gibt es eine G-Abbildung $\varphi_j\colon W_j \to G$. Wir setzen $\varphi(x) = (s_1(z)\varphi_1(z), s_2(z)\varphi_2(z), \ldots)$; dann ist φ eine Bündelabbildung der gesuchten Art. $\square$