

Differential- und Integralrechnung III

Ingo Witt

WS 2008/09

Inhaltsverzeichnis

13 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	5
13.1 Begriff einer Mannigfaltigkeit	5
13.1.1 Parakompakte topologische Räume	5
13.1.2 C^k -Strukturen	7
13.1.3 Einige Beispiele differenzierbarer Mannigfaltigkeiten	8
13.2 Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten	10
13.3 Das Tangentialbündel	11
13.4 Untermannigfaltigkeiten	15
13.5 Vektorfelder	18
13.5.1 Definition und erste Eigenschaften	18
13.5.2 Der Fluss eines Vektorfeldes	19
13.5.3 Normalformen	20
13.6 Weitere Kapitel	24
13.6.1 Überlagerungen	24
13.6.2 Zerlegung der Eins	35
13.6.3 Mannigfaltigkeiten mit Rand	37
14 Differenzialformen	41
14.1 Differenzialformen vom Rang 1	41
14.1.1 Das Kotangentialbündel	41
14.1.2 Definition und erste Eigenschaften	42
14.1.3 Kurvenintegrale zweiter Art	44
14.2 Vektorbündel	45
14.2.1 Definition, Schnitte	45
14.2.2 Operationen mit Vektorbündeln	49
14.3 Differenzialformen vom Rang q	50
14.3.1 Das äußere Differenzial	52
14.3.2 Differenzialformen im \mathbb{R}^3	55
14.4 Orientierte Mannigfaltigkeiten	55
14.5 Integration von n -Formen	59
14.5.1 Definition des Integrals	59
14.5.2 Der Satz von Stokes	60

15 De Rham-Kohomologie	63
15.1 Das Poincaré-Lemma	63
15.2 Die graduierte Algebra $H_{\text{dR}}^*(M)$	65
15.3 Die Mayer-Vietoris-Sequenz	69
15.3.1 Die Kohomologie eines Komplexes	69
15.3.2 Die lange exakte Kohomologiesequenz	72
15.3.3 Die Kohomologie der Sphäre	73
15.4 Endlich-Dimensionalität der de Rham-Kohomologie	74
15.5 De Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger	75
15.5.1 Definition und erste Berechnungen	75
15.5.2 Die Mayer-Vietoris-Sequenz mit kompaktem Träger	77
15.5.3 Der Abbildungsgrad	79
15.6 Die Kohomologie einer endlichen Überlagerung	81
15.6.1 Der allgemeine Fall	81
15.6.2 Normale Überlagerungen	82
15.7 Poincaré-Dualität	85
16 Hodge-Theorie	89
16.1 Riemannsche Mannigfaltigkeiten	89
16.1.1 Riemannsche Metriken	89
16.1.2 Geodäten und Normalkoordinaten	90
16.1.3 Der Hodge-*-Operator	96

Kapitel 13

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

In diesem Semester werden wir uns mit der Analysis auf Mannigfaltigkeiten beschäftigen. Unter anderem werden wir Invarianten (wie die Dimension, die Euler-Charakteristik, usw.) kennenlernen, die differenzierbare Mannigfaltigkeiten unterscheiden.

13.1 Der Begriff einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit

13.1.1 Parakompakte topologische Räume

Wir benötigen einige topologische Begriffe:

- (i) Eine Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ eines topologischen Raumes X heißt *lokal-endlich*, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung V gibt mit

$$\#\{i \mid U_i \cap V \neq \emptyset\} < \infty.$$

- (ii) Eine Überdeckung $\{V_j\}_{j \in J}$ von X heißt eine *Verfeinerung* einer Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$, falls es zu jedem $j \in J$ ein $i \in I$ mit $V_j \subseteq U_i$ gibt.

Definition 13.1. Ein topologischer Raum X heißt *parakompakt*, falls jede offene Überdeckung von X eine lokal-endliche offene Verfeinerung besitzt.

Beispiel 13.2 (Stone). Metrische Räume sind parakompakt.

Wir benötigen weitere topologische Begriffe:

- (iii) Ein topologischer Raum X heißt *lokal-kompakt*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

Beispiel 13.3. \mathbb{R}^n ist lokal-kompakt.

