# Differenzial- und Integralrechnung I

Ingo Witt

Wintersemester 2011/12

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Grundlagen

## 1.1 Mathematische Logik

Wir geben hier wir eine kurze Einführung in das mathematische Schliessen.

### 1.1.1 Mathematische Aussagen und deren Verknüpfungen

Mathematische Sachverhalte werden mittels *mathematischer Aussagen* formuliert. Dabei ist eine Aussage ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist. Das heißt, der Satz ist wahr oder falsch und nicht beides gleichzeitig.
Beispiele für Aussagen sind:

- Die Erde ist ein Planet. (w)
- Alle Hasen sind grün. (f)
- 7 ist eine Primzahl. (w)

Es gibt Sätze, die keine Aussagen sind:

- Wie heißt du?
- Hole die Milch.
- Dieser Satz ist falsch.
- Hallo!

Mathematische Tatsachen (Theoreme, Sätze, Lemmata) werden mittels wahrer Aussagen formuliert. Eine Aussage wird zum Theorem durch einen *mathematischen Beweis*. Ein mathematischer Beweis geht von als wahr erkannten Aussagen aus und leitet daraus die Aussage des Theorems durch zulässige mathematische Schlüsse her.
Es gibt mathematische Aussage, deren Wahrheitswert nicht bekannt oder noch nicht etabliert ist. Beispiele sind Vermutungen und Behauptungen.
Gegebene Aussagen lassen sich zu neuen Aussagen verknüpfen. Dabei hängt der Wahrheitswert der verknüpften Aussage nur von den Wahrheitswerten der gegebenen Aussagen ab. Schematisch wird dies in Wahrheitswertetabellen dargestellt.

**Definition 1.1.** Klassisch gibt es die Verknüpfungen

1. *Negation* $\neg$
2. *Konjugation* $\wedge$
3. *Disjunktion* $\vee$
4. *Implikation* $\rightarrow$
5. *Äquivalenz* $\leftrightarrow$

mit den folgenden Wahrheitswertetabellen:

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| w | f |
| f | w |

$\neg A$ bedeutet „*nicht* $A$". $\neg A$ ist wahr, wenn $A$ falsch, und falsch, wenn $A$ wahr ist.

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

$A \wedge B$ bedeutet „$A$ *und* $B$". $A \wedge B$ ist wahr, wenn $A$ und $B$ beide wahr sind, andernfalls ist $A \wedge B$ falsch.

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

$A \vee B$ bedeutet „$A$ *oder* $B$". $A \vee B$ wird in nicht ausschliessendem Sinn gebraucht, d. h. $A \vee B$ ist wahr, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen $A$ und $B$ wahr ist, andernfalls ist $A \vee B$ falsch.

| $A$ | $B$ | $A \rightarrow B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | w |
| f | f | w |

$A \rightarrow B$ bedeutet „*Wenn* $A$, *so* $B$". $A \rightarrow B$ ist falsch, wenn $A$ wahr und $B$ falsch ist, in allen anderen Fällen ist $A \rightarrow B$ wahr. Das heißt insbesondere, dass man aus etwas Falschem immer schliessen kann. Die Wahrheit von $A \rightarrow B$ sagt also nichts über die Wahrheit von $A$.
$A$ heißt die *Prämisse*, $B$ heißt die *Konklusion*.

| $A$ | $B$ | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | w |

$A \leftrightarrow B$ ist „$A$ *genau dann, wenn* $B$". $A \leftrightarrow B$ ist wahr, falls $A$ und $B$ denselben Wahrheitswert haben, andernfalls ist $A \leftrightarrow B$ falsch.

In der Umgangssprache können $\neg A$, $A \wedge B$, usw. verschieden ausgedrückt werden, z. B.

- das Gegenteil von $A$,
- sowohl $A$ als auch $B$.

*Beispiel* 1.2. Statt $A \rightarrow B$ kann man auch sagen

- $A$ impliziert $B$,

- aus $A$ folgt $B$,
- $A$ zieht $B$ nach sich,
- $A$ hat $B$ zur Folge,
- falls $A$, so $B$,
- $B$ ist eine Konsequenz von $A$.

Im Weiteren soll das Symbol $\Leftrightarrow$ die *logische Äquivalenz* zweier Aussagen kennzeichnen.
Einige wichtige Äquivalenzen sind:

- $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Beweis durch Wahrheitstabelle:

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \wedge \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | f | f | f | f |
| w | f | w | f | f | w | f |
| f | w | w | f | w | f | f |
| f | f | f | w | w | w | w |

In der vierten und siebten Spalte haben wir denselben Wahrheitswerteverlauf.

- $(A \to B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$
- $\neg(A \to B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$
- $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$
- $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

*Anmerkung.* Es ist enorm wichtig zu verstehen, was diese logischen Äquivalenzen inhaltlich bedeuten. Sie werden häufig in mathematischen Beweisen benutzt.

### Notwendige und hinreichende Bedingungen

$A$ und $B$ seien zwei Aussagen und die Aussage $A \to B$ sei wahr. Dann heißt $A$ eine *hinreichende Bedingung* für $B$ (d. h. falls $A$ wahr ist, so ist auch $B$ wahr) und $B$ heißt eine *notwendige Bedingung* für $A$ (d. h. $A$ kann nur gelten, wenn auch $B$ gilt)

*Beispiel* 1.3. Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.

### 1.1.2 Quantoren und quantifizierte Aussagen

Wir betrachten Sätze $P(x, y, z, \dots)$, die von gewissen (ungebundenen) Variablen $x, y, z, \dots$ aus bestimmten Grundgesamtheiten („Universen“) abhängen.

*Beispiel* 1.4. $x$ stehe für eine *reelle Zahl* (oder für eine *rationale Zahl* oder auch für eine *ganze Zahl*). Dann könnte $P(x)$ der Satz „$x > 1$“ sein.

Diese Sätze sind an sich keine Aussagen, sondern werden zu Aussagen, indem man die Variablen quantifiziert (bindet). Die beiden wichtigsten Quantoren sind „für alle“ (in Zeichen: $\forall$) und „es gibt/ existiert ein“ (in Zeichen: $\exists$).

*Bemerkung.* Weitere Quantoren sind „es gibt genau ein“ (in Zeichen: $\exists!$) und „es gibt kein“ (in Zeichen: $\nexists$).

*Beispiel* 1.5. Wir können dann die Aussagen „$\forall x\colon x > 1$“ und „$\exists x\colon x > 1$“ bilden. Erstere Aussage ist falsch, während die zweite Aussage wahr ist.

Ist mehr als eine Variable quantifiziert, so kann es auf die Reihenfolge der Quantoren ankommen. So sind im Allgemeinen die Aussagen „$\forall x \exists y\colon P(x, y)$“ und „$\exists y \forall x\colon P(x, y)$“ *nicht* logisch äquivalent.

*Beispiel* 1.6. Eine Mutter mit drei Kindern, 12, 5 und 2 Jahre alt. Die Aussage der Mutter

- „In diesem Schrank gibt es für jeden von euch eine Hose, die passt.“

ist klar verschieden von

- „In diesem Schrank gibt es eine Hose, die euch allen passt.“

Erstere Aussage hat eine Chance, wahr zu sein, während die zweite Aussage gewiss falsch ist.

$\forall$-Quantoren allerdings dürfen beliebig vertauscht werden. Selbiges trifft auf $\exists$-Quantoren zu:

$$\forall x \forall y\colon P(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\colon P(x, y)$$

$$\exists x \exists y\colon P(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\colon P(x, y)$$

#### Negation quantifizierter Aussagen

Beim Negieren wird $\exists$ zu $\forall$, und umgekehrt, das Zeichen $\neg$ rutscht dabei von links nach rechts durch:

$$\neg \forall x\colon P(x) \Leftrightarrow \exists x\colon \neg P(x)$$

$$\neg \exists x\colon P(x) \Leftrightarrow \forall x\colon \neg P(x)$$

*Beispiel* 1.7. Ein etwas komplizierteres Beispiel ist:

$$\neg \forall x \exists y \forall z\colon P(x, y, z) \Leftrightarrow \exists x \forall y \exists z\colon \neg P(x, y, z)$$

### Anhang zu Abschnitt 1.1: Die axiomatische Methode in der Mathematik

Es gibt Aussagen in der Mathematik, die sich weder beweisen noch widerlegen lassen, und das sind die Axiome. Ein bekanntes Beispiel ist das *Parallelenaxiom* in der ebenen Geometrie:

„Zu jeder Geraden und jedem Punkt nicht auf dieser Geraden gibt es genau eine zu der gegebenen Geraden parallele Gerade durch diesen Punkt.“

Dieses Axiom hat sich als unabhängig von den anderen in Euklids „Elementen“ angegebenen Axiomen herausgestellt. Die Geometrie lässt sich widerspruchsfrei aufbauen sowohl wenn man dieses Axiom annimmt (Euklidische Geometrie) als auch wenn man sein Gegenteil annimmt (Nichteuklidische Geometrien). Ein Beispiel für Letztere ist die Geometrie auf einer Kugeloberfläche (sphärische Geometrie). Dort schneiden sich zwei beliebige, aber verschiedene Geraden (Großkreise) in zwei Punkten.
Das typische Vorgehen in der modernen Mathematik besteht darin, dass einer Theorie die Tatsachen als Axiome vorangestellt werden, die man als wahr annehmen möchte und bei denen sich weder die Aussage selbst noch deren Gegenteil aus anderen, vorherigen Axiomen ableiten lässt.

## 1.2 Mengenlehre

Wir geben hier keine exakte Einführung in die Mengenlehre, sondern erinnern an einige Grundtatsachen.

### 1.2.1 Mengen und Mengenoperationen

Im Folgenden bezeichnet

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen,
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen,
- $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.

Wir bezeichnen allgemein Mengen mit lateinischen Großbuchstaben, z. B. mit $M$ oder $N$.
Für unsere Zwecke ist es ausreichend, von einer Grundgesamtheit (Universum, Allmenge) von zur Verfügung stehenden Elementen auszugehen und Mengen durch die Angabe einer Eigenschaft, die alle Elemente dieser Menge besitzen, zu spezifizieren. Beispielsweise

$$M = \{x \mid P(x)\},$$

wobei $P(x)$ ein Satz im Sinne von Abschnitt 1.1.2 ist und die Variable $x$ aus unserem Universum genommen wird. Die Menge $M$ besteht dann genau aus den

Elementen $x$, für die $P(x)$ zu einer wahren Aussage wird. Insbesondere erhält man die leere Menge $\emptyset$ mittels eines widersprüchlichen Satzes:

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}.$$

Ein Element $x$ kann entweder zu einer Menge $M$ gehören (wenn $P(x)$ für dieses $x$ wahr ist) oder nicht (wenn $P(x)$ für dieses $x$ falsch ist). Im ersten Fall schreibt man $x \in M$, während man im zweiten Fall $x \notin M$ schreibt.

*Beispiel* 1.8. $\mathbb{N}_0 = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0\}$. Dies schreibt man kürzer als $\mathbb{N}_0 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$.

Es seien die Mengen $M = \{x \mid P(x)\}$ und $N = \{x \mid Q(x)\}$ gegeben. Die Menge $M$ heißt eine *Teilmenge* von $N$ (in Zeichen: $M \subseteq N$), wenn die Aussage $\forall x\colon P(x) \to Q(x)$ wahr ist.

*Beispiel* 1.9. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Man kann die folgenden Mengen bilden:

- **(Durchschnitt)** $M \cap N = \{x \mid P(x) \wedge Q(x)\}$

  Beachte die Ähnlichkeit der Notationen $\wedge$ und $\cap$.
- **(Vereinigung)** $M \cup N = \{x \mid P(x) \vee Q(x)\}$
- **(Differenz)** $M \backslash N = \{x \mid P(x) \wedge \neg Q(x)\}$

  Im Fall $N \subseteq M$ heißt $M \backslash N$ auch das Komplement von $N$ in $M$.

Diese Operationen stellt man in sogenannten *Venn-Diagrammen* dar, z. B.

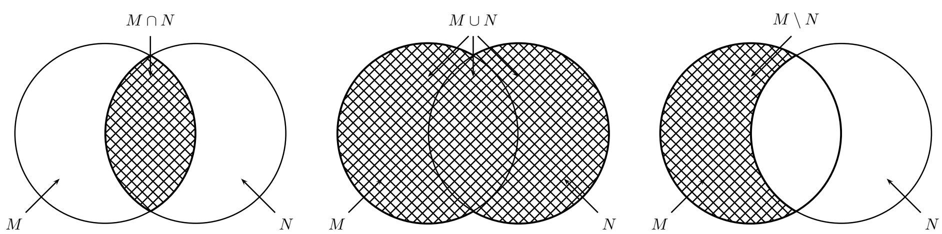


Abbildung 1.1: Venn-Diagramme

In diesen Diagrammen stehen die Kreise für Mengen, während die Punkte in den Kreisen die Elemente der jeweiligen Menge symbolisieren.
Es lassen sich Durchschnitte und Vereinigungen von beliebig vielen Mengen bilden. Ist $\{M_\iota\}_{\iota \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen, indiziert durch eine Menge $\mathcal{I}$, so schreibt man $\bigcap_{\iota \in \mathcal{I}} M_\iota$ für den Durchschnitt dieser Mengen und $\bigcup_{\iota \in \mathcal{I}} M_\iota$ für deren Vereingung.

**Weitere Konstruktionen mit Mengen**

- **(Kartesisches Produkt)** $M \times N = \{(x, y) \mid P(x) \wedge Q(y)\}$, wobei $(x, y)$ ein geordnetes Paar ist.

- **(Potenzmenge)** Für ein gegebenes $M$ ist $2^M$ die Menge aller Teilmengen von $M$, z. B.

  $$2^M = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}$$

  für $M = \big\{1, 2, 3\big\}$.

Insbesondere $\left|2^M\right| = 8 = 2^3$ fr $|M| = 3$, wobei $|M|$ die Mächtigkeit von $M$ bezeichnet. Allgemeiner $\left|2^M\right| = 2^{|M|}$.

### Die Mächtigkeit einer Menge

**Definition 1.10.** Zwei Mengen $M, N$ heißen *gleichmächtig*, falls es eine bijektive Abbildung $M \to N$ gibt.

*Beispiel* 1.11. Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig:

- Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$:

  $$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & \text{-1} & 2 & \text{-2} & 3 & \text{-3} & \dots \end{array}$$

- Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$:
  Die Höhe der rationalen Zahl ${}^p/_q$, $p,\ q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, $q > 0$, sei $|p| + q$.
  Es gibt nur endlich viele rationale Zahlen einer gegebenen Höhe, z. B.
  Höhe 1: $0 = {}^0/_1$,
  Höhe 2: $1 = {}^1/_1,\ -1 = {}^{-1}/_1$,
  Höhe 3: $2 = {}^2/_1,\ {}^1/_2,\ -{}^1/_2,\ -2 = -{}^2/_1$,
  usw.

  Eine mögliche Abzählung der rationalen Zahlen ist dann wie folgt:

  $$\underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ \updownarrow \\ 0 \end{array}}_{\text{Höhe 1}} \quad \underbrace{\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & \text{-1} \end{array}}_{\text{Höhe 2}} \quad \underbrace{\begin{array}{cccc} 4 & 5 & 6 & 7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & {}^1/_2 & -{}^1/_2 & \text{-2} \end{array}}_{\text{Höhe 3}} \quad \underbrace{\begin{array}{cc} 8 & \dots \\ \updownarrow & \\ 3 & \dots \end{array}}_{\text{Höhe 4}}$$

**Definition 1.12.** Eine Menge heißt *abzählbar unendlich*, falls sie gleichmächtig ist mit der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Sie heißt *abzählbar*, falls sie endlich oder abzählbar unendlich ist. Andernfalls heißt sie *überabzählbar*.

Die Mächtigkeit (Anzahl der Elemente) einer endlichen Menge $M$ bezeichnen wir mit $|M|$ (auch $\#M$ ist gebräuchlich).
Wir haben den folgenden wichtigen Satz:

**Satz 1.13.** *Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar.*

### 1.2.2 Äquivalenzrelationen

**Definition 1.14.** Eine *Relation* $R$ zwischen zwei Mengen $M$ und $N$ ist eine Teilmenge von $M \times N$, $R \subseteq M \times N$. Fr Paare $(x, y) \in R$ schreibt man $x \sim_R y$ und sagt, dass $x$ und $y$ in der Relation $R$ zueinander stehen.

**Definition 1.15.** Es sei $R$ eine Relation zwischen $M$ und sich selbst. Dann heißt $R$ eine *Äquivalenzrelation* auf $M$, falls

(1) **(Reflexivität)** $\forall x \in M \colon x \sim_R x$.

(2) **(Symmetrie)** $\forall x \in M\ \forall y \in M \colon x \sim_R y \to y \sim_R x$.

(3) **(Transitivität)** $\forall x \in M\ \forall y \in M\ \forall z \in M \colon x \sim_R y \land y \sim_R z \to x \sim_R z$.

Ist $R$ eine Äquivalenzrelation, so schreibt man auch $x \equiv y \pmod R$ anstelle $x \sim_R y$.

**Satz 1.16.** *Eine Äquivalenzrelation $R$ induziert eine disjunkte Zerlegung von $M$ in sogenannte* Äquivalenzklassen $[x]_R$. *Dabei ist* $[x]_R = \{y \in M \mid y \sim_R x\}$.

*Beweis.* Es gilt $x \in [x]_R$ für alle $x \in M$ und für zwei beliebige Elemente $x \in M$, $y \in M$ gilt entweder $[x]_R = [y]_R$ (wenn $x \sim_R y$ ) oder $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ (wenn $x \nsim_R y$ ). □

$x$ heißt ein *Vertreter* oder *Repräsentant* der Äquivalenzklasse $[x]$. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit $M/R$ bezeichnet. Es gibt dann die kanonische Abbildung

$$M \to M/R, \quad x \mapsto [x]_R.$$

*Beispiel* 1.17. Sei $M = \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ und $x \sim_R y$ genau dann, wenn $m$ ein Teiler von $x - y$ ist (d. h. $x \equiv y \pmod m$). Der Raum $M/R$ ist dann offenbar der Ring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0],\ [1],\ \dots,\ [m-1]\}$ und besteht aus genau $m$ Elementen.

### 1.2.3 Ordnungsrelationen

**Definition 1.18.** Eine *Ordnungsrelation* $R$ auf einer Menge $M$ ist eine Relation von $M$ nach $M$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) **(Reflexivität)** $\forall x \colon x \sim_R x$.

(2) **(Antisymmetrie)** $\forall x\ \forall y \colon x \sim_R y \land y \sim_R x \to x = y$.

(3) **(Transitivität)** $\forall x\ \forall y\ \forall z \colon x \sim_R y \land y \sim_R z \to x \sim_R z$.

Im Falle einer Ordnungsrelation schreibt man auch $x \leq_R y$ oder $x \leq y$ anstatt $x \sim_R y$. $x \leq y$ und $x \neq y$ wird mit $x < y$ ausgedrückt.
Das Paar $(M, \leq)$ heißt eine *geordnete Menge*.

*Beispiel* 1.19. Die Enthaltenseinrelation „$\subseteq$“ ist eine Ordnungsrelation auf der Potenzmenge $2^M$ einer Menge $M$. Das kleinste Element bezüglich dieser Ordnungsrelation ist die leere Menge $\emptyset$, das größte Element ist $M$.

**Definition 1.20.** Eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt *total geordnet* (oder linear geordnet), falls für je zwei Elemente $x$, $y \in M$ entweder $x < y$ oder $y < x$ oder $x = y$ gilt.

*Beispiel* 1.21.

(a) Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sind total geordnet.

(b) $(2^M, \subseteq)$ ist nicht total geordnet, falls $|M| > 1$.

### 1.2.4 Abbildungen

Eine Abbildung zwischen zwei Mengen $M$ und $N$ ordnet jedem Element in $M$ genau ein Element in $N$ zu.

**Definition 1.22.** Eine Relation $F \subseteq M \times N$ heißt eine *Abbildung zwischen $M$ und $N$*, wenn es zu jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ gibt, so dass $(x, y) \in F$. In diesem Fall schreibt man $F\colon M \to N$, $M \xrightarrow{F} N$, usw. sowie $y = F(x)$.

Schematisch:

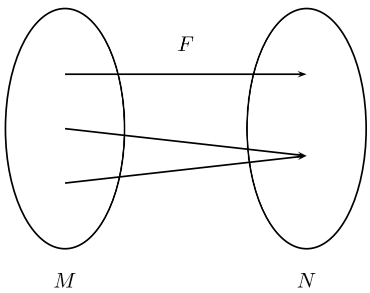


Abbildung 1.2: Abbildung $F$ von $M$ nach $N$

*Beispiel* 1.23.

- Die konstante Abbildung mit Wert $y_0 \in N$ ist $M \to N$, $x \mapsto y_0$.
- Die identische Abbildung ist $\mathrm{id}_M\colon M \to M$, $x \mapsto x$.
- Weitere Beispiele sind: $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n+1$, $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto \frac{1}{n} - 1$, $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$.

Abbildungen lassen sich zu neuen Abbildungen verknüpfen. Die Abbildungen $F\colon M \to N$, $G\colon N \to O$ ergeben die *Komposition* (Nacheinanderausführung) $G \circ F\colon M \to O$ definiert durch $(G \circ F)(x) = G\bigl(F(x)\bigr)$:

$$G \circ F\colon M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} O$$

(Beachte die Schreibweise in $G \circ F$ von rechts nach links.)

**Definition 1.24.** (a) Die Abbildung $F\colon M \to N$ heißt *injektiv*, falls für $x$, $y \in M$ aus $F(x) = F(y)$ die Gleichheit $x = y$ folgt.

(b) Die Abbildung $F\colon M \to N$ heißt *surjektiv*, falls $\forall y \in N\ \exists x \in M\colon F(x) = y$.

(c) Die Abbildung $F\colon M \to N$ heißt *bijektiv*, falls sie gleichzeitig *injektiv* und *surjektiv* ist.

**Satz 1.25.** *Die Abbildung $F\colon M \to N$ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $G\colon N \to M$ mit $G \circ F = \mathrm{id}_M$, $F \circ G = \mathrm{id}_N$ gibt.*

Die sogenannte Umkehrabbildung $G$ ist dann eindeutig bestimmt, man schreibt $G = F^{-1}$.

#### Suprema und Infima

Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge, $S$ eine Teilmenge von $M$.

**Definition 1.26.**

(a) Ein Element $b \in M$ heißt eine *obere* (*untere*) *Schranke* von $S$, falls $\forall x \in S\colon x \leq b$ ($\forall x \in S\colon x \geq b$) gilt.

(b) $S$ heißt *nach oben* (*nach unten*) beschränkt, falls es eine obere (untere) Schranke gibt. $S$ heißt *beschränkt*, falls $S$ sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

(c) Die *kleinste obere Schranke* (*größte untere Schranke*) von $S$ (falls existent) heißt das *Supremum* $\sup S$ (*Infimum* $\inf S$).

*Bemerkung.* Existiert $\sup S$ ($\inf S$) und gehört $\sup S$ ($\inf S$) zu $S$, so heißt dieses Element das *Maximum* (*Minimum*) von $S$ (in Zeichen: $\max S$ ($\min S$)).

*Beispiel* 1.27.

(i) Sei $M = \mathbb{Q}$ und $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x < \sqrt{2}\right\}$. Dann ist $S$ nach oben beschränkt (eine obere Schranke ist beispielsweise 2), aber $\sup S$ existiert nicht.

(ii) Die Relation $p \,|\, q$ ($p$ ist ein Teiler von $q$) ist eine Ordnungsrelation auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Für jede endliche Teilmenge $S \subseteq \mathbb{N}$ existiert bezüglich dieser Ordnungsrelation $\sup S$ (das kleinste gemeinsame Vielfache), für jede (beliebige) Teilmenge $S \subseteq \mathbb{N}$ existiert $\inf S$ (der größte gemeinsame Teiler).

## 1.3 Die reellen Zahlen

Wir betrachten jetzt die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen genauer.

### 1.3.1 Die Axiome der Menge der reellen Zahlen

Wir beginnen damit, die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen axiomatisch zu charakterisieren.

#### Arithmetik

$\mathbb{R}$ ist ein Körper, d. h. auf $\mathbb{R}$ sind Operationen $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\circ\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $-\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ${}^{-1}\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und zwei ausgezeichnete Elemente 0 und 1, $0 \neq 1$, erklärt, so dass Folgendes gilt:

**Axiome der Addition**

(A1) $\forall x,\ y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$,

(A2) $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\colon (x + y) + z = x + (y + z)$,

(A3) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x + 0 = 0 + x = x$,

(A4) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Das heißt, bezüglich der Addition bildet $\mathbb{R}$ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0.

**Axiome der Multiplikation**

(M1) $\forall x,\ y \in \mathbb{R}\colon xy = yx$,

(M2) $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\colon (xy)z = x(yz)$,

(M3) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$,

(M4) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\colon x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Insbesondere ist bezüglich der Multiplikation $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1.

(D) Die Multiplikation ist distributiv über der Addition, d. h. $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$:

$$x(y + z) = xy + xz, \quad (x + y)z = xz + yz.$$

**Ordnungsaxiome**

Der Körper $\mathbb{R}$ ist total geordnet, d. h. auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Totalordnung $\leq$ mit den zusätzlichen Eigenschaften

(O1) $\forall x,\ y \in \mathbb{R}\colon x > 0,\ y > 0$ impliziert $x + y > 0$.

(O2) $\forall x,\ y \in \mathbb{R}\colon x > 0,\ y > 0$ impliziert $xy > 0$.

(O3) $\forall x,\ y \in \mathbb{R}\colon x > y$ genau dann, wenn $x - y > 0$.

Diese Axiome unterscheiden die reellen Zahlen noch nicht von den rationalen Zahlen. Wir benötigen dazu das Vollständigkeitsaxiom.

**Vollständigkeitsaxiom:**

*Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $S$ reeller Zahlen besitzt ein Supremum* $\sup S$.

Das Beispiel 1.31 (i), zeigt, dass dieses Axiom in den rationalen Zahlen nicht gilt.

### 1.3.2 Konstruktion der reellen aus den rationalen Zahlen: Dedekindsche Schnitte

Wir zeigen jetzt konstruktiv, dass die Axiome aus dem vorigen Abschnitt in sich konsistent (widerspruchsfrei) sind, indem wir ein Modell der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen konstruieren.
Die grundlegende Idee ist einfach: Wir identifizieren eine reelle Zahl $\bar{\alpha}$ mit der Menge $(-\infty, \bar{\alpha}) \cap \mathbb{Q} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \bar{\alpha}\}$ (Intervalle $(-\infty, \bar{\alpha})$ reeller Zahlen werden unten diskutiert). Da wir die reellen Zahlen $\bar{\alpha}$ an dieser Stelle noch nicht haben (sondern erst einführen wollen), geben wir eine *intrinsische Charakterisierung* der Mengen $\{r \in \mathbb{Q} \mid r < \bar{\alpha}\}$ in der folgenden Definition, führen dann die notwendigen Operationen und Relationen auf diesen Mengen ein und weisen schliesslich nach, dass die Axiome erfüllt sind.

**Definition 1.28.** Ein *Dedekindscher Schnitt* ist eine Teilmenge $\alpha$ von $\mathbb{Q}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\alpha \neq \emptyset$ und $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

(b) Aus $r \in \alpha$ und $r' \in \mathbb{Q}$ mit $r' < r$ folgt $r' \in \alpha$.

(c) $\alpha$ enthält kein größtes Element.

$\mathbb{R}$ sei dann die Menge aller Dedekindscher Schnitte. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ betten in die so definierte Menge $\mathbb{R}$ vermöge der Abbildung

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \ r \mapsto \{r' \in \mathbb{Q} \mid r' < r\}$$

ein. (Letzteren Dedekindschen Schnitt bezeichnen wir wiederum mit $r$.)
Nochmals: Wir müssen jetzt die Operationen *Addition* und *Multiplikation* sowie die *Ordnungsrelation* auf $\mathbb{R}$ erklären und überprüfen, dass erstens die Axiome erfüllt und zweitens diese Operationen verträglich mit denen auf $\mathbb{Q}$ sind.

**Ordnungsrelation**

$\alpha \leq \beta$ (als reelle Zahlen) $\Longleftrightarrow$ $\alpha \subseteq \beta$ (als Teilmengen von $\mathbb{Q}$).

**Addition**

$$\alpha + \beta = \{r + s \mid r \in \alpha, \ s \in \beta\}.$$

Das inverse Element $-\alpha$ zu $\alpha$ bezüglich der Addition ist durch

$$-\alpha = \{s \in \mathbb{Q} \mid r + s < 0 \text{ für eine obere Schranke } r \text{ von } \alpha\}$$

gegeben.

**Multiplikation**

Gilt $\alpha > 0$, $\beta > 0$, so definiert man

$$\alpha\beta = \{t \in \mathbb{Q} \mid \exists r \in \alpha \cap \mathbb{Q}_+, \ \exists s \in \beta \cap \mathbb{Q}_+ : t \leq rs\},$$

wobei $\mathbb{Q}_+$ die Menge der positiven rationalen Zahlen bezeichnet, und setzt dann in allen anderen Fällen $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$,

$$\alpha\beta = \begin{cases} -(\alpha(-\beta)), & \text{falls } \alpha > 0,\ \beta < 0, \\ -((-\alpha)\beta), & \text{falls } \alpha < 0,\ \beta > 0, \\ (-\alpha)(-\beta), & \text{falls } \alpha < 0,\ \beta < 0. \end{cases}$$

Wir wollen hier nicht alle Axiome überprüfen (dass $\leq$ eine Totalordnung auf $\mathbb{R}$ ist und dass die Axiome (A1)–(A4), (M1)–(M4), (D) und (O1)–(O3) erfüllt sind, folgt leicht aus der Gültigkeit der entsprechenden Aussagen in $\mathbb{Q}$), sondern lediglich die Gültigkeit des Vollständigkeitsaxioms nachweisen.
Das geht wie folgt: Es sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge. Insbesondere gibt es ein $r_0 \in \mathbb{Q}$, das obere Schranke für alle $\alpha \in S$ (betrachtet als Teilmenge von $\mathbb{Q}$) ist. Wir setzen $\alpha_0 = \bigcup_{\alpha \in S} \alpha$ und behaupten, dass $\alpha_0 = \sup S$.

*Beweis.* Offenbar $\alpha \subseteq \alpha_0$ für alle $\alpha \in S$ und aus $\alpha \subseteq \beta$ für alle $\alpha \in S$ und ein $\beta \subseteq \mathbb{Q}$ folgt $\alpha_0 \subseteq \beta$.
Damit genügt es zu zeigen, dass $\alpha_0$ eine Dedekindscher Schnitt ist. Wegen $S \neq \emptyset$ ist $\alpha_0 \neq \emptyset$, und die Existenz von $r_0$ zeigt, dass $\alpha_0 \neq \mathbb{Q}$. Eigenschaft (b) aus der Definition eines Dedekindschen Schnittes ist offenbar gleichfalls erfüllt, und für jedes $r \in \alpha_0$ gibt es ein $\alpha \in S$ mit $r \in \alpha$, also auch ein $r' \in \alpha$ mit $r < r'$ ($\alpha$ ist ein Dedekindscher Schnitt) und $r' \in \alpha_0$. Folglich gilt auch Eigenschaft (c). □

### 1.3.3 Die Betragsfunktion, Intervallschachtelungen und die Dezimaldarstellung reeller Zahlen

Ab sofort „vergessen“ wir wieder, dass wir die reellen Zahlen als Dedekindsche Schnitte eingeführt hatten und arbeiten nur noch mit den Axiomen. Insbesondere gilt $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

**Definition 1.29.** Der (*absolute*) *Betrag* $|x|$ einer reellen Zahl $x$ ist die Zahl $x$, falls $x \geq 0$, und $-x$, falls $x < 0$. Der *Abstand* zweier reellen Zahlen $x$, $y$ ist $|x - y|$.

*Beispiel* 1.30. $|3| = 3$, $|-2| = 2$, $|0| = 0$.

Es sei $[0, \infty)$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.

**Satz 1.31.** *Die Betragsfunktion* $|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *hat die folgenden Eigenschaften:*

(a) *Aus* $|x| = 0$ *folgt* $x = 0$.

(b) $|x| = |-x|$.

(c) (Dreiecksungleichung) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

*Beweis.* Lediglich (c) bedarf eines Beweises. Da die Ungleichung symmetrisch in $x$, $y$ ist und da (b) gilt, dürfen wir $x = |x| \geq |y|$ annehmen. Dann gilt jedoch

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|,$$

und der Beweis ist geführt. □

*Anmerkung.* Ersetzt man $x$, $y$ durch $x-y$, $y-z$, so erhält man

(a') Aus $|x-y|=0$ folgt $x=y$.

(b') $|x-y|=|y-x|$.

(c') $|x-z| \le |x-y|+|y-z|$.

Die Eigenschaften (a')–(c') werden so zusammengefasst, dass man sagt, dass die Funktion

$$d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,\infty), \quad (x,y)\mapsto |x-y|$$

(also $d(x,y)=|x-y|$) eine *Metrik* auf $\mathbb{R}$ ist.

### Intervalle in $\mathbb{R}$

**Definition 1.32.** Ein Intervall $I$ ist eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass aus $c,\ d\in I$, $c<d$, folgt, dass $\underbrace{\{x\in\mathbb{R} \mid c\le x\le d\}}_{=[c,d]} \subseteq I$ gilt.

Es seien $a,\ b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$ ($a\le b$ im vierten Fall). Dann gibt es die folgenden Typen von Intervallen:

$$\left.\begin{aligned}
(a,b) &= \{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\},\\
[a,b) &= \{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\},\\
(a,b] &= \{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\},\\
[a,b] &= \{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\},
\end{aligned}\right\}\quad \text{endliche Intervalle}$$

$$\left.\begin{aligned}
(-\infty,a) &= \{x\in\mathbb{R} \mid x<a\},\\
(-\infty,a] &= \{x\in\mathbb{R} \mid x\le a\},\\
(b,\infty) &= \{x\in\mathbb{R} \mid b<x\},\\
[b,\infty) &= \{x\in\mathbb{R} \mid b\le x\},\\
(-\infty,\infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}\right\}\quad \text{unendliche Intervalle}$$

Die Intervalle $(a,b)$, $(-\infty,a)$, $(b,\infty)$ sind *offen*, die Intervalle $[a,b)$, $(a,b]$ *halboffen* und die Intervalle $[a,b]$, $(-\infty,a]$, $[b,\infty)$ *abgeschlossen*.
Eine runde Klammer heißt also, dass der Endpunkt *nicht* zum Intervall dazugehört, eine eckige Klammer heißt, der Endpunkt gehört zum Intervall. Veranschaulicht man die reellen Zahlen auf der Zahlengeraden (wie Sie dies aus der Schule kennen), so kann man $-\infty$ und $\infty$ als ideelle Punkte an den beiden „Enden“ der Zahlengerade verstehen.
$b-a$ ist die *Länge* des Intervalls in den ersten vier Fällen (im Fall eines endlichen Intervalls).

