

Intégration

Linyuan Liu

5 décembre 2017

Exercice 3.7

Démonstration. On le montre par l'absurde. Si $f \neq 0$, il existe un $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

Si $f(x_0) > 0$, par la continuité de f , il existe un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ contenant x_0 avec $\alpha < \beta$ tel que $f(t) > \frac{f(x_0)}{2}$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$. Posons

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors g est une fonction en escalier sur $[a, b]$. Mais

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx > (\beta - \alpha)\frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

C'est une contradiction avec l'hypothèse.

Si $f(x_0) < 0$, on prend un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ contenant x_0 avec $\alpha < \beta$ tel que $f(t) < \frac{f(x_0)}{2}$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$ et la même fonction en escalier g . Maintenant

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx < (\beta - \alpha)\frac{f(x_0)}{2} < 0.$$

C'est aussi une contradiction avec l'hypothèse.

□

Exercice 3.8

Étape 1 : Montrons que pour tout $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\alpha^\beta \sin(nx)dx = 0$.

Démonstration.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin(nx) dx = \frac{\cos(n\alpha) - \cos(n\beta)}{n} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

car $|\cos(n\alpha) - \cos(n\beta)| \leq 2$. □

Étape 2 : Montrons que pour toute fonction en escalier g sur $[a, b]$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) \sin(nx) dx = 0$$

.

Démonstration. Soit g une fonction en escalier sur $[a, b]$. Prenons une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_d = b$ adaptée à g . Alors pour tout $i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, $g|_{]t_i, t_{i+1}[} = c_i$ est une constante.

$$\int_a^b g(x) \sin(nx) dx = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin(nx) dx \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

par l'étape 1. □

Étape 3 : Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Démonstration. Pour tout $\epsilon > 0$, comme f est intégrable, il existe des fonctions en escalier ϕ et η telles que $|f - \phi| \leq \eta$ et que $\int_a^b \eta(x) dx < \frac{\epsilon}{2}$. Par l'étape 2, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \phi(x) \sin(nx) dx = 0$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\left| \int_a^b \phi(x) \sin(nx) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$. Pour tout $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin(nx) dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - \phi(x)) \sin(nx) dx + \int_a^b \phi(x) \sin(nx) dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b (f(x) - \phi(x)) \sin(nx) dx \right| + \left| \int_a^b \phi(x) \sin(nx) dx \right| \\ &< \int_a^b |(f(x) - \phi(x)) \sin(nx)| dx + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \int_a^b |f(x) - \phi(x)| dx + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \int_a^b \eta(x) dx + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Ça signifie que $I_n = \int_a^b f(x) \sin(nx) dx \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. $\square$

Exercice 3.10

Démonstration. Pour tout $\epsilon > 0$, comme f est intégrable, il existe des fonctions en escalier ϕ et η telles que $|f - \phi| \leq \eta$ et que $\int_a^b \eta(x) dx < \epsilon$. Définissons $\tilde{\eta} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\tilde{\eta}(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{si } x \in [a, b[\\ |f - \phi(b)| & \text{si } x = b \end{cases}$$

Alors $\tilde{\eta}$ est aussi une fonction en escalier avec $|\tilde{f} - \phi| \leq \tilde{\eta}$ et $\int_a^b \tilde{\eta}(x) dx = \int_a^b \eta(x) dx < \epsilon$. Ça signifie que $\tilde{f}$ est intégrable. $\square$

Exercice 3.11

Démonstration. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $m \leq f(t) \leq M$, donc $(M - f(t))(f(t) - m) \geq 0$. Comme f est intégrable, la fonction positive $(M - f)(f - m)$ est aussi intégrable. On a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 (M - f(t))(f(t) - m) dt \\ &= \int_0^1 (-mM) dt + \int_0^1 (M - m)f(t) dt - \int_0^1 f^2(t) dt \\ &= -mM + (M - m) \cdot 0 - \int_0^1 f^2(t) dt \\ &= -mM - \int_0^1 f^2(t) dt, \end{aligned}$$

d'où $\int_0^1 f^2(t) dt \leq -mM$. $\square$

Exercice 3.12

Démonstration. Posons $f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$ et $f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$. Donc f^+ et f^- sont des fonctions continues qui vérifient les propriétés suivantes :

1. Pour tout $t \in [a, b]$, on a $f^+(t) \geq 0$ et $f^-(t) \geq 0$;
2. $f = f^+ - f^-$;
3. $|f| = f^+ + f^-$;

4. $f^+(t) > 0$ si et seulement si $f(t) > 0$;

5. $f^-(t) > 0$ si et seulement si $f(t) < 0$;

Notons $A = \int_a^b f^+(t)dt \geq 0$ et $B = \int_a^b f^-(t)dt \geq 0$. Alors

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| = |A - B|$$
$$\int_a^b |f(t)|dt = A + B.$$

Comme $A \geq 0$ et $B \geq 0$, $|A - B| = A + B$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$. Mais $A = 0$ si et seulement si $f^+(t) = 0$ pour tout t , si et seulement si $f(t) \leq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ par la propriété 4 ci-dessus.

