Feuille 3 : variétés de caractères de complémentaires de noeuds

Exercice 1. La variété des caractères de $\mathbb{Z}$
On considère le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}$.

1. Montrer que sa variété des représentations $R(\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Quel est l'anneau des fonctions $\mathbb{C}[R(\mathbb{Z})]$?
2. Calculer l'anneau des fonctions invariantes $\mathbb{C}[R(\mathbb{Z})]^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[X(\mathbb{Z})]$ et en déduire que la variété des caractères $X(\mathbb{Z}) = R(\mathbb{Z}) /\!/ \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est isomorphe à la courbe $\mathbb{C}$.
3. Donner une représentation $\rho_t : \mathbb{Z} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}[X(\mathbb{Z})])$ telle que toute représentation $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ait la même trace que ρ_t pour un certain $t \in \mathbb{C}$ unique (elles sont dans la même orbite pour l'action algébrique de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $R(\mathbb{Z})$ par conjugaison). Conclure que la variété des caractères est isomorphe à $\mathbb{C}$ (on en a donné une paramétrisation explicite).
4. Vérifier avec le critère de l'exercice 1 que tout point de $X(\mathbb{Z})$ est le caractère d'une représentation réductible. Remarquer qu'on devait le savoir à l'avance !

Exercice 2. Un peu de théorie des noeuds Les notions de cet exercice seront explicitées en TD, de bonnes références pour la théorie des noeuds sont

- "Knots and links", D. Rolphsen
- "An introduction to knot theory", R.Lickorish
- "Knots", G. Burde, M. Heusener, H. Zieschang

1. *Noeuds toriques.* Montrer que le groupe fondamental du complémentaire d'un noeud torique (p, q) dans la sphère $\mathbb{S}^3$ admet la présentation $\langle a, b | a^p = b^q \rangle$.
2. *Présentation de Wirtinger.* Prouver (ou comprendre la preuve, voir les références) le théorème de Wirtinger. En déduire des présentations de Wirtinger du noeud de trèfle et du noeud de huit calculées avec les diagrammes ci-dessous.

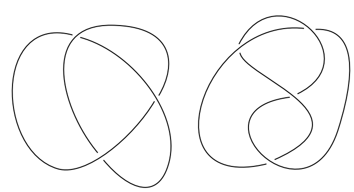

FIGURE 1 – Un diagramme du noeud de trèfle K_{3_1}, à gauche, et du noeud de huit K_{4_1}, à droite. On a $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{3_1}) = \langle u, v | uvu = vuv \rangle$, et $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{4_1}) = \langle u, v | vu^{-1}v^{-1}uv = uvu^{-1}v^{-1}u \rangle$

3. Montrer que le noeud de trèfle est un noeud torique. Donner l'isomorphisme entre les deux présentations obtenues.

Exercice 3. Composante abélienne

1. Montrer que pour tout complémentaire de noeud M, on a un morphisme d'abélianisation $\pi_1(M) \to \mathbb{Z}$.
2. Montrer que toute représentation réductible a le même caractère qu'une représentation abélienne (i.e. d'image abélienne).
3. En déduire qu'une des composantes irréductibles de $X(M)$ est toujours isomorphe a $\mathbb{C}$.

Exercice 4. La variété des caractères du noeud de trèfle

1. Calculer la variété des caractères du noeud de trèfle (on donnera l'équation d'une courbe dans $\mathbb{C}^2$). Combien a-t-elle de composantes irréductibles ?
2. Montrer qu'une des deux composantes irréductible contient le caractère d'une représentation irréductible (on pourra calculer la trace du commutateur des deux générateurs). Montrer qu'elle est également isomorphe à $\mathbb{C}$ (en particulier elle est lisse).
3. Montrer qu'aucune représentation irréductible du groupe fondamental du noeud de trèfle dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ n'est fidèle (en particulier le complémentaire du noeud de trèfle ne porte pas de structure hyperbolique).
4. Trouver une représentation $\rho_t : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{3_1}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}[t])$ qui paramétrise la composante irréductible vue au 2. Combien de caractères dans cette composante sont le caractère d'une représentation réductible ? Expliciter ces représentations à l'aide de ρ_t. (Il se trouve que ce sont les seules représentations non abéliennes ayant ce caractère, à conjugaison près, mais je ne trouve pas d'argument simple pour le prouver.)

Exercice 5. La variété des caractères du noeud de huit

1. Calculer la variété des caractères du noeud de huit.
2. Montrer qu'une des deux composantes irréductible contient le caractère d'une représentation irréductible. Est-elle lisse ? Combien de points à l'infini (avec multiplicité) doit on ajouter pour la compactifier ? Calculer sa compactification. Est-elle lisse ? Quel est le genre de cette surface de Riemann ?
3. Combien y a-t-il de caractères de représentations irréductibles telles que l'image du groupe fondamental du bord est parabolique ? Commenter.

Exercice 6. Fibrations sur le cercle Une famille d'exemples importants de variétés (hyperbolique) de dimensions 3 sont les variétés qui fibrent sur le cercle. Par exemple le noeud de trèfle fibre sur le cercle, les fibres sont des tores épointés, et la monodromie est donnée par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

1. Montrer qu'une variété M qui fibre sur le cercle, de fibre une surface Σ, a son groupe fondamental qui est une extension scindée
$$1 \to \pi_1(\Sigma) \to \pi_1(M) \to \mathbb{Z} \to 0$$
. Comment agit $\mathbb{Z}$ sur $\pi_1(\Sigma)$?
2. Montrer que toute représentation $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ invariante par l'action de $\mathbb{Z}$ induit une représentation du groupe fondamental de M. En déduire une description de la variété des caractères de M.
3. Calculer une présentation du groupe fondamental du noeud de trèfle via la question 1.
4. Rappeler que la variété des caractères du groupe libre à deux générateurs est isomorphe à $\mathbb{C}^3$.
5. Calculer (encore !) la variété des caractères du noeud de trèfle.

Un calcul similaire (pour le noeud de huit, qui est aussi fibré) peut être trouvé dans le mini-cours "SL_2-character varieties of 2- and 3- manifolds through examples", disponible sur la page de Julien Marché.