Das Vollständigkeitsaxiom ist zu der folgenden Aussage äquivalent:

### Intervallschachtelungsprinzip

**Satz 1.33.** *Es seien $I_1,\ I_2,\ I_3,\dots$ endliche abgeschlossene Intervalle mit $I_m\supseteq I_{m+1}$ für jedes $m\in\mathbb{N}$. Dann ist $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ nichtleer.*

*Bemerkung.* 1. Die Forderung, dass die Intervalle $I_m$ endlich sind, kann nicht fortgelassen werden.

Beispiel: $\bigcap_{m=1}^{\infty}[m,\infty) = \emptyset$. Dies folgt aus dem *Archimedischen Axiom*:

$$\forall x > 0 \ \forall y \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N}\colon nx > y.$$

Letzteres wiederum ist eine Konsequenz der übrigen Axiome der Menge der reellen Zahlen.

2. In den rationalen Zahlen gilt das Intervallschachtelungsprinzip nicht. Sei beispielsweise $I_m = [\sqrt{2}-\frac{1}{m}, \sqrt{2}+\frac{1}{m}]$ für $m = 1, 2, 3, \dots$ und $J_m = I_m \cap \mathbb{Q}$. Die Länge von $J_m$ ist $\frac{2}{m}$, wird also für große $m$ beliebig klein. Dennoch gilt $\bigcap_m J_m = \emptyset$. (Es gilt $\bigcap_m I_m = \{\sqrt{2}\}$, aber $\sqrt{2}$ ist irrational.)

Wir können das Intervallschachtelungsprinzip benutzen, um die *Dezimaldarstellung* reeller Zahlen einzuführen.

*Beispiel* 1.34. Wir betrachten die Zahl

$$x = 13,56742\ldots = 1\cdot 10 + 3\cdot 1 + 5\cdot 10^{-1} + 6\cdot 10^{-2} + 7\cdot 10^{-3}\ldots$$

Dann $\{x\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k$ mit

$$\begin{aligned}
I_0 &= [1\cdot 10^1, 2\cdot 10^1],\\
I_1 &= [13\cdot 10^0, 14\cdot 10^0],\\
I_2 &= [135\cdot 10^{-1}, 136\cdot 10^{-1}],\\
I_3 &= [1356\cdot 10^{-2}, 1357\cdot 10^{-2}], \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Das bedeutet, wir konstruieren sukzessive geschachtelte Intervalle der Längen $10^{1-k}$ für $k = 0, 1, 2, \dots$, die sich auf $x = 13,56742\ldots$ „zusammenziehen".

Im Allgemeinen verfährt man wie folgt: Es sei $x > 0$. (Ist $x < 0$, so nehmen wir die Dezimaldarstellung von $-x$ und versehen diese mit einem Minuszeichen.) Es sei

$$x = \underbrace{a_0 a_1 \ldots a_m}_{\substack{m+1 \text{ Stellen}\\ \text{vor dem Komma}}}, a_{m+1} a_{m+2} \ldots = a_0 \cdot 10^m + a_1 \cdot 10^{m-1} + \ldots$$

im Fall $m \geq 0$ und

$$x = 0, \quad \underbrace{00\ldots00}_{\substack{|m|-1 \text{ Stellen}\\ \text{nach dem Komma}}} \quad a_0 a_1 a_2 \ldots = a_0 \cdot 10^m + a_1 \cdot 10^{m-1} + \ldots$$

im Fall $m < 0$ die Dezimaldarstellung von $x$ mit $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ für alle $k$ und $a_0 > 0$. Die ganze Zahl $m$ ist durch $10^m \leq x < 10^{m+1}$ eindeutig bestimmt. Analog dem obigen Beispiel haben wir $\{x\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k$, wobei $I_k = \big[b_k \cdot 10^{m-k}, (b_k+1)\cdot 10^{m-k}\big]$ für $k = 0, 1, 2, \dots$

Die $a_k$, $b_k$ ergeben sich wie folgt: Es gilt

$$a_0 = \left[\frac{x}{10^m}\right], \quad b_0 = a_0,$$

wobei $[y]$ den *ganzen Teil* einer reellen Zahl $y \geq 0$ bezeichnet, d. h. $[y] \in \mathbb{N}_0$ und $[y] \leq y < [y] + 1$, und wurde $b_k$ bereits konstruiert, so

$$a_{k+1} = \left[ \frac{x - b_k \cdot 10^{m-k}}{10^{m-k-1}} \right], \quad b_{k+1} = 10b_k + a_{k+1}.$$

*Bemerkung.* In Dezimalschreibweise sind die rationalen Zahlen genau diejenigen, die endliche oder periodische Dezimaldarstellungen haben.

*Beispiel* 1.35. $\frac{1}{4} = 0,25$, $\frac{1}{7} = 0,142857142857\ldots = 0,\overline{142857}$.

*Bemerkung.* Es gibt die Nichteindeutigkeit $1 = 0,\overline{9}$ in der Dezimaldarstellung der Zahl 1, abgeleitet davon $1/4 = 0,25 = 0,24\overline{9}$, usw. Obiger Algorithmus jedoch liefert eine eindeutige Darstellung.

**Satz 1.36.** *Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.* (*Insbesondere gibt es „viel mehr“ irrationale als rationale Zahlen.*)

*Beweis.* Angenommen, $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Sei $\Phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Abzählung (Bijektion). Wir setzen $[a_0, b_0] = [0, 1]$ und wählen induktiv für $k = 1, 2, 3, \ldots$ Intervalle $[a_k, b_k]$ mit $[a_k, b_k] \subseteq [a_{k-1}, b_{k-1}]$ und $\Phi(k) \notin [a_k, b_k]$. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gilt $\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \neq \emptyset$. Für $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$ gilt jedoch $x \neq \Phi(k)$ für alle $k = 1,\ 2,\ 3, \ldots$. Das ist ein Widerspruch zur Surjektivität von $\Phi$.
Folglich ist $\mathbb{R}$ überabzählbar. □

## Anhang zu Abschnitt 1.3: Äquivalenz des Vollständigkeitsaxioms und des Intervallschachtelungsprinzips

Wir beweisen, dass das Vollständigkeitsaxiom und das Intervallschachtelungsprinzip einander bedingen.
(1) Sei das Vollständigkeitsaxiom erfüllt und sei $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$ mit $I_m = [a_m, b_m]$ eine geschachtelte Folge beschränkter abgeschlossener Intervalle in $\mathbb{R}$. Laut Voraussetzung

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1.$$

Das Vollständigkeitsaxiom liefert die Existenz von

$$a = \sup_m a_m, \quad b = \inf_m b_m$$

(beachte $b = -\sup_m(-b_m)$) und offenbar

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots a \leq b \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1.$$

Damit

$$a \in \bigcap_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m]$$

und $\bigcap_m I_m \neq \emptyset$.

(2) Umgekehrt gelte das Intervallschachtelungsprinzip und $S \subseteq \mathbb{R}$ sei eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge. Die Menge $B$ der oberen Schranken von $S$ ist dann nichtleer und nach unten beschränkt (nämlich durch die Elemente

von $S$), während die Menge $A$ der unteren Schranken von $B$ nichtleer und nach oben beschränkt ist; $S \subseteq A$. Offenbar $a \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ sowie $\mathbb{R} = A \cup B$. (Ist $a \notin B$ für ein reelles $a$, so $a < s$ für wenigstens ein $s \in S$ und daher $a < s \leq b$ für alle $b \in B$, also $a \in A$.)
Dann gibt es nur zwei Möglichkeiten: Entweder $A \cap B = \emptyset$ oder $A \cap B$ enthält genau ein Element.
Wir wollen zeigen, dass die zweite Möglichkeit eintritt: Ist nämlich $A \cap B = \{c\}$, so ist $c$ das kleinste Element in $B$, folglich $c = \sup S$.
Dazu konstruieren wir induktiv Folgen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ in $A$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ in $B$ mit

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1.$$

und

$$b_m - a_m = \frac{b_1 - a_1}{2^{m-1}}$$

für alle $m \geq 1$. Wir wählen $a_1 \in A$ und $b_1 \in B$ beliebig. Sind $a_m \in A$ und $b_m \in B$ für ein $m \geq 1$ bereits gewählt, so setzen wir

$$a_{m+1} = a_m, \quad b_{m+1} = \frac{a_m + b_m}{2},$$

falls $(a_m + b_m)/2 \in B$, und

$$a_{m+1} = \frac{a_m + b_m}{2}, \quad b_{m+1} = b_m$$

andernfalls. Aus dem Intervallschachtelungsprinzip erhalten wir, dass der Durchschnitt $\bigcap_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m]$ genau ein Element $c$ enthält. Diese Element $c$ gehört offenbar zu $A \cap B$. $\square$

## 1.4 Ungleichungen

Wir beweisen in diesem Abschnitt verschiedene Ungleichungen, die man in der Analysis häufig benötigt.

### 1.4.1 Ungleichungen zwischen verschiedenen Mitteln

Es seien $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Dann führen wir Mittelwerte wie folgt ein:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \qquad \text{– harmonisches Mittel}$$

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \qquad \text{– geometrisches Mittel}$$

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad \text{– arithmetisches Mittel}$$

$$Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \qquad \text{– quadratisches Mittel}$$

**Satz 1.37.** *Es gilt*

$$\min_{i=1,\ldots,n} a_i \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \max_{i=1,\ldots,n} a_i.$$

*Weiterhin gilt $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ genau dann, wenn in dieser Kette von Ungleichungen an wenigstens einer Stelle die Gleichheit gilt.*

*Bemerkung.* Betrachtet man lediglich $G$, $A$, $Q$, so kann $a_i \geq 0$ gelten.

*Beweis.* Es sei $m = \min_{i=1,\dots,n} a_i$ und $M = \max_{i=1,\dots,n} a_i$. Da für $m = M$ in allen obigen Ungleichungen Gleichheit gilt, nehmen wir $m < M$ an und zeigen die Gültigkeit strikter Ungleichungen.

**($\boldsymbol{m < H}$):** Es gilt

$$H = \frac{n}{1/a_1 + \cdots + 1/a_n} > \frac{n}{\underbrace{1/m + \cdots + 1/m}_{n\text{-mal}}} = m.$$

**($\boldsymbol{H < G}$):** Mit dem folgenden Beweisschritt ($G < A$) gilt an dieser Stelle

$$H = \frac{1}{A(1/a_1, \dots, 1/a_n)} < \frac{1}{G(1/a_1, \dots, 1/a_n)} = G.$$

**($\boldsymbol{G < A}$):** Wir beweisen dies durch Induktion nach $n$.
<u>$n = 1$</u>: Es ist nichts zu zeigen.
<u>$n \to n+1$</u>: O. B. d. A. sei $a_n < A < a_{n+1}$. Dann $0 < (A - a_n)(a_{n+1} - A)$, also $a_n a_{n+1} < A(a_n + a_{n+1} - A)$ und nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + (a_n + a_{n+1} - A)}{n} \\ &\geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_{n-1}(a_n + a_{n+1} - A)} > \sqrt[n]{\frac{a_1 \dots a_{n-1} a_n a_{n+1}}{A}} = \frac{G^{1+1/n}}{A^{1/n}}. \end{aligned}$$

Folglich gilt $A > G$.

**($\boldsymbol{A < Q}$):** Folgt aus der Hölderschen Ungleichung und wird später gezeigt.

**($\boldsymbol{Q < M}$):** Es gilt

$$Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} < \sqrt{\frac{M^2 + \cdots + M^2}{n}} = M.$$

Das beendet den Beweis. □

### 1.4.2 Die Youngsche Ungleichung

Sei $p \in (1, \infty)$ und $q = \frac{p}{p-1}$, d. h.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Satz 1.38.** *Für alle nichtnegativen reellen Zahlen $a$, $b$ gilt*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn $a^p = b^q$.*

*Beweis.* Im nichtnegativen Quadranten der $x, y$-Ebene betrachten wir die Kurve $x^p = y^q$ (d. h. $y = x^{p-1}$ bzw. $x = y^{q-1}$). Die Fläche unter dieser Kurve von $x = 0$ bis $x = a$ ist gleich $\frac{a^p}{p}$ $(= \int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{x^p}{p}\big|_0^a)$[1], analog ist die Fläche links dieser Kurve von $y = 0$ bis $y = b$ gleich $\frac{b^q}{q}$ (s. Abbildung 1.3).

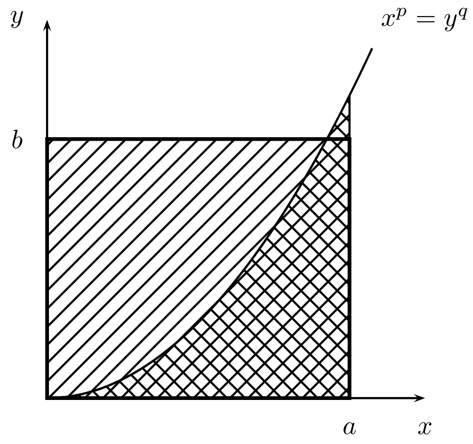


Abbildung 1.3: Zum Beweis der Youngschen Ungleichung

Diese beiden Flächen zusammen sind offenbar wenigstens gleich der Fläche $ab$ des Rechtecks mit den Ecken $(0,0)$, $(a,0)$, $(a,b)$ und $(0,b)$, also ist $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, wobei Gleichheit genau für $a^p = b^q$ gilt. □

### 1.4.3 Die Höldersche Ungleichung

Sei $p \in (1, \infty)$ und $q = \frac{p}{p-1}$.

**Satz 1.39.** *Für alle nichtnegativen reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ gilt*

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \leq \left(x_1^p + \cdots + x_n^p\right)^{1/p} \left(y_1^q + \cdots + y_n^q\right)^{1/q}.$$

*Gleichheit gilt genau dann, wenn es Konstanten $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ mit*

$$\alpha x_i^p = \beta y_i^q$$

*für alle $i = 1, \ldots, n$ gibt.*[2]

*Beweis.* Wir dürfen $x_1^p + \cdots + x_n^p = 1$ und $y_1^q + \cdots + y_n^q = 1$ annehmen, da für $x_1 = \cdots = x_n = 0$ bzw. für $y_1 = \cdots = y_n = 0$ die Ungleichung trivialerweise erfüllt ist und wir für $x_1^p + \cdots + x_n^p > 0$ und $y_1^q + \cdots + y_n^q > 0$ statt der Zahlen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ die Zahlen $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ mit

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{\left(x_1^p + \cdots + x_n^p\right)^{1/p}}, \quad \bar{y}_i = \frac{y_i}{\left(y_1^q + \cdots + y_n^q\right)^{1/q}}$$

[1] Flächeninhalte werden wir später in diesem Kurs berechnen. Es gibt auch elementare Beweise der Youngschen Ungleichung.

[2] Wir können nicht einfach $y_i^p = \alpha x_i^p$ für alle $i$ und ein gewisses $\alpha \geq 0$ schreiben, da ja $x_1 = \cdots = x_n = 0$ sein könnte, während $y_i \neq 0$ für wenigstens ein $i$ ist.

betrachten können.
Sei also $x_1^p + \cdots + x_n^p = y_1^q + \cdots + y_n^q = 1$. Dann gilt mit der Youngschen Ungleichung

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \leq \frac{x_1^p}{p} + \frac{y_1^q}{q} + \cdots + \frac{x_n^p}{p} + \frac{y_n^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Letzteres wollten wir zeigen. Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn $x_i^p = y_i^q$ für alle $i$. □

*Folgerung* 1.40. Sei $0 < p < q$ und seien $x_1, \ldots, x_n$ nichtnegative reelle Zahlen. Dann

$$\left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{1/p} \leq \left(\frac{x_1^q + \cdots + x_n^q}{n}\right)^{1/q},$$

wobei Gleichheit genau für $x_1 = \cdots = x_n$ gilt.

*Bemerkung.* Für $p = 1$ und $q = 2$ ist dies die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel.

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n} = x_1^p \cdot \frac{1}{n} + \cdots + x_n^p \cdot \frac{1}{n} \\
&\leq \left((x_1^p)^{q/p} + \cdots + (x_n^p)^{q/p}\right)^{p/q} \left(\frac{n}{n^{q/(q-p)}}\right)^{(q-p)/q} = \left(\frac{x_1^q + \cdots + x_n^q}{n}\right)^{p/q},
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Wir haben die folgende allgemeinere Form der Hölderschen Ungleichung: Seien $p,\ q,\ r > 0$, wobei

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

**Satz 1.41.** *Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ beliebige reelle Zahlen. Dann gilt*

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i y_i|^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

*Gleichheit gilt genau dann, wenn es Konstanten $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ mit*

$$\alpha\, |x_i|^p = \beta\, |y_i|^q$$

*für alle $i = 1, \ldots, n$ gibt.*

*Bemerkung.* Im Fall $p = q = 2$, $r = 1$ heißt diese Ungleichung auch die *Cauchy-Schwartzsche Ungleichung*.

*Beweis.* Wegen $\frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r} = 1$ gilt nach der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |x_i y_i|^r = \sum_{i=1}^n |x_i|^r\, |y_i|^r &\leq \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|^r)^{p/r}\right)^{r/p} \left(\sum_{i=1}^n (|y_i|^r)^{q/r}\right)^{r/q} \\
&\leq \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (|y_i|^q\right)^{1/q}\right)^r,
\end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung. □

### 1.4.4 Die Minkowski-Ungleichung

Wir betrachten jetzt eine Folge $x_1, \ldots, x_n$ von $n$ reellen Zahlen als Vektor $x = \big(x_1, \ldots, x_n\big) \in \mathbb{R}^n$. Für $p \geq 1$ definieren wir

$$|x|_p = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} .$$

**Satz 1.42.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p \, .$$

*Beweis.* Für $p = 1$ ist dies die Dreiecksungleichung, es gilt $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ für alle $i$.
Sei deshalb $p > 1$. Dann gilt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i| + |y_i|\right) |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \left( \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\Big)^{1/p} \right) \left( \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i + y_i|^{p-1}\right)^{p/(p-1)} \right)^{(p-1)/p} , \end{aligned}$$

also

$$\left(|x+y|_p\right)^p \leq \left(|x|_p + |y|_p\right) \left(|x+y|_p\right)^{p-1}$$

und $|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$. □

*Bemerkung.* Diese Ungleichung bleibt für $p = \infty$ richtig, wenn man

$$|x|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

setzt.

# Kapitel 2

# Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit

## 2.1 Folgen

**Definition 2.1.** Eine *Folge reeller Zahlen* ist eine Abbildung $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Anstelle $a(n)$ schreibt man auch $a_n$. Die Folge selbst wird mit $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$ oder mit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bezeichnet. $a_n$ heißt das *$n$-te Glied* der Folge.

*Bemerkung.* Manchmal beginnt der Zählindex mit einer ganzen Zahl verschieden von 1, z. B. in der Folge $b_{-2},\ b_{-1},\ b_0,\ b_1, \dots$

*Beispiel* 2.2.

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}, \dots$$
$$1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1,\ 0,\ 1,\ -1, \dots$$

Beachte, dass dieselbe reelle Zahl mehr als einmal (und sogar unendlich oft) in einer Folge vorkommen kann. Folgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sind daher von ihren Wertebereichen $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ begrifflich zu unterscheiden. Im zweiten Beispiel ist der Wertebereich die endliche Menge $\{-1,\ 0,\ 1\}$.
Folgen können durch die *Angabe des allgemeinen Gliedes* definiert werden, z. B. $\left\{\frac{n}{2n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ist die Folge $\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7}, \dots$ mit dem allgemeinen Glied $a_n = \frac{n}{2n-1}$. Sie können auch *rekursiv* definiert sein, z. B. ist die Fibonacci-Folge $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89, \dots$ durch $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

**Definition 2.3.**

(a) Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt *beschränkt* (*nach oben beschränkt, nach unten beschränkt*), falls es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \le M$ ($a_n \le M,\ M \le a_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt. In diesem Fall heißt $M$ eine *Schranke* (*obere Schranke, untere Schranke*) von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(b) Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt *monoton wachsend* (*monoton fallend*), falls $a_n \le a_{n+1}$ ($a_n \ge a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sie heißt *strikt monoton wachsend* (*strikt monoton fallend*), falls diese Ungleichungen strikt sind.

(c) Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt *nichtnegativ* (*positiv*), falls ihre Glieder nichtnegativ (positiv) sind.

(d) Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt *alternierend*, falls ihre Glieder abwechselnd nichtneagtiv und nichtpositiv sind.

*Beispiel* 2.4.

- Die Folge $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\dots$ mit dem allgemeinem Glied $\frac{1}{n}$ ist strikt monoton fallend und beschränkt.
- Die Folge $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\dots$ mit dem allgemeinem Glied $n$ ist strikt monoton wachsend und nach unten, aber nicht nach oben beschränkt.

Diese beiden Folgen sind zudem positiv.

- Die Folge $1,\ -1,\ 1,\ -1,\dots$ mit allgemeinem Glied $(-1)^{n+1}$ ist alternierend und beschränkt.

**Definition 2.5.** Die Folge $a_1,\ a_2,\ a_3,\dots$ *konvergiert gegen* eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon)\ \forall n \geq N\colon |a - a_n| \leq \epsilon$. $a$ heißt dann der *Grenzwert* dieser Folge. Man schreibt $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

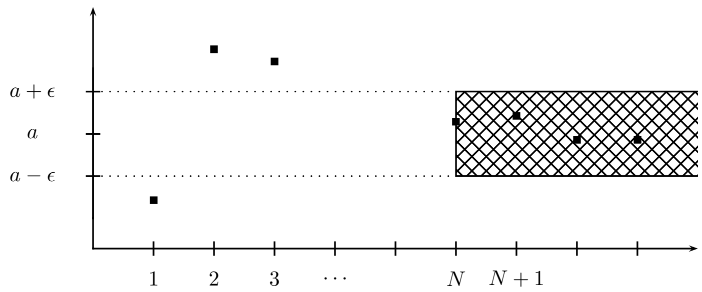


Abbildung 2.1: Konvergenz einer Folge gegen $a$

In diesem Fall heißt die Folge $\{a_n\}$ *konvergent*, andernfalls *divergent*. Sie heißt *bestimmt divergent* gegen $\infty$ (gegen $-\infty$), falls $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N = N(m)\ \forall n \geq N\colon a_n \geq M$ $(a_n \leq M)$. Man schreibt dann $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ $(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty)$. Andernfalls heißt die Folge *unbestimmt divergent*.

*Beispiel* 2.6. Die Folge $\left\{\frac{n}{3n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen $\frac{1}{3}$.

*Beweis.* Betrachte $\left|\frac{1}{3} - \frac{n}{3n+2}\right| = \left|\frac{(3n+2)-3n}{3(3n+2)}\right| = \frac{2}{9n+6} < \frac{1}{4n}$. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ wählen wir eine ganze Zahl $N \geq \frac{1}{4\epsilon}$ und erhalten $\left|\frac{1}{3} - \frac{n}{3n+2}\right| < \epsilon$ für $n \geq N$. $\square$

**Satz 2.7.**

(a) *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

(b) *Konvergente Folgen sind beschränkt.*

*Beweis.*

(a) Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ habe die beiden Grenzwerte $a$ und $b$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann $|a - a_n| \leq \epsilon$ und $|b - a_n| \leq \epsilon$ für hinreichend großes $n$. Dann auch $|a - b| \leq |a - a_n| + |b - a_n| \leq 2\epsilon$. Da dies für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt, erhalten wir $|a - b| = 0$ und $a = b$.

(b) $a$ sei der Grenzwert der Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $N = N(1)$. Dann ist eine Schranke von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegeben durch

$$\max\{|a_1|,\ |a_2|, \ldots,\ |a_{N-1}|,\ 1 + |a|\},$$

da

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$$

für $n \geq N$.

□

**Satz 2.8.** *Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ seien konvergent mit den Grenzwerten $a$ bzw. $b$. Dann gilt:*

(a) $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$ *für jedes* $c \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$.

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *falls* $b \neq 0$.

*Bemerkung.* Die Aussage beispielsweise in (b) ist so zu lesen, dass aus der Konvergenz der Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ die Konvergenz der Folge $\{a_n + b_n\}$ folgt und dass deren Grenzwert gleich $a + b$ ist. Analog für die Folge $\{a_n - b_n\}$.
Zu (d): Gilt $b \neq 0$, so $b_n \neq 0$ für $n \geq N$ mit einem gewissen $N$, so dass ab diesem Index $N$ die Folgenglieder $\frac{a_n}{b_n}$ wohldefiniert sind.

*Beweis.* Wir beweisen lediglich (c), der Rest ist analog.
Sei $\sup |a_n| = A < \infty$. Weiterhin sei für $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon)$ mit $|a - a_n| \leq \epsilon$ und $|b - b_n| \leq \epsilon$ für $n \geq N$ gewählt. Dann

$$\begin{aligned} |ab - a_n b_n| &\leq |ab - a_n b| + |a_n b - a_n b_n| \\ &= |a - a_n|\,|b| + |a_n|\,|b - b_n| \leq |b|\,\epsilon + A\epsilon = (A + |b|)\epsilon. \end{aligned}$$

Da $(A + |b|\,\epsilon)$ für geeignetes $\epsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Behauptung. □

Diese Regeln gelten teilweise auch für bestimmt divergente Folgen, wenn man definiert:

$$\begin{aligned} c + \infty &= \infty \ \text{ für jedes } c \in \mathbb{R}, \\ \infty + \infty &= \infty, \\ c \cdot \infty &= \infty \ \text{ für jedes } c > 0, \\ \infty \cdot \infty &= \infty, \\ (-1) \cdot \infty &= -\infty, \\ \frac{c}{\infty} &= 0 \ \text{ für jedes } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Beispielsweise bedeutet die Regel $c + \infty = \infty$, dass für Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ die Folge $\{a_n + b_n\}$ bestimmt gegen $\infty$ divergiert; $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.
Andere Regeln lassen sich aus diesen Regeln ableiten, z. B.

$$\begin{aligned}(-\infty)\cdot\infty &= (-1)\cdot\infty\cdot\infty = -\infty,\\ c-\infty &= -(-c+\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

Ausdrücke wie $\infty - \infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ bleiben unbestimmt.
Um zu sehen, weshalb etwa der Ausdruck $\infty - \infty$ unbestimmt ist, betrachten wir die Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ mit $a_n = n^2 + c_n$, $b_n = n^2$, wobei die Folge $\{c_n\}$ der Bedingung $c_n \geq -n$ für große $n$ genügt. Dann $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Jedoch ist für das Konvergenzverhalten der Folge $\{a_n - b_n\} = \{c_n\}$ „alles“ möglich (Konvergenz gegen ein beliebig vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$, bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$, unbestimmte Divergenz).

**Satz 2.9.**

(a) *Konvergente, nichtnegative Folgen haben einen nichtnegativen Grenzwert.*

(b) *Gilt $a_n \in [\alpha, \beta]$ ab einem gewissen Index $N$ (d. h. für $n \geq N$) und konvergiert die Folge $\{a_n\}$, so gehört ihr Grenzwert zum Intervall $[\alpha, \beta]$.*

*Beweis.* Es sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(a) Gilt $a_n \geq 0$ ab einem Index $N$, so gilt

$$a \geq a_n - |a - a_n| \geq -|a - a_n|$$

für $n \geq N$, und dies kommt der Null für große $n$ beliebig nahe. Also $a \geq 0$.

(b) Die Folge $\{a_n - \alpha\}$ ist nichtnegativ für große $n$, also $a - \alpha \geq 0$ und $a \geq \alpha$. Die Folge $\{\beta - a_n\}$ ist nichtnegativ für große $n$, also $\beta - a \geq 0$ und $a \leq \beta$.

□

*Bemerkung.* Strikte Ungleichungen bleiben im Limes im Allgemeinen nicht erhalten. So ist die Folge $\{\frac{1}{n}\}$ positiv, jedoch $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

**Satz 2.10.** *Beschränkte monotone Folgen sind konvergent.*

*Beweis.* O. B. d. A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) sei die Folge $\{a_n\}$ monoton wachsend. Gemäß des Vollständigkeitsaxiomes existiert $a = \sup_n a_n$. Sei $\epsilon > 0$. Dann ist $a - \epsilon$ keine obere Schranke der Folge $\{a_n\}$ (da $a$ die kleinste obere Schranke ist), also $a - \epsilon < a_N$ für ein gewisses $N$. Dann jedoch $a - \epsilon < a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \cdots \leq a$, insbesondere $|a - a_n| = a - a_n < \epsilon$ für alle $n \geq N$ und $a = \lim_n a_n$. □

*Beispiel* 2.11. Definiere $b_1 = 3$ und $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{3}{b_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Man berechnet

$$b_1 = 3,\ \ b_2 = 2,5,\ \ b_3 = 2,45,\ \ b_4 = 2,4495,\ \ \text{usw.}$$

Wir behaupten, dass die Folge $\{b_n\}$ strikt monoton fallend ist und gegen $\sqrt{6}$ konvergiert.

*Beweis.*

(a) $b_n > \sqrt{6}$ für alle $n$. Dies ist klar für $n = 1$ und folgt induktiv für alle anderen $n$: $b_n > \sqrt{6}$ impliziert $b_n^2 - 2\sqrt{6}b_n + 6 = (b_n - \sqrt{6})^2 > 0$, also $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{3}{b_n} > \sqrt{6}$.

(b) Dann jedoch ist $b_{n+1} - b_n = -\frac{b_n}{2} + \frac{3}{b_n} = \frac{6-b_n^2}{2b_n} < 0$.

(c) Somit ist die Folge $\{b_n\}$ strikt monoton fallend und nach unten beschränkt (beispielsweise durch $\sqrt{6}$). Also existiert $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, und indem wir in der Beziehung
$$b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{3}{b_n}$$
zur Grenze für $n \to \infty$ übergehen, erhalten wir
$$b = \frac{b}{2} + \frac{3}{b}.$$
Folglich $\frac{b}{2} = \frac{3}{b}$, $b^2 = 6$ und $b = \sqrt{6}$ (letzteres wegen $b \geq \sqrt{6}$).

□

## 2.2 Cauchyfolgen

**Definition 2.12.** Eine Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt *Cauchyfolge*, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n \geq N\colon |a_m - a_n| \leq \epsilon$.

**Lemma 2.13.** *Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.*

*Beweis.* Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Für ein gegebenes $\epsilon > 0$ wählen wir $N$, so dass $|a - a_n| \leq \epsilon/2$ für alle $n \geq N$. Dann gilt
$$|a_m - a_n| \leq |a - a_m| + |a - a_n| \leq \epsilon$$
für alle $m,\ n \geq N$. □

Unser erstes Hauptresultat in dieser Vorlesung wird sein, dass umgekehrt jede Cauchyfolge konvergiert.

*Bemerkung.* Dieses Resultat benutzt das Vollständigkeitsaxiom (beim Beweis, dass monotone beschränkte Folgen konvergent sind) und gilt nicht in den rationalen Zahlen.

Ein derartiges Resultat ist sehr nützlich, kann man doch auf die Konvergenz einer Folge schließen, ohne tatsächlich ihren Grenzwert zu kennen.

*Beispiel* 2.14. Die Folge $\{a_n\}$ mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

*Beweis.* Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $1/N \leq \epsilon$. Dann gilt für $n > m \geq N$:
$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3}\right) + \dots \\ &\qquad \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Folglich ist $\{a_n\}$ eine Cauchyfolge und wir können auf die Konvergenz dieser Folgen schließen, sobald der erwähnte Satz bewiesen ist. □

*Bemerkung.* Es ist viel schwieriger zu zeigen, dass die Folge $\{a_n\}$ gegen $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449$ konvergiert (L. Euler, 1735 & 1741).

Wie im Fall konvergenter Folgen beweist man:

**Satz 2.15.** *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

**Definition 2.16.** Es sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen und $\{n_k\}_{n=1}^{\infty}$ eine strikt monotone Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ eine *Teilfolge* von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

*Beispiel* 2.17. Ist $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 7$, $n_4 = 11$, ..., so erhalten wir die Teilfolge

$$a_2,\ a_3,\ a_7,\ a_{11},\ \dots$$

von

$$a_1,\ \underline{a_2},\ \underline{a_3},\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \underline{a_7},\ a_8,\ a_9,\ ,a_{10},\ ,\underline{a_{11}},\ \dots$$

Allgemein ist das $k$-te Glied der Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ das $n_k$-te Glied der Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Offenbar gilt: Ist eine Folge konvergent, so konvergiert jede ihrer Teilfolgen (gegen denselben Grenzwert). Umgekehrt haben wir:

**Satz 2.18.** *Ist eine Teilfolge einer Cauchyfolge konvergent, so konvergiert bereits die Cauchyfolge.*

*Beweis.* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sei eine Cauchyfolge und $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N$, so dass $|a_m - a_n| \le \epsilon/2$ für alle $m,\ n \ge N$. Zudem gibt es ein $K \ge N$ mit $|a - a_{n_k}| \le \epsilon/2$ für alle $k \ge K$. Da jedoch $n_k \ge k$, so gilt für alle $k \ge K$:

$$|a - a_k| \le |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_k| \le \epsilon.$$

Folglich konvergiert $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegen $a$. □

Wir kommen jetzt zum Beweis des angekündigten Satzes. Wir benötigen dazu folgendes Lemma:

**Lemma 2.19.** *Jede Folge reeller Zahlen besitzt eine monotone Teilfolge.*

*Beweis.* Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen. Es sei $P = \{n \in \mathbb{N} \mid a_m > a_n \text{ für alle } m > n\}$. Ist $P$ eine unendliche Menge, $P = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{n_k\}$ mit $n_k < n_{k+1}$ für alle $k$, so ist die Folge $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ strikt monoton wachsend. Ist $P$ hingegen endlich, so sei $n_1 > \sup P$. Wegen $n_1 \notin P$ gibt es ein $n_2 > n_1$ mit $a_{n2} \le a_{n1}$. Wegen $n_2 \notin P$ gibt es ein $n_3 > n_2$ mit $a_{n3} \le a_{n2}$. Indem man so fortfährt, erhält man eine monoton fallende Folge $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. □

Als eine unmittelbare Folgerung daraus und dem Vollständigkeitsaxiom erhalten wir den wichtigen Satz von Bolzano-Weierstrass:

**Theorem 2.20** (Bolzano-Weierstrass)**.** *Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.*

Ist insbesondere $\{a_n\} \subset [a,b]$ (diese Schreibweise bedeutet, dass $a_n \in [a,b]$ für alle $n$), so enthält diese Folge eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}$, die gegen einen Grenzwert in $[a,b]$ konvergiert.

**Theorem 2.21.** *Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

*Beweis.* ($\Rightarrow$) Diese Richtung hatten wir bereits gezeigt.

($\Leftarrow$) Cauchyfolgen sind beschränkt. Dann benutzen wir den Satz von Bolzano-Weierstrass und die Aussage, dass eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge enthält, konvergiert.

$\square$

## 2.3 Die Limesmenge einer Folge, oberer und unterer Grenzwert

Eine alternative Schreibweise für $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ist $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder auch $a_n \to a$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ist die Menge der *erweiterten reellen Zahlen*. Wir setzen $(\mathbb{R}, \leq)$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ fort, indem wir $-\infty \leq x \leq \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ setzen (d. h. es gilt $\inf \mathbb{R} = -\infty$, $\sup \mathbb{R} = \infty$).
Insbesondere: Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum und ein Infimum in den erweiterten reellen Zahlen.