- (iv) Ein System \mathcal{B} offener Teilmengen eines topologischen Raumes X heißt *Basis der Topologie* von X (bzw. *Basis der offenen Mengen* von X), falls jede offene Menge in X Vereinigung gewisser Elemente von \mathcal{B} ist. (Man sagt, dass X dem *zweiten Abzählbarkeitsaxiom* genügt, falls X eine *abzählbare Basis* besitzt.)

Beispiel 13.4. \mathbb{R}^n hat eine abzählbare Basis.

Beweis. Wir wählen als Basis alle offenen Kugeln $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < r\}$ mit $a \in \mathbb{Q}^n$, $r \in \mathbb{Q}$ und $r > 0$. \square

Satz 13.5. *Ein lokal-kompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis ist parakompakt.*

Beweis. Sei X ein topologischer Raum mit den angegebenen Eigenschaften. Für jedes $x \in X$ wählen wir eine offene Umgebung V_x mit kompaktem Abschluss. Wir führen den Beweis in drei Schritten.

1. Schritt. Es gibt eine abzählbare Basis $\{B_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ der Topologie von X , so dass sämtliche Mengen \overline{B}_m kompakt sind.

Beweis. Aus einer vorgegebenen abzählbaren Basis \mathcal{B} wählen wir für jedes $x \in X$ ein B_x mit $x \in B_x \subseteq V_x$. Das Mengensystem $\{B_x \mid x \in X\}$ hat dann die verlangten Eigenschaften. \square

2. Schritt. Es gibt offene Mengen $W_1 \subseteq W_2 \subseteq W_3 \subseteq \dots$ mit $X = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} W_m$, \overline{W}_m ist kompakt und $\overline{W}_m \subseteq W_{m+1}$ für alle m .

Beweis. Wir konstruieren die Mengen W_m induktiv. Wir setzen $W_0 = \emptyset$. Falls W_1, \dots, W_m mit \overline{W}_j kompakt und $\overline{W}_{j-1} \cup B_j \subseteq W_j$ für $j = 1, \dots, m$ bereits gewählt wurden, so konstruieren wir W_{m+1} wie folgt:

Wir wählen endlich viele $x_1, \dots, x_l \in X$ mit $\overline{W}_{j-1} \cup \overline{B}_j \subseteq V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_l}$ und setzen dann $W_{m+1} = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_l}$. Die Mengen W_1, W_2, W_3, \dots besitzen die verlangten Eigenschaften. \square

3. Schritt. Sei nun $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X .

Wir setzen $K_m = \overline{W}_m \setminus W_{m-1}$. Die K_m sind kompakt. Für jedes $x \in K_m$ dürfen wir annehmen (indem wir gegebenenfalls V_x kleiner wählen), dass $V_x \subseteq U_i$ für ein $i \in I$ sowie $V_x \subseteq W_{m+1}$, $V_x \cap \overline{W}_{m-2} = \emptyset$ gilt. Jedes K_m kann durch endlich viele der V_x überdeckt werden. Die Gesamtheit \mathcal{V} aller dieser so gewählten V_x bildet eine offene Überdeckung von X , die nach Konstruktion die Überdeckung $\{U_i\}$ verfeinert.

Ist nun $y \in X$ ein beliebiger Punkt, so gibt es ein m mit $y \in \overline{W}_m$, aber $y \notin \overline{W}_{m-1}$. Es gibt dann eine offene Menge $V \in \mathcal{V}$, die y enthält. Dieses V kann höchstens mit den endlich vielen Elementen von \mathcal{V} , die $K_{m-2}, K_{m-1}, K_m, K_{m+1}$ überdecken, einen nichtleeren Durchschnitt haben. Damit ist die Überdeckung \mathcal{V} lokal-endlich. \square

13.1.2 C^k -Strukturen

Definition 13.6. Sei X ein topologischer Raum.