Pareil, $B = 0$ si et seulement si $f^-(t) = 0$ pour tout t , si et seulement si $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ par la propriété 5 ci-dessus. Donc $\left| \int_a^b f(t)dt \right| = \int_a^b |f(t)|dt$ si et seulement si $f \geq 0$ ou $f \leq 0$.

□

Exercice 3.20

(i) $f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$ est une fonction continue sur $]0, 1]$. Comme $\ln(1+t) \sim_0 t$, on a $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{t} = 1$. C'est à dire, f se prolonge continuellement sur l'intervalle fermé $[0, 1]$. Donc l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(t)dt$ converge.

(ii) $f(t) = \frac{\cos(t)-1}{\sin^2(t)}$ est une fonction continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Mais comme $\cos(t) - 1 \sim_0 -\frac{t^2}{2}$ et $\sin(t) \sim_0 t$, on a $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{-\frac{t^2}{2}}{t^2} = -\frac{1}{2}$. C'est à dire, f se prolonge continuellement sur l'intervalle fermé $[0, \frac{\pi}{2}]$. Donc l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ converge.

(iii)

$$f(t) = \frac{1-t^2}{1-\sqrt{t}} = \frac{(1-t)(1+t)}{1-\sqrt{t}} = \frac{(1-\sqrt{t})(1+\sqrt{t})(1+t)}{1-\sqrt{t}} = (1+\sqrt{t})(1+t)$$

est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ converge.

(iv) $f(t) = e^{-t^2}$ est une fonction continue sur $[0, +\infty[$, donc elle est en particulier localement intégrable. Il suffit de déterminer la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$. Pour tout $t \geq 1$, $e^{t^2} \geq t^2 > 0$, donc $0 < f(t) =$

$e^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2}$. Comme l'intégrale généralisée positive $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, l'intégrale positive $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge aussi, d'où la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

- (v) $f(t) = \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)+e^t}$ est une fonction continue sur $[0, +\infty[$, donc en particulier elle est localement intégrable. Comme $\cos(t) \geq -1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + \cos(t) + e^t \geq e^t > 0$. Donc on a

$$|f(t)| = \frac{|\sin(t)|}{1 + \cos(t) + e^t} \leq \frac{1}{1 + \cos(t) + e^t} \leq \frac{1}{e^t} = e^{-t}.$$

Mais l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t}|_0^{+\infty} = 1$ converge, on en déduit la convergence de l'intégrale positive $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$. Donc l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, car elle converge absolument.

- (vi) $f(t) = \frac{t^3-5t^2+1}{2t^4+2t^3+t^2+1}$ est une fonction continue sur $[0, +\infty[$. Il suffit de déterminer la convergence de l'intégrale sur $[1, +\infty[$. $f(t) \sim_{+\infty} \frac{t^3}{2t^4} = \frac{1}{2t}$. $\frac{1}{2t}$ est une fonction continue strictement positive sur $[1, +\infty[$ dont l'intégrale généralisée sur cet intervalle diverge. Par l'équivalence, $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ diverge.
- (vii) $f(t) = \frac{\tan(t)}{t}$ est une fonction continue strictement positive sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Comme $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \sim_0 t$, $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \frac{t}{t} = 1$. Donc f se prolonge continuellement sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Il suffit maintenant de déterminer si l'intégrale généralisée $\int_c^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$ converge pour un $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$ quelconque. Mais comme $\cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \sim_0 \frac{1}{t}$, on a $\tan(t) = \cot(\frac{\pi}{2} - t) \sim_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - t}$. Donc $f(t) \sim_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - t)\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi(\frac{\pi}{2} - t)}$, où la dernière est une fonction continue strictement positive sur $[c, \frac{\pi}{2}[$ dont l'intégrale généralisée sur cet intervalle diverge. Par conséquence, $\int_c^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$ diverge.
- (viii) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)^2}}$ est une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Prenons $c \in]0, 1[$ quelconque. En 0, $f(t) \sim_0 \frac{1}{\sqrt{t}} > 0$, et l'intégrale généralisée $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge, d'où la convergence de $\int_0^c f(t) dt$. En 1, $f(t) \sim_1 \frac{1}{(1-t)^2} > 0$. L'intégrale généralisée $\int_c^1 \frac{1}{(1-t)^2} dt$ diverge, d'où la divergence de $\int_c^1 f(t) dt$. Donc l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(t) dt$ diverge.
- (ix) $f(t) = \frac{\ln(t)^2}{\sqrt{|t^2-1|}(\sqrt{t}+2)}$ est une fonction continue positive définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Comme $\ln(1+t) \sim_0 t$, on a $\ln(t) = \ln(1+(t-1)) \sim_1 (t-1)$. Donc