**Definition 2.22.** $a \in \mathbb{R}$ heißt (eigentlicher) *Häufungswert* einer Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, falls $\forall \epsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N$: $|a - a_n| \leq \epsilon$. (Beachte die im Vergleich mit der Definition eines Grenzwertes von $\forall\ \exists\ \forall$ zu $\forall\ \forall\ \exists$ geänderte Quantisierung.) Analog werden $\pm\infty$ als *uneigentliche Häufungswerte* eingeführt.

**Lemma 2.23.** *$a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist Häufungswert der Folge $\{a_n\}$ genau dann, wenn eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ existiert.*

*Beweis.* ($\Rightarrow$) Sei zuerst $a \in \mathbb{R}$. Wählen eine Folge $\{\epsilon_k\} \subset \mathbb{R}_+$ $(= (0,\infty))$ mit $\lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 0$ und für jedes $k$ ein $n_k$ mit $n_k > n_{k-1}$ für $k \geq 2$, so dass $|a - a_{n_k}| \leq \epsilon_k$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Die Fälle $a = \pm\infty$ sind analog.

($\Leftarrow$) Dies ist offensichtlich.

$\square$

**Definition 2.24.** (a) Die Limesmenge $\mathrm{Lim}\{a_n\}$ ist die Menge aller Häufungswerte der Folge $\{a_n\}$; $\mathrm{Lim}\{a_n\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

(b) Der *obere Grenzwert* $\limsup_n a_n$ ist der größte Häufungswert von $\{a_n\}$; $\limsup_n a_n = \sup \mathrm{Lim}\{a_n\}$. Der *untere Grenzwert* $\liminf_n a_n$ ist der kleinste Häufungswert von $\{a_n\}$; $\liminf_n a_n = \inf \mathrm{Lim}\{a_n\}$. (Alternative Schreibweisen sind $\overline{\lim}_n a_n$ bzw. $\underline{\lim}_n a_n$.)

*Beispiel* 2.25. Für die Folge

$$1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -2,\ 0,\ 1,\ -3,\ 0,\ 1,\ -4,\ 0,\ 1,\ -5,\ 0,\ \ldots$$

gilt $\mathrm{Lim}\{a_n\} = \{-\infty,\ 0,\ 1\}$, $\liminf_n a_n = -\infty$, $\limsup_n a_n = 1$.
Offenbar gilt $\liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n$ und $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert genau dann, wenn $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n$. In diesem Fall ist $\lim_{n\to\infty} a_n$ gleich diesem gemeinsamen Wert.
Weiterhin ist $\liminf_n a_n > -\infty$ genau dann, wenn die Folge $\{a_n\}$ nach unten beschränkt ist.
Wir haben die folgende Charakterisierung:

**Lemma 2.26.** $\limsup_n a_n = \inf_m \sup_{n\geq m} a_n$*,* $\liminf_n a_n = \sup_m \inf_{n\geq m} a_n$*.*

*Beweis* (für $\limsup_n a_n$). Falls die Folge $\{a_n\}$ nicht nach oben beschränkt ist, so ist $\sup_{n\geq m} a_n = \infty$ für alle $n$, und wir sind fertig.
Sei also $\{a_n\}$ nach oben beschränkt. Dann ist $\{b_m\}$ mit $b_m = \sup_{n\geq m} a_n$ eine monoton fallende Folge und $b = \inf_m b_m = \lim_{m\to\infty} b_m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ existiert. Sei $\{a_{n_k}\}$ eine konvergente Teilfolge von $\{a_n\}$; $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Dann gilt $b_{n_k} \geq a_{n_k}$ für alle $k$ und $b = \lim_{k\to\infty} b_{n_k} \geq \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Somit dominiert $b$ jeden Häufungswert von $\{a_n\}$.
Umgekehrt ist $b$ Häufungswert, denn für eine gegebene Folge $\{\epsilon_k\} \subset \mathbb{R}_+$ mit $\lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 0$ finden wir gemäß der Definition der $b_m$ eine strikt monotone Folge $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ mit $0 \leq b_{n_k} - a_{n_k} \leq \epsilon_k$ für alle $k$, also $\lim_{k\to\infty} a_{nk} = b$. □

## 2.4 Die Topologie von $\mathbb{R}$

**Definition 2.27.** Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *offen*, falls $\forall a \in A\ \exists \epsilon > 0$ mit $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subseteq A$. Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossen*, falls $\mathbb{R} \setminus D$ eine offene Menge ist.

*Beispiel* 2.28. (a) $\emptyset$, $\mathbb{R}$ sind offen und abgeschlossen.

(b) Offene Intervalle $(a, b)$, $(a, \infty)$, $(-\infty, b)$ sind offen.

(c) Abgeschlossene Intervalle $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ sind abgeschlossen.

**Satz 2.29.** (a) *Beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.*

(b) *Endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

*Beweis.* (a) Folgt direkt aus der Definition.

(b) Seien $D_i$ für $i \in I$ abgeschlossene Mengen. Dann ist $\mathbb{R} \setminus \bigcap_{i\in I} D_i = \bigcup_{i\in I} (\mathbb{R} \setminus D_i)$ offen, also ist $\bigcap_{i\in I} D_i$ abgeschlossen. Das Argument für endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen ist ähnlich.

□

Die Struktur offener Mengen in $\mathbb{R}$ ist recht einfach, während die Struktur abgeschlossener Mengen in $\mathbb{R}$ kompliziert sein kann.

**Satz 2.30.** *Jede offene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist die Vereinigung abzählbar vieler, disjunkter offener Intervalle.*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass $A$ die Vereinigung disjunkter offener Intervalle ist. Da jedes offene Intervall eine rationale Zahl enthält[1] und die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist, folgt dann, dass diese Vereinigung abzählbar ist.
Für $x \in A$ sei $A_x$ das *größte* offene Intervall, das $x$ enthält und ganz in $A$ enthalten ist. $A_x$ ist die Vereinigung aller offenen Intervalle in $A$, die $x$ enthalten. Da $A$ offen ist, ist $A_x$ nichtleer.
Gilt $A_x \cap A_y \neq \emptyset$ für $x,\ y \in A$, so ist $A_x \cup A_y$ ein offenes Intervall in $A$, das $x$ enthält, folglich $A_x \cup A_y \subseteq A_x$ und $A_y \subseteq A_x$. Analog $A_x \subseteq A_y$ und damit $A_x = A_y$.
Somit liefert $A = \bigcup_{x \in A} A_x$ die gesuchte disjunkte Vereinigung. □

**Definition 2.31.** Es sei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Jede Menge $U$, für die es eine offene Menge $A$ mit $a \in A \subseteq U$ gibt, heißt eine *Umgebung* von $a$.

(b) Eine *punktierte Umgebung* von $a$ ist eine Menge der Form $U \setminus \{a\}$, wobei $U$ eine Umgebung von $a$ ist.

(c) Eine (punktierte) Umgebung von $\infty$ ist eine Menge $U$, die ein Intervall der Form $(c, \infty)$ enthält. Analog für $-\infty$.

Als Nächstes diskutieren wir abgeschlossene Mengen.

**Definition 2.32.** Es sei $B \subseteq \mathbb{R}$.

(a) $b \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* von $B$, falls $B \cap V \neq \emptyset$ für jede punktierte Umgebung $V$ von $b$.

(b) $b \in B$ heißt *isolierter Punkt* von $B$, falls $b$ kein Häufungspunkt von $B$ ist.

*Beispiel* 2.33. (a) $\mathbb{Q}$ hat keine isolierten Punkte. Jede reelle Zahl ist Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$.

(b) $\mathbb{Z}$ besteht nur aus isolierten Punkten und hat keine Häufungspunkte.

(c) $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ besteht nur aus isolierten Punkten und 0 ist einziger Häufungspunkt.

In Anlehnung an die Situation für Folgen bezeichnen wir $\infty$ als uneigentlichen Häufungspunkt von $B$, falls $B$ nicht nach oben beschränkt ist, und $-\infty$ als uneigentlichen Häufungspunkt von $B$, falls $B$ nicht nach unten beschränkt ist.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}$. Dann gibt es eine *kleinste* abgeschlossene Menge $\overline{B}$, die $B$ enthält. $\overline{B}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die $B$ enthalten und heißt der *Abschluss* von $B$.

**Satz 2.34.** (a) *Die Menge $B'$ aller Häufungspunkte von $B$ ist abgeschlossen.*

(b) *$\overline{B} = B \cup B'$. Insbesondere ist $B$ genau dann abgeschlossen, wenn $B' \subseteq B$.*

[1] Das folgt bespielsweise aus der Dezimaldarstellung reeller Zahlen, wo wir zeigten, dass jede reelle Zahl beliebig genau durch rationale Zahlen approximiert werden kann.

*Beweis.* (1) Wir zeigen zuerst, dass $B$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $B' \subseteq B$.

($\Rightarrow$) Sei $B$ abgeschlossen, d. h. $\mathbb{R} \setminus B$ ist offen. Sei $a \in \mathbb{R} \setminus B$. Dann ist $U = \mathbb{R} \setminus B$ eine Umgebung von $a$ mit $U \cap B = \emptyset$ und $a$ ist kein Häufungspunkt von $B$. Folglich $B' \subseteq B$.

($\Leftarrow$) Sei $B' \subseteq B$ und $a \in \mathbb{R} \setminus B$. Dann ist $a$ kein Häufungspunkt von $B$, d. h. es existiert eine Umgebung $U$ von $a$ mit $U \cap B = \emptyset$ bzw. $U \subseteq \mathbb{R} \setminus B$. Also ist $\mathbb{R} \setminus B$ offen.

(2) Wir zeigen als Nächstes (a). Sei $b$ ein Häufungspunkt von $B'$, d. h. in jeder offenen punktierten Umgebung $U \setminus \{b\}$ von $b$ liegt ein Punkt $d$ aus $B'$. Da $d$ Häufungspunkt von $B$ und $U \setminus \{b\}$ Umgebung von $d$ ist, gilt $(U \setminus \{b\}) \cap B \neq \emptyset$. Also $B'' = (B')' \subseteq B'$, und $B'$ ist abgeschlossen.

(3) Den Beweis, dass $B \cup B'$ abgeschlossen und damit gleich $\overline{B}$ ist, überlasse ich Ihnen.

□

**Definition 2.35.** Es seien $A \subseteq B$ Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann heißt $A$ *dicht* in $B$, falls $\overline{A} \supseteq B$.

Beispielsweise sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dicht in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

## 2.5 Grenzwerte von Funktionen

Eine *reelle Funktion* ist eine Abbildung einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

**Definition 2.36.** Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $b$ ein (eigentlicher oder uneigentlicher) Häufungspunkt von $I$, und $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann hat $f$ den Grenzwert $L$ an der Stelle $b$, falls für jede Umgebung $V$ von $L$ eine punktierte Umgebung $U \setminus \{b\}$ von $b$ existiert mit der Eigenschaft, dass

$$f\left(\left(U \setminus \{b\}\right) \cap I\right) \subseteq V.$$

Eine äquivalente Bedingung ist: Für jede Folge $\{x_n\} \subset I \setminus \{b\}$ mit $x_n \to b$ für $n \to \infty$ gilt $f(x_n) \to L$ für $n \to \infty$.
Man schreibt: $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \in I}} f(x) = L$.

*Bemerkung.* Sind $b$, $L$ endlich, so bedeutet obige Bedingung:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\colon\ \ |x - b| \leq \delta,\ x \neq b \implies |f(x) - L| \leq \epsilon.$$

*Beispiel* 2.37. (a) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

(b) Sei $f(x) = x + 1$ für $x \neq 1$, $f(1) = 1$. Dann $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$, obwohl $f(1) \neq 2$ ist.

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$.

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ existiert nicht.

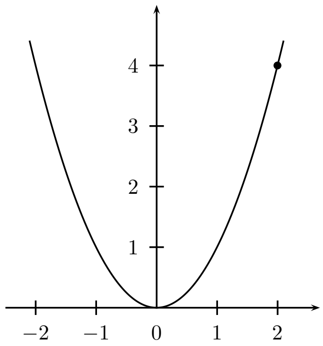


Abbildung 2.2: Graph der Funktion $f(x) = x^2$ mit $f(2) = 4$

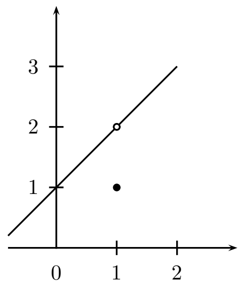


Abbildung 2.3: Graph der Fkt. $f(x) = x + 1$ für $x \neq 1$, $f(1) = 1$

Ist $b$ endlich und $I$ derart, dass $(I \setminus \{b\}) \cap (b - \delta, b + \delta) = (b, b + \delta)$ für ein $\delta > 0$, so schreibt man $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \in I}} f(x)$ auch als $f(b + 0) = \lim\limits_{x \to b+0} f(x)$ (*rechtsseitiger Grenzwert*). Analog ist $f(b - 0) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ (*linksseitiger Grenzwert*) erklärt. Es ist möglich, dass $\lim\limits_{x \to b+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$.

*Beispiel* 2.38. Sei $H$ die Heaviside-Funktion,

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Dann $\lim\limits_{x \to +0} H(x) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x \to -0} H(x)$.

Aussagen über die Grenzwerte von Folgen übertragen sich direkt auf Aussagen über die Grenzwerte von Funktionen.

**Satz 2.39.** *$I \subseteq \mathbb{R}$ habe den (eigentlichen oder uneigentlichen) Häufungspunkt $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Existieren $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \in I}} f(x)$ und $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \in I}} g(x)$, so existieren auch die folgenden Grenzwerte, vorausgesetzt der Wert auf der rechten Seite ist wohldefiniert (die Werte $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, usw. sind nicht wohldefiniert):*

(a) $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \in I}} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \in I}} f(x) + \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \in I}} g(x)$.

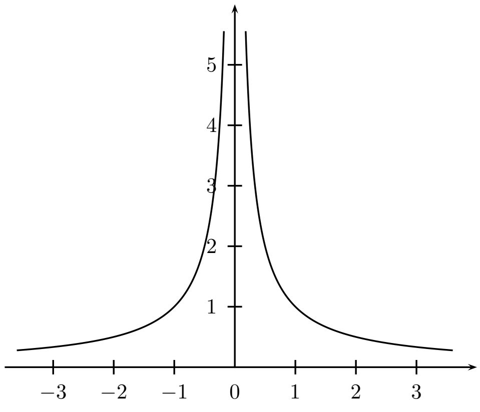


Abbildung 2.4: Graph der Funktion $f(x) = 1/|x|$

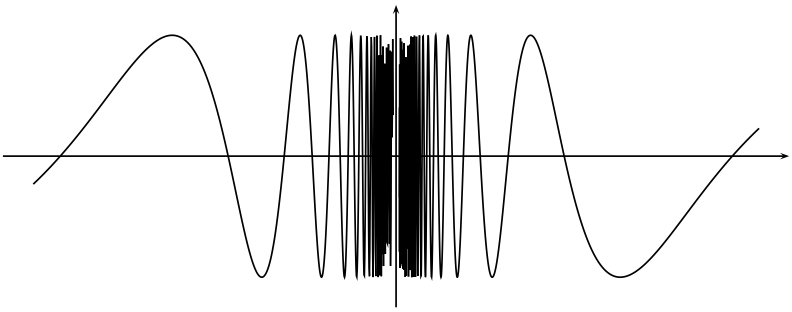

Abbildung 2.5: Graph der Funktion $f(x) = \sin(1/x)$

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in I}} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in I}} f(x) \cdot \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in I}} g(x)$.

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in I}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in I}} f(x) \Big/ \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in I}} g(x)$.

*Beweis.* Folgt aus den entsprechenden Aussagen für Folgen. Ist beispielsweise $\{x_n\} \subset I \setminus \{b\}$, $x_n \to b$ für $n \to \infty$, so $\lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) + \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$, vorausgesetzt natürlich, dass der Wert auf der rechten Seite wohldefiniert ist. □

*Beispiel* 2.40. $p(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$ sei ein Polynom $m$-ten Grades, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$. Dann $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(c)$.
Ist $q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$ ein weiteres Polynom mit $q(c) \neq 0$, so ist $\lim\limits_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$.

**Satz 2.41.** *Seien $I$, $b$ wie oben, $f$, $g$, $h\colon I \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für alle $x \in I$. Existieren $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in I}} g(x)$ und $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in I}} h(x)$ und sind diese gleich $L$, so existiert auch $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in I}} f(x)$ und ist gleich $L$.*

*Beweis.* Sei $\{x_n\} \subset I$, $x_n \to b$ für $n \to \infty$. Dann $g(x_n) \le f(x_n) \le h(x_n)$ für alle $n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = L$, also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$. □

**Satz 2.42.** *Sei die Funktion* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *monoton wachsend (fallend), d. h.* $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x < y \Longrightarrow f(x) \le f(y)$ $(f(x) \ge f(y))$. *Dann* $\forall c \in (a,b)$ *existieren* $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)$ *und* $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)$.

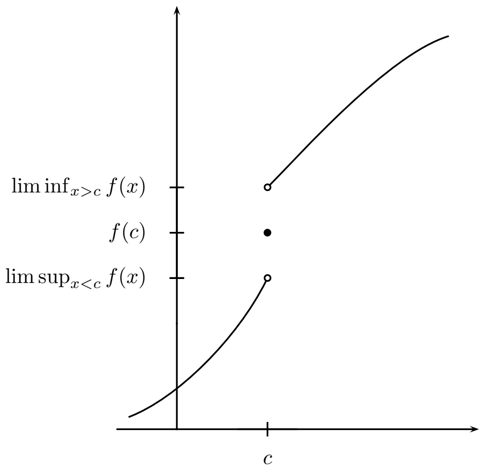


Abbildung 2.6: Zum Beweis von Satz 2.42

*Beweis.* O. B. d. A. sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, $c \in (a,b)$. Die Menge $\{f(x) \mid a < x < c\}$ ist nach oben beschränkt (beispielsweise durch $f(c)$), also existiert $L = \sup_{a<x<c} f(x)$. Dann ist $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = L$, da offenbar für jede Folge $\{x_n\} \subset (a,c)$ mit $x_n \to c$ für $n \to \infty$ aufgrund der Monotonie $f(x_n) \to L$ für $n \to \infty$ gilt.
Analog erhält man $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = \inf_{c<x<b} f(x)$. □

## 2.6 Stetigkeit

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$.

**Definition 2.43.** Die Funktion $f$ heißt *stetig* an *der Stelle* $c \in I$, falls $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x\in I}} f(x)$ existiert und $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x\in I}} f(x) = f(c)$.
$f$ heißt *stetig in* $I$, falls $f$ an jeder Stelle in $I$ stetig ist.

Ist $c$ ein Randpunkt von $I$, z. B. $I = [a,b)$ und $c = a$, so bedeutet diese Bedingung, dass $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ (einseitiger Grenzwert).
Beachte, dass es zwei Möglichkeiten gibt, um die Stetigkeit an einer Stelle zu formulieren:

1. $\{x_n\} \subset I$, $x_n \to c$ für $n \to \infty$ impliziert $f(x_n) \to f(c)$ für $n \to \infty$.

2. $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\colon \quad |x - c| \le \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| \le \epsilon$.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 2.39 ist:

**Satz 2.44.** *Seien $f$, $g\colon I \to \mathbb{R}$ an der Stelle $c \in I$ stetig. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ und $f/g$ an der Stelle $c$ stetig, Letzteres allerdings nur, wenn $g(c) \neq 0$ ($f/g$ muss nicht auf ganz $I$ definiert sein).*

*Beispiel* 2.45. Polynome $p(x)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, rationale Funktionen $\frac{p(x)}{q(x)}$ an Stellen $x$ mit $q(x) \neq 0$.

Die Komposition (Nacheinanderausführung) zweier stetiger Funktionen ist wieder stetig.

**Satz 2.46.** *Sei $f\colon I \to J$ mit einem Intervall $J$, $g\colon J \to \mathbb{R}$. Ist $f$ an der Stelle $c \in I$ und $g$ an der Stelle $f(c)$ stetig, so ist $g \circ f$ an der Stelle $c$ stetig.*

*Beweis.* Sei $\{x_n\} \subset I$, $x_n \to c$ für $n \to \infty$. Dann $f(x_n) \to f(c)$ für $n \to \infty$ wegen der Stetigkeit von $f$ an der Stelle $c$ und $g(f(x_n)) \to g(f(c))$ für $n \to \infty$ wegen der Stetigkeit von $g$ an der Stelle $f(c)$. $\square$

Wir kommen jetzt zu unserem nächsten wichtigen Ergebnis:

**Satz 2.47** (Zwischenwertsatz)**.** *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $L$ ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann existiert ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = L$.*

*Beweis.* O. B. d. A. sei $f(a) \le f(b)$. Wir konstruieren eine monoton wachsende Folge $\{a_n\}$ und eine monoton fallende Folge $\{b_n\}$ mit $a_1 = a$, $b_1 = b$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ und $f(a_n) \le L \le f(b_n)$ für alle $n$: Wir setzen $a_1 = a$ und $b_1 = b$. Seien $a_n$, $b_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits konstruiert und sei $d = \frac{a_n + b_n}{2}$. Gilt $f(d) \le L$, so setzen wir $a_{n+1} = d$, $b_{n+1} = b_n$, andernfalls setzen wir $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = d$.
Sei nun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. Dann gilt $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \le L$ und $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \ge L$, daher $f(c) = L$. $\square$

**Satz 2.48.** *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.*

*Beweis.* Ein Intervall $I$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass mit zwei Punkten $a,\ b \in I,\ a < b$, auch alle Punkte dazwischen in $I$ enthalten sind, also $[a, b] \subseteq I$. Benutze dann den Zwischenwertsatz. $\square$

*Bemerkung.* Die Intervalle sind nicht notwendig vom selben Typ:

- $f(x) = 1 + 3x - x^3$, $I = (-1,6, 1,6) \Rightarrow f(I) = [-1, 3]$.
- $f(x) = 1/x$, $I = (0, 1) \Rightarrow f(I) = (1, \infty)$.

**Satz 2.49** (Extremwertsatz)**.** *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren $c$ und $d$ in $[a, b]$ mit $f(c) \le f(x) \le f(d)$ für alle $x \in [a, b]$.*

Das bedeutet, dass jede auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall definierte stetige Funktion ein Maximum und ein Minimum besitzt beziehungsweise dass die Bilder abgeschlossener, beschränkter Intervalle unter stetigen Abbildungen abgeschlossen und beschränkt sind.

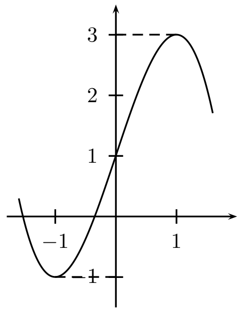


Abbildung 2.7: Graph der Funktion $f(x) = 1 + 3x - x^3$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass $f$ auf $[a, b]$ beschränkt ist. Angenommen, das wäre nicht der Fall. Dann gäbe es eine Folge $\{x_n\} \subset [a, b]$ mit $|f(x_n)| \geq n$ für alle $n$. Gemäß dem Satz von Bolzano–Weierstrass wählen wir eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to z$ für $k \to \infty$. Doch dann $f(x_{n_k}) \to f(z)$ für $k \to \infty$ wegen der Stetigkeit von $f$, ein Widerspruch zu $|f(x_{n_k})| \geq n_k$ für alle $k$.
Da $f$ beschränkt ist, existieren $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ und $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Wir zeigen, dass es eine Stelle $d \in [a, b]$ mit $f(d) = M$ gibt. Der Beweis der Existenz von $c$ ist gänzlich analog. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x_n \in [a, b]$ mit $M - 1/n \leq f(x_n) \leq M$. Gemäß dem Satz von Bolzano–Weierstrass gibt es eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to d$ für $k \to \infty$. Die Stetigkeit von $f$ an der Stelle $d$ ergibt dann

$$f(d) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M,$$

also nimmt $f$ an der Stelle $d$ das Maximum $M$ an. □

*Bemerkung.* Keine der im Satz gemachten Voraussetzungen darf fortgelassen werden:

(a) $f(x) = x^2$ hat kein Maximum auf dem Intervall $[-1, 2)$.

(b) $g(x) = 1/x$ für $x \neq 0$, $g(0) = 0$ hat kein Maximum auf dem Intervall $[0, 1]$.

(c) $h(x) = x^3$ hat kein Maximum auf dem Intervall $[0, \infty)$.

**Klassifikation von Singularitäten**

Die folgende Klassifikation ist nicht erschöpfend. Später werden wir weitere Typen von Singularitäten kennenlernen.
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $c \in I$.

- *Hebbare Singularitäten*: $f$ sei auf $I \setminus \{c\}$ oder auf $I$ definiert und es gelte $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = \lim\limits_{x\to c+0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, aber $f(c) \neq L$, falls $f(c)$ definiert ist. Man erhält eine an $c$ stetige Funktion $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$, indem man

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \in I \setminus \{c\}, \\ L, & \text{für } x = c \end{cases}$$

setzt.

- *Sprünge*: $f$ sei auf $I\setminus\{c\}$ oder auf $I$ definiert und es gelte, dass $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)$ in $\mathbb{R}$ existieren, jedoch verschieden sind. Dann hat $f$ einen Sprung der *Höhe* $f(c+0)-f(c-0)$ an der Stelle $c$.

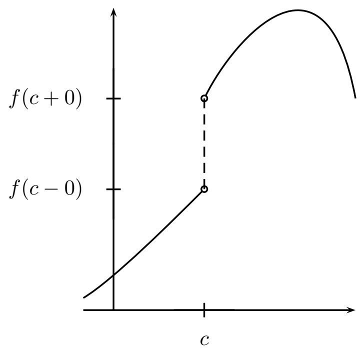


Abbildung 2.8: Ein Sprung an $c$

**Satz 2.50.** *Eine monotone Funktion $f\colon I\to\mathbb{R}$, $I\subseteq\mathbb{R}$ ein offenes Intervall, hat eine abzählbare Menge von Unstetigkeitsstellen, und jede Unstetigkeit ist ein Sprung.*

*Beweis.* Da wir $I$ als abzählbare Vereinigung beschränkter abgeschlossener Intervalle darstellen können, genügt es den Fall $I=(a,b)$ zu betrachten, wobei wir annehmen dürfen, dass $f(a+0)$ und $f(b-0)$ endlich sind.
Sei $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ monoton wachsend. Wir hatten bereits gesehen, dass $f(c-0)$ und $f(c+0)$ für jedes $c\in(a,b)$ existieren; $f(c-0)\le f(c)\le f(c+0)$. Damit ist $f$ genau dann an der Stelle $c$ stetig, wenn $f(c-0)=f(c+0)$ gilt.
Für jedes $n\in\mathbb{N}$ sei $D_n=\left\{x\in(a,b)\;\middle|\;f(x+0)-f(x-0)\ge\frac{1}{n}\right\}$. Dann ist $D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von $f$.
Es genügt zu zeigen, dass jedes $D_n$ endlich ist.
Genauer gilt: Sei $p$ die größte nichtnegative ganze Zahl mit $\frac{p}{n}\le f(b-0)-f(a+0)$. Dann enthält $D_n$ höchstens $p$ Elemente.
Angenommen, $x_1,\ x_2,\dots,\ x_{p+1}\in D_n$ und $x_1<x_2<\cdots<x_{p+1}$. Wir wählen Zahlen $y_0,\ y_1,\dots,\ y_{p+1}$ mit

$$a<y_0<x_1<y_1<x_2<y_2<\cdots<x_{p+1}<y_{p+1}<b.$$

Dann

$$\begin{aligned}\frac{p+1}{n}&\le\sum_{i=1}^{p+1}\left(f(x_i+0)-f(x_i-0)\right)\le\sum_{i=1}^{p+1}\left(f(y_i)-f(y_{i-1})\right)\\&=f(y_{p+1})-f(y_0)\le f(b-0)-f(a+0),\end{aligned}$$

ein Widerspruch. Folglich hat $D_n$ tatsächlich höchstens $p$ Elemente und ist insbesondere endlich. $\square$

*Erinnerung* (Definition der inversen Abbildung). Seien $X, Y$ nichtleere Mengen, $f\colon X \to Y$ sei bijektiv. Dann gibt es genau eine Abbildung $f^{-1}\colon Y \to X$ mit $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

*Beispiel* 2.51.

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - 3x \Longrightarrow f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = (4-x)/3$.

  Das Vorgehen, $f^{-1}$ zu bestimmen, ist wie folgt: Die Gleichung $y = 4 - 3x$ wird nach $x$ aufgelöst, $x = (4-y)\,3$, dann sind die $x$- und die $y$-Variable vertauschen.

  *Graphisch:*

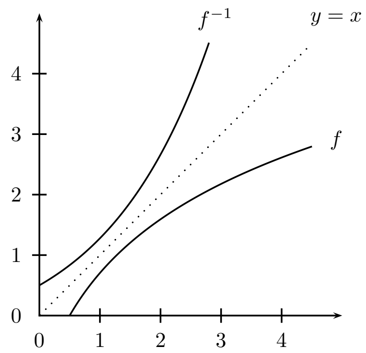


Abbildung 2.9: Eine Funktion $f$ und ihre Umkehrfunktion $f^{-1}$

  Man erhält den Graphen der inversen Funktion $f^{-1}$ durch Spiegelung des Graphen der Funktion an der Diagonalen $y = x$.

- $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $g(x) = x^2 \Longrightarrow g^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Die beiden obigen Beispiele gelten allgemein:

**Satz 2.52.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei strikt monoton und stetig. Dann ist $J = f(I)$ ein Intervall, die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon J \to \mathbb{R}$ existiert und ist strikt monoton und stetig.*

*Beweis.* $f$ sei strikt monoton wachsend. Da $f$ stetig ist, wissen wir bereits, dass $J = f(I)$ ein Intervall ist. $f$ ist bijektiv von $I$ auf $J$, denn $x, y \in I$, $x < y$ impliziert $f(x) < f(y)$. Also folgt, dass $f^{-1}\colon J \to I \subseteq \mathbb{R}$ existiert. Weiterhin ist $f^{-1}$ strikt monoton wachsend, denn würde für $u, v \in J$, $u < v$, $f^{-1}(u) \geq f^{-1}(v)$ gelten, so wäre $u = f\bigl(f^{-1}(u)\bigr) \geq f\bigl(f^{-1}(v)\bigr) = v$, ein Widerspruch.
Schließlich ist $f^{-1}$ stetig, denn $f^{-1}(J) = I$ ist ein Intervall und damit hat $f^{-1}$ keine Sprünge. $\square$

## 2.7 Die Topologie von Teilmengen von $\mathbb{R}$

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge.

**Definition 2.53.** $A \subseteq I$ heißt (*relativ*) *offen in* $I$, falls es eine offene Menge $U$ in $\mathbb{R}$ gibt, so dass $A = I \cap U$. $D \subseteq I$ heißt (*relativ*) *abgeschlossen in* $I$, falls es eine abgeschlossene Menge $V$ in $\mathbb{R}$ gibt, so dass $D = I \cap V$.

*Beispiel* 2.54. Sei $I = [1, 3)$. Dann ist die Menge $A = [1, 2) = I \cap (0, 2)$ offen in $I$, aber *nicht* in $\mathbb{R}$. Die Menge $B = [2, 3) = I \cap [2, \infty)$ ist abgeschlossen in $I$, aber *nicht* in $\mathbb{R}$.

Die grundlegenden Tatsachen über offene und abgeschlossene Mengen bleiben gültig.

**Satz 2.55.** (i) *$\emptyset$, $I$ sind offen und abgeschlossen in $I$.*

(ii) *$A \subseteq I$ ist genau dann offen in $I$, wenn es für jedes $a \in A$ ein offenes Intervall $J$ gibt mit $a \in J$ und $I \cap J \subseteq A$.*

(iii) *$A \subseteq I$ ist genau dann offen in $I$, wenn $I \setminus A$ abgeschlossen in $I$ ist.*

(iv) *Beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen in $I$ sind offen in $I$, endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen in $I$ sind abgeschlossen in $I$.*

*Beweis.* Wir zeigen (ii), den Rest des Beweis überlasse ich Ihnen.
($\Longrightarrow$) Sei $A \subseteq I$ offen in $I$, $a \in I$. Dann gibt es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $A = I \cap U$. Sei $J \subseteq U$ ein offenes Intervall mit $a \in J$. Dann $I \cap J \subseteq I \cap U = A$.
($\Longleftarrow$) Wir wählen zu jedem $a$ in $A$ ein offenes Intervall $J_a$ mit $a \in J_a$ und $I \cap J_a \subseteq A$. Sei $U = \bigcup_{a \in A} J_a \supseteq A$. Dann ist $U$ offen sowie $I \cap U = \bigcup_{a \in A} \underbrace{(I \cap J_a)}_{\subseteq A} \subseteq A$, also $I \cap U = A$. $\square$

Man kann die Eigenschaft (iii) dazu benutzen, um den Abschluss $\overline{B}^I$ einer Menge $B \subseteq I$ relativ zu $I$ als die kleinste in $I$ abgeschlossene Menge, die $B$ enthält, einzuführen. Es ist leicht zu sehen, dass $\overline{B}^I$ gleich dem Durchschnitt aller in $I$ abgeschlossenen, $B$ enthaltender Mengen ist und dass $\overline{B}^I = I \cap \overline{B}$ gilt.

Bislang hatten wir Stetigkeit einer Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ lokal charakterisiert. Jetzt lösen wir uns von der Fixierung eines bestimmten Punktes in $I$.

*Erinnerung.* Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $c \in I$, falls es für jede Umgebungen $V$ von $f(c)$ eine Umgebung $U$ von $c$ gibt mit $f(I \cap U) \subseteq V$.
Äquivalent: $\forall \{x_n\} \subset I\colon x_n \to c \implies f(x_n) \to f(c)$.
$f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn $f$ in jedem Punkt von $I$ stetig ist.

**Satz 2.56.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$f$ ist stetig.*

(ii) *$f^{-1}(U)$ ist offen in $I$ für alle offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}$.*

(iii) *$f^{-1}(V)$ ist abgeschlossen in $I$ für alle abgeschlossenen Mengen $V \subseteq \mathbb{R}$.*

(iv) *Für alle $B \subseteq I$ gilt: $f(I \cap \overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$.*

Hierbei ist $f^{-1}(U) = \{x \in I \mid f(x) \in U\}$ die Menge der Urbilder unter $f$ von Elementen in $U$.

*Beweis.* Wir zeigen (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv).

- (i)$\Rightarrow$(ii): Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $a \in f^{-1}(U)$. Dann $f(a) \in U$ und $U$ ist Umgebung von $f(a)$. Also existiert eine Umgebung $D$ von $a$ mit $f(I \cap D) \subseteq U$, also $I \cap D \subseteq f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(U)$ ist offen relativ zu $I$.

- (ii)$\Rightarrow$(iii): Sei $V \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Dann ist $I \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus V)$ offen in $I$, also ist $f^{-1}(V)$ abgeschlossen in $I$.

- (iii)$\Rightarrow$(iv): $B \subseteq I$ impliziert $B \subseteq f^{-1}\big(f(B)\big) \subseteq f^{-1}\big(\overline{f(B)}\big)$. Da $f^{-1}\big(\overline{f(B)}\big)$ abgeschlossen in $I$, $I \cap \overline{B} \subseteq f^{-1}\big(\overline{f(B)}\big)$ und $f(I \cap \overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$.

