2M260
Année 2016-2017

Feuille d'Exercices 4

Suites de fonctions

Exercice 4.1.— Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = x^n$, pour $x \in [0, 1]$, pour $x \in [0, a]$ avec $a < 1$, pour $x \in [0, 1[$.

2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

3. $f_n(x) = \frac{ne^{-x}+1}{n+x}$, pour $x \in \mathbb{R}_+$.

4. $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

5. $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

6. $f_n(x) = \frac{ne^{x}+xe^{-x}}{n+x}$, pour $x \in [0, 1]$.

7. $f_n(x) = x^n(1-x)$, pour $x \in [0, 1]$.

8. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(\alpha nx)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$, pour $x \in [a, +\infty[$ (avec $a > 0$), $\alpha \in \mathbb{R}$.

9. $f_n(x) = x^2 \sin(\frac{1}{nx})$, pour $x \neq 0$, $f_n(0) = 0$.

10. $f_n(x) = nx$, pour $x \in [0, \frac{1}{n}[$, $f_n(x) = \frac{n(x-1)}{1-n}$, pour $x \in [\frac{1}{n}, 1]$.

11. $f_n(x) = \sqrt{n}x$, pour $x \in [0, \frac{1}{n}[$, et $f_n(x) = \frac{n(x-1)}{(1-n)\sqrt{n}}$, pour $x \in [\frac{1}{n}, 1]$.

Exercice 4.2.— Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $I =]-\pi, \pi[$ par :

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n\sin(x)}, \;\; x \neq 0.$$

Etudier la convergence simple ou uniforme de la suite (f_n) sur tout ou partie de l'intervalle I.

Exercice 4.3.— On considère la suite de fonctions numériques définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{1+nx}{1+n^2x^2}, \;\; x \in [0, +\infty[, n \geq 1.$$

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4.4.— Soit $f_n(x) = \lim_{m\to+\infty} \cos(n!\pi x)^{2m}$, pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f_n converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.

Exercice 4.5.— On définit sur $[0, 1]$ la suite de fonctions f_n par :

$$f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 + x^{2n}}.$$

Les fonctions f_n sont elles continues ? Montrer que la suite (f_n) converge simplement mais pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 4.6.— Soit la suite de fonctions numériques définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (n + x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers 0 et que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.7.— Pour $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = e^{-nt^2}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une limite que l'on déterminera.

2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$, mais qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ ou $] - \infty, -a]$ pour $a > 0$.

Exercice 4.8.— Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = e^{-x}\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right)$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $f : x \mapsto e^{-2x}$.

Exercice 4.9.— Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = \frac{nt^2}{1 + nt} \text{ si } t \geq 0 \text{ et } f_n(t) = \frac{nt^3}{1 + nt^2} \text{ si } t < 0.$$

Etudier la convergence simple, puis uniforme de cette suite.

Exercice 4.10.—

Soit α un réel strictement positif. Pour tout $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx^2/2}.$$

1) Nous allons étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par un argument de parité, montrer qu'il nous suffit d'étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$. On discutera suivant les valeurs du paramètre α.

c) Soit h un nombre réel strictement positif. Montrer que quelque soit α, le suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers zero sur $[h, +\infty[$.

Exercice 4.11.— Soit $n \geq 1$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(t) = e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \text{ si } t > -n, \; f_n(t) = e^t \text{ si } t \leq -n.$$

1. Montrer que la restriction de f_n à $[0, +\infty[$ est croissante. En déduire que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[0, a]$ avec $a > 0$.

2. Montrer que la restriction de f_n à $]-\infty, 0[$ est positive, atteint son maximum en un point x_n et que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ admet -2 pour limite.

3. En déduire que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $]-\infty, 0[$.

Exercice 4.12.— Théorèmes de Dini.

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer que la convergence est uniforme.

2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues et croissantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers une fonction f continue sur $[0, 1]$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 4.13.— Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit P_n par $P_0(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - P_n(t)^2\right)$ pour $t \in [0, 1]$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme et que pour tout $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$.

2. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et qu'elle converge simplement vers une limite que l'on déterminera.

3. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 4.14.— Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[-1, 1]$ par

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}.$$

a. Montrer qu'elle converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

b. Montrer que $lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x)$ dans tout intervalle de la forme $[-1, b]$, $b < 0$ ou $[a, 1]$, $a > 0$.

c. Montrer que cette dernière propriété n'est pas vraie sur $[-1, 1]$. (Le théorème sur la dérivation des suites de fonctions terme à terme ne s'applique pas ici sur$[-1, 1]$.

Exercice 4.15.— On considère la suite de fonctions $f_n(x) = xe^{-nx^2}$. Montrer que f_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$. A-t-on, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$? Montrer que la suite (f_n') ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.16.— On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{e^{-nx} + nx^3}{1 + nx^2}.$$

a. Déterminer la limite simple de cette suite sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer que la convergence de la suite est uniforme sur tout intervalle de le forme $[a, b]$ avec $0 < a < b$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

c. Calculer $lim_{n\to+\infty} I_n$ où $I_n = \int_1^2 \frac{e^{-nx}+nx^3}{1+nx^2} dx$.

Exercice 4.17.— On considère la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = n^2 x, \ \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ f_n(x) = n^2(\frac{1}{n} - x), \ \ \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ f_n(x) = 0, \ \ x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f. Comparer $\int_0^1 f(x)dx$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 4.18.— A tout $n \in \mathbb{N}^*$, on associe $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{(1 + x^n)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

1. Montrer qe la suite $(f_n)n \in \mathbb{N}$ converse simplement sur $[0, 1]$ et déterminer sa limite f.

2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur le segment $[0, 1]$? Et sur l'intervalle $[0, 1[$? Montrer que si $0 < c < 1$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, c]$.

3. Calculer la limite de l'intégrale $\int_0^1 f_n(t)dt$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4.19.—

1. Montrer que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{x + n}$ converge simplement sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2. On note $x \to S(x)$ sa limite. Montrer que la fonction S est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite des dérivées $(S'_n)_{n\geq 1}$ sur $[0, +\infty[$. Montrer que la fonction S est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Exercice 4.20.— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{2^n}$.

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivable.

2. Calculer explicitement $f(x)$.