Feuille 1 : le plan hyperbolique, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$

Exercice 1. Quelques modèles du plan hyperbolique.
Cet exercice présente trois des modèles les plus courants du plan hyperbolique. Il est un peu long, en particulier les calculs des questions 2b et 3b sont fastidieux, et ne seront pas corrigés en entier en TD. Néanmoins, il peut-être "rassurant" d'en faire un jusqu'au bout, et ils ne présentent pas de difficultés techniques.

1. *L'hyperboloïde.*
   On considère la forme bilinéaire symétrique de signature $(1,2)$ standard $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$.
   (a) Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^3 : h(x,x) = -1\}$ a deux composantes connexes symétriques.
   (b) Soit $\mathbb{I}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : h(x,x) = -1, x_0 > 0\}$ la nappe supérieure de l'hyperboloïde. Montrer c'est une variété lisse, et que pour tout $x \in \mathbb{I}^2$, l'espace tangent $T_x\mathbb{I}^2$ s'identifie à $\{x\}^\perp$. Montrer que h se restreint en une *métrique* sur $\mathbb{I}^2$, c'est à dire en la donnée différentiable d'un produit scalaire en tout point de son espace tangent.
2. *Le disque de Poincaré*
   On définit $\mathbb{D}^2 = \{(0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ le disque unité dans $\{0\} \times \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que la projection stéréographique induit un difféomorphisme $\pi : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{D}^2$.
   (b) Montrer que le pull-back de h sur $\mathbb{D}^2$ est donné, par la formule
   $$ds^2 = 4\frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$
3. *Le demi-plan de Poincaré*
   On définit $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{H}^2$ est difféomorphe, et même bi-holomorphe, à $\mathbb{D}^2$ vu comme le disque unité dans $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer qu'on obtient la métrique de Poincaré sur $\mathbb{H}^2$:
   $$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Exercice 2. Groupes d'isométries
Le but de cet exercice est de déterminer les groupes d'isométries des différents modèles du plan hyperbolique vus à l'exercice 1.

1. On rappelle que le groupe qui préserve la forme h définie sur $\mathbb{R}^3$ dans l'exercice 1 est $\mathrm{O}(1,2)$, et on note $\mathrm{PO}(1,2) = \mathrm{O}(1,2)/\{\pm \mathrm{Id}\}$, qu'on identifiera avec le sous-groupe d'indice deux de $\mathrm{O}(1,2)$ formé des matrices positives ($A \in \mathrm{O}(1,2)$ est positive si $a_{11} > 0$).
   (a) Montrer que $\mathrm{PO}(1,2)$ préserve $\mathbb{I}^2$.
   (b) On veut maintenant l'énoncé inverse : que tout isométrie de $\mathbb{I}^2$ est une matrice de $\mathrm{PO}(1,2)$.

i. Soit $\phi : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{I}^2$ une isométrie, et supposons que $\phi(e_0) = e_0$. Montrer que $\phi \in \mathrm{PO}(1,2)$.

ii. En déduire le cas général.

(c) Monter que pour $A \in \mathrm{O}(1,2)$ on a $\det(A) = \pm 1$, puis que le groupe des isométries de $\mathbb{I}^2$ *préservant l'orientation* est $\mathrm{PSO}(1,2)$.

2. On s'intéresse maintenant aux groupes d'isométries de $\mathbb{D}^2$ et de $\mathbb{H}^2$. Notons que ces deux espaces sont naturellement inclus dans $\mathbb{CP}^1$.

(a) Montrer que le groupe des applications *conformes* (i.e. préservant les angles) préservant l'orientation de $\mathbb{CP}^1$ est $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

(b) Montrer que toute matrice de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ induit une isométrie de $\mathbb{H}^2$ et que toute matrice de $\mathrm{PU}(1,1)$ induit une isométrie de $\mathbb{D}^2$.

