

Feuille d'Exercices 2

Séries numériques

Exercice 2.1.— Etant donné $\rho \in]0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $U_n = \rho^n \cos(p\theta)$. Montrer que la série de terme général (U_n) est convergente et calculer sa somme.

Exercice 2.2.— Etudier la nature des séries dont voici le terme général

- | | | | |
|--|---|---|---|
| 1) $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ | 2) $\frac{(n!)^3}{(3n)!}$ | 3) $\frac{2^n+5}{3^n-11}$ | 4) $\frac{n+\ln n}{n^2+1}$ |
| 5) $n^{\ln(a)} \ (a > 0)$ | 6) $e^{-\sqrt{n}}$ | 7) $n^2 \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ | 8) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$ |
| 9) $\frac{1+\log n}{n^2}$ | 10) $\left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$ | 11) $\frac{(n+1)^4}{n!+1}$ | 12) $n^2 e^{-\sqrt{n}}$ |
| 13) $\frac{1}{(1+n)^\alpha} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \ (\alpha > 0)$ | 14) $n^{(n-k)} - 1 \ (k \in \mathbb{R})$ | 15) $n^{\frac{1}{1+n^2}} - 1$ | 16) $n \cdot n^{\frac{1}{n}}$ |
| 17) $n! \left(\frac{x}{n}\right)^n \ (x > 0, x \neq e)$ | 18) $\frac{1}{n \log n}$ | 19) $\frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$ | |
| 20) $(n^6 + 3)^a - (n^2 + 2)^{3a} \ (a \in \mathbb{R})$ | | | |

Exercice 2.3.— Soit α un nombre réel. Pour tout entier strictement positif n , on pose

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad v_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{2}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha}.$$

1. Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) est-elle convergente ?
2. Pour quelles valeurs de α la série de terme général v_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.
3. Pour quelles valeurs de α la série de terme général w_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

Exercice 2.4.— Montrer que si la série de terme général u_n est convergente alors la série de terme général $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$ est convergente et on a $\sum_0^{+\infty} u_n = \sum_0^{+\infty} v_n$.

Exercice 2.5.— Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}_+^*$ la série de terme général $u_n = \frac{\cosh(n)}{a^n}$ converge-t-elle ?

Exercice 2.6.— Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \dots + u_n$ et $v_n = \frac{u_n}{S_n}$.

1. Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général v_n est convergente.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\prod_{k=1}^n (1 - v_k) = \frac{u_0}{S_n}$.
3. On suppose que la série de terme général v_n est convergente.
- Quelle est la nature de la série de terme général $\log(1 - v_n)$?
 - Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 2.7.— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

- Montrer que la série de terme général v_n est divergente.
- La série de terme général u_n est-elle convergente ?

Exercice 2.8.— Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? lesquelles sont fausses ? Justifier la réponse.

- Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 0, alors la série de terme général u_n est convergente.
- Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
- Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général $\sqrt{u_n}$ est convergente.
- Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général u_n^2 est convergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((-1)^n n u_n) = 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((-1)^n n^2 u_n) = 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 2.9.— Démontrer, à l'aide d'un développement limité, que la suite de terme général u_n est convergente, avec $u_n = \sin\left(n\pi + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2.10.— Etudier, en fonction du paramètre $\alpha > 0$, la convergence des séries de terme général :

$$(a) \quad n^{2-\alpha} \cos\left(\frac{1}{n}\right); \quad (b) \quad \alpha^{\frac{n+\sqrt{\ln n}}{2}}; \quad (c) \quad \frac{(-\alpha)^n}{\ln n}.$$

Exercice 2.11.— Soit f une fonction de classe C^2 sur $[-1, 1]$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = f''(0) = 1$. Etudier les séries de terme général

$$(a) \quad f\left(\frac{1}{n}\right); \quad (b) \quad f\left(\frac{1}{n^2}\right); \quad (c) \quad f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right); \quad (d) \quad f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 2.12.— Former le produit des séries de terme général u_n et v_n où

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \text{ et } v_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Exercice 2.13.— Calculer, si elles existent, les sommes des séries de terme général

$$(a) \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} \quad (n > 0); \quad (b) \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n > 1); \quad (c) \arctan \left(\frac{1}{2n^2} \right) \quad (n > 0).$$

Pour c) On pourra utiliser la formule suivante :

$$\text{Si } xy < 1, \quad \arctan(x) + \arctan(y) = \arctan \left(\frac{x+y}{1-xy} \right).$$

Exercice 2.14.— Etudier la nature des séries dont voici le terme général

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} & 2) (-1)^n \frac{1+n}{n} & 3) \frac{(-1)^n}{n^2 + \ln n} \quad 4) \frac{\sin(n\theta)}{2^n} \quad (\theta \in \mathbb{R}) \\ 5) \frac{1}{n+(-1)^n \sqrt{n}} & 6) \frac{(-1)^n}{n - \ln n} & 7) \frac{(-1)^n}{2n + \cos(n\alpha\pi)} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \\ 8) (-1)^n \cosh\left(\frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) & 9) \ln \left(n \cosh\left(\frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right) & 10) \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \quad 11) \left(\frac{1+n(2-i)}{n(3-2i)-3i} \right)^n. \end{array}$$

Exercice 2.15.— Soit u_n une suite positive telle que la série de terme général u_n converge.

$$\text{On pose } v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}.$$

1. Montrer que si la série $\sum V_n$ converge, alors la série $\sum \sqrt{U_n V_n}$ diverge.

2. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que la série de terme général v_n est divergente.

On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\sum_{k=0}^n U_k V_k \leq \left(\sqrt{\sum_{k=0}^n U_k^2} \right)^{1/2} \left(\sqrt{\sum_{k=0}^n V_k^2} \right)^{1/2}$$

Exercice 2.16.— Etudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$.

Exercice 2.17.— Etudier la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^a}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.18.— [Ordre des termes] Soient $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et σ l'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma(3p-2) = 2p-1; \quad \sigma(3p-1) = 4p-2; \quad \sigma(3p) = 4p.$$

1. Montrer que σ est une bijection.

2. Comparer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.