- (iv)$\Rightarrow$(i): Sei $a \in I$ und $U$ eine offene Umgebung von $f(a)$. Dann gilt

$$f\big(I \cap \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus U)}\big) \subseteq \overline{f\big(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus U)\big)} \subseteq \overline{\mathbb{R} \setminus U} = \mathbb{R} \setminus U,$$

d. h. $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus U) \subseteq I \cap \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus U)} \subseteq f^{-1}(\mathbb{R} \setminus U)$. Also ist $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus U) = I \cap \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus U)}$ abgeschlossen in $I$ und $f^{-1}(U)$ ist offen in $I$, enthält $a$ und genügt $f\big(f^{-1}(U)\big) \subseteq U$.

$\square$

**Satz 2.57** (Tietzes Fortsetzungssatz)**.** *Sei $B \subset U \subseteq \mathbb{R}$, $B$ abgeschlossen, $U$ offen. Weiter sei $f\colon B \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $f$, d. h. $F(x) = f(x)$ für alle $x \in B$, so dass $F(x) = 0$ für alle $x \notin U$.*

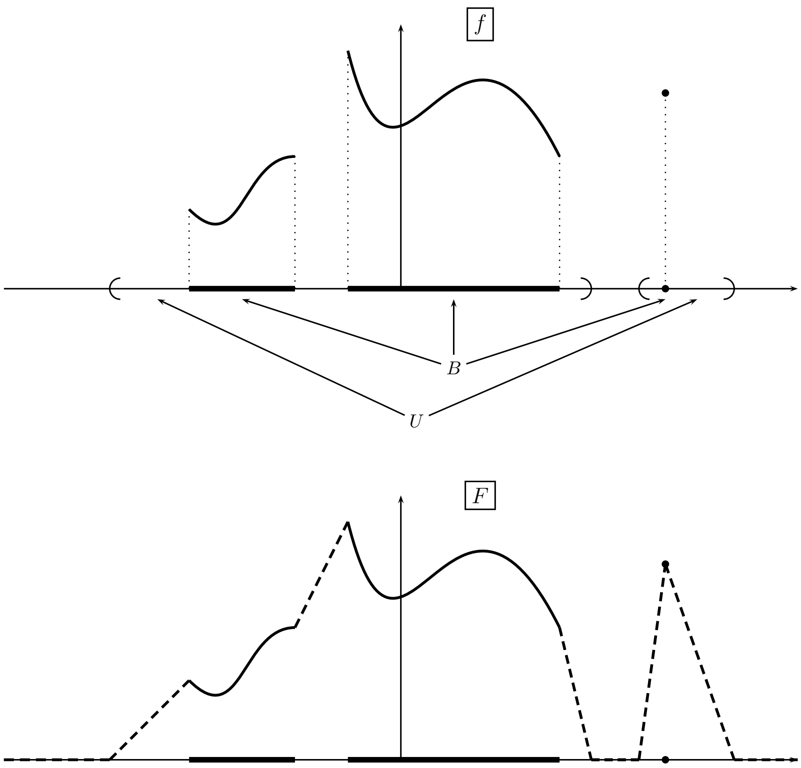


Abbildung 2.10: Konstruktion einer stetigen linearen Fortsetzung

*Beweis.* Indem wir $F(x) = 0$ auf $\mathbb{R} \setminus U$ setzen, dürfen wir $U = \mathbb{R}$ annehmen. (Hierbei ersetzen wir $B$ durch $B \cup (\mathbb{R} \setminus U)$.)
Weiterhin dürfen wir annehmen, dass $B$ weder nach oben noch nach unten beschränkt ist. Andernfalls setzen wir $F(x) = f(\max B)$ für $x > \max B$ bzw. $F(x) = f(\min B)$ für $x < \min B$.
Sei $\mathbb{R} \setminus B = \bigcup_n (a_n, b_n)$ die Darstellung der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus B$ als abzählbare disjunkte Vereinigung beschränkter offener Intervalle. Wir definieren dann

$$F(x) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}(x - a_n) + f(a_n), \quad a_n < x < b_n.$$

Die Funktion $F(x)$ ist also linear auf dem Intervall $(a_n, b_n)$ und ihr Graph verbindet die Punkte $(a_n, f(a_n))$ und $(b_n, f(b_n))$.
Wir zeigen, dass $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist. Dies ist klar auf $\mathbb{R} \setminus B = \bigcup_n (a_n, b_n)$ und an allen isolierten Stellen von $B$. Sei $c$ also ein Häufungspunkt von $B$. Ist $c$ ein rechtsseitiger Häufungspunkt und $\epsilon > 0$, so existiert ein $c_1 \in B \cap (c, \infty)$ mit $|f(x) - f(c)| \leq \epsilon$ für $x \in [c, c_1] \cap B$. Sei $x \in (c, c_1) \setminus B$ und sei $k$ der Index mit $x \in (a_k, b_k)$. Da $F$ linear auf $(a_k, b_k)$ and da $a_k$, $b_k$ zu $[c, c_1] \cap B$ gehören, haben wir

$$|F(x) - F(x)| \leq \max \{|f(a_k) - f(c)|, |f(b_k) - f(c)|\} \leq \epsilon.$$

Also ist $F$ rechtsseitig stetig. Analog zeigt man, dass $F$ linksseitig stetig ist. □

$F$ heißt eine *lineare Fortsetzung* von $f$. In einigen Anwendungen ist es wichtig zu wissen, dass $F$ beschränkt ist mit derselben Schranke wie $f$.

## 2.8 Kompaktheit

**Definition 2.58.** Sei $B \subseteq \mathbb{R}$ und $\{U_i\}_{i \in I}$ sei eine Familie von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$. $\{U_i\}_{i \in I}$ heißt eine *offene Überdeckung* von $B$, falls $B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. $\{U_j\}_{j \in J}$ heißt eine *Teilüberdeckung*, falls $J \subseteq I$ und $B \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$.

*Beispiel* 2.59. Offene Überdeckungen des Intervalls $(0, 1)$:

- $\mathcal{U}_1 = \{(1/n, 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{U}_2 = \{(1/n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{U}_3 = \{(1/r, r) \mid r > 1\}$
- $\mathcal{U}_4 = \{(-r, 1 - r) \mid 0 < r < 1\}$
- $\mathcal{U}_5 = \{(0, 1)\}$

**Definition 2.60.** $K \subseteq \mathbb{R}$ heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von $K$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

*Beispiel* 2.61. $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) \Longrightarrow \mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

*Bemerkung.* Während (beispielsweise) die Abgeschlossenheit einer Menge $B$ eine Eigenschaft relativ zu einer $B$ umfassenden Menge ist, ist die Kompaktheit eine „innere" Eigenschaft.

**Satz 2.62** (Überdeckungssatz von Heine–Borel)**.** *$K \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn $K$ abgeschlossen und beschränkt ist.*

*Beispiel* 2.63. Abgeschlossene endliche Intervalle $[a, b]$ sind kompakt.

*Bemerkung.* In metrischen Räumen ist es allgemein richtig, dass kompakte Mengen abgeschlossen und beschränkt sind, während die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

*Beweis.* ($\Rightarrow$) Sei $K$ kompakt. Wir zeigen, dass $K$ abgeschlossen ist. Den Beweis, dass $K$ auch beschränkt ist, überlasse ich Ihnen.
Sei $z \in \mathbb{R} \setminus K$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $U_n = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x - z| > \frac{1}{n}\right\}$. Die Mengen $U_n$ sind offen und $K \subseteq \mathbb{R} \setminus \{z\} = \bigcup\limits_n U_n$ ist offene Überdeckung von $K$. Es existiert eine offene Teilüberdeckung, also wegen $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$ gibt es ein $N$ mit $K \subseteq U_N$. Damit $[z - 1/N, z + 1/N] = \mathbb{R} \setminus U_N \subseteq \mathbb{R} \setminus K$ und $\mathbb{R} \setminus K$ ist offen, $K$ also abgeschlossen. $\square$

Den Beweis der Umkehrung bereiten wir vor.

**Satz 2.64.** *Eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.*

*Bemerkung.* Sei $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ und $D$ abgeschlossen. Dann ist $A$ abgeschlossen in $D$ genau dann, wenn $A$ abgeschlossen (in $\mathbb{R}$) ist.

*Beweis des Satzes.* Sei $K$ kompakt und $D \subseteq K$ abgeschlossen, $\{U_i\}$ sei eine offene Überdeckung von $D$, $D \subseteq \bigcup\limits_i U_i$. Dann ist $\{U_i\}_i \cup \{\mathbb{R} \setminus D\}$ eine offene Überdeckung von $K$ wegen

$$K \subseteq \mathbb{R} = D \cup (\mathbb{R} \setminus D) \subseteq \bigcup_i U_i \cup (\mathbb{R} \setminus D).$$

Diese Überdeckung enthält eine endliche Teilüberdeckung, $K \subseteq \bigcup\limits_{j \in J} U_j \cup (\mathbb{R} \setminus D)$, $|J| < \infty$. Dann jedoch $D \subseteq \bigcup\limits_{j \in J} U_j$. $\square$

Eine Folgerung ist:

**Satz 2.65.** *Beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen kompakter Mengen sind kompakt.*

Das nächste Resultat verallgemeinert das Intervallschachtelungsprinzip:

**Satz 2.66.** *$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ sei geschachtelte Folge kompakter Mengen, $K_n \neq \emptyset$ für alle $n$. Dann $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.*

*Beweis.* Angenommen, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$. Dann

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus K_n).$$

Insbesondere ist $\{\mathbb{R} \setminus K_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine offene Überdeckungvon $K_1$. Wegen $\mathbb{R} \setminus K_1 \subseteq \mathbb{R} \setminus K_2 \subseteq \ldots$ und der Existenz einer endlichen Teilüberdeckung gibt es ein $N$ mit $K_1 \subseteq \mathbb{R} \setminus K_N$ oder $K_1 \cap K_N = \emptyset$ im Widerspruch zu $K_1 \cap K_N = K_N \neq \emptyset$. □

*Beweis der Umkehrung des Überdeckungssatzes von Heine–Borel.*

1. Wir zeigen zuerst, dass abgeschlossene endliche Intervalle kompakt sind. Sei $[a, b]$ ein derartiges Intervall und $\mathcal{U} = \{U_i\}$ sei eine offene Überdeckung von $[a, b]$. Sei

   $$B = \{x \in (a, b] \mid [a, x] \text{ kann durch endlich viele Elemente aus } \mathcal{U} \text{ überdeckt werden}\}.$$

   (a) Es gibt eine Menge $U_a$ in $\mathcal{U}$, die $a$ enthält. Da $U_a$ offen ist, gibt es ein $x \in (a, b]$ mit $[a, x] \subseteq U_a$, also $B \neq \emptyset$. Da $B$ nach oben beschränkt ist, existiert $z = \sup B$.
   Noch zu zeigen: $z \in B$ (d. h. $z = \max B$) und $z = b$.

   (b) Es gibt eine Menge $U_z$ in $\mathcal{U}$ mit $z \in U_z$. Da $U_z$ offen ist, gibt es ein $c \in (a, z)$ mit $[c, z] \subseteq U_z$. Da $z = \sup B$ und $c < z$, gibt es ein $x \in (c, z] \cap B$. Gemäß Definition kann $[a, x]$ durch endlich viele Elemente aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden. Da $[x, z] \subseteq U_z$ folgt, dass $[a, z] = [a, x] \cup [x, z]$ durch endlich viele Elemente aus $U$ überdeckt werden kann, also $z \in B$.

   (c) Angenommen, $z < b$. Dann gibt es ein $d \in (z, b)$ mit $[z, d] \subseteq U_z$. Jedoch kann $[a, z] \cup [z, d]$ durch endlich viele Elemente aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden, also $d \in B$ im Widerspruch zu $z = \max B$. Also $z = b$.

2. Sei nun $K \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt. Dann gibt es ein Intervall $[a, b] \supseteq K$. $[a, b]$ ist kompakt nach 1. und $K$ ist abgeschlossen, also ist $K$ kompakt.

□

Das nächste Ergebnis sagt, dass in den reellen Zahlen (Überdeckungs-)Kompaktheit dasselbe ist wie *Folgenkompaktheit*. Dieses Result gilt allgemein in metrischen Räumen.

**Satz 2.67.** *Sei $K \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $K$ genau dann kompakt, wenn jede Folge in $K$ eine Teilfolge enthält, die in $K$ konvergiert.*

*Beweis.* ($\Rightarrow$) Sei $K$ kompakt und $\{x_n\} \subset K$. Da $K$ beschränkt ist, besitzt $\{x_n\}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge. Da $K$ abgeschlossen ist, gehört der Grenzwert dieser Teilfolge zu $K$.

($\Leftarrow$) Selbst.

□

*Beispiel* 2.68. Sei $a_n \to a$ für $n \to \infty$. Dann ist die Menge $K = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ kompakt.

## 2.9 Gleichmäßige Stetigkeit

**Definition 2.69.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$. $f$ heißt *gleichmäßig stetig* auf $I$, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I$: $|x-y| \le \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \le \epsilon$.

*Beispiel* 2.70. 1. $f(x) = ax + b$ mit $a$, $b \in \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

*Beweis.* Sei $a \neq 0$, ansonsten klar. Dann gilt für $x$, $y \in \mathbb{R}$, $|x-y| \le \epsilon/|a|$ mit vorgegebenem $\epsilon > 0$, dass $|f(x) - f(y)| = |ax - ay| = |a|\,|x-y| \le \epsilon$.

2. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist *nicht* gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$. Genauer: Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ gilt

$$|x - x_0| \le \delta(x_0, \epsilon) = \frac{1}{2}\left(-|x_0| + \sqrt{x_0^2 + 4\epsilon}\right) \Longrightarrow \left|x^2 - x_0^2\right| \le \epsilon,$$

und $\delta(x_0, \epsilon)$ ist die bestmögliche Wahl von $\delta$. Jedoch $\delta(x_0, \epsilon) \to 0$ für $|x_0| \to \infty$ bei festem $\epsilon > 0$.

*Alternativer Beweis.* Sei $x = \frac{1}{\delta}$, $y = \delta + \frac{1}{\delta}$. Dann $|x - y| \le \delta$, jedoch $\left|x^2 - y^2\right| = 2 + \delta^2 > 2$. □

**Satz 2.71.** *Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f$ gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Angenommen, $f$ wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\eta > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren $x_n$, $y_n \in K$ mit $|x_n - y_n| \le 1/n$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \eta$. Für eine geeignete Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ von $\{x_n\}$, $x_{n_k} \to z$ für $k \to \infty$ mit $z \in K$. Dann

$$|y_{n_k} - z| \le |x_{n_k} - y_{n_k}| + |x_{n_k} - z| \le \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - z| \to 0 \text{ für } k \to \infty,$$

also $y_{n_k} \to z$ für $k \to \infty$. Da $f$ stetig ist, folgt $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to f(z) - f(z) = 0$ für $k \to \infty$ im Widerspruch zu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \ge \eta > 0$ für alle $k$. □

Das nächste Resultat gibt teilweise eine Antwort auf die Frage, weshalb gleichmäßige Stetigkeit wichtig ist.

**Satz 2.72.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung von $f$ nach $\overline{I}$, d. h. es gibt eine stetige Funktion $F\colon \overline{I} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = f(x)$ für alle $x \in I$. Dieses $F$ ist eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* 1. Zuerst definieren wir $F$. Sei $x \in \overline{I} \setminus I$. Dann ist $x$ Häufungspunkt von $I$. Damit gibt es eine Folge $\{x_n\} \subset I$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Wir zeigen, dass $\{f(x_n)\}$ eine Cauchyfolge ist, und setzen dann $F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Sei $\epsilon > 0$. Sei $\delta > 0$ so gewählt, dass $|f(x) - f(y)| \le \epsilon$ für $x, y \in I$ mit $|x - y| \le \delta$. Dann gibt es ein $N$, so dass $|x_m - x_n| \le \delta$ für alle $m, n \ge N$. Folglich $|f(x_m) - f(x_n)| \le \epsilon$ für alle $m, n \ge N$, und $\{f(x_n)\}$ ist eine Cauchyfolge.

2. Wir zeigen jetzt, dass $F$ wohldefiniert ist, d. h. dass $F(x)$ für $x \in \overline{I} \setminus I$ unabhängig von der Wahl der Folge $\{x_n\}$ ist.

   Sei dazu $\{y_n\} \subset I$ eine weitere Folge, die gegen $x$ konvergiert. Dann konvergiert die Folge
   $$x_1,\, y_1,\, x_2,\, y_2,\, x_3,\, y_3,\, \ldots$$
   gegen $x$, also konvergiert nach 1. auch die Folge
   $$f(x_1),\, f(y_1),\, f(x_2),\, f(y_2),\, f(x_3),\, f(y_3),\, \ldots,$$
   und die beiden Folgen $\{f(x_n)\}$, $\{f(y_n)\}$ haben denselben Grenzwert.

3. Schließlich wäre noch zu zeigen, dass $F\colon \overline{I} \to \mathbb{R}$ stetig ist, doch das überlasse ich Ihnen.

$\square$

# Kapitel 3

# Differenzierbarkeit

*Das Differenzieren einer Funktion ist eine der wichtigsten Operationen in der Mathematik überhaupt.*

## 3.1 Die Ableitung einer Funktion

**Definition 3.1.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$. Dann heißt $f$ *an der Stelle* $c \in I$ *differenzierbar*, falls

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\in I}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

existiert. Existiert dieser Limes, so wird er mit $f'(c)$ (bzw. mit $f'(c\pm 0)$ im Fall, dass $c$ ein Randpunkt von $I$ ist) bezeichnet.
$f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt auf $I$ *differenzierbar*, falls $f$ an jeder Stelle von $I$ differenzierbar ist. $f'\colon I \to \mathbb{R}$ heißt dann die *Ableitung* von $f$. Anstelle von $f'$ schreibt man auch $\frac{df}{dx}$.

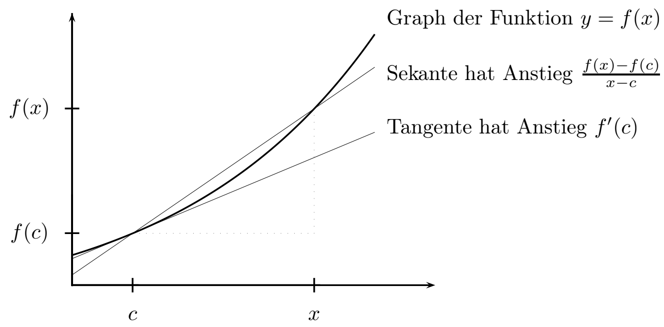


Abbildung 3.1: Geometrische Interpretation

*Bemerkung.* Anstelle des Grenzwertes

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

kann man auch den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

bzw. $\lim\limits_{h\to\pm 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ betrachten. (Ersetze $x$ durch $x = c+h$.)

*Beispiel* 3.2. 1. $f(x) = \sqrt{x}$, $c = 4$.

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

2. $g(x) = \frac{1}{x}$, $c \neq 0$.

$$g'(c) = \lim_{x\to c} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{c}}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{1}{x-c} \cdot \frac{c-x}{xc} = \lim_{x\to c} \frac{-1}{xc} = -\frac{1}{c^2}.$$

Später wird das Berechnen von Ableitungen durch die Benutzung bestimmter Regeln vereinfacht.

**Satz 3.3.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$. Ist $f$ an der Stelle $c \in I$ differenzierbar, so ist $f$ an der Stelle $c$ stetig.*

*Beweis.* Wir wollen $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ zeigen. Für $x \in I$, $x \neq c$ gilt

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c).$$

Wegen $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c}\left(f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c)\right)\\ &= \lim_{x\to c} f(c) + \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot \lim_{x\to c}(x-c) = f(c) + f'(c)\cdot 0 = f(c).\end{aligned}$$

□

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht.

*Beispiel* 3.4. Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist an der Stelle 0 stetig, aber dort nicht differenzierbar:

$$\lim_{x\to +0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to -0} \frac{|x|-|0|}{x-0}.$$

*Bemerkung.* Es gibt sogar stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$, die nirgends differenzierbar sind.

**Satz 3.5.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an $c \in I$. Dann gilt:*

(a) *$f+g$ ist an $c$ differenzierbar, $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.*

(b) *$\alpha f$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist an $c$ differenzierbar, $(\alpha f)'(c) = \lambda f'(c)$.*

(c) *$fg$ ist an $c$ differenzierbar, $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.*

(d) *Falls $g(c) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ an $c$ differenzierbar, $(\frac{f}{g})'(c) = \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g(c)^2}$.*

*Beweis.* Wir zeigen (c), der Rest des Beweises ist ähnlich. Es gilt

$$\frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} g(x) + f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

für $x \in I$, $x \neq c$. In der Grenze $x \to c$ erhalten wir $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$. □

## 3.2 Einige Beispiele

1. $\frac{d}{dx}(a) = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

2. $\frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

   *Beweis.*
   $$\lim_{x\to c} \frac{x^k - c^k}{x - c} = \lim_{x\to c} \left(x^{k-1} + cx^{k-2} + \cdots + c^{k-2}x + c^{k-1}\right) = kc^{k-1}.$$
   □

3. $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. $x \geq 0$ für $\alpha > 1$).

4. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$.

   *Beweis.*
   $$\begin{aligned} \lim_{x\to c} \frac{\sin x - \sin c}{x - c} &= \lim_{x\to c} \frac{2\cos\frac{x+c}{2}\sin\frac{x-c}{2}}{x - c} \\ &= \lim_{x\to c} \cos\frac{x + c}{2} \lim_{x\to c} \frac{\sin\frac{x-c}{2}}{\frac{x-c}{2}} = \cos c \end{aligned}$$

   unter Benutzung des Additionstheorems für den Sinus und $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (später). □

Für weitere Beispiele s. Tabelle 3.1.

## 3.3 Die Kettenregel

Wir wollen jetzt zusammengesetzte Funktionen wie $x \mapsto \sqrt{x^4 + 2x^2 + 5}$ ableiten.

**Satz 3.6.** *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $f\colon I \to J$, $g\colon J \to \mathbb{R}$. Ist $f$ an der Stelle $c \in I$ differenzierbar und $g$ an der Stelle $f(c)$, so ist $g \circ f$ an der Stelle $c$ differenzierbar und*

$$(g \circ f)'(c) = g'\big(f(c)\big) \cdot f'(c).$$

| $f(x)$ | $f'(x)$ | Bemerkung |
|---|---|---|
| $a$ (Konstante) | $0$ | |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ |
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ |
| $a^x$ | $a^x \log a$ | $a > 0$ |
| $\log x$ | $\frac{1}{x}$ | $x > 0$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ |
| $\cot x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$ | $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\|x\| < 1$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\|x\| < 1$ |
| $\arctan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | |
| $\operatorname{arccot} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ | |
| $\sinh x$ | $\cosh x$ | |
| $\cosh x$ | $\sinh x$ | |
| $\tanh x$ | $\frac{1}{\cosh^2 x}$ | |
| $\coth x$ | $-\frac{1}{\sinh^2 x}$ | $x \neq 0$ |
| $\operatorname{arcsinh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | |
| $\operatorname{arccosh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $x > 1$ |
| $\operatorname{arctanh} x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ | $\|x\| < 1$ |
| $\operatorname{arccoth} x$ | $-\frac{1}{x^2-1}$ | $\|x\| > 1$ |

Tabelle 3.1: Ableitungen einiger elementarer Funktionen

*Bemerkung.* Das intuitive Argument

$$\lim_{x \to c} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(c)\big)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(c)\big)}{f(x) - f(c)} \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = g'\big(f(c)\big) f'(c)$$

arbeitet *nicht*, da $f(x) = f(c)$ für $x$ nahe $c$ gelten könnte.

*Beweis.* Wir definieren eine Funktion $h\colon J \to \mathbb{R}$ vermöge

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g\big(f(c)\big)}{y - f(c)} & \text{für } y \in J \setminus \{f(c)\}, \\ g'\big(f(c)\big) & \text{für } y = f(c). \end{cases}$$

$h$ ist an der Stelle $f(c)$ stetig, da $g$ differenzierbar an dieser Stelle ist. Die Beziehung

$$h(y)(y - f(c)) = g(y) - g\big(f(c)\big)$$

gilt für alle $y \in J$, also

$$h\big(f(x)\big)(f(x) - f(c)) = g\big(f(x)\big) - g\big(f(c)\big)$$

für alle $x \in I$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(c) &= \lim_{x \to c} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(c)\big)}{x - c} \\ &= \lim_{x \to c} h\big(f(x)\big) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = h\big(f(c)\big) f'(c). \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis, da $h\big(f(c)\big) = g'\big(f(c)\big)$. $\square$

*Beispiel* 3.7. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5$ für $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ für $x > 0$. Dann $f(x) = \big(x^2+1\big)^2 + 4 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x(x^2+1)$ und $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, also

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x^4+2x^2+5}) = \frac{2x(x^2+1)}{\sqrt{x^4+2x^2+5}}.$$

**Satz 3.8.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ strikt monoton, $c \in I$, $g$ die Umkehrfunktion zu $f$. Ist $f$ an der Stelle $c$ differenzierbar und gilt $f'(c) \neq 0$, so ist $g$ an der Stelle $f(c)$ differenzierbar und $g'\big(f(c)\big) = \frac{1}{f'(c)}$.*

*Beweis.* Sei $J = f(I)$ und $\{y_n\} \subset J \setminus \{f(c)\}$ mit $y_n \to f(c)$ für $n \to \infty$. Dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g\big(f(c)\big)}{y_n - f(c)} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(g(y_n)) - f(c)}{g(y_n) - c}} = \frac{1}{f'(c)},$$

da $f$ an der Stelle $c$ differenzierbar ist und $g(y_n) \to g\big(f(c)\big) = c$ für $n \to \infty$. $\square$

*Beispiel* 3.9. 1. $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ für $x > 0$, $f'(x) = 3x^2$, also

$$g'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3}\,x^{-2/3}.$$

2. $f(x) = \sin x$ ist auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist $g(x) = \arcsin x$. Diese ist auf $(-1, 1)$ differenzierbar, und

$$g'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

## 3.4 Die Bestimmung von Extremwerten I: Notwendige Bedingungen

**Definition 3.10.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $c \in I$. Dann

(i) $f$ hat ein *globales/absolutes Maximum* (bzw. ein *globales/absolutes Minimum*) an der Stelle $c$, falls $f(x) \le f(c)$ (bzw. $f(x) \ge f(c)$) für alle $x \in I$ gilt.

(ii) $f$ hat ein *lokales/relatives Maximum* (bzw. ein *lokales/relatives Minimum*) an der Stelle $c$, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass die Einschränkung von $f$ auf $I \cap (c-\delta, c+\delta)$ ein globales Maximum (bzw. globales Minimum) an $c$ hat.

*Beispiel* 3.11. (i) $f(x) = x^2$ hat ein globales Minimum an der Stelle 0.

(ii) Die Funktion $g(x) = \cos x$ hat globale Maxima an allen Vielfachen von $2\pi$.

(iii) Die Funktion $h(x) = x^2 - x^4$ hat ein lokales Minimum an $x = 0$.

*Beweis.* Für $0 < |x| < 1$ gilt $x^2 - x^4 = x^2(1-x^2) > 0$. $\square$

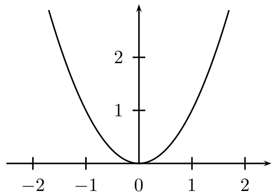


Abbildung 3.2: Die Funktion $y = x^2$

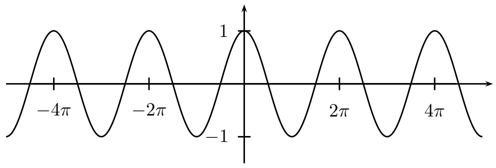


Abbildung 3.3: Die Funktion $y = \cos x$

*Bemerkung.* Maxima und Minima werden als *Extrema* bezeichnet.

Die Frage entsteht, wie sich Extrema bestimmen lassen.

**Satz 3.12.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $c \in I$ sei kein Endpunkt von $I$. Falls $f$ an $c$ differenzierbar ist und $f$ an $c$ ein relatives Extremum hat, so gilt $f'(c) = 0$.*

*Beweis.* Angenommen, es ist $f'(c) \neq 0$. O. B. d. A. sei $f'(c) > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$ für $x \in I \cap (c-\delta, c+\delta)$, $x \neq c$. Es gilt für $x \in I \cap (c-\delta, c)$ gilt

$$f(x) = f(c) + \underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{>0} \underbrace{(x-c)}_{<0} < f(c)$$

und für $x \in I \cap (c, c+\delta)$

$$f(x) = f(c) + \underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{>0} \underbrace{(x-c)}_{>0} > f(c).$$

Damit besitzt $f$ an der Stelle $c$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum. □

*Bemerkung.* Eine *notwendige* Bedingung dafür, dass die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ an einer inneren Stelle $c \in I$ ein lokales Extremum besitzt, ist also, dass die Tangente an den Graph dieser Funktion in $(c, f(c))$ (falls existent) parallel zur $x$-Achse ist.
Diese Bedingung ist *nicht hinreichend*, z. B. gilt für $f(x) = x^3$, dass $f'(0) = 0$, jedoch $f(x) > f(0)$ für $x > 0$ und $f(x) < f(0)$ für $x < 0$.

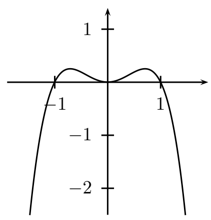


Abbildung 3.4: Die Funktion $y = x^2 - x^4$

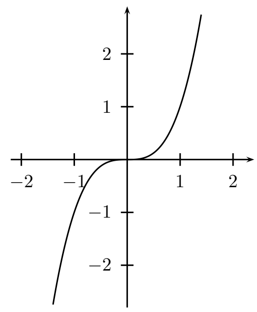


Abbildung 3.5: Die Funktion $y = x^3$

*Beispiel* 3.13. Wir betrachten die Funktion $f(x) = (10x - x^2)^{2/3}$ auf dem Intervall $[-1, 8]$. Man rechnet nach, dass

$$f'(x) = \frac{4(5-x)}{3(10x - x^2)^{1/3}}.$$

Die Ableitung existiert nicht für $x = 0$ (und für $x = 10$, das jedoch nicht zum Intervall $[-1, 8]$ gehört) und verschwindet für $x = 5$. Wir berechnen

$$f(-1) = \sqrt[3]{121}, \;\; f(0) = 0, \;\; f(5) = \sqrt[3]{625}, \;\; f(8) = \sqrt[3]{256}.$$

Also ist der maximale Wert von $f$ auf $[-1, 8]$ gleich $\sqrt[3]{625}$ (angenommen an der Stelle $x = 5$), der minimale Wert ist 0 (angenommen an der Stelle $x = 0$).

Es gibt differenzierbare Funktionen, deren Ableitung an vielen Stellen unstetig ist. Deshalb überrascht das folgende Resultat:

**Satz 3.14.** *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ferner sei $L$ eine Zahl strikt zwischen $f'(a + 0)$ und $f'(b - 0)$. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = L$.*

*Beweis.* O. B. d. A. sei $f'(a + 0) < L < f'(b - 0)$. Die Funktion $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - Lx$ ist differenzierbar (und daher stetig) auf $[a, b]$. Außerdem ist $g'(a) < 0 < g'(b)$. Wegen $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} < 0$, $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} > 0$ existieren $u, v$ mit $a < u < v < b$ und $g(u) < g(a)$, $g(v) < g(b)$. Die Funktion $g$ nimmt ihr Minimum auf $[a, b]$ an. Wegen $g(u) < g(a)$ und $g(v) < g(b)$ geschieht dies weder an $a$ noch an $b$. Also hat $g$ ihr Minimum an einer Stelle $c \in (a, b)$. Dann ist jedoch $g'(c) = 0$ und $f'(c) = L$. $\square$

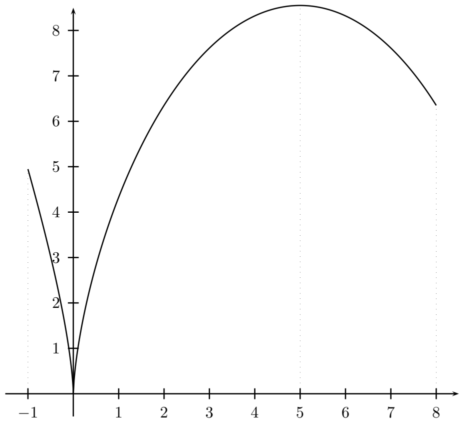


Abbildung 3.6: Die Funktion $y = \left(10x - x^2\right)^{2/3}$

## 3.5 Der Mittelwertsatz

**Satz 3.15** (Rolle)**.** *$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und differenzierbar auf $(a,b)$. Falls $f(a) = f(b)$, so existiert eine Stelle $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$.*

*Beweis.* $f$ nimmt einen größten und kleinsten Wert auf $[a,b]$ an. Außer wenn $f(x) = f(a)$ für alle $x \in [a,b]$ (und dann ist die Aussage offensichtlich), wird wenigstens einer dieser Extremwerte an einer Stelle $c \in (a,b)$ angenommen. Doch dann ist $f'(c) = 0$. □

Der Satz von Rolle ist ein Spezialfall des folgenden Mittelwertsatzes. Umgekehrt wird der Beweis des Mittelwertsatzes auf diesen Spezialfall zurückgeführt.

**Satz 3.16** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und differenzierbar auf $(a,b)$. Dann existiert eine Stelle $c \in (a,b)$ mit*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Beweis.* Wir definieren $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = f(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\Big).$$

Dann ist $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $(a,b)$ und $g(a) = g(b) = 0$. Unter Benutzung des Satzes von Rolle folgt die Existenz eines $c \in (a,b)$ mit $g'(c) = 0$. Dann

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

*Beispiel* 3.17. Sei $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dann gilt $|\tan x - \tan y| \geq |x - y|$.

