Exercices. Feuille 3

Exercice 1.

Dans cet exercice, on se propose de montrer que $\mathbb{Z}$ est factoriel, c'est à dire que tout nombre entier différent de $0, \pm 1$ admet une unique décomposition en facteurs premiers, à l'ordre des facteurs près.

1. Existence

   Montrons par une récurrence forte que pour tout $n > 1$ (le cas n négatif en découlant évidemment), n s'écrit $p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$, avec p_i des nombres premiers, et α_i des entiers naturels.
   - Pour $n = 2$, c'est clair.
   - Soit $n > 2$, supposons que pour tout entier k compris entre 2 et n, on ait la décomposition annoncée. Montrer qu'alors n admet aussi une telle décomposition, en disjoingnant le cas où n est lui-même premier, et le cas où il ne l'est pas.
2. Unicité

   Soit $n > 1$, supposons qu'on ait deux décompositions différentes pour n. Cela signifie qu'on a $i \in \mathbb{N}$ avec $n = p_i^{\alpha_i} q_1 = p_i^{\beta_i} q_2$, avec $\alpha_i \neq \beta_i$. En déduire une contradiction.

Exercice 2.

Montrer que les nombres suivants sont algébriques :

1. $1 + \sqrt{2}$
2. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
3. $j + 1$
4. $j - 1$

Exercice 3.

1. Montrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est toujours dénombrable.
2. Montrer que l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.
3. Existe-t-il un ensemble infini dont l'ensemble des parties dénombrables n'est que dénombrable ?

Exercice 4.

Soit X un ensemble infini. On admet que $\text{card}(X) = \text{card}(X^2)$. Montrer que $\text{card}(X^X) = \text{card}(\mathcal{P}(X))$. (Indication : penser qu'un élément de X^X est une fonction de X dans X, caractérisée par son graphe...)

Exercice 5. (Nombres de Liouville)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une constante $K > 0$ et une suite de rationnels $(\frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$ deux-à-deux distincts tels que $|x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{K}{q_n^n}$. On va montrer par l'absurde que x est transcendant (sur $\mathbb{Q}$).
   (a) On suppose x algébrique sur $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ assez proche de x, on ait $\left|P(\frac{p}{q})\right| \geq \frac{1}{q^d}$ où d est le degré de P.

(b) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ proche de x, on ait $\left|P(\frac{p}{q})\right| \leq M \left|x - \frac{p}{q}\right|$.

(c) En déduire une contradiction.

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'entiers relatifs, telle que $a_n \neq 0$ pour une infinité de n. Soit $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. On définit $\theta := \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{b^{n!}}$.
   (a) Vérifier que θ est un nombre réel bien défini.
   (b) Montrer que θ est transcendant.
   (c) En déduire qu'il existe une famille explicite non dénombrable de nombres transcendants.

Exercice 6. (Théorème de d'Alembert-Gauss) L'objectif de cet exercice est de montrer que le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, c'est-à-dire que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$. Soit $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_0$ un tel polynôme (avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$).

1. Montrer que l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $z \mapsto |P(z)|$ atteint son minimum en un point $z_0 \in \mathbb{C}$.
2. Montrer qu'il existe $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, avec $b_0 = P(z_0)$ et $b_n \neq 0$, tels que

$$P(z_0 + X) = b_nX^n + \cdots + b_0\,.$$

3. On suppose $b_0 \neq 0$. On note k le plus petit entier ≥ 1 tel que $b_k \neq 0$ et $\omega \in \mathbb{C}$ une racine k-ième de $-\frac{b_0}{b_k}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que pour réel ϵ suffisamment petit, on a

$$|P(z_0 + \omega\epsilon)| < |b_0|\,.$$

4. Conclure.

Exercice 7. Divers

1. Soit X et Y deux ensembles finis. Montrer que l'un des ensembles Inj(X,Y) ou Surj(X,Y) est non vide. Que dire si les deux sont non vides ?
2. Soit X un ensemble fini. Montrer que X et $P(X)$ n'ont pas même cardinal.
3. Soit X fini. Y a-t-il plus d'applications de X vers $P(X)$ ou de $P(X)$ vers X ?
4. Soit X un ensemble. Montrer qu'il est infini si et seulement si quelle que soit la fonction f de X dans X, il existe une partie A de X non vide et distincte de X stable par f.
5. Soit X un ensemble dont toutes les parties sont soit finies soit cofinies (i.e. de complémentaire fini). Montrer que X est fini.