Exercices. Feuille 5

Exercice 1. (Equivalence ou développement limité ?)
Dire si les équivalences (au voisinage de 0) ci-dessous sont vraies ou fausses :

$$x \sim \sin(x), \quad x^3/6 \sim x - \sin(x), \quad \sin(x) \sim x - x^3/6, \quad \sin(x) \sim x - x^3/1917,$$
$$\sin(x) \sim x + x^2, \quad \sin(x) - x \sim x^2, \quad \cos(x) \sim 1 - x^2/68.$$

Exercice 2. Notations de Landau

1. On considère les fonctions suivantes, définies au voisinage de 0 :
$$f(x) = x^2, g(x) = \frac{\sin(x^4)}{x}, h(x) = \frac{1}{\exp(1/x^2)}, i(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$
Dire lesquelles sont un $o(1)$, puis un $o(x^2)$.
2. Soient $k, k' \in \mathbb{N}$, montrer que
   (a) $o(x^k) = x^k o(1)$
   (b) $x^k o(x^{k'}) = o(x^{k+k'})$
   (c) $o(x^k)o(x^{k'}) = o(x^{k+k'})$
   (d) $o(x^k) \pm o(x^{k'}) = o(x^{\min(k,k')})$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que
$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(m)}(x)| \leq |P(x)|$$
On veut montrer qu'alors f est identiquement nulle.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $m \in N, f^{(m)}(x_0) = 0$. (On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour prouver que tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine réelle.)
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $\lim \frac{\alpha^n}{n!} = 0$.
3. Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral pour f en x_0, et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f(x)| \leq C\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$, puis conclure.

Exercice 4. (Uniforme convexité) Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé. On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, $f''(x) \geq \lambda$.

1. Montrer que pour $t \in [0, 1]$ on a
$$(1-t)f(a) + tf(b) - f((1-t)a + tb) \geq \lambda\, t(1-t)(b-a)^2/2.$$
On pourra faire deux développements de Taylor entre des points bien choisis.
2. Pour la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, quel λ peut-on prendre et que devient la formule ci-dessus ?

3. Comment s'interprète le résultat du 1. lorsque $\lambda = 0$? Montrer que le cas général peut se déduire du cas $\lambda = 0$.

Exercice 5. (Formule de Taylor avec reste intégral et noyau de Péano)

1. Soit α une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$. Montrer que
$$\alpha(1) = \alpha(0) + \alpha'(0) + \int_0^1 (1 - s)\alpha''(s)\, ds.$$
Retrouver la formule de Taylor avec reste intégral (au point a, entre a et b) pour une fonction f de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$.
2. Pour $t \in [0, 1]$ donné, on introduit la fonction $K_t : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$K_t(s) := \begin{cases} (1-t)\, s & \text{si } s \in [0, t] \\ t\,(1-s) & \text{si } s \in [t, 1]. \end{cases}$$
Montrer que K_t est une fonction continue, positive et calculer $\int_0^1 K_t(s)\, ds$.
3. Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$ et $t \in [0, 1]$. Montrer que
$$(1 - t)f(a) + tf(b) - f((1 - t)a + tb) = (b - a)^2 \int_0^1 f''((1 - s)a + sb)\, K_t(s)\, ds.$$
On pourra faire deux développements de Taylor avec reste intégral entre des points bien choisis.
4. Retrouver le résultat de l'exercice 4.

Exercice 6. Etudier la limite lorsque $x \to +\infty$ de $\Big(\cos\big(\frac{1}{x}\big)\Big)^{x^2}$.

Exercice 7. Étudier, en fonction du réel α, la convergence de la suite $u_n = \Big(n \sin(1/n)\Big)^{n^\alpha}$ et de la suite $n^2 u_n$.