KK-Theorie für Banachalgebren und eigentliche Gruppoide

Ist G eine kompakte topologische Gruppe und B eine G-C*-Algebra, dann gilt

$$\mathrm{K}_0^G(B) \cong \mathrm{K}_0(\mathrm{C}^*(G,B)).$$

Dieser Satz von Green-Julg bleibt wahr, wenn man B durch eine beliebige (nicht-ausgeartete) G-Banachalgebra und $\mathrm{C}^*(G,B)$ durch die Faltungsalgebra $\mathrm{L}^1(G,B)$ ersetzt. In beiden Varianten des Satzes ist es möglich, die kompakte Gruppe G duch ein eigentliches Gruppoid $\mathcal{G}$ zu ersetzen; die Banachalgebren-Version liest sich dann wie folgt:

$$\mathrm{KK}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{ban}}(\mathcal{C}_0(\mathcal{G}^{(0)}), B) \quad \cong \quad \mathrm{KK}_{\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}}^{\mathrm{ban}}(\mathcal{C}_0(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}),\ \mathrm{L}^1(\mathcal{G},B)).$$

Das Banachalgebren-Pendant der Baum-Connes-Vermutung, die Bost-Vermutung, ist wahr für eigentliche C*-Algebren, und mit dem obengenannten verallgemeinerten Satz von Green-Julg läßt sich zeigen, daß die Bost-assembly-Abbildung für eigentliche Banachalgebren immerhin surjektiv ist.

KK-theory for Banach algebras and proper groupoids

If G is a compact topological group and B is a G-C*-algebra then the Green-Julg-theorem asserts that

$$\mathrm{K}_0^G(B) \cong \mathrm{K}_0(\mathrm{C}^*(G,B)).$$

This theorem remains true if we replace B by a general non-degenerate G-Banach algebra and $\mathrm{C}^*(G,B)$ by the convolution algebra $\mathrm{L}^1(G,B)$. In both variants of the theorem one can even substitute G with a proper locally compact groupoid $\mathcal{G}$; more precisely, we have (for Banach algebras)

$$\mathrm{KK}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{ban}}(\mathcal{C}_0(\mathcal{G}^{(0)}), B) \quad \cong \quad \mathrm{KK}_{\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}}^{\mathrm{ban}}(\mathcal{C}_0(\mathcal{G}^{(0)}/\mathcal{G}),\ \mathrm{L}^1(\mathcal{G},B)).$$

The Bost conjecture, which is a Banach algebra version of the Baum-Connes conjecture, has already been shown for proper C*-algebras. With the above-mentioned generalised Green-Julg theorem one can at least prove surjectivity of the Bost assembly map for proper Banach algebras.