- (i) Eine *Karte* von X ist ein Paar (U, φ) , wobei $U \subseteq X$ eine offene Menge und $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n ist. U selbst heißt dann auch eine *Kartenumgebung*.
- (ii) Sind $(U, \varphi), (V, \psi)$ zwei Karten mit $U \cap V \neq \emptyset$, so heißt die Abbildung

$$\psi \circ \varphi^{-1} \Big|_{\varphi(U \cap V)}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

ein *Kartenwechsel*.

Kartenwechsel sind insbesondere Homöomorphismen zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n .

Bemerkung. Die Idee ist es, mittels der Karten Koordinaten in allgemeineren topologischen Räumen (nämlich den Mannigfaltigkeiten) einzuführen. Die Kartenübergänge entsprechen dann gerade den Koordinatenwechseln.

Definition 13.7. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine *Mannigfaltigkeit* M der Klasse C^k ist ein nichtleerer *parakompakter Hausdorffraum* zusammen mit einer Überdeckung durch Kartenumgebungen, so dass sämtliche Kartenübergänge von der Klasse C^k sind.

Die Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ heißt die *Dimension* $\dim M$ von M .

Bemerkung. Man hat den Begriff einer Mannigfaltigkeit auch im Fall $k = 0$ (*topologische Mannigfaltigkeiten*) bzw. im Fall $k = \omega$ (*reell-analytische Mannigfaltigkeiten*). Im letzteren Fall sind alle Kartenübergänge lokal in konvergente Potenzreihen entwickelbar.

Bemerkung. (i) Eine Überdeckung $\{U_i\}$ von M mit Kartenumgebungen wie in der Definition heißt auch ein C^k -*Atlas*.

- (ii) Eine weitere Karte (U, φ) heißt mit diesem Atlas *verträglich*, wenn sämtliche Kartenübergänge von (U, φ) zu den (U_i, φ_i) von der Klasse C^k sind.
- (iii) Ein C^k -Atlas heißt *maximal*, wenn er nicht durch Hinzunahme weiterer verträglicher Karten erweitert werden kann.
- (iv) Unter einer C^k -*Struktur* auf einer topologischen Mannigfaltigkeit M versteht man einen maximalen Atlas auf M .

Es gilt offenbar:

Lemma 13.8. *Jeder C^k -Atlas bestimmt eine C^k -Struktur in eindeutiger Weise.*

Beweis. Man erweitere den Atlas um alle verträglichen Karten. □

13.1.3 Einige Beispiele differenzierbarer Mannigfaltigkeiten

1. **Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n .** Hier ist noch zu verifizieren, dass Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n entsprechend unserer früheren Definition parakompakt sind. Tatsächlich besitzen sie eine abzählbare Basis. (Weshalb?)
2. **Der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^n$.** Der *reell-projektive Raum* $\mathbb{R}P^n$ ist der Raum aller Geraden im \mathbb{R}^{n+1} durch den Ursprung. Man hat eine surjektive Abbildung $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, die diametral gegenüberliegende Punkte identifiziert. Mit der Quotiententopologie unter dieser Abbildung versehen wird $\mathbb{R}P^n$ zu einer topologischen Mannigfaltigkeit.

Wir führen eine C^∞ -Struktur (tatsächlich eine C^ω -Struktur) auf $\mathbb{R}P^n$ wie folgt ein: Wir beschreiben Geraden durch den Ursprung im \mathbb{R}^{n+1} durch *projektive Koordinaten* $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, wobei $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ die Bahn des Punktes $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ unter der radialen Wirkung der Gruppe $\mathbb{R} \setminus 0$ bezeichnet, d. h.

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = \{(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0\}.$$

Für jedes $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ hat man die offene Menge

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_i \neq 0\}$$

in $\mathbb{R}P^n$ sowie die Kartenabbildung

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_0 : x_1 : \dots : x_n) &\mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right). \end{aligned}$$

Es ist jetzt leicht zu sehen, dass die Kartenübergänge von der Klasse C^∞ (tatsächlich C^ω) sind. In der Tat rechnet man nach, dass für $i < j$ der Kartenübergang durch

$$\begin{aligned} \varphi_i(U_i \cap U_j) &= \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_j \neq 0\} \\ &\rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_{i+1} \neq 0\}, \\ (y_1, \dots, y_n) &\mapsto \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_i}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_{i+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right) \end{aligned}$$

gegeben ist.