$$\begin{aligned}
f(t) &\sim_1 \frac{(t-1)^2}{\sqrt{|t^2-1|}(\sqrt{t}+2)} \\
&= \frac{|t-1|^2}{|t-1|^{\frac{1}{2}}|t+1|^{\frac{1}{2}}(\sqrt{t}+2)} \\
&= \frac{|t-1|^{\frac{3}{2}}}{|t+1|^{\frac{1}{2}}(\sqrt{t}+2)},
\end{aligned}$$

où la dernière est bien définie et prend la valeur 0 en $t = 1$. C'est à dire f se prolonge en une fonction continue définie sur $]0, +\infty[$.

Prenons c un réel strictement positif. Lorsque $t \rightarrow 0+$, $0 < \ln(t)^2 = \ln(\frac{1}{t})^2 = o(\frac{1}{t^{2\epsilon}})$ pour tout $\epsilon > 0$. En particulier posons $\epsilon = \frac{1}{4}$, alors $0 \leq f(t) \sim_0 \frac{\ln(t)^2}{2} = o(\frac{1}{2\sqrt{t}})$. L'intégrale sur $]0, c]$ de $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ converge. Par la critère de la convergence de l'intégrale généralisée d'une fonction positive, $\int_0^c f(t)dt$ converge.

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, $0 \leq f(t) \sim_{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^{\frac{3}{2}}} = o(\frac{t^\epsilon}{t^{\frac{3}{2}}}) = o(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}-\epsilon}})$ pour tout $\epsilon > 0$. Prenons $\epsilon = \frac{1}{4}$, $f(t) = o(\frac{1}{t^{\frac{5}{4}}})$. Comme $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{5}{4}}}$ converge, l'intégrale généralisée $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ converge aussi par la critère de la convergence de l'intégrale d'une fonction positive.

Donc $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

(x) $f(t) = \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}$ est une fonction continue sur $]0, 1[$. Prenons $c \in]0, 1[$ quelconque.

(a) La convergence en 0.

Pour tout $\epsilon > 0$, comme $|\ln(t)| = \ln(\frac{1}{t}) = o(\frac{1}{t^\epsilon}) = o(t^{-\epsilon})$ lorsque $t \rightarrow 0+$, il existe une constante M qui dépend de ϵ telle que $|\ln(t)| \leq Mt^{-\epsilon}$ pour tout $t \in]0, c]$. Donc $0 < -\ln(c) \leq |\ln(t)| \leq Mt^{-\epsilon}$ pour tout $t \in]0, c]$.

— Si $\beta \geq 0$, on obtient alors

$$0 < \frac{1}{M^\beta t^{\alpha-\beta\epsilon}} \leq f(t) \leq \frac{1}{(-\ln(c))^{\beta} t^\alpha}.$$

Donc $\int_0^c f(t)dt$ converge si $\alpha < 1$, diverge si $\alpha > 1$.

Si $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^c f(t)dt &= \int_0^c \frac{d(\ln(t))}{|\ln(t)|^\beta} \\ &= \int_{-\infty}^{\ln(c)} \frac{1}{|u|^\beta} du \\ &= \int_{-\ln(c)}^{+\infty} \frac{1}{u^\beta} du\end{aligned}$$

converge si et seulement si $\beta > 1$.

— Si $\beta < 0$, on obtient

$$0 < \frac{1}{(-\ln(c))^{\beta t^\alpha}} \leq f(t) \leq \frac{1}{M^\beta t^{\alpha-\beta\epsilon}}.$$

Donc $\int_0^c f(t)dt$ converge si $\alpha < 1$, diverge si $\alpha \geq 1$.

(b) La convergence en 1

$|\ln(t)| = |\ln(1 + (t-1))| \sim_1 |t-1|$. Donc $f(t) \sim_1 \frac{1}{|t-1|^\beta} > 0$. L'intégrale généralisée $\int_c^1 f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_c^1 \frac{1}{|t-1|^\beta} dt$ converge, c-à-d si et seulement si $\beta < 1$.

$\int_0^1 f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_0^c f(t)dt$ et $\int_c^1 f(t)$ convergent simultanément. Par conséquence, elle converge si et seulement si $\alpha < 1$ et $\beta < 1$.

(xi) $f(t) = t^\alpha(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}})$ est une fonction continue sur $]0, +\infty[$. Prenons c un réel strictement positif.

En 0, $f(t) \sim_0 t^\alpha > 0$. Donc $\int_0^c f(t)dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.

