2M260 - Année 2016-2017

Feuille 1 : Suites et équivalents

Exercice 1.1.— Soit
$$A = \{(-1)^n + \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
Montrer que A est borné. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de A.

Exercice 1.2.— Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq b$$
Montrer que Sup(A) et Inf(B) existent et que Sup(A) $\leq$ Inf(B).

Exercice 1.3.— Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telle que $A \subset B$. Comparer Inf(A), Sup(A), Inf(B) et Sup(A).

Exercice 1.4.— Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1) On suppose A majorée. Montrer que Sup(A) existe et appartient à $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers Sup(A). Montrer que ce résultat reste vrai si A n'est plus majorée.

2) On suppose A minorée. Montrer que Inf(A) existe et appartient à $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers Inf (A). Montrer que ce résultat reste vrai si A n'est plus minorée.

Exercice 1.5.— Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites numériques convergeant respectivement vers l et l'.

1. Trouver des exemples de suites (u_n) et (v_n), telles que $\forall n \geq 0$, $u_n < v_n$, mais telles qu'on n'ait pas $l < l'$. ;

2. Si $l < l'$, montrez qu'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n < v_n$.

Exercice 1.6.— Indiquer avec une brève justification si chacun des énoncés suivants est vrai pour deux suites de réels $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Si U est croissante et convergente, elle est majorée.

2. Si U est majorée et convergente, elle est croissante.

3. Si U est décroissante et positive, elle converge.

4. Si U est croissante et non majorée , alors, lim $(u_n) = +\infty$.

5. Si U tend vers 0, UV tend vers 0.

Exercice 1.7.— **(Moyenne de Cesaro)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers l (avec l un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.

2. Montrer que la réciproque n'est pas vraie en général.

Exercice 1.8.— Etudier la suite u_n définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$

Exercice 1.9.— Trouvez un exemple de suites u_n telle que u_n^2 converge sans que la suite u_n converge.

Exercice 1.10.— Soit (U_n) une suite croissante telle que (U_{2n}) converge vers l. Montrer que (U_n) converge vers l.

Exercice 1.11.— Soit (U_n) une suite complexe dont les sous suites (U_{2n}), (U_{2n+1}) et (U_{n^2}) convergent. Montrer que (U_n) converge.

Exercice 1.12.— Pour $n \geq 0$, on pose $a_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{p=2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+p}}$. Trouvez, à l'aide d'un encadrement, la limite de la suite a_n.

Exercice 1.13.— On pose $U_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$. Montrer que la suite (U_n) n'est pas une suite de Cauchy.

Exercice 1.14.— On veut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite de Cauchy et conclure.

Exercice 1.15.— a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{E(nx)}{n}$. Montrer que la suite (x_n) est à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et converge vers x.

b) En déduire qu'une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$ ne converge pas nécessairement dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 1.16.— Soient (U_n) et (V_n) deux suites de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que $(U_n) + (V_n)$ est une suite de Cauchy.
2. Si λ est un réel, montrer que $\lambda(U_n)$ est une suite de Cauchy.
3. Montrer que la suite de terme général U_nV_n est de Cauchy.

Exercice 1.17.— Soit a_n la suite définie par $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. On définit les suites u_n et v_n par $u_n = a_{2n}$ et $v_n = a_{2n+1}$. Montrez que les suites u_n et v_n sont adjacentes. En déduire que a_n converge.

Exercice 1.18.— Montrer que si la fonction g est continue positive et décroissante sur $]0, +\infty[$, alors on a :

$$\int_1^{n+1} g(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} g(k) \leq g(1) + \int_1^{n} g(x)dx.$$

1. En déduire la convergence de la suite $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

2. En déduire le comportement de la suite définie par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 1.19.— (classique) Soient a et b deux réels tels que $0 < b < a$. On définit les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ par :

$$a_0 = a, \ \ b_0 = b \ \text{ et}$$

$$\forall n \geq 1, a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \ \text{ et } \ b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}.$$

Montrez que pour tout $n \geq 0$, $a_n \geq b_n$. En déduire que les suites a_n et b_n convergent vers une même limite l qu'on appelle moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Exercice 1.20.— Etant donné $\rho \in]0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $U_n = \sum_{p=0}^{n} \rho^p \cos(p\theta)$. Etablir la convergence de (U_n) et en déduire sa limite.

Exercice 1.21.— Etant donné α, β, a, b des réels tels que $(\alpha, \beta) \neq (1, 0)$, On considère les suites réelles définies par

$$x_0 = a, \ y_0 = b, \ x_{n+1} = \alpha x_n - \beta y_n, \ y_{n+1} = \beta x_n + \alpha y_n.$$

Montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent si et seulement si $\alpha^2 + \beta^2 < 1$. On pourra introduire $U_n = x_n + i y_n$.

Exercice 1.22.— a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I à valeurs réelles et $a \in \overline{I}$.

1. Montrer que $e^f \sim e^g \iff \lim_{x\to a} (f - g)(x) = 0$.

2. On suppose de plus $f > 0$ au voisinage de a et $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. Montrer que $f \sim_a g$ implique $\ln(f) \sim_a \ln(g)$.

3. Déterminer un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $\ln(e^x - 1)$.

Exercice 1.23.— Déterminer un équivalent au point considéré des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto x\sqrt{1+x} - x$ en 0, b) $x \mapsto sin(x)cos(x)\ln(1+x)$ en 0, c) $x \mapsto x\left(e^{1/x} - cos(1/x)\right)$ en $+\infty$.

Exercice 1.24.— Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{(\exp(2x) - 1)\sin x}{1 - \cos x}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+2x)}{\exp(x^2) - 1}$.

Exercice 1.25.— Trouver un équivalent simple aux suites suivantes :

a) $U_n = 1 - cos(\frac{1}{n})$, b) $U_n = \ln\left(sin(\frac{1}{n})\right)$, c) $U_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$,
d) $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

Exercice 1.26.— Soit $a > 0$. On pose $U_n = a^n\,(Ln(n+1) - Ln(n))$ pour $n > 0$. Donner un équivalent simple de la suite U_n et en déduire son comportement asymptotique.