3. **Die Graßmann-Mannigfaltigkeiten $G_{\mathbb{R}}(n, k)$.** Die *Graßmann-Mannigfaltigkeit* $G_{\mathbb{R}}(n, k)$ ist der Raum aller k -dimensionalen linearen Unterräume des \mathbb{R}^n . Ein Beispiel ist $\mathbb{R}P^n = G_{\mathbb{R}}(n+1, 1)$.

$G_{\mathbb{R}}(n, k)$ ist eine $k(n-k)$ -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit (tatsächlich eine C^ω -Mannigfaltigkeit).

Um Karten einzuführen, verfahren wir wie folgt:

Lemma 13.9. *Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $(n-k)$ -dimensionaler linearer Unterraum. Dann ist $\mathcal{U}(V) = \{U \in G_{\mathbb{R}}(n, k) \mid \mathbb{R}^n = U \oplus V\}$ ein affiner Raum mit assoziiertem \mathbb{R} -linearem Raum $L(\mathbb{R}^n/V, V)$.*

Bemerkung. Die Bedingung $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ für einen k -dimensionalen Unterraum U von \mathbb{R}^n ist mit $U \cap V = \{0\}$ äquivalent.

Beweis. Wir definieren eine freie und transitive Wirkung $L(\mathbb{R}^n/V, V) \times \mathcal{U}(V) \rightarrow \mathcal{U}(V)$ wie folgt: jedem $T \in L(\mathbb{R}^n/V, V)$ und jedem $U \in \mathcal{U}(V)$ wird der Raum

$$\{u + T(u + V) \mid u \in U\}$$

zugeordnet. Dieser Raum ist der Graph der linearen Abbildung $T \circ \pi_U$, wobei $\pi_U: U \rightarrow \mathbb{R}^n/V$ durch die kanonische Projektion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/V$ induziert ist. Offenbar gilt $\text{graph}(T \circ \pi_U) \in \mathcal{U}(V)$.

Die Abbildung $\pi_U: U \rightarrow \mathbb{R}^n/V$ ist ein linearer Isomorphismus. Folglich ist die Abbildung $L(\mathbb{R}^n/V, V) \rightarrow \mathcal{U}(V)$, $T \mapsto \text{graph}(T \circ \pi_U)$ bei festem U bijektiv.

Dass es sich bei der angegebenen Abbildung um eine Gruppenwirkung handelt, überprüfen Sie bitte selbst. \square

Die Wahl eines $U \in \mathcal{U}(V)$ entspricht der Festsetzung der Null im affinen Raum $\mathcal{U}(V)$. In diesem Fall identifizieren wir $\mathcal{U}(V)$ mit $L(U, V)$ vermöge der Abbildung $L(U, V) \rightarrow \mathcal{U}(V)$, $T \mapsto \text{graph}(T)$.¹

Seien nun V, V' $(n-k)$ -dimensionale Unterräume von \mathbb{R}^n und $U \in \mathcal{U}(V)$, $U' \in \mathcal{U}(V')$ gewählt.

Lemma 13.10. *Der Kartenübergang von $\mathcal{U}(V)$ nach $\mathcal{U}(V')$ schreibt sich als*

$$\begin{aligned} \{T \in L(U, V) \mid \text{graph}(T) \cap V' = 0\} \\ \rightarrow \{S \in L(U', V') \mid \text{graph}(S) \cap V = 0\} \\ T \mapsto (I_U + T)(\Pi(I_U + T))^{-1} - I_{U'}. \end{aligned}$$

Hierbei sind $I_U \in L(U, U)$, $I_{U'} \in L(U', U')$ die identischen Abbildungen und Π ist die Projektion im \mathbb{R}^n auf U' entlang V' . Die Inversion ist im Raum $L(U, U')$.