En $+\infty$, comme $1 - e^{-x} = \frac{e^x - 1}{e^x} \sim_0 e^x - 1 \sim_0 x$, on a $1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}$, d'où $f(t) \sim_{+\infty} t^{\alpha-\frac{1}{2}}$. Donc $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\alpha - \frac{1}{2} < -1$, c-à-d $\alpha < -\frac{1}{2}$.

Donc l'intégrale généralisée $\int_0^\infty f(t)dt$ converge si et seulement si $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

Exercice 3.21

(i) $\frac{\arctan(t)}{1+t^2} = \arctan(t)(\arctan(t))' = (\frac{\arctan(t)^2}{2})'$. Comme $\arctan(t)$ converge vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, l'intégrale généralisée converge et

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(t)}{1+t^2} dt = \frac{\arctan(t)^2}{2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2} - 0 = \frac{\pi^2}{8}.$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+e^t)(1-e^{-t})} &= \frac{e^t}{(e^t+1)(e^t-1)} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{e^t}{e^t-1} - \frac{e^t}{e^t+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{(e^t)'}{e^t-1} - \frac{(e^t)'}{e^t+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} (\ln(e^t-1)' - \ln(e^t+1)') \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^t-1}{e^t+1} \right)'
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^t-1}{e^t+1} \right) = -\infty$ diverge, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^t)(1-e^{-t})} dt$ diverge aussi.

(iii) $f(t) = \frac{1}{\tan^2(t)} \sim_0 \frac{1}{t^2} > 0$. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t^2} dt$ diverge, donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt$ diverge aussi.

(iv) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est une fonction continue définie sur $]0, 1[$. Prenons $c \in]0, 1[$. $f(t) \sim_0 \frac{1}{\sqrt{t}} > 0$ et $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge, donc $\int_0^c f(t) dt$ converge. $f(t) \sim_1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} > 0$, et $\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$ converge, donc $\int_c^1 f(t) dt$ converge.

Donc l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(t) dt$ converge. A l'aide d'un changement de variables $t = \sin^2(u)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin(u) \cos(u) du}{\sin(u) \sqrt{1 - \sin^2(u)}} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 du \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

(v) $f(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}$ est une fonction continue sur $] -1, 1[$. En -1 , $f(t) \sim_{-1} \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{1+t}}$. Comme $\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{1+t}}$ est une fonction strictement négative dont l'intégrale généralisée sur $] -1, 0]$ converge, $\int_{-1}^0 f(t) dt$ converge. Pareil, $f(t) \sim_1 \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$. Comme $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$ est une fonction strictement positive dont l'intégrale généralisée sur $[0, 1[$ converge, $\int_0^1 f(t) dt$ converge. Donc $\int_{-1}^1 f(t) dt$ converge. Comme f est une fonction impaire, $\int_{-1}^1 f(t) dt = 0$.

- (vi) $f(t) = \frac{\ln(t)}{t^\alpha}$ est une fonction continue définie sur $[1, +\infty[$.
 Si $\alpha \leq 1$, alors $f(t) \geq \frac{1}{t} > 0$ pour tout $t \geq e$. Comme $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge, $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ diverge aussi.
 Si $\alpha > 1$, pour tout $c > 1$, on a

$$\begin{aligned}
 \int_1^c f(t) dt &= \int_1^c \ln(t) \frac{(t^{-\alpha+1})'}{-\alpha+1} dt \\
 &= \ln(t) \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^c - \frac{1}{-\alpha+1} \int_1^c t^{-\alpha+1} (\ln(t))' dt \\
 &= \ln(c) \frac{c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \int_1^c t^{-\alpha} dt \\
 &= \ln(c) \frac{c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{t^{-\alpha+1}}{(-\alpha+1)^2} \Big|_1^c \\
 &= (\ln(c) - \frac{1}{-\alpha+1}) \frac{c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \\
 &\rightarrow \frac{1}{(\alpha-1)^2} \text{ lorsque } c \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

Donc si $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge et égale à $\frac{1}{(\alpha-1)^2}$.

- (vii) $f(t) = \frac{1}{(t+\sqrt{t^2+1})^\alpha}$ est une fonction continue strictement positive définie sur $[0, +\infty[$. Pour tout $c > 0$, en faisant un changement de variables $u = t + \sqrt{t^2+1}$ (c-à-d, $t = \frac{u^2-1}{2u}$), on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^c f(t) dt &= \int_1^d \frac{u^2+1}{2u^2u^\alpha} du \text{ où } d = c + \sqrt{c^2+1} \\
 &= \int_1^d \frac{1}{2u^\alpha} du + \int_1^d \frac{1}{2u^{2+\alpha}} du.
 \end{aligned}$$

Elle converge lorsque $d \rightarrow +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas, elle converge vers $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha+1} \right) = \frac{\alpha}{\alpha^2-1}$.