Feuille 0 : Raisonnements et quantificateurs

Exercice 1 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose $\Longleftrightarrow, \Longrightarrow, \Longleftarrow$.

1) Soit un réel x. On a $x^2 = 4 \ldots\ldots x = 2$.
2) Soit un complexe z. On a $z = \bar{z} \ldots\ldots z \in \mathbb{R}$.
3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x = \pi \ldots\ldots e^{2ix} = 1$.

Modifier les assertions pour obtenir des équivalences.

Exercice 2 André, Bernard et Claude sont trois frères. L'un est médecin, l'autre pharmacien et le troisième dentiste. On cherche à déterminer la profession de chacun d'eux sachant que: si André est médecin, alors Bernard est dentiste; si André est dentiste, alors Bernard est pharmacien; si Bernard n'est pas médecin, alors Claude est dentiste; si Claude est pharmacien, alors André est dentiste.

En utilisant les notations de la logique pour exprimer les propositions ci dessus, trouver la profession de chacun.

Exercice 3 Examiner les relations logiques existant entre les assertions suivantes:

A Tous les hommes sont mortels
B Tous les hommes sont immortels
C Aucun homme n'est mortel
D Aucun homme n'est immortel
E Il existe au moins un homme immortel
F Il existe au moins un homme mortel

Exercice 4 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes.

1) f est majorée.
2. f est bornée.
3) f est paire.
4) f est impaire.
5) f ne s'annule jamais.
6) f est périodique.
7) f est croissante.
8) f est strictement décroissante.

9) f n'est pas la fonction nulle.
10) f n'a jamais la même valeur en deux points distincts.
11) f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.
12) f est inférieure à g.
13) f n'est pas inférieure à g.

Exercice 5 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

(a) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0.$

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y>0$

(c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0$

(d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ y^2>x.$

Exercice 6 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier les énoncés qui suivent :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 1$
2. L'application f est croissante.
3. $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leq 0$

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Quelles différences de sens ont les deux assertions proposées :

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y=f(x)$
et
$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ y=f(x).$

2) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y=f(x)$
et
$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y=f(x).$

Exercice 8 1) Soit $p_1, p_2, \ldots, p_r$ r nombres premiers. Montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \ldots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i.

2) Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.