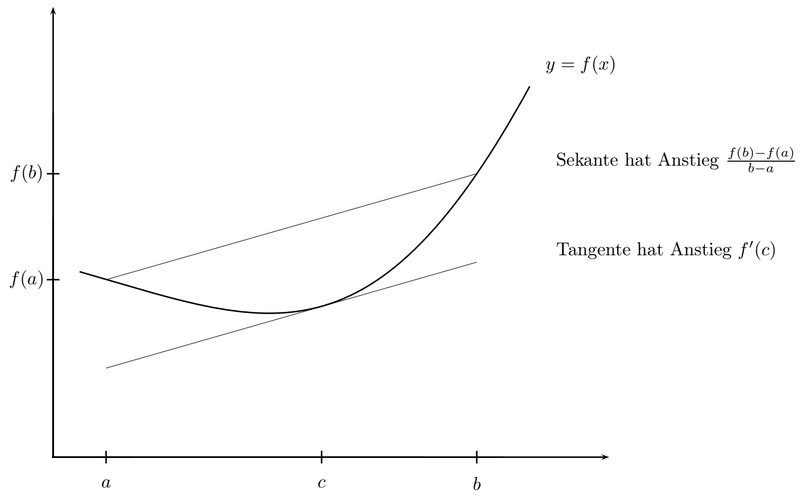


Abbildung 3.7: Geometrische Interpretation: Sekante und Tangente sind parallel

*Beweis.* Es sei $x < y$. Dann existiert ein $z \in (x, y)$ mit

$$\frac{\tan x - \tan y}{x - y} = \frac{1}{\cos^2 z},$$

also

$$|\tan x - \tan y| = \frac{|x - y|}{\cos^2 z} \geq |x - y| \,.$$

□

**Satz 3.18.** *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $(a, b)$. Dann gilt:*

(a) *Ist $f' > 0$ auf $(a, b)$, so ist $f$ strikt monoton wachsend.*

(b) *Ist $f' \geq 0$ auf $(a, b)$, so ist $f$ monoton wachsend.*

(c) *Ist $f' = 0$ auf $(a, b)$, so ist $f$ konstant.*

*Beweis.* Wir zeigen (a). (b), (c) sind ähnlich.
Sei $a \leq x < y \leq b$. Gemäß Mittelwertsatz existiert ein $z \in (a, b)$ mit

$$f(y) = \underbrace{f'(z)}_{>0}\underbrace{(y - x)}_{>0} + f(x) > f(x).$$

Das beweist (a). □

Eine direkte Folgerung daraus ist:

**Satz 3.19.** *Seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $(a, b)$. Gilt $f' = g'$ auf $(a, b)$, so existiert eine Konstante $k$ mit $f(x) = g(x) + k$ für alle $x \in [a, b]$.*

*Beweis.* Sei $h = f - g$. Dann ist $h' = f' - g' = 0$, also gemäß (c) des vorigen Satzes ist $h$ konstant, d. h. $h(x) = k$ für alle $x \in [a, b]$ und ein $k \in \mathbb{R}$. □

**Satz 3.20** (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)**.** *Seien* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig, differenzierbar auf* $(a,b)$ *und sei* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a,b)$*. Dann gibt es ein* $c \in (a,b)$ *mit* $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

*Bemerkung.* Der Mittelwertsatz ergibt sich für $g(x) = x$.

*Beweis.* Sei o. B. d. A. $g'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist $g$ strikt monoton wachsend auf $[a,b]$. Folglich existiert die Umkehrfunktion $g^{-1}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, wobei $[\alpha,\beta] = g([a,b])$. Sei $h = f \circ g^{-1}$. Gemäß Mittelwertsatz existiert ein $\gamma \in (\alpha,\beta)$ mit

$$h'(\gamma) = \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Mit $c = g^{-1}(\gamma)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{f'(c)}{g'(c)} &= f'\big(g^{-1}(\gamma)\big)\frac{1}{g'\big(g^{-1}(\gamma)\big)} = f'\big(g^{-1}(\gamma)\big) \cdot \big(g^{-1}\big)'(\gamma) \\
&= \big(f \circ g^{-1}\big)'(\gamma) = h'(\gamma) = \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} \\
&= \frac{h\big(g(b)\big) - h\big(g(a)\big)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.
\end{aligned}$$

□

*Bemerkung.* Ein alternativer Beweis ergibt sich, wenn man des Satz von Rolle auf die Funktion $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$$

anwendet.

## 3.6 Die Bestimmung von Extremwerten II: Hinreichende Bedingungen

Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und ist die Ableitung $f'\colon I \to \mathbb{R}$ selbst differenzierbar, so bezeichnet man die Ableitung von $f'$ mit $f'' = f^{(2)}$ oder mit $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Entsprechend ist die Ableitung von $f''$ (falls existent) die Funktion $f''' = f^{(3)}$ oder $\frac{d^3 f}{dx^3}$, usw.

**Satz 3.21.** *Sei* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar,* $f'(c) = 0$ *für ein* $c \in (a,b)$ *und sei* $f'$ *an der Stelle* $c$ *differenzierbar. Gilt* $f''(c) < 0$ $(f''(c) > 0)$*, so hat* $f$ *ein lokales Maximum* (*Minimum*) *an* $c$.

*Beweis.* O. B. d. A. sei $f''(c) < 0$. Wegen $\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} \to f''(c)$ für $x \to c$ folgt, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit $(c-\delta, c+\delta) \subseteq (a,b)$ und $f'(x) > f'(c) = 0$ für $x \in (c-\delta, c)$ sowie $f'(x) < f'(c) = 0$ für $x \in (c, c+\delta)$. Dann ist die Funktion $f$ auf dem Intervall $(c-\delta, c]$ strikt monoton wachsend und auf dem Intervall $[c, c+\delta)$ strikt monoton fallend, d. h. $f$ hat an der Stelle $c$ ein lokales Maximum. □

*Bemerkung.* Im Fall $f'(c) = f''(c) = 0$ ist keine Entscheidung möglich, wie das nachfolgende Ergebnis zeigt.

**Satz 3.22.** *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ $(k-1)$–mal differenzierbar für ein $k \geq 2$, $c \in (a,b)$ und $f^{(k-1)}$ sei an der Stelle $c$ differenzierbar. Gilt $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ und ist $k$* gerade*, so besitzt $f$ an der Stelle $c$ ein lokales Maximum, falls $f^{(k)}(c) < 0$, und ein lokales Minimum, falls $f^{(k)}(c) > 0$.*

*Beispiel* 3.23. Sei $f(x) = \frac{x^{2l}}{(2l)!}$ für $l \in \mathbb{N}$.
Man erhält induktiv, dass $f^{(j)}(x) = \frac{x^{2l-j}}{(2l-j)!}$ für $j = 0, 1, \ldots, 2l$ (und $f^{(j)}(x) = 0$ für $j > 2l$), damit $f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(2l-1)}(0) = 0$ und $f^{(2l)} = 1 > 0$. Also hat $f$ an der Stelle 0 ein lokales Minimum. (Dies ist tatsächlich ein globales Minimum.)

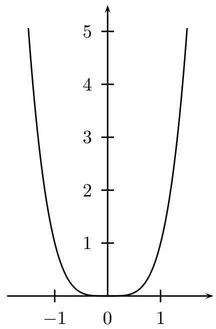


Abbildung 3.8: Die Funktion $y = x^4$

## 3.7 Konvexität

**Definition 3.24.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$. Dann heißt $f$ *konvex* (*konkav*), falls $\forall x, y \in I\ \forall \alpha \in [0,1]$:

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

$$(\text{bzw. } f((1-\alpha)x + \alpha y) \geq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y))\,.$$

Die Funktion $f$ heißt *strikt konvex* (*strikt konkav*), falls diese Ungleichung für $x \neq y$, $\alpha \in (0,1)$ strikt ist.

**Lemma 3.25.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f$ konvex (konkav) genau dann, wenn $\forall x, y \in I$*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

$$\left(\text{bzw. } f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}\right)$$

*gilt. $f$ ist strikt konvex (strikt konkav) genau dann, wenn diese Ungleichung für alle $x, y \in I$, $x \neq y$ strikt ist.*

*Beweis.* Eine nicht zu schwere Übungsaufgabe. □

*Beispiel* 3.26. 1. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist strikt konvex, da $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 < \frac{x^2+y^2}{2}$ für $x \neq y$.

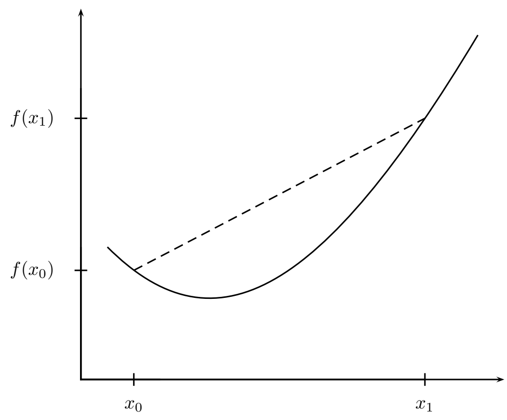


Abbildung 3.9: Graph einer konvexen Funktion $y = f(x)$: Abschnitt der Sekante liegt über dem Abschnitt des Graphen.

2. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist strikt konvex für $x \geq 0$ und strikt konkav für $x \leq 0$.

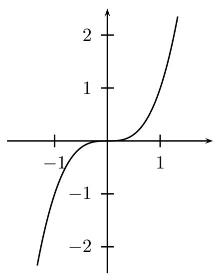


Abbildung 3.10: Die Funktion $y = x^3$

3. Die Funktion $f(x) = \log x$ ist strikt konkav für $x > 0$, denn $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$ für $x \neq y$, also $\log \frac{x+y}{2} > \log \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$.

Die folgenden Ergebnisse formulieren wir für konvexe Funktionen. Man erhält die entsprechenden Aussagen für konkave Funktionen durch Umkehren der Vorzeichen.

**Satz 3.27.** *Sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $f$ konvex (strikt konvex) genau dann, wenn $f'$ monoton wachsend (strikt monoton wachsend) ist.*

*Beweis.* ($\Rightarrow$) Wir zeigen, dass für $x < y$

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y).$$

Wir zeigen lediglich die erste Ungleichung, die zweite ist analog. Sei $0 <$

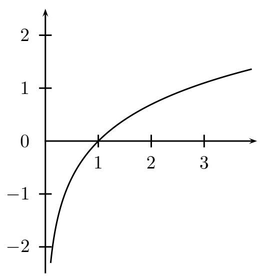


Abbildung 3.11: Die Funktion $y = \log x$

$h < y - x$. Dann ist mit $\alpha = \frac{h}{y-x}$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x+\alpha(y-x)) = f((1-\alpha)x+\alpha y) \\ &\leq (1-\alpha)f(x)+\alpha f(y) = f(x) + \frac{h}{y-x}\left(f(y)-f(x)\right), \end{aligned}$$

also

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Für $h \to +0$ erhalten wir

$$f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

($\Leftarrow$) Sei $f'$ monoton wachsend. Für $x < y$ existieren dann $c \in \left(x, \frac{x+y}{2}\right)$, $d \in \left(\frac{x+y}{2}, y\right)$, so dass

$$\frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(x)}{\frac{x+y}{2}-x} = f'(c) \leq f'(d) = \frac{f(y)-f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{y-\frac{x+y}{2}},$$

also $f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) \leq f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ und

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

d. h. $f$ ist konvex.

$\square$

### 3.7.1 Wendestellen

**Definition 3.28.** Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$. Eine Stelle $c \in I$ heißt eine *Wendestelle*, falls die Funktion $f$ konvex für $x < c$ und konkav für $x > c$ (oder umgekehrt) ist.

**Satz 3.29.** *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ $(k-1)$–mal differenzierbar für ein $k \geq 3$, $c \in (a,b)$ und $f^{(k-1)}$ sei an der Stelle $c$ differenzierbar. Gilt $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ und ist $k$* ungerade*, so ist $c$ eine Wendestelle für $f$ (von konvex auf konkav für $f^{(k)}(c) < 0$ und von konkav auf konvex für $f^{(k)}(c) > 0$).*

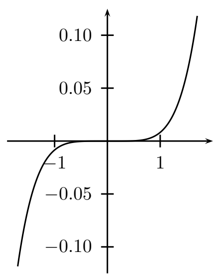


Abbildung 3.12: Die Funktion $y = x^5/5!$

*Beispiel* 3.30. Sei $f(x) = \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}$ für $l \in \mathbb{N}$.
Wie zuvor erhalten wir $f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(2l)}(0) = 0$ und $f^{(2l+1)}(0) = 1 \neq 0$, also hat $f$ an 0 eine Wendestelle.

### 3.7.2 Die Jensensche Ungleichung (endliche Form)

**Satz 3.31.** *$f\colon I \to \mathbb{R}$ sei konvex, $x_1, \dots, x_m \in I$ und $a_1, \dots, a_m$ seien positive reelle Zahlen. Dann gilt:*

$$f\left(\sum_{i=1}^m a_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^m a_i\right) \leq \sum_{i=1}^m a_i f(x_i) \Big/ \sum_{i=1}^m a_i.$$

*Beweis.* Indem wir $a_j$ für $j = 1, 2, \dots, m$ durch $a_j \Big/ \sum\limits_{i=1}^m a_i$ ersetzen, dürfen wir $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1$ annehmen.
*Beweis durch Induktion über $m$.*
Für $m = 1$ gilt $a_1 = 1$, und es ist nichts zu zeigen.
Sei $m > 1$ und sei die Ungleichung für $m - 1$ bereits bewiesen. Dann ist $a_1 < 1$ und

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^m a_i x_i\right) &= f\left(a_1 x_1 + (1 - a_1) \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{1 - a_1} x_i\right) \\
&\leq a_1 f(x_1) + (1 - a_1) f\left(\sum_{i=2}^m \frac{a_i}{1 - a_1} x_i\right) \\
&\leq a_1 f(x_1) + (1 - a_1) \sum_{i=2}^m \frac{a_i}{1 - a_1} f(x_i) = \sum_{i=1}^m a_i f(x_i)
\end{aligned}$$

unter Benutzung der Konvexität von $f$ und der Induktionsvoraussetzung, da $\sum_{i=2}^m \frac{a_i}{1-a_1} = \frac{1-a_1}{1-a_1} = 1$. □

*Beispiel* 3.32. Die Funktion $f(x) = -\log x$ ist konvex. Also gilt für positive Zahlen $x_1, \dots, x_m$, dass

$$-\log\left(\frac{x_1 + \cdots + x_m}{m}\right) \leq -\frac{1}{m}(\log x_1 + \cdots + \log x_m) = -\log \sqrt[m]{x_1 x_2 \dots x_m},$$

also
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m} \geq \sqrt[m]{x_1 x_2 \ldots x_m}.$$
Letzteres ist die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel.

## 3.8 Die l'Hôspitalschen Regeln

Im Allgemeinen behandeln die *l'Hôspitalschen Regeln* Ausdrücke der Form „$\frac{0}{0}$“ bzw. „$\frac{\infty}{\infty}$“. Der Schluss ist jeweils
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$
unter geeigneten Voraussetzungen an $f$, $g$.
Die l'Hôspitalsche Regeln gibt es in verschiedener Form. Die grundlegende Form ist die folgende:

**Satz 3.33.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $c \in I$, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $I$ mit $f(c) = g(c) = 0$, $f'$, $g'$ stetig an $c$ und $g'(c) \neq 0$. Dann gilt: Existiert $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ und beide Grenzwerte sind gleich.*

*Beweis.* Es gilt
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \lim_{x\to c} \frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
□

*Beispiel* 3.34. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \sin 0 \cdot \cos^2 0 = 0 \cdot 1^2 = 0.$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$

Besonders wichtig sind Formen, die ohne Stetigkeitsforderungen an $f'$, $g'$ an $c$ auskommen. Ein Beispiel ist der folgende Satz:

**Satz 3.35.** *Seien $f, g\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ stetig, auf $(a, b)$ differenzierbar mit $g' \neq 0$ überall auf $(a, b)$. Falls $f(a) = g(a) = 0$ und $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und beide Grenzwerte sind gleich.*

*Beweis.* Für jedes $x \in (a, b)$ existiert eine Stelle $c_x \in (a, x)$ mit
$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$
Wegen $c_x \to a$ für $x \to a + 0$ gilt
$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
□

*Beispiel* 3.36. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$.

Eine analoge Aussage gilt, wenn $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$.

**Satz 3.37.** *Seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g' \neq 0$ überall auf $(a,b)$. Falls $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, so gilt $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.*

*Beweis.* Wir führen den Beweis im Fall, dass $L$ endlich ist.
Sei $0 < \epsilon < 1$. Dann existiert ein $d \in (a,b)$ mit $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| \leq \epsilon$ und $g(x) > 0$ für alle $x \in (a,d)$. Wegen $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$ gibt es ein $d' \in (a,d)$ mit

$$\frac{|f(d)|}{g(x)} \leq \epsilon, \quad \frac{g(d)}{g(x)} \leq \frac{\epsilon}{1+|L|}$$

für alle $x \in (a,d')$. Für $x \in (a,d')$ existiert ein $c_x \in (x,d)$ mit

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x)-f(d)}{g(x)-g(d)}.$$

Nach Multiplikation mit $\frac{g(x)-g(d)}{g(x)}$ erhalten wir

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(d)}{g(x)} - \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \cdot \frac{g(d)}{g(x)},$$

also

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\right| \leq \frac{|f(d)|}{g(x)} + \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\right| \frac{g(d)}{g(x)} \leq \epsilon + (\epsilon + |L|) \frac{\epsilon}{1+|L|} \leq 2\epsilon.$$

Folglich

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\right| + \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L\right| \leq 3\epsilon$$

für $x \in (a,d')$. Daher $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. □

Die letzten beiden Sätze mit den entsprechenden Aussagen für $x \to b-0$ kombiniert ergeben:

**Satz 3.38.** *Seien $f,\, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig, auf $(a,b)\setminus\{c\}$ für ein $c \in (a,b)$ differenzierbar und $g' \neq 0$ überall auf $(a,b)\setminus\{c\}$. Falls $f(c) = g(c) = 0$ und $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, so gilt $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.*

**Satz 3.39.** *Seien $f,\, g\colon (a,b)\setminus\{c\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar für ein $c \in (a,b)$, $g' \neq 0$ überall auf $(a,b)\setminus\{c\}$. Falls $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, so gilt $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.*

Entsprechende Aussagen gelten für $x \to \infty$ (bzw. $x \to -\infty$). Betrachte dazu beispielsweise die Funktionen $F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, $G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \to +0$ (bzw. $x \to -0$).

*Beispiel* 3.40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin x}{\sin x - x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin x + x^2\cos x}{\cos x - \cos x + x\sin x}$
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x + x\cos x}{\sin x} = 2 + \dfrac{\cos 0}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = 2 + \dfrac{1}{1} = 3.$

*Bemerkung.* Beachte die Bedingung $g' \neq 0$ nahe $c$. Es gibt Gegenbeispiele zu den l'Hôspitalschen Regeln, wenn diese Bedingung verletzt ist.

# Kapitel 4

# Integration

Es gibt verschiedene Integrationsbegriffe. Die beiden wichtigsten sind das *Riemann-Integral* (in dieser Vorlesung) und das *Lebesgue-Integral* (später in den Vorlesungen „Differential- und Integralrechnung II“ (für Mathematiker und Physiker) und „Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie“).

## 4.1 Das Riemann-Integral

Wir wollen den Flächeninhalt unter der Kurve über dem Intervall wie im Bild gezeigt durch Approximation berechnen:

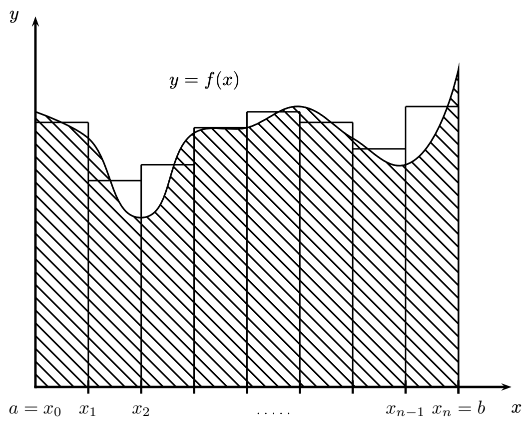


Abbildung 4.1: Der Flächeninalt unter einer Kurve

**Definition 4.1.** Eine endliche Folge $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ heißt eine *Partition* $P$ des Intervalls $[a, b]$. Die Größe $\Delta(P) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ heißt die *Feinheit* der Partition $P$.

$P$ heißt eine *markierte Partition*, falls zusätzlich für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ eine Stelle $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ausgezeichnet wurde.

**Definition 4.2.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $P$ eine markierte Partition. Dann heißt

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

die zu $f$, $P$ gehörige *Riemann-Summe*.

**Definition 4.3.** Die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, falls es eine Zahl $L$ mit den folgenden Eigenschaften gibt: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|S(f,P) - L| \le \epsilon$ für alle markierten Partitionen $P$ mit $\Delta(P) \le \delta$ gilt.
Man schreibt: $L = \int_a^b f(x)\,dx$.

Die Berechnung von $\int_a^b f(x)\,dx$ für eine Riemann-integrierbare (R-integrierbare) Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ unter direkter Verwendung der Definition ist zumindest aufwendig. Später lernen wir bessere Methoden kennen.

*Bemerkung.* $\int$ soll an das Summenzeichen erinnern, $f(x)\,dx$ bleibt vom Produkt $f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ im Limes $\Delta(P) \to 0$ übrig.

## 4.2 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Wir listen hier einige der wichtigsten Eigenschaften des Riemann-Integrals auf.

**Satz 4.4.** *$f$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar. Dann:*

(a) *$kf$ ist R-integrierbar für jedes $k \in \mathbb{R}$ und*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

(b) *$f+g$ ist R-integrierbar und*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

(c) *Gilt $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

*Beweis.* Direkte Anwendung der Definition. Benutzen Sie, dass

$$S(kf,P) = kS(f,P),$$
$$S(f+g,P) = S(f,P) + S(g,P)$$

bzw.

$$S(f,P) \le S(g,P)$$

für alle markierten Partitionen $P$ gilt. □

**Satz 4.5.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar. Dann ist $f$ beschränkt.*

*Beweis.* Es gibt ein $\delta > 0$, so dass

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(f,P) \right| \le \frac{1}{2}$$

für alle markierten Partitionen $P$ mit $\Delta(P) \le \delta$. Folglich

$$|S(f,P_0) - S(f,P_1)| \le \left| \int_a^b f(x)\,dx - S(f,P_0) \right| + \left| \int_a^b f(x)\,dx - S(f,P_1) \right| \le 1,$$

falls $\Delta(P_i) \le \delta$ für $i = 0, 1$.
Wir wählen $q \in \mathbb{N}$ mit $\beta = \frac{b-a}{q} \le \delta$ und setzen $x_j = a + j\beta$ für $j = 0, 1, \ldots, q$. Wir zeigen, dass $M = 1/\beta + \max\limits_{1 \le j \le q} |f(x_j)|$ eine obere Schranke für $|f|$ ist. Wir betrachten dazu die markierte Partition $P_0$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{q-1} < x_q = b$ mit $c_j = x_j$ für $j = 1, \ldots, q$.
Zusätzlich zu $P_0$ betrachten wir für $x \in [x_{i-1}, x_i]$ für ein $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$ die markierte Partition $P_1$, die man erhält, indem man in $P_0$ die Markierung des Intervalls $[x_{i-1}, x_i]$ von $c_i = x_i$ zu $c_i = x$ abändert. Dann gilt $\Delta(P_0) = \Delta(P_1) \le \delta$ und

$$S(f,P_0) - S(f,P_1) = f(x_i)\,(x_i - x_{i-1}) - f(x)\,(x_i - x_{i-1}) = (f(x_i) - f(x))\,\beta.$$

Folglich

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \frac{1}{\beta}\,(S(f,P_0) - S(f,P_1)) - f(x_i) \right| \\ &\le \frac{1}{\beta}\,\big|S(f,P_0) - S(f,P_1)\big| + |f(x_i)| \le \frac{1}{\beta} + |f(x_i)| \le M. \end{aligned}$$

□

Eine oft nützliche Ungleichung ist:

**Satz 4.6.** *$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei R-integrierbar mit $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Dann*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le M\,(b-a)\,.$$

*Beweis.* Für jede markierte Partition $P$ gilt

$$|S(f,P)| \le \sum_{i=1}^{n} |f(c_i)|\,(x_i - x_{i-1}) \le M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = M\,(b-a)\,.$$

□

Bevor wir tatsächlich Integrale berechnen, müssen wir zuerst eine Möglichkeit haben zu entscheiden, ob eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar ist.

**Satz 4.7** (Cauchy–Kriterium)**.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion $f$ genau dann R-integrierbar, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall P_0,\, P_1$ mit $\Delta(P_i) \le \delta$ für $i = 0, 1$ gilt $|S(f, P_0) - S(f, P_1)| \le \epsilon$.*

*Beweis.* ($\Rightarrow$) Diese Richtung ist offensichtlich.

($\Leftarrow$) Wir wählen eine mononton fallende Folge $\{\delta_n\}$ positiver reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass $\Delta(P_i) \le \delta_n$ für $i = 0, 1$

$$|S(f, P_0) - S(f, P_1)| \le \frac{1}{n}$$

impliziert. Wir wählen für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine markierte Partition $P_n$ mit $\Delta(P_n) \le \delta_n$. Dann gilt für $m, n \ge N$, dass

$$|S(f, P_m) - S(f, P_n)| \le \frac{1}{N}.$$

Also ist $\{S(f, P_n)\}$ eine Cauchyfolge. Sei $L = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$. Wir zeigen, dass $\int_a^b f(x)\,dx = L$.

Sei $\epsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $1/N \le \epsilon/2$ und $|S(f, P_N) - L| \le \epsilon/2$. Dann gilt für alle markierten Partitionen $P$ mit $\Delta(P) \le \delta_N$

$$|S(f, P) - L| \le |S(f, P) - S(f, P_N)| + |S(f, P_N) - L| \le \frac{1}{N} + \frac{\epsilon}{2} \le \epsilon.$$

□

**Satz 4.8.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $c \in (a, b)$.*

(a) *Ist $f$ R-integrierbar, dann ist $f$ R-integrierbar auf jedem Teilintervall von $[a, b]$.*

(b) *Ist $f$ R-integrierbar auf den beiden Intervallen $[a, c]$ und $[c, b]$, so ist $f$ R-integrierbar und*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

*Beweis.* Benutze das Cauchy-Kriterium. □

## 4.3 Klassen Riemann-integrierbarer Funktionen

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass Stufenfunktionen, stetige Funktionen und monotone Funktionen sämtlich R-integrierbar sind.

**Definition 4.9.** Eine Funktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *einfache* oder *Stufenfunktion*, falls es endlich viele, paarweise disjunkte Intervalle $I_1, \dots, I_q$ gibt mit $[a, b] = I_1 \cup \dots \cup I_q$, auf denen $\varphi$ konstant ist, d. h.

$$\varphi(x) = c_j, \quad \forall x \in I_j,$$

für $j = 1, \dots, q$ und gewisse Konstanten $c_1, \dots, c_j \in \mathbb{R}$.

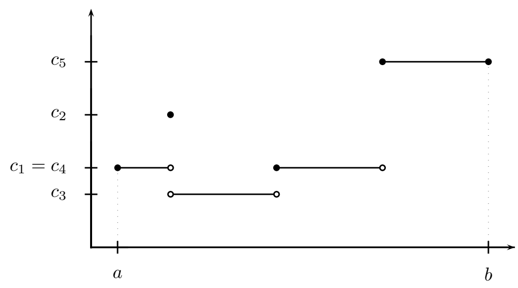


Abbildung 4.2: Eine Stufenfunktion

Insbesondere nimmt eine Stufenfunktion nur endlich viele verschiedene Werte an.

**Satz 4.10.** *Sei $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stufenfunktion wie oben. Dann ist $\varphi$ R-integrierbar und*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^q c_j\,|I_j|,$$

*wobei $|I_j|$ die Länge der Intervalls $I_j$ bezeichnet.*

*Beweis.* Wir betrachten zuerst einen Spezialfall.
Sei $[a',b'] \subseteq [a,b]$ und

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & a \le x \le a', \\ c, & a' \le x \le b', \\ 0, & b' < x \le b, \end{cases}$$

wobei $c > 0$.
Wir zeigen, dass $\varphi$ R-integrierbar ist und

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = c\,(b'-a')\,.$$

Sei $\epsilon > 0$. Wir setzen $\delta = \epsilon/(2c)$. Ist $P$ eine markierte Partition mit $\Delta(P) \le \delta$, so folgt

$$c\,(b'-a'-2\delta) \le S(\varphi,P) \le c\,(b'-a'+2\delta)\,,$$

also

$$\bigl|S(\varphi,P) - c\,(b'-a')\bigr| \le 2c\delta = \epsilon.$$

Damit

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = c\,(b'-a')\,.$$

Analog erhält man dieses Ergebnis auch für $c < 0$ und für Teilintervalle der Form $(a',b')$, $[a',b')$ und $(a',b']$.
Sei nun $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Stufenfunktion. Sei $[a,b] = \bigcup_{j=1}^q I_j$ die Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle wie oben und sei $c_j$ der Wert von $\varphi$ auf $I_j$. Für $j = 1,\dots,q$ definieren wir

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} c_j, & x \in I_j, \\ 0, & x \in [a,b] \setminus I_j. \end{cases}$$

Dann $\varphi = \sum_{j=1}^{q} \varphi_j$, also ist $\varphi$ R-integrierbar und

$$\int_a^b \varphi(x) = \sum_{j=1}^{q} \int_a^b \varphi_j(x)\,dx = \sum_{j=1}^{q} c_j\,|I_j|.$$

□

Wir bereiten nun den Beweis der R-Integrierbarkeit für die anderen beiden Funktionenklassen vor.

**Satz 4.11.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist $f$ genau dann R-integierbar, wenn für jedes $\epsilon > 0$ R-integrierbare Funktionen $g$ und $h$ auf $[a,b]$ existieren mit $g(x) \le f(x) \le h(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und*

$$\int_a^b (h(x) - g(x))\,dx \le \epsilon.$$

*Beweis.* ($\Rightarrow$) Ist $f$ R-integrierbar, so wähle $g = h = f$.

($\Leftarrow$) Wir benutzen das Cauchy-Kriterium um zu zeigen, dass $f$ R-integrierbar ist.

Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $g$, $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar mit $g(x) \le f(x) \le h(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und $\int_a^b (h(x) - g(x))\,dx \le \epsilon$. Es gibt dann ein $\delta > 0$ mit

$$\left| S(g,P) - \int_a^b g(x)\,dx \right| \le \epsilon,$$
$$\left| S(h,P) - \int_a^b h(x)\,dx \right| \le \epsilon$$

für jede markierte Partition $P$ mit $\Delta(P) \le \delta$. Für ein solches $P$ gilt

$$\int_a^b g(x)\,dx - \epsilon \le S(g,P) \le S(f,P) \le S(h,P) \le \int_a^b h(x)\,dx + \epsilon,$$

also falls $P_0$, $P_1$ zwei derartige Partitionen sind, so

$$\begin{aligned} |S(f,P_0) - S(f,P_1)| &\le \left( \int_a^b h(x)\,dx + \epsilon \right) - \left( \int_a^b g(x)\,dx - \epsilon \right) \\ &= \int_a^b (h(x) - g(x))\,dx + 2\epsilon \le 3\epsilon. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis.

□

*Bemerkung.* In diesem Satz kann sogar gefordert werden, dass $g$, $h$ Stufenfunktionen sind.

**Satz 4.12.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f$ R-integrierbar.*

*Beweis.* Sei $\epsilon > 0$. Da $f$ gleichmäßig stetig auf $[a, b]$ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ für alle $x$, $y \in [a, b]$ mit $|x - y| \leq \delta$. Wir wählen $q \in \mathbb{N}$ mit $\beta = \frac{b-a}{q} \leq \delta$ und setzen $x_j = a + j\beta$ für $j = 0, 1, \ldots, q$. Sei $I_j = [x_{j-1}, x_j)$ für $j = 1, 2, \ldots, q - 1$ und $I_q = [x_{q-1}, b]$. Da $f$ auf dem Intervall $[x_{j-1}, x_j]$ seinen kleinsten und größten Wert annimmt, existieren $s_j$, $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$ mit $f(s_j) \leq f(x) \leq f(t_j)$ für alle $x \in [x_{j-1}, x_j]$.
Wir definieren Stufenfunktionen $g$ und $h$ durch $g(x) = f(s_j)$ und $h(x) = f(t_j)$ für $x \in I_j$. Dann gilt $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$\int_a^b (h(x) - g(x))\, dx = \sum_{j=1}^{q} (f(t_j) - f(s_j))\, |I_j| \leq \epsilon \sum_{j=1}^{q} |I_j| = \epsilon\, (b - a)\,.$$

Folglich ist $f$ R-integrierbar. □

**Satz 4.13.** *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist $f$ R-integrierbar.*

*Beweis.* O. B. d. A. sei $f$ monoton wachsend. Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $q \in \mathbb{N}$ mit

$$\beta = \frac{f(b) - f(a)}{q} \leq \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Wir setzen $y_j = f(a) + j\beta$ für $j = 0, 1, \ldots, q$ und weiterhin

$$I_j = \bigl\{x \in [a, b] \bigm| y_{j-1} \leq f(x) < y_j\bigr\}$$

für $j = 1, 2, \ldots, q - 1$ und

$$I_q = \bigl\{x \in [a, b] \bigm| y_{q-1} \leq f(x) \leq f(b)\bigr\}.$$

Da $f$ monoton wachsend ist, ist jede der Mengen $I_j$ entweder ein Intervall oder leer. Wir definieren Stufenfunktionen $g$ und $h$ durch

$$g(x) = y_{j-1}, \quad h(x) = y_j, \quad \forall x \in I_j.$$

Dann gilt $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$\int_a^b (h(x) - g(x))\, dx = \sum_{j=1}^{q} (y_j - y_{j-1})\, |I_j| = \beta \sum_{j=1}^{q} |I_j| = \beta\, (b - a) \leq \epsilon.$$

Folglich ist $f$ R-integrierbar. □

*Bemerkung.* Es gibt andere R-integrierbare Funktionen. Sei beispielsweise $x = p_x/q_x$ mit $p_x$, $q_x \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, $q_x > 0$ für $x \in \mathbb{Q}$. Dann ist die Funktion

$$\beta(x) = \begin{cases} 1/q_x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

eingeschränkt auf jedes kompakte Intervall R-integrierbar. Es gilt $\int_a^b \beta(x)\, dx = 0$ für alle $a$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

## 4.4 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung ist der wichtigste Satz der Analysis überhaupt. Er sagt grob gesprochen, dass das Integrieren die Umkehroperation zum Differenzieren ist.

**Definition 4.14.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $|I| > 0$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$. Dann heißt $F\colon I \to \mathbb{R}$ eine *Stammfunktion* von $f$, falls $F$ differenzierbar ist und $F' = f$.

*Bemerkung.* Zwei Stammfunktionen $F$, $G$ zu $f$ (falls existent) unterscheiden sich um eine additive Konstante, d. h. $F(x) = G(x) + k$ für alle $x \in I$ und ein $k \in \mathbb{R}$.

**Satz 4.15** (Fundamentalsatz)**.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann:*

(a) *Die Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar an allen Stellen $x \in [a,b]$, an denen $f$ stetig ist. An diesen Stellen gilt $F'(x) = f(x)$.*

(b) *Ist $G$ eine Stammfunktion von $f$ auf $[a,b]$, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.*

*Beweis.* Wir beweisen Teil (a).
Wir zeigen zuerst, dass $F$ gleichmäßig stetig auf $[a,b]$ ist.
Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $M > 0$ mit $M \geq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ und setzen $\delta = \epsilon/M > 0$.
Sei $a \leq x < y \leq b$ und $y - x \leq \delta$. Dann

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left| \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| \\ &= \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leq M\,(y-x) \leq M\delta = \epsilon. \end{aligned}$$

Sei nun $c \in [a,b)$ und $f$ stetig an $c$. Wir zeigen, dass $F'(c+0) = f(c)$. Der Beweis, dass $F'(c-0) = f(c)$ für $c \in (a,b]$ und $f$ stetig an $c$ ist ähnlich.
Sei $\epsilon > 0$. Da $f$ stetig an $c$ ist, existiert eine Konstante $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(c)| \leq \epsilon$ für $x \in [a,b]$, $|x - c| \leq \delta$. Sei nun $x \in (c, c+\delta]$. Dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| &= \left| \frac{1}{x-c} \int_c^x f(t)\,dt - \frac{1}{x-c} \int_c^x f(c)\,dt \right| \\ &= \frac{1}{x-c} \left| \int_c^x (f(t) - f(c))\,dt \right| \leq \frac{1}{x-c}\,\epsilon\,(x-c) = \epsilon. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

*Anmerkung.* Für eine differenzierbare Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit R-integrierbarer Ableitung $F'$ gilt

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Dies ist die Formel, die sich effektiv zur Berechnung von Integralen einsetzen läßt.