(c) On veut montrer la réciproque : que toute isométrie de $\mathbb{H}^2$ (resp. de $\mathbb{D}^2$) est donnée par une matrice de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{PU}(1,1)$).

i. Montrer que toute isométrie de $\mathbb{H}^2$ (resp. $\mathbb{D}^2$) est une application conforme .

ii. Montrer que toute application conforme de $\mathbb{H}^2$ (resp. de $\mathbb{D}^2$) se prolonge en une application conforme de $\mathbb{CP}^1$.

iii. Conclure.

Exercice 3. Isométries de $\mathbb{H}^2$.
On se propose de classifier les éléments de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ en étudiant leur action sur $\mathbb{H}^2$. Soit $A \neq \pm \mathrm{Id} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

1. Montrer que A a exactement un point fixe dans $\mathbb{H}^2$ ssi $|\mathrm{Tr}\, A| < 2$. *Dans ce cas on dit que A est elliptique.*
2. Montrer que A n'a aucun point fixe dans $\mathbb{H}^2$ et exactement un dans $\partial\mathbb{H}^2$ ssi $|\mathrm{Tr}\, A| = 2$. *Dans ce cas on dit que A est parabolique.*
3. Montrer que A n'a aucun point fixe dans $\mathbb{H}^2$ et exactement deux dans $\partial\mathbb{H}^2$ ssi $|\mathrm{Tr}\, A| > 2$. *Dans ce cas on dit que A est hyperbolique.*
4. Conjuguer A à une matrice plus simple, dans chacun des cas. Interpréter géométriquement ces résultats.
5. Etudier, dans chacun des cas, la trajectoire $(A^n \cdot x)$, pour $x \in \mathbb{H}^2$.

Exercice 4. Géodésiques de $\mathbb{H}^2$

1. Calculer la longueur d'un segment vertical.
2. Décrire les géodésiques de $\mathbb{H}^2$.

Exercice 5. Triangles dans $\bar{\mathbb{H}}^2$. Le but de cet exercice est de montrer qu'un triangle dans le plan hyperbolique est uniquement déterminé, à isométrie près, par la données de ses trois angles α, β, γ dans $[0,\pi]$ tels que $\alpha+\beta+\gamma < \pi$.

1. Montrer que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agit transitivement sur l'ensemble des couples point-vecteur tangent $\{(x,v) \in \mathbb{H}^2 \times T_x\mathbb{H}^2 : \|v\| = 1\}$, et en déduire qu'il agit 3-transitivement sur le bord $\partial\mathbb{H}^2$ du plan hyperbolique.

2. Calculer l'aire d'un triangle *ideal* (dont les trois sommets sont 3 points distincts du bord), i.e. lorsque $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
3. Montrer que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur les triangles d'angles $\{\alpha, 0, 0\}$, puis que l'aire d'un tel triangle est $\pi - \alpha$.
4. En déduire que l'aire d'un triangle d'angles α, β, γ est $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.
5. Montrer que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur les triangles d'angles ordonnés α, β, γ.

Exercice 6. Relation de traces

0. Question préliminaire : Soit A et B deux matrices de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ différentes de $\pm \mathrm{Id}$. Montrer qu'elles sont conjuguées ssi elles ont même trace.
1. Montrer (sans calculs) pour toutes matrices $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, on a la relation $\mathrm{Tr}\, A \,\mathrm{Tr}\, B = \mathrm{Tr}\, AB + \mathrm{Tr}\, AB^{-1}$.
2. En déduire que pour tout $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, l'ensemble $T_{A,B} = \{\mathrm{Tr}\, X : X \in \langle A, B \rangle\} \subset \mathbb{C}$ est complètement déterminé par la donnée de $\mathrm{Tr}\, A$, $\mathrm{Tr}\, B$ et $\mathrm{Tr}\, AB$.
3. Montrer que cette donnée est minimale.

Cette feuille de TD est inspirée, entre autres, du premier chapitre du livre "Lectures on Hyperbolic Geometry" de Benedetti et Petronio, du chapitre 3 du livre "Foundations of Hyperbolic Manifolds" de Ratcliffe, et de la feuille 2 du TD de Maxime Wolff du cours de M2 "Géométrie hyperbolique et représentations de groupes de surface", disponible sur la page de son auteur.