Exercices. Feuille 2

Exercice 1. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < y - x$.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{k \in \mathbb{Z} : \frac{k}{n} \leq x\}$ admet un plus grand élément, noté q.
3. Conclure en remarquant que $x < \frac{q+1}{n} < y$.

Exercice 2. Une jolie application Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1. Calculer $f(0)$, puis montrer que f est impaire.
2. Pour $n \in \mathbb{Z}$, exprimer $f(n)$ en fonction de n et de $a = f(1)$.
3. Pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f(p)$ en fonction de $f(\frac{p}{q})$. En déduire $f(\frac{p}{q})$.
4. Supposons f continue. On va montrer qu'alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$. On pose $g(x) = f(x) - ax$ pour tout x réel, cette fonction est continue et nulle sur $\mathbb{Q}$. Supposons $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x_0 sur lequel g ne s'annule pas, puis aboutir à une contradiction, et conclure.

   (Cet exercice reprend le fait suivant que vous connaissez bien : l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans lui-même est un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}$).

Exercice 3. Approximation d'un réel Pour tout réel a, on notera $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor \in [0, 1[$ la *partie fractionnaire* de a, à savoir la différence entre a et sa partie entière.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et N un entier non-nul. Montrer qu'il existe un entier $r \in [0, N-1]$ et et des entiers k, ℓ entre 0 et N tel que $\{kx\}$ et $\{\ell x\}$ appartiennent tous deux à $\left[\frac{r}{N}, \frac{r+1}{N}\right[$.
2. En déduire le *Théorème de Dirichlet* : pour tout réel x et pour tout entier non nul N, il existe des entiers $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{q}.$$

Exercice 4. Une seconde application Déterminer les morphismes de corps de $\mathbb{R}$, i.e. les applications $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ qui vérifient $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tout x, y dans $\mathbb{R}$. On pourra commencer par les déterminer sur $\mathbb{Q}$, puis montrer qu'ils sont croissants, et conclure par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Suites adjacentes Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles. On suppose que

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
- pour pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$
- la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont de Cauchy. En déduire le théorème des suites adjacentes : (u_n) et (v_n) convergent dans $\mathbb{R}$, vers la même limite.

Exercice 6. Critère de Cauchy et séries

1. Soit (u_n) une suite réelle décroissante, à termes positifs, qui tend vers 0. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ est de Cauchy, donc converge dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas de Cauchy. En déduire qu'elle ne converge pas.

Exercice 7. Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

1. Montrer qu'un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit dense, soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ (dans ce cas, on dit que le sous-groupe est discret).
2. Donner des exemples de sous-groupes denses.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire du sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par 1 et α (i.e. le sous-groupe $\{n + m\alpha : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$) ? Plus généralement, que dire du sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par deux réels x et y ? Et d'un sous-groupe engendré par un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_n$?
4. Existe-t-il des sous-groupes de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas engendrés par un nombre fini d'éléments ? Si oui, donner des exemples.

Exercice 8.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x, y \in]a, b[, |f(x) - f(y)| \leq k\, |x - y| \,.$$

(Une telle fonction est dite k-lipschitzienne sur $]a, b[$).

Le but de l'exercice est de montrer que l'on peut prolonger de manière unique f en une fonction continue $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]a, b[, \tilde{f}(x) = f(x)$.

1. (Rappel) Montrer que f k-lipschitzienne sur $]a, b[$ implique f continue sur $]a, b[$.
2. Montrer l'unicité. (Indication : unicité de la limite !)
3. (a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d' éléments de $]a, b[$ qui tend vers a. Montrer que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. On définit $\tilde{f}(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.
   (b) Soit une autre suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d' éléments de $]a, b[$ convergente vers a. Montrer que $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \tilde{f}(a)$. En déduire que $\tilde{f}$ est continue à en a.
   Le même raisonnement en b permet de prolonger continûment f au bord de l'intervalle $]a, b[$, comme annoncé.

Exercice 9. Autres exemples d'espaces complets Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit que $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}^+$ est une norme sur E lorsque $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$, $||\lambda u|| = |\lambda|||u||$ et $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$, pour tout u, v dans E et λ dans $\mathbb{R}$. La définition de suite convergente ou de suite de Cauchy sur E est la même que sur $\mathbb{R}$ en remplaçant la valeur absolue $|\cdot|$ par la norme $||\cdot||$. Montrer que les espaces suivants, munis d'une norme, sont complets :

1. $\mathbb{C}$ muni du module $|\cdot|$.
2. L'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $||u|| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
3. L'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme $||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.