## 4.5 Weitere Eigenschaften des Riemann-Integrals

### 4.5.1 Integration zusammengesetzter Funktionen

Wir betrachten jetzt Produkte, Quotienten und die Komposition von R-integrierbaren Funktionen.

**Satz 4.16.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist $f$ R-integrierbar genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Partition $P$ des Intervalls $[a,b]$ so existiert, dass*

$$|S(f,P_0) - S(f,P_1)| \le \epsilon$$

*für alle markierten Partitionen $P_0$, $P_1$ mit unterliegender Partition $P$.*

*Beweis.* ($\Rightarrow$) Dies folgt aus dem Cauchy-Kriterium.

($\Leftarrow$) Sei $\epsilon > 0$. Wir konstruieren Stufenfunktionen $g$, $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \le f(x) \le h(x)$ für alle $x$ und $\int_a^b (h(x) - g(x))\,dx \le \epsilon$. Sei $P\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{q-1} < x_q = b$ eine Partition mit der im Satz genannten Eigenschaft.

Wir definieren für $j = 1, \ldots, q$

$$m_j = \inf\bigl\{f(x) \bigm| x_{j-1} < x < x_j\bigr\},$$
$$M_j = \sup\bigl\{f(x) \bigm| x_{j-1} < x < x_j\bigr\}.$$

Wir definieren weiterhin $g, h$ wie folgt:

$$g(x) = m_j,\ h(x) = M_j \quad \text{für } x \in (x_{j-1}, x_j),$$
$$g(x_j) = h(x_j) = f(x_j) \quad \text{für } j = 0, 1, \ldots, q.$$

Indem wir die markierten Partitionen $P_0, P_1$ mit unterliegender Partition $P$ geeignet wählen, erhalten wir

$$S(f,P_0) \ge \int_a^b h(x)\,dx - \epsilon,$$
$$S(f,P_1) \le \int_a^b g(x)\,dx + \epsilon,$$

also

$$\int_a^b (h(x) - g(x))\,dx \le S(f,P_0) - S(f,P_1) + 2\epsilon \le 3\epsilon.$$

Um beispielsweise $S(f,P_0) \ge \int_a^b h(x)\,dx - \epsilon$ für ein geeignetes $P_0$ einzusehen, setzen wir $\delta = \frac{\epsilon}{b-a}$ und wählen die Markierungen $c_j \in (x_{j-1}, x_j)$, so dass $f(c_j) \ge M_j - \delta$. Dann

$$\begin{aligned} S(f,P_0) &= \sum_{j=1}^{q} f(c_j)\,(x_j - x_{j-1}) \\ &\ge \sum_{j=1}^{q} M_j\,(x_j - x_{j-1}) - \delta\,(b-a) = \int_a^b h(x)\,dx - \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist $f$ R-integrierbar.

□

Die Kompositioen stetiger Funktionen ist stetig, die Komposition differenzierbarer Funktionen ist differenzierbar. Für R-integrierbare Funktionen ist dies im Allgemeinen falsch.

*Beispiel* 4.17. Seien $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\beta\colon [0,1] \to [0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0,1], \end{cases} \qquad \beta(x) = \begin{cases} 1/q_x, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$f$, $\beta$ sind beide R-integrierbar, jedoch ist die Funktion $f \circ \beta$,

$$(f \circ \beta)(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

auf $[0,1]$ nicht R-integrierbar.

Es gilt jedoch:

**Satz 4.18.** *Sei $f\colon [a,b] \to [c,d]$ R-integrierbar, $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $g \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar.*

*Beweis.* Sei $M = \max\limits_{x \in [c,d]} |g(x)|$. Sei $\epsilon > 0$ und $\epsilon_1 = \epsilon/(b-a+2M)$. Da $g$ gleichmäßig stetig auf $[c,d]$ ist, existiert eine Konstante $\delta$, $0 < \delta \le \epsilon_1$, mit $|g(x) - g(y)| \le \epsilon_1$ für alle $x, y \in [c,d]$, $|x-y| \le \delta$.
Gemäß dem vorigen Satz existiert eine Partition $P$, so dass

$$|S(f,P_0) - S(f,P_1)| \le \delta^2$$

für alle markierten Partitionen $P_0, P_1$ mit unterliegender Partition $P$. Seien

$$J_1 = \Big\{ j \mid \sup_{s,t \in [x_{j-1},x_j]} |f(s) - f(t)| \le \delta \Big\},$$
$$J_2 = \Big\{ j \mid \sup_{s,t \in [x_{j-1},x_j]} |f(s) - f(t)| > \delta \Big\}.$$

Dann

- $s, t \in [x_{j-1}, x_j]$ für ein $j \in J_1$ impliziert $\big|g\big(f(s)\big) - g\big(f(t)\big)\big| \le \epsilon_1$.
- $s, t \in [x_{j-1}, x_j]$ für ein $j \in J_2$ impliziert $\big|g\big(f(s)\big) - g\big(f(t)\big)\big| \le 2M$.

*Behauptung*: $\sum\limits_{j \in J_2} (x_j - x_{j-1}) \le \delta$.
Wir wählen dazu für jedes $j \in J_2$ Stellen $s_j$, $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$ mit $f(s_j) - f(t_j) > \delta$. Wir setzen weiterhin $s_j = t_j = x_j$ für $j \in J_1$. Seien $Q_0, Q_1$ die markierten Partitionen mit unterliegender Partition $P$ und Markierungen $s_j \in [x_{j-1}, x_j]$ bzw. $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Dann

$$\begin{aligned} \delta \sum_{j \in J_2} (x_j - x_{j-1}) &\le \sum_{j \in J_2} \big(f(s_j) - f(t_j)\big)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \big(f(s_j) - f(t_j)\big)(x_j - x_{j-1}) = |S(f,Q_0) - S(f,Q_1)| \le \delta^2, \end{aligned}$$

also $\sum_{j\in J_2}(x_j - x_{j-1}) \le \delta$.
Seien nun $P_0, P_1$ irgendwelche markierten Partitionen mit unterliegender Partition $P$ (und Markierungen $u_j \in [x_{j-1}, x_j]$ bzw. $v_j \in [x_{j-1}, x_j]$). Dann

$$\begin{aligned}|S(g\circ f, P_0) - S(g\circ f, P_1)| &\le \sum_{j\in J_1} \big|g\big(f(u_j)\big) - g\big(f(v_j)\big)\big|\,(x_j - x_{j-1}) \\ &\qquad + \sum_{j\in J_2} \big|g\big(f(u_j)\big) - g\big(f(v_j)\big)\big|\,(x_j - x_{j-1}) \\ &\le \sum_{j\in J_1} \epsilon_1\,(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j\in J_2} 2M\,(x_j - x_{j-1}) \\ &\le \epsilon_1(b-a) + 2M\delta \le \epsilon_1(b-a+2M) = \epsilon.\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

**Satz 4.19.** *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar. Dann:*

(a) *Die Funktion $|f|$ ist R-integrierbar, und $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$.*

(b) *Die Funktion $fg$ ist R-integrierbar.*

(c) *Die Funktion $f/g$ ist R-integrierbar, falls $g \ge c$ für ein $c > 0$.*

*Beweis.* Die Funktion $x \mapsto |x|$, $x^2$ und $\frac{1}{x}$ für $x \ge c$ sind stetig. Beispielsweise folgt, dass die Funktionen $f^2$, $g^2$, $(f+g)^2$ und damit auch die Funktion $fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$ R-integrierbar sind. □

### 4.5.2 Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

**Satz 4.20.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nichtnegativ und R-integrierbar. Dann existiert ein $c \in [a,b]$ mit*

$$f(c)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

*Beweis.* Sei $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ und $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Da $g(x) \ge 0$ für alle $x \in [a,b]$, gilt dann

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Folglich existiert ein $d \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = d\int_a^b g(x)\,dx.$$

Der Zwischenwertsatz liefert ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = d$, also

$$f(c)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

□

*Bemerkung.* Ein Spezialfall ergibt sich, wenn $g(x) = 1$ für alle $x$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

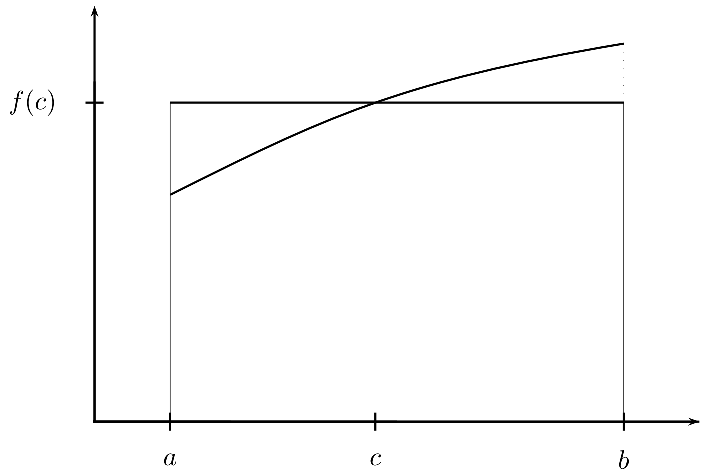


Abbildung 4.3: Geometrische Interpretation: Die Fläche unter der Kurve und die Fläche des Rechtecks sind gleich.

### 4.5.3 Partielle Integration

**Satz 4.21.** *$f$, $g$: $[a,b] \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar mit $f'$, $g'$ R-integrierbar. Dann gilt:*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

*Bemerkung.* Für $f(b)g(b) - f(a)g(a)$ schreibt man auch $fg\big|_a^b = f(x)g(x)\big|_{x=a}^b$.

*Beweis.* Das Produkt $fg$ ist differenzierbar mit R-integrierbarer Ableitung $f'g+fg'$. Also

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x) = \int_a^b (fg)'(x)\,dx = fg\big|_a^b.$$

□

*Beispiel* 4.22.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} x\sin x\,dx &= -\int_0^{\pi/3} x\,\frac{d}{dx}(\cos x)\,dx\\ &= -x\cos x\big|_0^{\pi/3} + \int_0^{\pi/3} \frac{d}{dx}(x)\cos x\,dx\\ &= -\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \int_0^{\pi/3} \cos x\,dx = -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} + \sin x\big|_0^{\pi/3} = -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

### 4.5.4 Substitution

**Satz 4.23.** *Sei $g\colon [a,b] \to [c,d]$ differenzierbar mit R-integrierbarer Ableitung $g'$. Sei $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $(f \circ g)\, g'$ R-integrierbar und*

$$\int_a^b f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.$$

*Beweis.* Sei $F(x) = \int_c^x f(s)\,ds$ für $x \in [c,d]$ und $G(x) = F\big(g(t)\big)$. Dann ist $G$ differenzierbar mit $G'(t) = F'\big(g(t)\big)g'(t) = f\big(g(t)\big)g'(t)$. Folglich

$$\int_a^b f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt = G(b) - G(a) = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.$$

□

*Bemerkung.* (a) Die Substitutionsregel merkt man sich am einfachsten in der Form $f(x) = f(g(t))$ sowie $dx = g'(t)\,dt$ nach Differentiation von $x = g(t)$.

(b) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar. Dann setzen wir

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dies ist beispielsweise in der Substitutionsformel

$$\int_a^b f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

von Bedeutung, da unter unseren allgemeinen Annahmen durchaus $g(a) > g(b)$ gelten kann.

*Beispiel* 4.24.

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Substituiere $x = t^2$ mit $t \in [0, \sqrt{3}]$. Dann $dx = 2t\,dt$ und

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2t\,dt}{t(1+t^2)} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 2\arctan t\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3},\end{aligned}$$

da $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\tan 0 = 0$.

## 4.6 Unbestimmte Integrale

**Definition 4.25.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $|I| > 0$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ R-integrierbar auf jedem beschränkten, abgeschlossenen Teilintervall von $I$. Dann bezeichnet der Ausdruck

$$\int f(x)\,dx$$

eine *beliebige* Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ der Form $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt + k$ mit $c \in I$, $k \in \mathbb{R}$. $\int f(x)\,dx$ heißt das *unbestimmte Integral* von $f$.

*Beispiel* 4.26. (a) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + k$.

(b) $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + k$, $x \neq 0$.

*Bemerkung.* Die Integrationskonstante $k$ lässt man häufig fort.

### 4.6.1 Integrationsregeln

1. $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

3. **Lineare Transformation im Argument.** Ist $\int f(x)\,dx = F(x) + k$ bekannt, so
$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,F(ax+b) + k,$$
für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

*Beispiel* 4.27. (a) $\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + k$.

(b) $\int \frac{dx}{1+(x+b)^2} = \arctan(x+b) + k$.

4. **Logarithmische Integration.**
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + k, \quad f(x) \neq 0.$$

5. **Substitution.** Gilt $x = g(t)$ und bezeichnet $t = h(x)$ die Umkehrfunktion zu $x = g(t)$, so
$$\int f(x)\,dx = \int f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt\,\Big|_{t=h(x)}.$$

*Beispiel* 4.28. Das Integral $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$ ist zu berechnen. Wir substituieren $x = \log t$ mit $t > 0$, also $dx = \frac{dt}{t}$, und erhalten
$$\begin{aligned}\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx &= \int \frac{t-1}{t+1}\frac{dt}{t} = \int \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t}\right)\,dt \\ &= 2\log(t+1) - \log t + k = 2\log(e^x + 1) - x + k.\end{aligned}$$

6. **Partielle Integration.**
$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

*Beispiel* 4.29.
$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= -\int x\,(\cos x)'\,dx \\ &= -x\cos x + \int 1\cdot\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + k.\end{aligned}$$

| | |
|---|---|
| Potenzen | |
| $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, | $n \neq -1$ |
| $\int \frac{dx}{x} = \log\|x\|$ | |
| Exponentialfunktionen | |
| $\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x$ | |
| $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}$, | $a > 0$ |
| Trigonometrische Funktionen | |
| $\int \sin x\,dx = -\cos x$ | |
| $\int \cos x\,dx = \sin x$ | |
| $\int \tan x\,dx = -\log\|\cos x\|$ | |
| $\int \cot x\,dx = \log\|\sin x\|$ | |
| $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$ | |
| $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$ | |
| Hyperbelfunktionen | |
| $\int \sinh x\,dx = \cosh x$ | |
| $\int \cosh x\,dx = \sinh x$ | |
| $\int \tanh x\,dx = \log\cosh x$ | |
| $\int \coth x\,dx = \log\|\sinh x\|$ | |
| $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$ | |
| $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x$ | |
| Gebrochen-rationale Funktionen | |
| $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$, | $a > 0$ |
| $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctanh}\frac{x}{a} = \frac{1}{2a}\log\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|$, | $\|x\| < a$ |
| $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arccoth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2a}\log\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|$, | $0 < a < \|x\|$ |
| Irrationale Funktionen | |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$, | $\|x\| < a$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{arcsinh}\frac{x}{a} = \log\left\|x+\sqrt{x^2+a^2}\right\|$, | $a > 0$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} = \log\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|$, | $0 < a < \|x\|$ |

Tabelle 4.1: Tabelle der Grundintegrale

### 4.6.2 Grundintegrale

Man wertet unbestimmte Integrale aus, indem man diese mittels obiger Integrationsregeln auf gewisse bekannte Grundintegrale zurückführt. Diese Grundintegrale finden Sie in Tabelle 4.6.2.

Weitere Integrale finden Sie in Tabellen und Nachschlagewerken.

## 4.7 Integration einiger Funktionenklassen

Die meisten Funktionen lassen sich *nicht in geschlossener Form* integrieren. Bekannte Beispiele sind

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}}$$

für $n \geq 3$ oder

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx.$$

Wir lernen jetzt einige Beispiele kennen, wo dies doch geht.

### 4.7.1 Rationale Funktionen

**Ganzrationale Funktionen (Polynome)**

Polynome werden gliedweise integriert:

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n)\, dx$$
$$= \frac{a_0}{n+1}\, x^{n+1} + \frac{a_1}{n}\, x^n + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2}\, x^2 + a_n x + k.$$

**Gebrochen-rationale Funktionen**

Integrale der Form $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ mit $P(x)$, $Q(x)$ Polynome werden ausgewertet, indem man die *Partialbruchzerlegung* des Bruches $\frac{P(x)}{Q(x)}$ herstellt und anschließend gliedweise integriert. O. B. d. A. sei $\deg P < \deg Q$, ansonsten Abspalten des ganzrationalen Anteils. Der höchste Koeffizient von $Q$ sei 1.

**Satz 4.30.** *Sei*

$$Q(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \cdots \left(x^2 + px + q\right)^m \left(x^2 + rx + s\right)^n \cdots$$

*die Zerlegung von* $Q(x)$ *in lineare und quadratische Faktoren, wobei* $p^2 < 4q$, $r^2 < 4s$, *... Dann gibt es reelle Zahlen* $A_1, A_2, \ldots, A_k,\ B_1, B_2, \ldots, B_l, \ldots,$ $C_1, D_1, \ldots, C_m, D_m, \ldots,$ *so dass*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} \\ &+ \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} + \ldots \\ &+ \frac{C_1 x + D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{C_m x + D_m}{(x^2+px+q)^m} + \ldots\end{aligned}$$

*Beweis.* Dieser Satz wird elegant in der Vorlesung „Funktionentheorie" bewiesen. □

*Beispiel* 4.31. (a)

$$\frac{x^3+3x-7}{x\,(x+1)^3} = -\frac{7}{x} + \frac{8}{1+x} + \frac{5}{(1+x)^2} + \frac{11}{(1+x)^3}.$$

(b)

$$\frac{4x^2+1}{x^3+x^2+x} = \frac{1}{x} + \frac{3x-1}{x^2+x+1}.$$

Wie findet man nun diese Partialbruchzerlegung?
Im Spezialfall, dass alle Nullstellen von $Q(x)$ einfach und reell sind, gilt:

**Satz 4.32.** *Sei $Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\lambda)$, wobei die Nullstellen $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ paarweise verschieden sind. Dann gilt*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \cdots + \frac{L}{x-\lambda}$$

*mit*

$$A = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)},\ B = \frac{P(\beta)}{Q'(\beta)},\ \ldots,\ L = \frac{P(\lambda)}{Q'(\lambda)}.$$

*Bemerkung.* Die Tatsache, dass $\alpha$ eine einfache Nullstelle von $Q$ ist, garantiert, dass $Q'(\alpha) \neq 0$. Analog für $\beta, \ldots, \lambda$.

*Beweis.* Sei $Q(x) = (x-\alpha)\,R(x)$ mit $R(x)$ ein Polynom, $R(\alpha) \neq 0$. Wegen $Q'(x) = R(x) + (x-\alpha)\,R'(x)$ gilt $Q'(\alpha) = R(\alpha) \neq 0$, also

$$\frac{P(x)}{R(x)} = A + (x-\alpha)\left[\frac{B}{x-\beta} + \cdots + \frac{L}{x-\lambda}\right]$$

und für $x = \alpha$

$$A = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}.$$

□

Im Allgemeinen bestimmt man die Partialbruchzerlegung mit der *Methode der unbestimmten Koeffizienten.*

*Beispiel* 4.33. Wir interessieren uns für die rationale Funktion $\frac{2x^3+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$.
Als erstes faktorisieren wir das Nennerpolynom:

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(1+x^2).$$

Gemäß des allgemeinen Satzes gibt es eine Partialbruchzerlegung der Form

$$\frac{2x^3+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

mit *unbestimmten Koeffizienten* $A_1$, $A_2$, $C$, $D$. Um $A_2$ zu finden, multiplizieren wir letztere Gleichung mit $(x-1)^2$ und erhalten

$$\frac{2x^3+2}{x^2+1} = A_1(x-1) + A_2 + \frac{Cx+D}{x^2+1}\,(x-1)^2$$

bzw. für $x = 1$

$$A_2 = \frac{2\cdot 1^2+2}{1^2+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Damit

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{2x^3+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2}{x^3-x^2+x-1}.$$

Um nun $A_1$ zu finden, multiplizieren wir diese Gleichung mit $x-1$ und erhalten

$$A_1 + \frac{Cx+D}{x^2+1}\,(x-1) = \frac{2x^2}{x^2+1}$$

bzw. für $x = 1$

$$A_1 = \frac{2\cdot 1^2}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Somit ist schließlich

$$\frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{2x^2}{x^3-x^2+x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2+1},$$

also $C = D = 1$. Die gesuchte Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{2x^3+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Eine weitere Methode werden Sie in der Vorlesung „Funktionentheorie“ kennenlernen.

### Wie integriert man das Ergebnis einer Partialbruchzerlegung?

Wir wissen bereits, dass

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\,dx = \begin{cases} A\log|x-a|\,, & \text{für } k=1,\\ -\dfrac{A}{k-1}\,\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}} & \text{für } k\geq 2.\end{cases}$$

Beim Integral $\displaystyle\int \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^m}\,dx$, wobei $p^2 < 4q$, verfahren wir wie folgt:

1. Schreiben den Zähler als
$$Cx+D = \frac{C}{2}\,(2x+p) + \Big(D - \frac{Cp}{2}\Big).$$

2. Zerlegen den Integranden in zwei Summanden, wobei der erste Summand (ohne den konstanten Faktor) direkt integriert werden kann:
$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \begin{cases} \log\left|x^2+px+q\right|\,, & \text{für } m=1,\\ -\dfrac{1}{m-1}\,\dfrac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}}, & \text{für } m\geq 2.\end{cases}$$

3. Der zweite Summand (ohne den konstanten Faktor) wird rekursiv behandelt: Für $m \geq 2$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} &= \frac{x+p/2}{2(m-1)\,(q-p^2/4)}\,\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}} \\ &\quad + \frac{2m-3}{2(m-1)\,(q-p^2/4)}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}\end{aligned}$$

sowie für $m = 1$

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2\arctan\!\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)}{\sqrt{4q-p^2}} + k.$$

*Beweis für $m \geq 2$.* Die rechte Seite ist von der Form

$$A\,\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{m-1}} + B\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}$$

mit zwei Konstanten $A$, $B$. Differentation dieses Ausdrucks nach $x$ ergibt

$$\begin{aligned}&\frac{2A}{(x^2+px+q)^{m-1}} - A\,(m-1)\,\frac{(2x+p)^2}{(x^2+px+q)^m} + \frac{2A}{(x^2+px+q)^{m-1}} \\ &= \frac{1}{(x^2+px+q)^m}\left((2A+B)(x^2+px+q) - A\,(m-1)\,(4x^2+4px+p^2)\right).\end{aligned}$$

Letzterer Ausdruck ist gleich $(x^2+px+q)^{-m}$, falls

$$2A + B = 4A\,(m-1)\,, \quad A\,(m-1)\left(4q-p^2\right) = 1,$$

d. h., $B = 2A\,(2m-3)$, $A = \dfrac{1}{4\,(m-1)\,(q-p^2/4)}$.[1] □

*Beispiel* 4.34. Hier führen wir die partielle Integration direkt aus:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{2x+1}\left(\frac{(2x+1)^2}{x^2+x+1}\right)' dx \\ &= \frac{1}{3}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= \frac{1}{3}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

### 4.7.2 Irrationale Funktionen

Wir diskutieren einige weitere Beispiele.

[1] Der Weg über eine direkte partielle Integration ist etwas komplizierter. Die Formel $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ liefert mit $f(x) = \dfrac{A}{(2x+p)^{2m-3}}$, $g(x) = \frac{(2x+p)^{2m-2}}{(x^2+px+q)^{m-1}}$ aber auch das gewünschte Resultat.

(i) **Integrale der Form $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$**, $R$ eine rationale Funktion.

Die universelle Substitution ist $t = \tan\frac{x}{2}$, d. h. $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ und $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

*Beispiel* 4.35.

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx &= \int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt = \frac{t^2}{4}+t+\frac{1}{2}\log|t|+k \\ &= \frac{\tan^2\frac{x}{2}}{4}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+k.\end{aligned}$$

In einigen Fällen kommt man schneller zum Ziel, z. B. **Integrale der Form $\int R(\sin x)\cos x\, dx$** und **$\int R(\cos x)\sin x\, dx$** behandelt man mittels der Substitutionen $t = \sin x$, $\cos x\, dx = dt$ bzw. $t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$.

(ii) **Integrale der Form $\int R(\mathrm{e}^{mx}, \mathrm{e}^{nx}, \ldots, \mathrm{e}^{px})\, dx$**, $R$ eine rationale Funktion, $m, n, \ldots, p \in \mathbb{Q}$.

Wir behandeln diese Integrale mittels zweier Substitutionen:

(a) $t = \mathrm{e}^x$ ergibt das Integral $\int R(t^m, t^n, \ldots, t^p)\,\frac{dt}{t}$.

(b) $z = \sqrt[r]{t}$, wobei $r$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner der Brüche $m, n, \ldots, p$ bezeichnet.

Das ergibt schließlich das Integral einer rationalen Funktion in $z$.

*Beispiel* 4.36. (a)

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{t}{1+t^2}\,\frac{dt}{t} = \arctan t + k = \arctan(e^x)+k.$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{x/2}}{1+e^x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,\frac{dt}{t} = 2\int \frac{z^2}{z^2+z^4}\,dz \\ &= 2\int \frac{dz}{1+z^2} = 2\arctan z + k = 2\arctan(\mathrm{e}^{x/2})+k,\end{aligned}$$

wobei $z = \sqrt{t} = e^{x/2}$, $2z\,dz = dt$ und $dt/t = dx$.

(iii) **Integrale der Form $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$**, $R$ eine rationale Funktion.

Hier führt eine der drei *Eulerschen Substitutionen* zum Ziel. Für $a > 0$ substituiert man

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x,$$

für $c > 0$
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c},$$
und falls das Polynom $ax^2 + bx + c$ zwei verschiedene reelle Nullstellen besitzt,
$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta), \ \ \alpha \neq \beta,$$
so
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha).$$

*Beispiel* 4.37. Für $0 < x < 2$,
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = -2 \int \frac{dt}{1 + t^2} = -2 \arctan t + k = -2 \arctan \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x} + k,$$
mit der Substitution $\sqrt{2x - x^2} = tx$, also
$$\frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = -\frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Weiter Beispiele finden Sie wiederum in Tabellen und Nachschlagewerken.

## 4.8 Uneigentliche Integrale

Wir wollen nun Integrale der Form
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^\infty e^{-x}\, dx, \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\, dx, \quad \text{usw.}$$
behandeln.

**Definition 4.37.** Sei $f \colon [a, b) \to \mathbb{R}$ ($b = \infty$ ist möglich) R-integrierbar auf jedem Intervall der Form $[a, c]$ mit $a < c < b$. Dann setzen wir
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)\, dx,$$
sofern dieser Limes existiert. Wie im Fall von Folgen spricht man von *konvergenten*, *bestimmt divergenten* und *unbestimmt divergenten uneigentlichen Integralen*.

Eine analoge Definition gilt im Fall $f \colon (a, b] \to \mathbb{R}$. Für $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ wählen wir ein $c \in (a, b)$ und setzen
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &= \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \\ &= \lim_{c' \to a+0} \int_{c'}^c f(x)\, dx + \lim_{c'' \to b-0} \int_c^{c''} f(x)\, dx,\end{aligned}$$
sofern diese Grenzwerte existieren und nicht der eine $-\infty$, während der andere $+\infty$ ist.

*Beispiel* 4.38. (a)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to+0} 2\sqrt{x}\,\Big|_\epsilon^1 = 2.$$

(b)

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^R = 1.$$

**Satz 4.39** (Cauchy-Kriterium)**.** *Sei $f\colon [a,b)\to\mathbb{R}$ wie oben*[2]*. Dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ genau dann, wenn für $c$, $d\in[a,b)$ mit $c<d$*

$$\int_c^d f(x)\,dx \to 0$$

*für $c\to b-0$ gilt.*

*Beweis.* Der Beweis ist ganz ähnlich dem des Cauchy-Kriteriums für R-Integrierbarkeit. □

**Satz 4.40.** *Seien $f,g\colon [a,b)\to\mathbb{R}$ (der Fall $b=\infty$ ist möglich) R-integrierbar auf jedem Intervall der Form $[a,c]$ mit $a<c<b$. Dann gilt:*

(a) *Konvergiert das Integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$, so konvergiert auch das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, und es gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

(b) *Es gelte $0\le f(x)\le g(x)$ für $a\le x\le b$. Dann impliziert die Konvergenz von $\int_a^b g(x)\,dx$ die Konvergenz des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ und die Divergenz von $\int_a^b f(x)\,dx$ die Divergenz des Integrals $\int_a^b g(x)\,dx$.*

*Beweis.* (a) Für $c$, $d\in[a,b)$ mit $c<d$ gilt

$$\left|\int_c^d f(x)\,dx\right| \le \int_c^d |f(x)|\,dx \to 0$$

für $c\to b-0$.

(b) Es gilt

$$0\le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx,$$

und daraus folgt die Behauptung.

□

**Definition 4.41.** Ist Bedingung (a) des vorigen Satzes erfüllt, so heißt das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *absolut konvergent.*

[2]Das heißt lokal R-integrierbar auf dem Intervall $[a,b)$.

Also absolute Konvergenz impliziert Konvergenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

*Beispiel* 4.42. Wir untersuchen das *Dirichlet-Integral*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

auf Konvergenz.

(i) Das Dirichlet-Integral konvergiert: Für $0 < a < b < \infty$ gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx &= \int_a^b \frac{1}{x} \frac{d}{dx}(1-\cos x)\; dx \\ &= \frac{1-\cos b}{b} - \frac{1-\cos a}{a} + \int_a^b \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx,\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck konvergiert für $a \to +0$, $b \to \infty$. Tatsächlich ist der Wert des Integrals $\pi/2$ (eventuell später).

(ii) Das Dirichlet-Integral ist nicht absolut konvergent: Wir benutzen die Abschätzung $|\sin x| \geq \sin^2 x = (1-\cos(2x))/2$ und erhalten

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1-\cos(2x)}{x}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \left( \log R - \frac{\sin(2x)}{2x}\Big|_1^R - \int_1^R \frac{\sin(2x)}{2x^2}\, dx \right) \to \infty \quad \text{für } R \to \infty.\end{aligned}$$

Die Konvergenz des Dirichlet-Integrals resultiert aus den Oszillationen des Integranden:

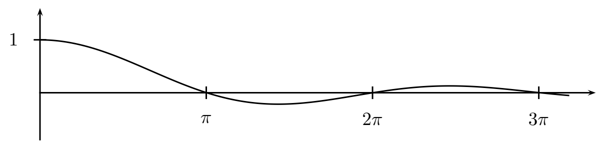


Abbildung 4.4: Die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

### Integrale mit unbeschränkten Integranden

**Satz 4.43.** *Sei $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ wie oben, $b$ endlich. Gibt es Konstanten $\alpha < 1$ und $M > 0$ mit*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{(b-x)^\alpha}$$

*für alle $x \in [a,b)$, so konvergiert das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ absolut. Gilt hingegen*

$$f(x) \geq \frac{M}{b-x}$$

*für alle $x \in [a,b)$ mit einem gewissen $M > 0$, so divergiert das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$.*

*Beweis.* Dies folgt aus

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^b = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

für $\alpha < 1$ bzw. aus

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = -\log(b-x)\Big|_a^b = \infty.$$

□

*Beispiel* 4.44. Das Integral

$$\int_0^1 \frac{(\log x)^k}{x^\alpha}\,dx$$

für $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert absolut für $\alpha < 1$ und divergiert für $\alpha \geq 1$.

**Integrale über unendliche Intervalle**

**Satz 4.45.** *Sei $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ wie oben. Gibt es Konstanten $\alpha > 1$ und $M > 0$ mit*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{x^\alpha}$$

*für $x \geq \max\{1,a\}$, so konvergiert das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ absolut. Gilt hingegen*

$$f(x) \geq \frac{M}{x}$$

*für $x \geq \max\{1,a\}$ mit einem gewissen $M > 0$, so divergiert das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$.*

*Beweis.* Dies folgt aus

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = -\frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}\Big|_1^\infty = \frac{1}{\alpha-1}$$

für alle $\alpha > 1$ bzw.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \log x\Big|_1^\infty = \infty.$$

□

*Beispiel* 4.46. Das Integral

$$\int_1^\infty \frac{(\log x)^k}{x^\alpha}\,dx$$

für $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert absolut für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$.

## 4.9 Parameter-Integrale

Wir betrachten jetzt den für Anwendungen wichtigen Fall, dass der Integrand von einem Parameter $p$ abhängt.[3]
Sei also $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Parameterintervall und $f\colon [a,b] \times J \to \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass für jedes feste $p \in J$ die Funktion $f(\cdot,p)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar ist und setzen dann

$$F(p) = \int_a^b f(x,p)\,dx.$$

Wir interessieren uns für die Eigenschaften der Funktion $F\colon J \to \mathbb{R}$.

**Satz 4.47.** *Ist $f\colon [a,b] \times J \to \mathbb{R}$ stetig[4], so ist auch $F\colon J \to \mathbb{R}$ stetig.*

*Beweis.* Wir dürfen annehmen, dass $J = [c,d]$. Dann ist $f$ gleichmäßig stetig. Wir wählen ein $\epsilon > 0$ und finden dann ein $\delta > 0$, so dass $|f(x,p) - f(y,q)| \leq \epsilon$ für alle $(x,p),(y,q) \in [a,b] \times [c,d]$ mit $|x-y| + |p-q| \leq \delta$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} |F(p) - F(q)| &= \left| \int_a^b f(x,p)\,dx - \int_a^b f(x,q)\,dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x,p) - f(x,q)|\;dx \leq \epsilon(b-a) \end{aligned}$$

für alle $p,q \in [c,d]$ mit $|p-q| \leq \delta$. Das beendet den Beweis. $\square$

**Satz 4.48.** *Seien $f$, $\dfrac{\partial f}{\partial p}\colon [a,b] \times J \to \mathbb{R}$ stetig[5]. Dann ist die Funktion $F$ differenzierbar und es gilt*

$$F'(p) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\,dx.$$

*Beweis.* Für $p$, $p+h \in J$, $h \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} &\frac{F(p+h) - F(p)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\,dx \\ &\qquad = \int_a^b \left( \frac{f(x,p+h) - f(x,p)}{h} - \frac{\partial f}{\partial p}(x,p) \right) dx \\ &\qquad = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial p}(x,q) - \frac{\partial f}{\partial p}(x,p) \right) dx, \end{aligned}$$

wobei $q = q(x,p,h)$ zwischen $p$ und $p+h$ liegt. Daraus folgt wie im Beweis des vorigen Satzes, dass

$$\frac{F(p+h) - F(p)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\,dx \to 0$$

[3] Tatsächlich müssen wir dafür reelle Funktionen betrachten, die von mehr als einer Veränderlichen abhängen. Wir werden an den entsprechenden Stellen die Definitionen von Stetigkeit und (partieller) Differenzierbarkeit in diesem Fall aussprechen.

[4] $f$ heißt stetig an der Stelle $(x_0,p_0) \in [a,b] \times J$, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x,p) \in [a,b] \times J$: $|x - x_0| + |p - p_0| \leq \delta$ impliziert $|f(x,p) - f(x_0,p_0)| \leq \epsilon$.

[5] $\dfrac{\partial f}{\partial p}(x,p) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x,p+h) - f(x,p)}{h}$ (falls existent) ist die partielle Ableitung von $f$ bezüglich $p$ an der Stelle $(x,p)$.

für $h \to 0$ bei festem $p \in J$. □

*Beispiel* 4.49. (a)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+p} = \log(x+p)\big|_0^1 = \log(1+\frac{1}{p}), \quad p > 0.$$

(b)

$$\int_0^1 x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}, \quad p > -1.$$

Der vorige Satz ist ein Spezialfall des folgenden Satzes:

**Satz 4.50.** *Seien* $f, \frac{\partial f}{\partial p} \colon [a,b] \times J \to \mathbb{R}$ *stetig,* $\alpha, \beta \colon J \to [a,b]$ *differenzierbar. Dann ist die Funktion*

$$F(p) = \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} f(x,p)\,dx$$

*differenzierbar und*

$$F'(p) = \beta'(p) f\left(\beta(p), p\right) - \alpha'(p) f\left(\alpha(p), p\right) + \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\,dx.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{F(p+h)-F(p)}{h} &- \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\,dx \\
&= \frac{1}{h}\int_{\beta(p)}^{\beta(p+h)} f(x,p+h)\,dx - \frac{1}{h}\int_{\alpha(p)}^{\alpha(p+h)} f(x,p+h)\,dx \\
&\quad + \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \left(\frac{f(x,p+h)-f(x,p)}{h} - \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\right) dx \\
&= \frac{\beta(p+h)-\beta(p)}{h} f(s,p+h) - \frac{\alpha(p+h)-\alpha(p)}{h} f(r,p+h) \\
&\quad + \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \left(\frac{\partial f}{\partial p}(x,q) - \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\right) dx,
\end{aligned}$$

wobei $q, r, s$ von $x, p, h$ abhängen, $r \in [\alpha(p), \alpha(p+h)]$ (bzw. $r \in [\alpha(p+h), \alpha(p)]$, falls $\alpha(p+h) < \alpha(p)$), $s \in [\beta(p), \beta(p+h)]$ (bzw. $s \in [\beta(p+h), \beta(p)]$, falls $\beta(p+h) < \beta(p)$) und $q \in [p, p+h]$ (bzw. $q \in [p+h, p]$, falls $p+h < p$). Im Grenzübergang $h \to 0$ erhalten wir als Limes

$$\beta'(p) f\left(\beta(p), p\right) - \alpha'(p) f\left(\alpha(p), p\right) + 0.$$

□

*Beispiel* 4.51.

$$F(p) = \int_1^{p^2} \log(x+p)\,dx, \quad p > 0.$$

$F$ ist differenzierbar mit

$$\begin{aligned} F'(p) &= 2p\log(p^2+p) + \int_1^{p^2} \frac{dx}{x+p} \\ &= 2p\log(p^2+p) + \log(x+p)\Big|_1^{p^2} \\ &= (2p+1)\big(\log(p+1)+\log p\big) - \log(p+1) \\ &= 2p\log(p+1) + (2p+1)\log p. \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Für Parameterintegrale, die von mehr als einem Parameter abhängen, gelten analoge Sätze.

### Uneigentliche Integrale, die einen Parameter enthalten

Im Fall uneigentlicher Integrale benötigen wir eine weitere Bedingung, um die stetige Abhängigkeit vom Parameter sicherzustellen.

**Definition 4.52.** Sei $f\colon [a,b)\times J \to \mathbb{R}$, $f(\cdot,p)$ sei R-integrierbar auf jedem kompakten Teilintervall von $[a,b)$ und $\int_a^b f(x,p)\,dx$ konvergiere für alle $p \in J$. Dann sagt man, dass das Integral

$$\int_a^b f(x,p)\,dx$$

*gleichmäßig in* $p \in J$ konvergiert, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists c \in (a,b)\ \forall d \in [c,b)$ mit

$$\left|\int_d^b f(x,p)\,dx\right| \le \epsilon$$

für alle $p \in J$.

**Satz 4.53.** *Sei $f\colon [a,b)\times J \to \mathbb{R}$ stetig und $\int_a^b f(x,p)\,dx$ konvergiere gleichmäßig in $p \in J$. Dann ist die Funktion $F\colon J \to \mathbb{R}$,*

$$F(p) = \int_a^b f(x,p)\,dx$$

*stetig.*

*Beweis.* O. B. d. A. sei $J$ kompakt. Sei $p \in J$ und $\epsilon > 0$. Wir wählen ein $c \in (a,b)$ wie in obiger Definition. Die Funktion $f\colon [a,c]\times J \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig, also existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x,p)-f(x,q)| \le \epsilon/(c-a)$ für alle $(x,q) \in [a,c]\times J$ mit $|p-q| \le \delta$ gilt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} &|F(p)-F(q)| \\ &\qquad \le \int_a^c |f(x,p)-f(x,q)|\,dx + \left|\int_c^b f(x.p)\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x.p)\,dx\right| \le 3\epsilon, \end{aligned}$$

und die Funktion $F$ ist an der Stelle $p$ stetig. ∎

**Satz 4.54.** *Seien* $f, \frac{\partial f}{\partial p} \colon [a,b) \times J \to \mathbb{R}$ *stetig und* $\int_a^b f(x,p_0)\,dx$ *konvergiere für ein* $p_0 \in J$. *Weiterhin konvergiere* $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\,dx$ *gleichmäßig in* $p \in J$. *Dann konvergiert das Integral* $\int_a^b f(x,p)\,dx$ *gleichmäßig in* $p \in J$, *die Funktion* $F(p) = \int_a^b f(x,p)\,dx$ *ist differenzierbar und es gilt*

$$F'(p) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\,dx.$$

*Beweis.* Wie in den Beweisen von Satz 4.48 und Satz 4.53. □

### Die Gamma-Funktion

Die *Gamma-Funktion* ist ein wichtiges Beispiel einer durch ein uneigentliches Parameterintegral definierten Funktion.

**Definition 4.55.** Für $p > 0$ setzen wir

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx.$$

**Satz 4.56.** *Das Integral*

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx$$

*konvergiert gleichmäßig in* $p \in [p_0, p_1]$, *wobei* $0 < p_0 < p_1 < \infty$.

*Beweis.* Sei $p \in [p_0, p_1]$, $R \geq 1$. Dann

$$\begin{aligned}
\int_R^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx &= \int_R^\infty x^{p-1} \frac{d}{dx}(-e^{-x})\,dx \\
&= -\,x^{p-1} e^{-x}\Big|_R^\infty + (p-1) \int_R^\infty x^{p-2} e^{-x}\,dx \\
&= R^{p-1} e^{-R} + (p-1) \int_R^\infty x^{p-2} \frac{d}{dx}(-e^{-x})\,dx \\
&\quad \vdots \\
&= e^{-R} \sum_{j=1}^{q-1} \gamma_{pj} R^{p-j} + \gamma_{pj} \int_R^\infty x^{p-q} e^{-x}\,dx,
\end{aligned}$$

wobei

$$\gamma_{pj} = \begin{cases} 1, & \text{für } j = 1, \\ (p-1)(p-2)\cdots(p-j+1), & \text{für } j \geq 2. \end{cases}$$

Für $q \geq p_1 + 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_R^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx \\
&\leq Ce^{-R} R^{p-1} + C \int_R^\infty x^{-2} e^{-x}\,dx \leq Ce^{-R} R^{b-1} + CR^{-1}
\end{aligned}$$

mit einer gewissen Konstanten $C > 0$, *die nicht von* $p \in [p_0, p_1]$ *abhängt*. Die rechte Seite konvergiert gleichmäßig in $p \in [p_0, p_1]$ gegen Null für $R \to \infty$. Analog behandelt man den Grenzübergang $x \to 0$. □

**Satz 4.57.** *Für $p > 0$ gilt*

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p).$$

*Insbesondere gilt $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*

*Beweis.* Für $p > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\Gamma(p+1) &= \int_0^\infty x^p e^{-x}\,dx = \lim_{\substack{\epsilon\to+0\\ R\to\infty}} \int_\epsilon^R x^p e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{\substack{\epsilon\to+0\\ R\to\infty}} \left( -\,x^p e^{-x}\Big|_\epsilon^R + p\int_\epsilon^R x^{p-1}e^{-x}\,dx \right) = p\,\Gamma(p).\end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir induktiv zusammen mit

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = -\,e^{-x}\Big|_0^\infty = 1,$$

dass $\Gamma(1) = 0!$ und $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n\cdot(n-1)! = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. $\square$

# 4.10 Ungleichungen mit Integralen

Viele Ungleichungen, die wir für endliche Folgen reeller Zahlen hatten, verallgemeinern sich auf den Fall von Integralen.

## 4.10.1 Die Hölder-Ungleichung

**Satz 4.58.** *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar, $p > 1$ und $q = \frac{p}{p-1}$ (d. h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Dann gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \le \left( \int_a^b |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |g(x)|^q\,dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

*Beweis.* Wie im Fall endlicher Folgen reeller Zahlen dürfen wir annehmen, dass

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx = \int_a^b |g(x)|^q\,dx = 1$$

gilt. Wir erhalten dann mittels der Youngschen Ungleichung

$$|f(x)g(x)| \le \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$$

für alle $x \in [a,b]$, also

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| &\le \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \\ &\le \frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_a^b |g(x)|^q\,dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\end{aligned}$$

$\square$

*Bemerkung.* Die Hölder-Ungleichung gilt auch für $p = 1$, $q = \infty$ (bzw. $p = \infty$, $q = 1$) in der Form

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|\,.$$

### 4.10.2 Die Minkowski-Ungleichung

**Satz 4.59.** *Seien $f$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar, $p \ge 1$. Dann gilt*

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

*Beweis.* Der Fall $p = 1$ ist offensichtlich, sei also $p > 1$. Dann

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx \le \int_a^b \left(|f(x)|+|g(x)|\right)|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx$$

$$\le \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right]\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1-1/p}.$$

□

*Bemerkung.* Die Minkowski-Ungleichung gilt für $p = \infty$ in der Form

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|\,.$$

### 4.10.3 Die Jensensche Ungleichung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ konvex. Die Jensensche Ungleichung für endliche Folgen, nämlich $\forall x_i \in I$, $\forall \lambda_i \ge 0$ mit $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ gilt

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi(x_i),$$

wird jetzt zu folgender Ungleichung:

**Satz 4.60.** *Seien $f$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar, $f$ nehme Werte in $I$ an, $g$ habe Werte in den nichtnegativen reellen Zahlen, $\int_a^b g(x)\,dx = 1$. Dann gilt: Falls $\varphi \circ f$ R-integrierbar, so*

$$\varphi\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right) \le \int_a^b \varphi\left(f(x)\right)g(x)\,dx.$$

*Beweis.* Für $0 < h < h'$, $x$, $x + h' \in I$ gilt

$$\varphi(x+h) \le \frac{h'-h}{h'}\,\varphi(x) + \frac{h}{h'}\,\varphi(x+h')$$

wegen der Konvexität von $\varphi$ und $\frac{h'-h}{h'}\,x + \frac{h}{h'}\,(x+h') = x+h$. Damit folgt

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \leq \frac{\varphi(x+h')-\varphi(x)}{h'}.$$

Analog erhält man für $h' < 0 < h$, $x+h$, $x+h' \in I$,

$$\frac{\varphi(x+h')-\varphi(x)}{h'} \leq \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}.$$

Folglich existiert

$$\varphi(x+0) = \lim_{h\to+0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

(rechtsseitiger Grenzwert).
Wir setzen

$$\begin{gathered} c = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \in I, \\ A = \varphi'(c+0), \quad B = \varphi(c) - c\,\varphi'(c+0). \end{gathered}$$

Dann gilt für alle $x \in [a,b]$, dass $Ax + B \leq \varphi(x)$. In der Tat, für $x > c$ setzen wir $h = x - c > 0$ und erhalten

$$\varphi'(c+0) \leq \frac{\varphi(c+h)-\varphi(c)}{h}$$

und damit $\varphi'(c+0)(x-c) + \varphi(c) \leq \varphi(x)$. Der Fall $x < c$ ist analog, und für $x = c$ gilt Gleichheit.
Schließlich gilt wegen $\int_a^b g(x)\,dx = 1$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right) &= \varphi(c) = Ac + B \\ &= A\int_a^b f(x)g(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx \\ &= \int_a^b (A\,f(x) + B)\,g(x)\,dx \\ &\leq \int_a^b \varphi\left(f(x)\right) g(x)\,dx. \end{aligned}$$

□

*Bemerkung.* Entsprechende Ungleichungen (Hölder, Minkowski, Jensen) gelten auch für uneigentliche Integrale, wobei man jeweils die Konvergenz der Integrale vorauszusetzen hat.

# Kapitel 5

# Unendliche Reihen

## 5.1 Grundlegende Begriffe und Eigenschaften

**Definition 5.1.** Sei $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

die *n-te Partialsumme* dieser Folge. Die *Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist die Folge $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ der Partialsummen der Folge $\{a_k\}$.

*Beispiel* 5.2. 1. Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

2. Die *geometrische Reihe* (mit Quotient $\frac{1}{2}$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

**Definition 5.3.** Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent*, falls die Folge $\{s_n\}$ der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall heißt der Grenzwert $s$ die *Reihensumme*, und man schreibt

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Wie im Fall von Folgen spricht man auch von bestimmter und unbestimmter Divergenz.

*Bemerkung.* Das Symbol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ hat eine zweifache Bedeutung. Zum einen bezeichnet es die Reihe selbst, zum anderen meint es deren Summe im Fall der Konvergenz (bzw. im Fall bestimmter Divergenz).

*Beispiel* 5.4.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \lim_{n\to\infty} (2-1) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2.$$

Wir können die Konvergenzkriterien für Folgen benutzen, um die Konvergenz von Reihen zu entscheiden.

**Satz 5.5.** *Die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert genau dann, wenn* $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq m \geq N$:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \epsilon.$$

*Beweis.* Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $\{s_n\}$ mit $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ eine Cauchyfolge ist. Es gilt jedoch für $n \geq m$, dass

$$s_n - s_{m-1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) = \sum_{k=m}^{n} a_k,$$

was die Äquivalenz der beiden Bedingungen zeigt. □

*Folgerung* 5.6. Falls die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, so gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

*Beweis.* Sei die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \epsilon$ für alle $n \geq m \geq N$. Insbesondere erhalten wir für $m = n$, dass $|a_n| \leq \epsilon$ für $n \geq N$. □

*Achtung*: Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. So gilt $\lim\limits_{k\to\infty} 1/k = 0$, jedoch ist die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergent (später).
Es ist oft einfacher die Konvergenz von Reihen mit nichtnegativen Gliedern zu entscheiden.

**Satz 5.7.** *Eine Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *mit nichtnegativen Gliedern ist genau dann konvergent, wenn die Folge* $\{s_n\}$ *der Partialsummen beschränkt ist.*

*Beweis.* Wegen $s_n - s_{n-1} = a_n \geq 0$ für $n \geq 2$ ist die Folge $\{s_n\}$ monoton wachsend. □

Skalare Multiplikation sowie (gliedweise) Addition sind zulässige Operationen für Reihen.

**Satz 5.8.** *Seien* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergente Reihen,* $c \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*:

(a) *Die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k$ *konvergiert und*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

(b) *Die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ *konvergiert und*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

## 5.2 Zwei Beispielklassen

### 5.2.1 Die geometrische Reihe

**Definition 5.9.** Seien $a$, $q \in \mathbb{R}$. Die *geometrische Reihe* mit konstantem Term $a$ und Quotienten $q$ ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

*Beispiel* 5.10. Im Beispiel 5.2 hatten wir $a = 1$, $q = 1/2$.

**Satz 5.11.** *Sei* $a \neq 0$. *Dann konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} aq^k$ *genau dann, wenn* $|q| < 1$. *In diesem Fall gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}.$$

*Beweis.* Für

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + \dots + aq^{k-1}$$

gilt

$$(1-q)s_n = (a + aq + \dots + aq^{n-1}) - (aq + aq^2 + \dots + aq^n) = a(1-q^n),$$

also

$$s_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

für $q \neq 1$. Damit konvergiert für $q \neq 1$ die Folge $\{s_n\}$ genau für $|q| < 1$ (es gilt $a \neq 0$) und der Grenzwert ist $\frac{a}{1-q}$. Für $q = 1$ ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + a + a + \dots$$

offenbar divergent. □

### 5.2.2 Die $\alpha$-harmonische Reihe

**Definition 5.12.** Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die *$\alpha$-harmonische Reihe* ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}.$$

*Beispiel* 5.13. Im Beispiel 5.2 hatten wir $\alpha = 1$.
Diesmal gibt es keine expliziten Formeln für die Partialsummen. Wir benötigen ein Kriterium, um die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ zu entscheiden.

**Satz 5.14** (Cauchy)**.** *Sei $\{a_k\}$ eine fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen, die gegen Null konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn die Reihe*

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^l a_{2^l}$$

*konvergiert.*

*Beweis.* ($\Leftarrow$) Sei $\sum_{l=0}^{\infty} 2^l a_{2^l} = t$. Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ die $n$-te Partialsumme. Dann gilt

$$s_{2^n-1} = \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=2^l}^{2^{l+1}-1} a_k \leq \sum_{l=0}^{n-1} 2^l a_{2^l} \leq t.$$

Damit ist die monoton wachsende Folge $\{s_n\}$ nach oben beschränkt und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent.

($\Rightarrow$) Sei nun $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. Sei $t_n = \sum_{l=1}^{n} 2^l a_{2^l}$. Dann gilt

$$t_n = \sum_{l=1}^{n} 2^l a_{2^l} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l} 2a_{2^l} \leq \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l} 2a_k = 2\sum_{k=1}^{2^n} a_k \leq 2s.$$

Damit ist die monoton wachsende Folge $\{t_n\}$ nach oben beschränkt und die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} 2^l a_{2^l}$ konvergent.

□

**Satz 5.15.** *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ konvergiert genau für $\alpha > 1$.*

*Beweis.* Für $\alpha \leq 0$ gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \neq 0$, also ist die Reihe in diesem Fall divergent. Sei also $\alpha > 0$. Dann $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 0$ und wir können obiges Kriterium anwenden. Es gilt, dass die Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^l \frac{1}{(2^l)^{\alpha}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^l$$

genau dann konvergiert, wenn $2^{1-\alpha} < 1$, d. h. genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist. □

*Bemerkung.* Die Funktion

$$\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \alpha > 1,$$

ist die *Riemannsche Zetafunktion*. Sie (bzw. ihre meromorphe Fortsetzung in die komplexe Ebene) spielt u.à. in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle.
Es läßt sich beispielsweise zeigen, dass

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{und} \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

gilt.

## 5.3 Ein Konvergenzkriterium

**Satz 5.16.** *Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei Reihen mit nichtnegativen Gliedern und sei $a_k \leq b_k$ für alle $k \geq K$ mit einem gewissen $K$. Dann gilt*

(a) *Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.*

(b) *Divergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, so divergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.*

*Beweis.* Es gilt $\sum_{k=K}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=K}^{\infty} b_k$. □

*Beispiel* 5.17. (a) Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{3^k}$$

konvergiert, da

$$\frac{k^4}{3^k} \leq \frac{2^k}{3^k}$$

für alle $k \geq 16$ und die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ konvergiert.

(b) Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3 + 5k + 2}$$

divergiert, da

$$\frac{k^2}{k^3 + 5k + 2} > \frac{k^2}{k^3 + k^3 + k^3} = \frac{1}{3k}$$

für $k \geq 3$ und die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

divergiert.

## 5.4 Absolute Konvergenz

**Satz 5.18.** *Sei* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine unendliche Reihe. Konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$, *so konvergiert auch die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

*Beweis.* Es gilt

$$0 \leq a_k + |a_k| \leq 2\,|a_k|$$

für alle $k$. Somit folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\,|a_k| = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k|)$ (benutzte den Vergleichstest) und damit der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k|) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. □

**Definition 5.19.** Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut* oder *unbedingt konvergent*, falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *nicht absolut* oder *bedingt konvergent*, falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ nicht konvergiert.

Bevor wir die Begriffe „unbedingt“ und „bedingt konvergent“ rechtfertigen, konstruieren wir ein Beispiel einer bedingt konvergenten Reihe.

**Satz 5.20** (Leibniz-Kriterium). *Sei* $\{a_k\}$ *eine fallende Folge* (*nichtnegativer*) *reeller Zahlen, die gegen Null konvergiert. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k.$$

*Beweis.* Sei $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ die $n$-te Partialsumme.
Wir zeigen zuerst, dass die Folge $\{s_{2n}\}$ konvergiert. Wegen

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & a_1 - a_2 \\ \leq\ & (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) \\ \leq\ & (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) \\ \leq\ & \dots \end{aligned}$$

ist die Folge $\{s_{2n}\}$ monoton wachsend. Weiterhin ist diese Folge wegen

$$s_{2n} = a_1 + (-a_2 + a_3) + (-a_4 + a_5) + \cdots + (-a_{2n-2} + a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

nach oben beschränkt. Damit existiert $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$.
Wegen $s_{2n-1} = s_{2n} - a_{2n}$ existiert auch $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} - \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = s - 0 = s$. Da beide Folgen $\{s_{2n}\}$ und $\{s_{2n-1}\}$ gegen denselben Grenzwert konvergieren, konvergiert auch $\{s_n\}$, d. h. die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ ist konvergent. □

*Bemerkung.* Eine Reihe der Form $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ wie im obigen Satz heißt *alternierend*.
Obiger Beweis gibt auch die *Fehlerabschätzung*

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

*Beispiel* 5.21. Gemäß obigem Satz konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k},$$

die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist jedoch divergent. Damit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ *bedingt konvergent*.

Eine Permutation der natürlichen Zahlen ist eine Bijektion $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

**Definition 5.22.** Eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist eine Reihe der Form $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$, wobei $\sigma$ eine Permutation der natürlichen Zahlen ist.

**Satz 5.23.** *Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe konvergiert, und zwar gegen dieselbe Reihensumme.*

*Beweis.* Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe und sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ eine Umordnung. Weiter seien

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$$

die $n$-ten Partialsummen.
Sei $\epsilon > 0$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, existiert ein $M$ mit $\sum_{k=M+1}^{\infty} |a_k| \leq \epsilon$. Wir wählen nun ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\{1, 2, \ldots, M\} \subseteq \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)\}.$$

(Wähle beispielsweise $N = \max\{\sigma^{-1}(k) \mid 1 \leq k \leq M\}$.) Für jedes $n \geq N$ fallen die Terme $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in der Differenz $s_n - t_n$ fort. Folglich gilt

$$|s_n - t_n| \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} |a_k| \leq \epsilon,$$

und die Folge $\{s_n - t_n\}$ konvergiert gegen Null. Wegen $t_n = s_n - (s_n - t_n)$ konvergiert auch die Folge $\{t_n\}$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n.$$

□

Für bedingt konvergente Reihen gilt ein entgegengesetztes Resultat:

**Satz 5.24.** *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *bedingt konvergent,* $L \in \mathbb{R}$. *Dann existiert eine Permutation* $\sigma$, *so dass*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = L.$$

*Beweis.* O. B. d. A. sei $a_k \neq 0$ für alle $k$. Sei $\{p_k\}$ die Folge aller positiven Glieder von $\{a_k\}$ und $\{q_k\}$ die Folge aller negativen Glieder von $\{a_k\}$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty} q_k = 0$ sowie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = -\infty$. (Insbesondere sind beide Folgen $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ unendlich.)
Nun sei o. B. d. A. $L > 0$. (Der Beweis im Fall $L \leq 0$ ist ähnlich.) Wir wählen den Index $l_1$ derart, dass

$$p_1 + \cdots + p_{l_1-1} \leq L < p_1 + \cdots + p_{l_1}.$$

Dann wählen wir den Index $m_1$ derart, dass

$$(p_1 + \cdots + p_{l_1}) + (q_1 + \cdots + q_{m_1}) < L \leq (p_1 + \cdots + p_{l_1}) + (q_1 + \cdots + q_{m_1-1}).$$

Sodann wählen wir den Index $l_2 > l_1$ derart, dass

$$\begin{aligned}(p_1 + \cdots + p_{l_1}) + (q_1 + \cdots + q_{m_1}) + (p_{l_1+1} + \cdots + p_{l_2-1}) \leq L \\ < (p_1 + \cdots + p_{l_1}) + (q_1 + \cdots + q_{m_1}) + (p_{l_1+1} + \cdots + p_{l_2}).\end{aligned}$$

Wir fahren so fort und erhalten auf diese Weise die Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
Gemäß Konstruktion erhalten wir für $j \geq 1$ (mit $m_0 = 0$) die Abschätzungen

$$\begin{aligned} L \leq t_n &< L + p_{l_j} && \text{für } m_{j-1} + l_j \leq n < l_j + m_j, \\ L + q_{m_j} < t_n &\leq L && \text{für } m_j + l_j \leq n < l_{j+1} + m_j, \end{aligned}$$

wobei wiederum $t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$. Das zeigt dann, dass $\lim_{n\to\infty} t_n = L$. □

*Beispiel* 5.25. Es läßt sich zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$ gilt. Andererseits betrachten wir die Umordnung

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$$

dieser Reihe. Die umgeordnete Reihe hat wegen

$$t_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) = \frac{s_{2n}}{2}$$

(mit den obigen Bezeichnungen) die Reihensumme $\log 2/2$.

## 5.5 Weitere Konvergenztests

*Zur Erinnerung*: Für eine Folge $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist

$$\liminf_{k\to\infty} a_k = \lim_{m\to\infty} \inf \left\{ a_k \mid k \geq m \right\},$$
$$\limsup_{k\to\infty} a_k = \lim_{m\to\infty} \sup \left\{ a_k \mid k \geq m \right\}.$$

**Satz 5.26** (Quotientenkriterium)**.** *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit von Null verschiedenen Gliedern.*

(a) *Gilt* $\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$*, so ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

(b) *Gilt* $\liminf_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$*, so ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

*Beweis.* (a) Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < r < 1$. Dann existiert ein $K$ mit $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq r$ für alle $k \geq K$. Induktiv erhalten wir $|a_{K+l}| \leq r^l\,|a_K|$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$. Da die Reihe $\sum_{k=K}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{l=0}^{\infty} r^l\,|a_K|$ wegen $r < 1$ konvergiert, konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

(b) Es existiert ein $K$ mit $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ für alle $k \geq K$. Damit gilt $|a_{k+1}| \geq |a_k|$ für $k \geq K$ und die Folge $\{a_k\}$ konvergiert *nicht* gegen Null. Folglich ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

□

*Beispiel* 5.27. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$ konvergiert wegen

$$\lim_{k\to\infty} \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} \bigg/ \frac{5^k}{k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{5}{k+1} = 0.$$

**Satz 5.28** (Wurzelkriterium)**.** *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine beliebige Reihe.*

(a) *Gilt* $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$*, so konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut.*

(b) *Gilt* $\liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$*, so divergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*.*

*Beweis.* Analog zum Beweis des Quotientenkriteriums. □

*Beispiel* 5.29. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^3}{3^k}$ konvergiert absolut, da

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(-k)^3}{3^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\sqrt[k]{k}\right)^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

*Bemerkung.* In dem Fall, dass der jeweilige Limes in (a) bzw. (b) in den Sätzen 5.26 und 5.28 gleich Eins ist, ist keine Entscheidung bezüglich Konvergenz oder Divergenz möglich, wie das Beispiel der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1/(k+1)}{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1/(k+1)^2}{1/k^2} = 1$$

zeigt.

**Satz 5.30** (Integralkriterium)**.** *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern,* $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit* $f(k) = a_k$ *für alle* $k$*. Weiterhin sei* $f$ *monoton fallend und* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$*. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *genau dann, wenn das uneigentliche Integral* $\int_1^\infty f(x)\,dx$ *konvergiert.*
*Darüber hinaus haben wir im Fall der Konvergenz die Fehlerabschätzung*

$$0 \le s - s_n \le \int_n^\infty f(x)\,dx,$$

*wobei* $s$ *die Reihensumme bezeichnet.*

*Beweis.* ($\Leftarrow$) Sei $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$. Dann ist die Folge $\{s_n\}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent. Tatsächlich gilt für $m > n$

$$0 \le s_m - s_n = a_{n+1} + \cdots + a_m \le \int_n^m f(x)\,dx$$

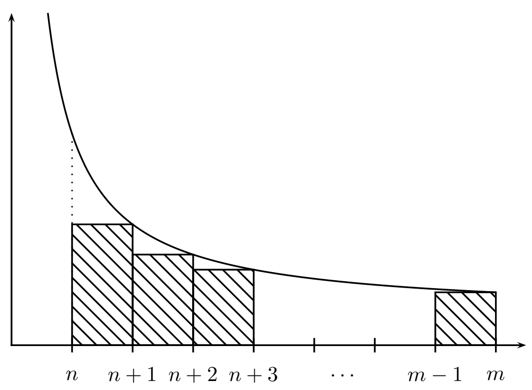


Abbildung 5.1: Zur Abschätzung $a_{n+1} + \cdots + a_m \le \int_n^m f(x)\,dx$:
Die Fläche unter der Kurve von $x = n$ bis $x = m$ ist mindestens gleich der Summe der Flächen der schraffierten Boxen.

und für $m \to \infty$ erhalten wir

$$0 \le s - s_n \le \int_n^\infty f(x)\,dx.$$

($\Rightarrow$) Sei $\int_1^\infty f(x)\,dx = \infty$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ wegen

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx.$$

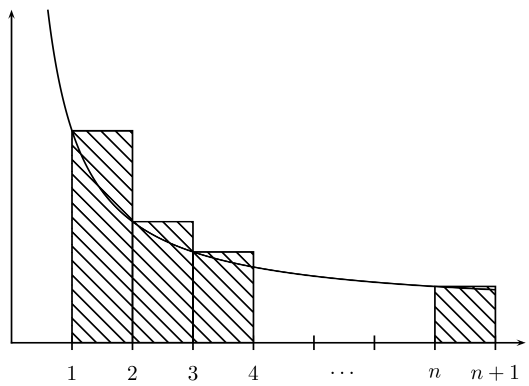


Abbildung 5.2: Zur Abschätzung $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx$:
Die Fläche unter der Kurve von $x = 1$ bis $x = n+1$ ist höchstens gleich der Summe der Flächen der schraffierten Boxen.

$\square$

*Beispiel* 5.31. Sei $\alpha > 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ für $\alpha > 1$, da

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha-1},$$

und divergiert für $\alpha \leq 1$, da

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \geq \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \log n = \infty.$$

## 5.6 Das Cauchyprodukt

Wir wollen zwei konvergente Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{l=0}^{\infty} b_l$ (*der Zählindex startet jeweils bei Null*) miteinander multiplizieren. Formal erhalten wir

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 + a_2 + \dots)&\,(b_0 + b_1 + b_2 + \dots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots\end{aligned}$$

Tatsächlich gilt diese Beziehung unter bestimmten Voraussetzungen.

**Satz 5.32** (Mertens)**.** *Seien die Reihen* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{l=0}^{\infty} b_l$ *konvergent, wobei wenigstens eine dieser Reihen absolut konvergiert. Dann konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m$, *wobei* $c_m = \sum_{k+l=m} a_k b_l$ *für* $m \in \mathbb{N}_0$*, und es gilt*

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right).$$

$\sum_{m=0}^{\infty} c_m$ heißt das *Cauchyprodukt* der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$.

*Beweis.* O. B. d. A. sei $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Sei $b = \sum_{l=0}^{\infty} b_l$. Wir setzen $r_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $s_n = \sum_{l=0}^{n} b_l$ und $t_n = \sum_{m=0}^{n} c_m$. Dann ist

$$ab = (a - r_n)\, b + r_n b, \quad t_n = \sum_{k=0}^{n} a_k s_{n-k},$$

also

$$ab - t_n = (a - r_n)\, b + \sum_{k=0}^{n} a_k \,(b - s_{n-k}).$$

Es gilt $(a - r_n)\, b \to 0$ für $n \to \infty$ sowie mit $N = [\frac{n}{2}]$ ($[\frac{n}{2}]$ bezeichnet den ganzen Teil von $\frac{n}{2}$)

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \,(b - s_{n-k})\right| &\le \sum_{k=0}^{N} |a_k|\, |b - s_{n-k}| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k|\, |b - s_{n-k}| \\ &\le \max_{N \le l \le n} |b - s_l| \sum_{k=0}^{N} |a_k| + C \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| \to 0\end{aligned}$$

für $n \to \infty$, wobei $C > 0$ mit $|b - s_l| \le C$ für alle $l$ gewählt wurde. Folglich

$$t_n \to ab \text{ für } n \to \infty.$$

□

*Beispiel* 5.33. Man kann die *Expoentialfunktion* mittels der absolut konvergenten Reihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

einführen. Die charakteristische Eigenschaft $e^x e^y = e^{x+y}$ der Expoentialfunktion ergibt sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned}e^x \cdot e^y &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k+l=m} \frac{x^k}{k!}\frac{y^l}{l!}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x+y)^m}{m!} \\ &= e^{x+y}\end{aligned}$$

für alle $x$, $y \in \mathbb{R}$.

# Kapitel 6

# Funktionenfolgen und Funktionenreihen

## 6.1 Einige Beispiele

Wir betrachten nun Folgen und Reihen von auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktionen.

**Definition 6.1.** Sei $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $\{f_n\}$ heißt *punktweise konvergent*, wenn die Folge $\{f_n(x)\}$ für jedes $x \in I$ konvergiert. Wir erhalten dann eine *Grenzfunktion* $f \colon I \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in I$.

*Beispiel* 6.2. 1. Sei $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $\{f_n\}$ ist punktweise konvergent gegen $f$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Obwohl jede der Funktionen $f_n$ stetig ist, ist die Grenzfunktion $f$ *nicht stetig*.

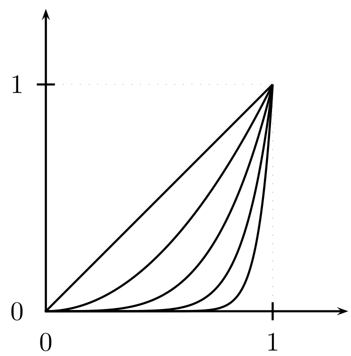


Abbildung 6.1: Die Funktionen $f_n(x) = x^n$ für $n = 1, 2, 4, 8, 16$

2. Sei $g_n\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n+1}}$. Die Folge $\{g_n\}$ ist punktweise konvergent gegen $g$ mit
$$g(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$
Die Grenzfunktion $g\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ ist beschränkt, obwohl jede der Funktionen $g_n$ unbeschränkt ist.

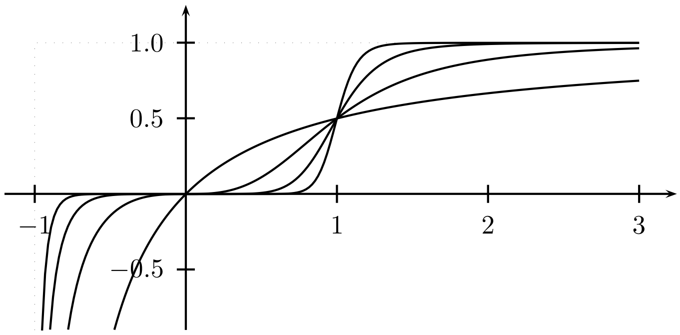


Abbildung 6.2: Die Funktionen $g_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n+1}}$ für $n = 0, 1, 3, 7$

3. Sei $h_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$h_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ n, & 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$
Dann ist
$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$$
für alle $x \in [0,1]$. Die $h_n$ und $h$ sind R-integrierbar, jedoch gilt
$$\int_0^1 h(x)\,dx = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(x)\,dx.$$

4. Sei $\{r_n\}$ die Folge aller rationalen Zahlen im Intervall $[0,1]$, wobei jede rationale Zahl genau einmal vorkommt. Wir definieren $k_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch
$$k_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}, \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1] \setminus \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}. \end{cases}$$
Dann ist
$$k(x) = \lim_{n\to\infty} k_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Jede der Funktionen $k_n$ ist R-integrierbar, die Grenzfunktion $k$ ist es nicht.

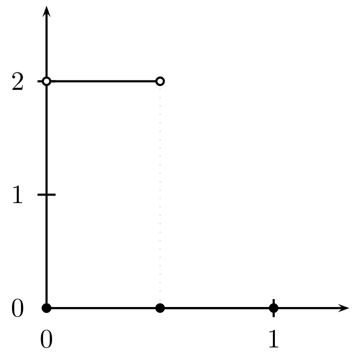


Abbildung 6.3: Die Funktion $h_2$

5. Sei $l_n\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$,

$$l_n(x) = \begin{cases} |x|\,, & \text{falls } x \in [-2,2] \setminus (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), \\ \frac{nx^2}{2}(3 - n^2x^2), & \text{falls } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

   Dann ist

$$l(x) = \lim_{n\to\infty} l_n(x) = |x|$$

   für alle $x \in [-2,2]$. Jede der Funktionen $l_n$ ist differenzierbar (Übungsaufgabe), die Grenzfunktion $l$ ist es nicht (in $x = 0$).

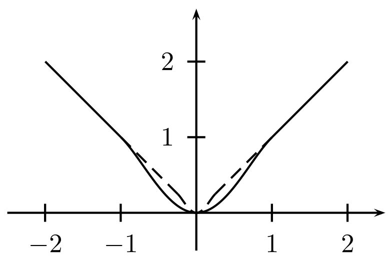


Abbildung 6.4: Die Funktionen $l_1$ (durchgezogen) und $l_4$ (gestrichelt)

## 6.2 Gleichmäßige Konvergenz

Die Beispiele zeigen, dass wir im Allgemeinen einen stärkeren Konvergenzbegriff als die „punktweise Konvergenz“ benötigen.

**Definition 6.3.** Seien $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$. Man sagt, dass die Folge $\{f_n\}$ gleichmäßig auf $I$ gegen die Grenzfunktion $f$ konvergiert, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall x \in I$:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon.$$

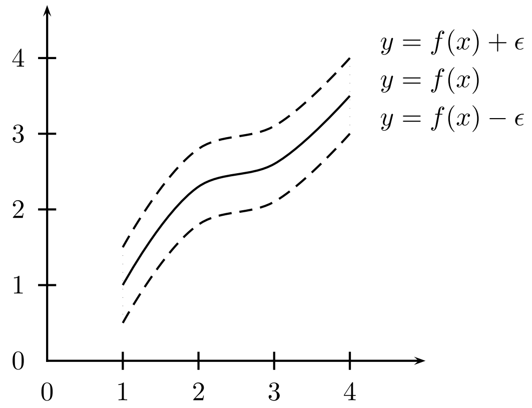


Abbildung 6.5: Zum Begriff der gleichmäßigen Konvergenz: Der Graph von $f_n$ für $n \geq N$ verläuft innerhalb der angezeigten Region

*Bemerkung.* Offenbar impliziert gleichmäßige Konvergenz die punktweise Konvergenz.

*Beispiel* 6.4. Sei $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $\{f_n\}$ konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ wegen

$$|f(x) - f_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

und $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ für $n \to \infty$.

**Satz 6.5.** *Sei $\{f_n\}$ auf $I$ punktweise konvergent gegen die Funktion $f \colon I \to \mathbb{R}$. Dann konvergiert $\{f_n\}$ gleichmäßig gegen $f$ genau dann, wenn*

$$\sup_{x \in I} |f(x) - f_n(x)| \to 0$$

*für $n \to \infty$.*

*Beispiel* 6.6. In keinem der Beispiele 1) bis 4) in Abschnitt 6.1 gilt gleichmäßige Konvergenz. In Beispiel 5) ist die Folge $\{l'_n\}$ nicht gleichmäßig konvergent.

**Satz 6.7.** *Sei die Folge $\{f_n\}$ auf $I$ gleichmäßig konvergent gegen $f$, $c \in I$. Ist jede der Funktionen $f_n$ stetig an $c$, so ist $f$ stetig an $c$.*

*Beweis.* Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein Index $p$ mit $|f(x) - f_p(x)| \leq \epsilon$ für alle $x \in I$. Da $f_p$ an $c$ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $|f_p(x) - f_p(c)| \leq \epsilon$ für $x \in I$, $|x - c| \leq \delta$. Dann jedoch gilt

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(c)| + |f_p(c) - f(c)| \leq 3\epsilon$$

für $x \in I$, $|x - c| \leq \delta$. ☐

**Satz 6.8.** *Sei die Folge $\{f_n\}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergent gegen $f$. Ist jede der Funktionen $f_n$ R-integrierbar, so ist $f$ R-integrierbar und*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass die Folge $\{\int_a^b f_n(x)\,dx\}$ konvergiert.
Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $N$ mit

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$$

für $x \in [a,b]$, $m,n \geq N$. Daher gilt

$$\left| \int_a^b f_m(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_m(x) - f_n(x)|\,dx \leq \epsilon\,(b-a)$$

für $m,n \geq N$, und die Folge $\{\int_a^b f_n(x)\,dx\}$ ist eine Cauchyfolge. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = L$. Wir werden zeigen, dass $\int_a^b f(x)\,dx = L$.
Sei $\epsilon > 0$ und $N$ wie oben. Dann ist $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$ für $x \in [a,b]$, $n \geq N$. Weiterhin existiert ein $p$ mit

$$\left| \int_a^b f_p(x)\,dx - L \right| \leq \epsilon.$$

Da $f_p$ R-integrierbar ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\left| S(f_p, P) - \int_a^b f_p(x)\,dx \right| \leq \epsilon$$

für jede markierte Partition $P$ des Intervalls $[a,b]$ der Feinheit höchstens $\delta$. Also gilt für alle derartigen Partitionen $P$, dass

$$\begin{aligned} |S(f,P) - L| \leq |S(f,P) - S(f_p,P)| &+ \left| S(f_p,P) - \int_a^b f_p(x)\,dx \right| \\ &+ \left| \int_a^b f_p(x)\,dx - L \right| \leq \epsilon\,(b-a) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist $f$ R-integrierbar auf $[a,b]$ und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

□

**Satz 6.9.** *Sei $\{f_n\}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf dem Intervall $I$. $\{f_n\}$ konvergiere punktweise gegen $f$ und $\{f_n'\}$ konvergiere gleichmäßig gegen $g$ auf $I$. Dann ist $f$ stetig differenzierbar auf $I$ und $f' = g$.*

*Beweis.* Sei $c \in I$. Dann gilt

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)\,dt, \quad x \in I.$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)\,dt, \quad x \in I.$$

Also ist $f$ differenzierbar auf $I$ und $f' = g$. □

## 6.3 Funktionenreihen

Anstelle von Funktionenfolgen $\{f_k\}$ betrachten wir jetzt Funktionenreihen $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, wobei $f_k \colon I \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$.
Wichtige Beispiele sind *Potenzreihen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

und *Fourierreihen*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit gewissen reellen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots$

**Definition 6.10.** Sei $\{f_k\}$ eine Folge von auf $I$ definierten Funktionen und $f \colon I \to \mathbb{R}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen $f$, wenn die Folge $\{s_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\}$ der Partialsummen punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen $f$ konvergiert.

*Beispiel* 6.11. Für $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

(geometrische Reihe).
Für $|x| < \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin^{2k} x = \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \cdots = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = \tan^2 x.$$

In beiden Fällen ist die Konvergenz erst einmal punktweise. Das nächste Kriterium wird zeigen, dass diese Konvergenz sogar gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall von $(-1, 1)$ bzw. von $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist.

**Satz 6.12** (Weierstrass-Kriterium)**.** *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert gleichmäßig auf $I$, falls $|f_k(x)| \le c_k$ für alle $x \in I$, $k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$.*

*Beweis.* Für jedes $x \in I$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ absolut. Sei $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. Sei weiterhin $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ für $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$.

Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $N$, so dass $\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \le \epsilon$ für alle $n \ge N$ gilt. Wir erhalten für $x \in I$, $n \ge N$, dass

$$|f(x) - s_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \le \epsilon.$$

Damit konvergiert $\{s_n\}$ gleichmäßig auf $I$ gegen $f$. ∎

Direkt von den entsprechenden Ergebnissen für Funktionenfolgen in den Sätzen 6.7, 6.8 und 6.9 erhalten wir:

**Satz 6.13.** *Sei $\{f_k\}$ eine Funktionenfolge auf $I$ und sei die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent.*

(a) *Ist jede Funktion $f_k$ stetig auf $I$, so ist $f$ stetig auf $I$.*

(b) *Ist jede Funktion $f_k$ R-integrierbar auf $I = [a, b]$, so ist $f$ R-integrierbar auf $I$ und*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx.$$

(c) *Ist jede Funktion $f_k$ stetig differenzierbar auf $I$ und konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ gleichmäßig auf $I$, so ist die Funktion $f$ stetig differenzierbar auf $I$ und*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

*für alle $x \in I$.*

## 6.4 Beispiele

### 6.4.1 Definition der Exponentialfunktion

In der Mathematik gibt es verschiedene Möglichkeiten, den Ausdruck $e^x$ für $x \in \mathbb{R}$ zu definieren. Man nutzt eine dieser Möglichkeiten und zeigt dann, dass die anderen dazu äquivalent sind.

**Satz 6.14.** *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

(a)

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

(b)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

(c) *$e^x$ ist die eindeutig bestimmte positive Zahl $y > 0$ mit*

$$\int_1^y \frac{dt}{t} = x.$$

*Bemerkung.* (a) Die linke Seite ist wohldefiniert, da der Beweis zeigen wird, dass die Folge $\left\{(1 + \frac{x}{n})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ für $x \geq 0$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist. Die Sache ist dann für allgemeines $x \in \mathbb{R}$ in Ordnung, da

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \\ &= \exp \lim_{n\to\infty} \left(n \log \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right) = e^0 = 1,\end{aligned}$$

wegen

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\log\left(1-x^2/a^2\right)}{1/a} = \lim_{a\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{a^3}\,\frac{1}{1-x^2/a^2}}{-1/a^2} = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{2x^2}{a}\,\frac{1}{1-x^2/a^2}\right) = 0.$$

(b) Die linke Seite ist wohldefiniert, da die Reihe auf der rechten Seite nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent ist:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0.$$

(c) Das Integral definiert den natürlichen Logarithmus von $y>0$, d. h. $\log y = \int_1^y \frac{dt}{t}$, und führt $e^x$ als dessen Umkehrfunktion ein. Die Definition zeigt, dass die Funktion $y \mapsto \log y$ strikt monoton wachsend ist und das Intervall $(0,\infty)$ bijektiv auf das Intervall $(-\infty,\infty)$ abbildet.

*Beweis.* Es genügt den Beweis der Äquivalenz von a), b) und c) im Fall $x \geq 0$ zu führen, da wir unabhängig davon, wie wir $e^x$ definieren, stets $e^x e^{-x} = 1$ erhalten.

1. *Äquivalenz von* a) *und* b): Sei $x \geq 0$. Wir setzen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \qquad t_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = 1 + x + \sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^k}\,x^k \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \\ &\qquad + \cdots + \frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &\leq s_n. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Folge $\{t_n\}_{n\geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist. Insbesondere gilt

$$\lim_{n\to\infty} t_n \leq \lim_{n\to\infty} s_n = e^x,$$

wobei $e^x$ in b) definiert wurde. Weiterhin gilt für $1 \leq m \leq n$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{x^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) \leq t_n.$$

Wir fixieren $m$, lassen $n$ gegen Unendlich gehen und erhalten

$$s_m = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} \leq \lim_{n\to\infty} t_n.$$

Es folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} t_n \leq e^x \leq \lim_{n\to\infty} t_n,$$

also $\lim_{n\to\infty} t_n = e^x$.

2. *Äquivalenz von* a) *und* c): Es gilt $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$ gemäß der Definition in c). Sei nun $y = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ für ein fixiertes $x \geq 0$. Wir werden $\log y = x$, d. h. $y = e^x$, zeigen.

   Es gilt
$$\log y = \lim_{n\to\infty} \log \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{x \log(1 + x/n)}{x/n},$$
   wobei wir die Stetigkeit der Logarithmusfunktion und $\log(ab) = \log a + \log b$ für $a > 0$, $b > 0$ benutzt haben:
$$\begin{aligned} \log(ab) &= \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_1^{b} \frac{ds}{s} = \log a + \log b \end{aligned}$$
   mittels der Substitution $s = t/a$. Folglich
$$\log y = x \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = x \frac{d}{dt}(\log t)\Big|_{t=1} = x \cdot \frac{1}{t}\Big|_{t=1} = x.$$

□

*Folgerung* 6.15. Es gilt
$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x.$$

*Beweis.* Gliedweise Differentiation der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ergibt
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$
Es bleibt zu bemerken, dass die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ auf jedem Intervall $[-M, M]$ für $M > 0$ gleichmäßig konvergiert (nach dem Weierstrass-Kriterium, da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} < \infty$). □

### 6.4.2 Der Weierstrasssche Approximationssatz

**Satz 6.16** (Weierstrass)**.** *Ist $f$ stetig auf $[a, b]$, so existiert eine Folge $\{P_n\}$ von Polynomen derart, dass $P_n$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert.*

*Beweis.* Indem wir statt $f$ die Funktion $x \mapsto f(a + (b-a)x)$ betrachten, dürfen wir annehmen, dass $f$ auf $[0, 1]$ definiert ist. Indem wir eine lineare Funktion zu $f$ hinzunehmen, dürfen wir weiterhin annehmen, dass $f(0) = f(1) = 0$ gilt.
Wir setzen $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig fort, indem wir $f(x) = 0$ für $x \notin [0, 1]$ setzen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n$, wobei die Konstante $c_n > 0$ so gewählt ist, dass
$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\, dx = 1.$$

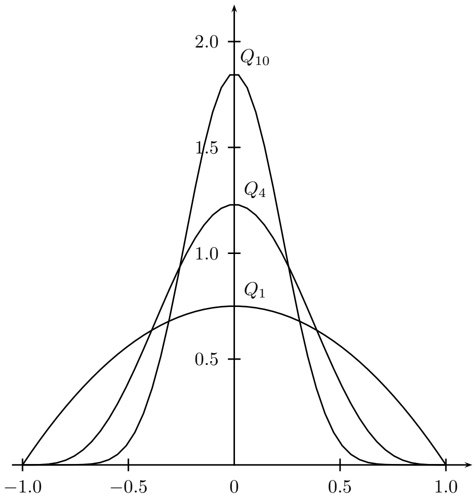


Abbildung 6.6: Die Funktionen $Q_n$ für $n = 1, 4, 10$

Eine Rechnung zeigt, dass[1]

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n dx &= 2\int_{0}^{1} \left(1-x^2\right)^n dx \\ &\geq 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} \left(1-x^2\right)^n dx \geq 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} \left(1-nx^2\right) dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

also $c_n < \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Funktion $P_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t)\, dt$$

und erhalten (da $f$ gleich Null außerhalb $[0,1]$)

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t) Q_n(t)\, dt = \int_{0}^{1} f(t) Q_n(t-x)\, dt.$$

Das zeigt, dass $P_n$ ein Polynom in $x$ vom Grad $2n$ ist.
Wir zeigen nun, dass $\{P_n\}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Sei $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ und sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $0 < \delta < 1$ mit $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon/2$ für $|x-y| \leq \delta$.
Für $x \in [\delta, 1]$ gilt

$$Q_n(x) = c_n \left(1-x^2\right)^n < \sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

[1]Die Abschätzung $(1-x^2)^n \geq 1 - nx^2$ für $|x| \leq 1$ ist mit $nx^2 \geq 1 - (1-x^2)^n = x^2\left(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2(n-1)}\right)$ äquivalent, wobei letztere Abschätzung offenbar richtig ist. Die Einschränkung $0 \leq x \leq 1/\sqrt{n}$ resultiert aus dem Fakt, dass $1 - nx^2 < 0$ für $x > 1/\sqrt{n}$ gilt.

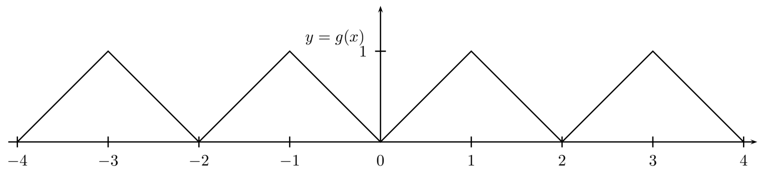


Abbildung 6.7: Die Funktion $g$ aus Satz 6.17

Damit konvergiert $\{Q_n\}$ gleichmäßig auf $[\delta, 1]$ gegen Null und $\lim_{n\to\infty} \int_\delta^1 Q_n(x)\,dx = 0$. Somit existiert ein $N$ derart, dass $\int_\delta^1 Q_n(x)\,dx \le \epsilon/(8M)$ für alle $n \ge N$. Wir erhalten dann für $x \in [0,1]$ und $n \ge N$

$$
\begin{aligned}
|f(x) - P_n(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} f(x) Q_n(t)\,dt - \int_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t)\,dt \right| \\
&= \left| \int_{-1}^{1} \left(f(x) - f(x+t)\right) Q_n(t)\,dt \right| \\
&\le \int_{-1}^{1} |f(x) - f(x+t)|\, Q_n(t)\,dt \\
&\le \int_{-1}^{-\delta} 2M\, Q_n(t)\,dt + \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\epsilon}{2} Q_n(t)\,dt + \int_{\delta}^{1} 2M\, Q_n(t)\,dt \\
&\le \int_{\delta}^{1} 2M\, Q_n(t)\,dt + \int_{-1}^{1} \frac{\epsilon}{2} Q_n(t)\,dt + \int_{\delta}^{1} 2M\, Q_n(t)\,dt \\
&\le \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Das beweist, dass $\{P_n\}$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen $f$ konvergiert. □

### 6.4.3 Eine überall stetige, nirgends differenzierbare Funktion

Ein erstes Beispiel einer solchen Funktion wurde von Karl Weierstrass 1872 publiziert.

**Satz 6.17.** *Sei $g$ durch $g(x) = |x|$ für $-1 \le x \le 1$ und $g(x+2) = g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert. Dann ist die Funktion*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k g(4^k x)$$

*überall stetig, aber nirgends differenzierbar.*

*Beweis.* Nach dem Weierstrass-Kriterium konvergiert die $f$ definierende Reihe gleichmäßig gegen $f$. $f$ ist damit eine stetige Funktion.
Wir zeigen nun, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Folge $\{x_m\} \subset \mathbb{R} \setminus \{x\}$ existiert mit $x_m \to x$ für $m \to \infty$, jedoch die Folge $\left\{\frac{f(x)-f(x_m)}{x-x_m}\right\}$ nicht konvergiert.

Abbildung 6.8: Die Funktion $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k g(4^k x)$ für $n = 12$

Für $m \in \mathbb{N}$ wählen wir $\delta_m = \pm\frac{1}{2\cdot 4^m}$, so dass keine ganze Zahl zwischen $4^m x$ und $4^m(x+\delta_m)$ liegt. Dann gilt

$$\left|g(4^k x + 4^k\delta_m) - g(4^k x)\right| \begin{cases} = 0, & k > m, \\ = 1/2, & k = m, \\ \leq \left|4^k \delta_m\right|, & k < m. \end{cases}$$

*Begründung*: Für $k > m$ ist $4^k\delta_m$ ein Vielfaches von 2 und $g$ hat Periode 2. Für $k = m$ ist das Ergebnis 1/2, da $|4^m\delta_m| = 1/2$ und die Funktion $g$ linear ist mit Anstieg 1 oder $-1$ auf dem Intervall von $4^m x$ bis $4^m(x+\delta_m)$. Für $k < m$ folgt das Ergebnis aus $|g(y) - g(y')| \leq |y - y'|$ für alle $y,\, y' \in \mathbb{R}$.
Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{g(4^k x + 4^k\delta_m) - g(4^k x)}{\delta_m}\right| \\ &\geq \left(\frac{3}{4}\right)^m 4^m - \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k \left|\frac{g(4^k x + 4^k\delta_m) - g(4^k x)}{\delta_m}\right| \\ &\geq 3^m - \sum_{k=0}^{m-1} 3^k = 3^m - \frac{3^m - 1}{3 - 1} > \frac{3^m}{2}.\end{aligned}$$

Folglich können wir $x_m = x + \delta_m$ setzen. □

## 6.5 Potenzreihen

**Definition 6.18.** Eine *Potenzreihe* mit Entwickungspunkt $c$ ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots,$$

wobei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $c$ gegebene reelle Zahlen sind.

**Lemma 6.19.** *Konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ *an einer Stelle* $x_1$, *so konvergiert diese Reihe an allen Stellen* $x_0$ *mit* $|x_0 - c| < |x_1 - c|$ *absolut. Divergiert diese Reihe an einer Stelle* $x_1$, *so divergiert diese Reihe an allen Stellen* $x_2$ *mit* $|x_2 - c| > |x_1 - c|$.

*Beweis.* Es genügt, den ersten Teil der Behauptung zu beweisen. Sei $x_1 \neq c$, $|x_0| < |x_1 - c|$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$|a_k|\,|x_0 - c|^k = |a_k|\,|x_1 - c|^k \frac{|x_1 - c|^k}{|x_1 - c|^k} \leq Mr^k,$$

wobei

$$M = \sup_k |a_k|\,|x_1 - c|^k, \qquad r = \frac{|x_0 - c|}{|x_1 - c|} < 1.$$

Da die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Mr^k$ konvergiert, folgt die Behauptung. □

Das Lemma zeigt, dass es ein $\rho \in [0, \infty]$ gibt mit der Eigenschaft, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ absolut konvergiert für $|x - c| < \rho$ und divergiert für $|x - c| > \rho$.

**Definition 6.20.** $\rho$ heißt der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$.

Der Beweis des obigen Lemmas zeigt gleichfalls, dass die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ gleichmäßig auf jedem Intervall der Form $[c-r, c+r]$ mit $0 < r < \rho$ konvergiert.

*Bemerkung.* Jede Potenzreihe konvergiert an ihrem Entwicklungspunkt.

**Satz 6.21.** *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ *eine Potenzreihe,*

$$s = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

*Dann ist*

$$\rho = \begin{cases} 0, & \text{falls } s = \infty, \\ 1/s, & \text{falls } 0 < s < \infty, \\ \infty, & \text{falls } s = 0. \end{cases}$$

*Bemerkung.* Man schreibt allgemein

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

und versteht, dass $\rho$ eine erweiterte reelle Zahl im Intervall $[0, \infty]$ ist.

*Beweis.* Sei $0 < \rho < \infty$ und $\rho = 1/s$. Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ für $|x - c| < \rho$ wegen

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\,|x-c|^k} &= |x - c| \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \\ &= \frac{|x-c|}{\rho} < 1\end{aligned}$$

absolut. Für $|x-c| > \rho$ hingegen benutzen wir, dass es eine Teilfolge $\{a_{k_l}\}$ der Folge der Koeffizienten $\{a_k\}$ gibt mit $\sqrt[k_l]{|a_{k_l}|} \to \frac{1}{\rho}$ für $l \to \infty$. Insbesondere ist

$$\sqrt[k_l]{|a_{k_l}|} \geq \frac{1}{|x-c|}$$

für hinreichend großes $l$ (wegen $\frac{1}{\rho} > \frac{1}{|x-c|}$). Damit ist $|a_{k_l}|\,|x-c|^{k_l} \geq 1$ für hinreichend großes $l$ und $\left\{a_{k_l}(x-c)^{k_l}\right\}$ ist keine Nullfolge.
Die Fälle $s = 0$ und $s = \infty$ sind ähnlich. ☐

**Lemma 6.22.** *Gilt $a_k \neq 0$ ab einer gewissen Stelle $K$ (d. h. für $k \geq K$) und existiert $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$, so ist*

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|.$$

*Beweis.* Es lässt sich zeigen, dass

$$\liminf_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

gilt. ☐

*Beispiel* 6.23.

1. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ hat die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^\alpha} = 1 + x + \frac{x^2}{2^\alpha} + \frac{x^3}{3^\alpha} + \dots$$

den Konvergenzradius 1, da

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha} = \left(\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}\right)^\alpha = 1^\alpha = 1.$$

Für $\alpha > 1$ konvergiert diese Reihe an $x = 1$ und $x = -1$, für $0 < \alpha \leq 1$ divergiert die Reihe an $x = 1$ und konvergiert an $x = -1$ und für $\alpha \leq 0$ divergiert die Reihe sowohl an $x = 1$ als auch an $x = -1$.

2. Die Reihe $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ hat den Konvergenzradius $\infty$, da

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1/k!}{1/(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty.$$

3. Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!\,x^k$ hat den Konvergenzradius 0, da

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$

*Bemerkung.* Beispiel 1) zeigt, dass im Allgemeinen keine Aussage über das Konvergenzverhalten an den Endpunkten $x = c \pm \rho$ des Konvergenzintervalls (im Fall $0 < \rho < \infty$) möglich ist.

**Satz 6.24.** *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ *eine Potenzreihe mit* $\rho > 0$ *und sei* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ *für* $x \in (c-\rho, c+\rho)$. *Dann:*

(i) *Die Funktion* $f$ *ist stetig auf* $I$.

(ii) *Die Funktion* $f$ *ist R-integrierbar auf jedem kompakten Teilintervall von* $(c-\rho, c+\rho)$ *und*

$$\int_c^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-c)^{k+1}, \quad |x-c| < \rho.$$

(iii) *Die Funktion* $f$ *ist differenzierbar auf dem Intervall* $(c-\rho, c+\rho)$ *und*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-c)^{k-1}, \quad |x-c| < \rho.$$

*Beweis.* Es genügt zu bemerken, dass die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-c)^{k+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-c)^{k-1}$$

alle den Konvergenzradius $\rho$ haben. □

Das vorangehende Resultat sagt, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzintervalls gliedweise integriert bzw. differenziert werden dürfen. *Insbesondere sind durch konvergente Potenzreihen dargestellte Funktionen im Inneren des Konvergenzintervall der Potenzreihe beliebig oft* (man sagt unendlich oft) *differenzierbar.*

**Satz 6.25.** *Die Koeffizienten* $a_k$ *berechnen sich aus den Ableitungen der Funktion* $f$ *an der Stelle* $c$,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

*Insbesondere sind bei positivem Konvergenzradius die Koeffizienten* $a_k$ *der Reihe* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ *durch* $f$ *eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Man zeigt induktiv, dass

$$f^{(l)}(x) = \sum_{k=l}^{\infty} \frac{k!}{(k-l)!}\, a_k (x-c)^{k-l}.$$

Tatsächlich ist dies für $l = 0$ richtig, und aus der Gültigkeit der Behauptung für ein $l$ folgt

$$\begin{aligned} f^{(l+1)}(x) &= \sum_{k=l}^{\infty} \frac{k!}{(k-l)!}(k-l)\, a_k (x-c)^{k-l-1} \\ &= \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{k!}{(k-l-1)!}\, a_k (x-c)^{k-l-1}. \end{aligned}$$

Auswertung der obigen Beziehung an der Stelle $x = c$ ergibt dann

$$f^{(l)}(c) = l!\, a_l$$

für alle $l \in \mathbb{N}_0$. □

Das folgende Resultat besagt im Wesentlichen, dass man mit Potenzreihen wie mit Polynomen rechnen kann. Zudem ist der Quotient zweier Potenzreihen wieder eine Potenzreihe, sofern die Potenzreihe im Nenner ein von Null verschiedenes Absolutglied hat.

**Satz 6.26.** *Seien* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k$ *Potenzreihen mit Konvergenzradius wenigstens* $\rho > 0$. *Dann gilt*

(i)
$$f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)(x-c)^k,$$

(ii)
$$f(x)g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-c)^m,$$

*wobei* $c_m = \sum_{k+l=m} a_k b_l$ *für* $m \in \mathbb{N}_0$,

(iii)
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} d_m (x-c)^m,$$

*sofern* $b_0 \neq 0$. *Die Koeffizienten* $d_0, d_1, d_2, \ldots$ *bestimmen sich aus den Beziehungen*

$$\begin{cases} a_0 = b_0 d_0, \\ a_1 = b_0 d_1 + b_1 d_0, \\ a_2 = b_0 d_2 + b_1 d_1 + b_2 d_0, \\ \quad \vdots \end{cases}$$

*also*

$$d_0 = \frac{a_0}{b_0}, \quad d_1 = \frac{a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2}, \text{ usw.}$$

*In allen drei Fällen ist der Konvergenzradius der resultierenden Potenzreihe wenigstens* $\rho$, *wobei in* (iii) *die Funktion* $g$ *auf dem Intervall* $(c-\rho, c+\rho)$ *nicht verschwinden darf.* (Letzteres an der Stelle $c$ ist gerade die Bedingung $b_0 \neq 0$.)

*Beweis.* In (ii) benutzt man das Cauchyprodukt, (iii) wird auf (ii) zurückgeführt. □

## 6.6 Taylorreihen

**Definition 6.27.** Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, $c \in I$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

die *Taylorreihe* von $f$ an der Stelle $c$.

In Abhängigkeit davon, wie schnell die Folge $\{f^{(k)}(c)\}_{k=0}^{\infty}$ für $k \to \infty$ wächst, kann der Konvergenzradius $\rho$ der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ gleich Null oder positiv sein. Selbst im Fall $\rho > 0$ muss die Taylorreihe $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ für $|x-c| < \rho$ und $x \neq c$ *nicht* die Funktion $f$ darstellen (d. h. $f \neq g$ auf $(c-\rho, c+\rho)$ ist möglich).
Wir wollen diese Fragen näher untersuchen.

*Beispiel* 6.28. (i) Die Funktion $(-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log(1+x)$ ist unendlich oft differenzierbar. Für $|x| < 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \, x^{k+1}.\end{aligned}$$

Die so erhaltene Reihe *muss* die Taylorreihe von $\log(1+x)$ an der Stelle $x = 0$ sein (nach dem Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen). Gleichzeitig haben wir gezeigt, dass in diesem Fall die Taylorreihe die Funktion $\log(1+x)$ auf dem Intervall $(-1,1)$ darstellt.

Als Nebenprodukt erhalten wir für $k \geq 1$

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(\log(1+x)\right)\Big|_{x=0} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \, k! = (-1)^{k-1}(k-1)!.$$

(ii) Ist $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ein Polynom vom Grad $n$, so

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(c)}{k!} \, (x-c)^k$$

für jedes $c \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist die Taylorreihe endlich.

(iii) Sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Dann ist $h$ unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Tatsächlich gilt für $k \geq 1$

$$h^{(k)}(x) = \frac{1}{x^2} \, Q_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}, \quad x > 0,$$

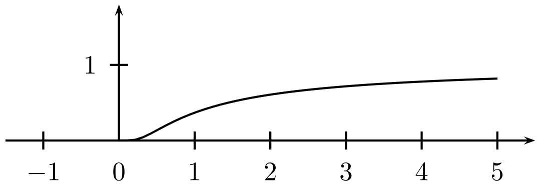


Abbildung 6.9: Die Funktion $x \mapsto e^{-1/x}$, $x > 0$

wobei $Q_k$ ein Polynom vom Grad $2k-2$ ist: $Q_1(s) = 1$,

$$Q_{k+1}(s) = -2s\, Q_k(s) - s^2\, Q_k'(s) + s^2\, Q_k(s), \quad k \geq 1.$$

Letztere Formel beweist man mittels Induktion über $k$.
Für $k = 1$ haben wir $h'(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{-1/x}$ für $x > 0$, also $Q_1(s) = 1$, und wenn das Ergebnis für ein $k \geq 1$ bereits bewiesen wurde, so

$$h^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\, Q_k(\frac{1}{x})\, e^{-1/x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(-\frac{2}{x}\, Q_k(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}\, Q_k'(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2}\, Q_k(x)\right) e^{-1/x}, \quad x > 0,$$

und daher das Ergebnis für $k+1$.

Insbesondere folgt $h^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die Taylorreihe von $h$ ist somit identisch Null und stellt für $x > 0$ *nicht* die Funktion $h$ dar (s. Abbildung 6.9).

Bricht man die Entwicklung der Taylorreihe nach endlich vielen Schritten ab, so erhält man immer ein positives Ergebnis (in dem Sinne, dass man den Rest kontrolliert).

**Theorem 6.29** (Taylorformel mit Restglied)**.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, $c \in I$. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(x-c)^k + \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

*für $x \in I$.*

**Definition 6.30.** $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(x-c)^k$ heißt das *$n$-te Taylorpolynom* von $f$ an der Stelle $c$, $R_n = f - P_n$ ist das $n$-te Restglied.

*Beweis.* Wir beweisen die Formel durch Induktion nach $n$. Für $n = 0$ ist dies der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\, dt.$$

Sei die Formel für ein $n$ bereits gezeigt. Dann

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(x) &= R_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-c)^{n+1} \\
&= \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt - \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(c)\,dt \\
&= \frac{1}{n!}\int_c^x \frac{d}{dt}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]\Big(f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(c)\Big)\,dt \\
&= \frac{1}{n!}\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big(f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(c)\Big)\right)\Bigg|_c^x \\
&\qquad + \frac{1}{n!}\int_c^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\int_c^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

□

*Folgerung* 6.31. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, $c$, $x \in I$. Gibt es ein $M > 0$ mit $\left|f^{(n)}(t)\right| \leq M$ für alle $n$ und alle $t$ aus dem abgeschlossenen Intervall $J$ mit Endpunkten $c$, $x$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

*Beweis.* O. B. d. A. sei $x > c$. Wegen $\left|f^{(n)}(t)\right| \leq M$ für alle $t \in [c, x]$ folgt

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left|\frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \\
&\leq \frac{M}{n!}\int_c^x (x-t)^n\,dt = \frac{M}{(n+1)!}\,(x-c)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Es bleibt zu bemerken, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ gilt. □