Beweis. Wird beim Kartenübergang der linearen Abbildung $T \in L(U, V)$ die lineare Abbildung $S \in L(U', V')$ zugeordnet, so besteht die Gleichung

$$u + Tu = u' + Su'$$

¹Wir benutzen in diesem Zusammenhang weiterhin den Buchstaben T .

mit $u \in U$, $u' \in U'$. Der Zusammenhang zwischen u, u' ergibt nach Anwendung der Projektion Π zu

$$\Pi(I_U + T)u = u'$$

bzw. zu $u = (\Pi(I_U + T))^{-1}u'$. Es folgt, dass

$$(I_U + T)(\Pi(I_U + T))^{-1} = I_{U'} + S$$

gilt. Die behauptete Beziehung ergibt sich unmittelbar. \square

Wir topologisieren nun den Raum $G_{\mathbb{R}}(n, k)$, indem wir sagen, dass eine Menge $\mathcal{V} \subseteq G_{\mathbb{R}}(n, k)$ genau dann offen ist, wenn $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}(V)$ offen in $\mathcal{U}(V)$ ist für alle V . Hierbei erhält $\mathcal{U}(V)$ die Topologie von $L(U, V)$ wie angegeben.

Da es für $U, U' \in G_{\mathbb{R}}(n, k)$ immer ein V gibt mit $U, U' \in \mathcal{U}(V)$, ist der so erhaltene topologische Raum $G_{\mathbb{R}}(n, k)$ Hausdorffsch. Gleichzeitig haben wir $G_{\mathbb{R}}(n, k)$ mit Kartenumgebungen überdeckt, so dass die Kartenübergänge von der Klasse C^∞ (tatsächlich von der Klasse C^ω) sind. Folglich ist $G_{\mathbb{R}}(n, k)$ eine C^∞ -Mannigfaltigkeit (tatsächlich eine C^ω -Mannigfaltigkeit).

4. **Weitere Beispiele** sind $\mathbb{C}P^n$, $G_{\mathbb{C}}(n, k)$, Matrixgruppen wie $\mathrm{Gl}(n; \mathbb{R})$, $\mathrm{Sl}(n; \mathbb{R})$, $U(n)$ usw.

5. **Produktmannigfaltigkeiten.** Sind M, N C^k -Mannigfaltigkeiten, so ist auch $M \times N$ eine C^k -Mannigfaltigkeit. Ist dabei (U, φ) eine Karte von M und (V, ψ) eine Karte von N , so ist $(U \times V, \varphi \times \psi)$ eine Karte von $M \times N$.

Ein Beispiel ist der n -Torus $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ Faktoren}}$.

13.2 Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

Seien M, N C^k -Mannigfaltigkeiten (nicht notwendigerweise derselben Dimension), $f: M \rightarrow N$.

Definition 13.11. f heißt eine C^k -Abbildung zwischen M und N , falls für jede Karte (U, φ) von M und jede Karte (V, ψ) von N mit $f(U) \cap V \neq \emptyset$ die Abbildung

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \Big|_{\varphi(U \cap f^{-1}(V))} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$$

von der Klasse C^k ist.

Bemerkung. C^k -Abbildungen sind automatisch von der Klasse C^0 , also stetig.

Lemma 13.12. *Um zu überprüfen, ob eine gegebene Abbildung $f: M \rightarrow N$ von der Klasse C^k ist, genügt es, die in der Definition angegebene Bedingung für jeweils einen Atlas von M bzw. N zu verifizieren.*

Beweis. Kartenwechsel sind selbst von der Klasse C^k . □

Lemma 13.13. *Die Komposition zweier C^k -Abbildungen $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow N'$ ist eine C^k -Abbildung $g \circ f: M \rightarrow N'$.*

Beweis. Offensichtlich. □

Definition 13.14. (i) Eine C^k -Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt ein C^k -Diffeomorphismus, falls f bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1}: N \rightarrow M$ von der Klasse C^k ist.

(ii) Zwei Mannigfaltigkeiten M und N heißen C^k -diffeomorph, falls es einen C^k -Diffeomorphismus zwischen ihnen gibt.

Eine wichtige Aufgabe der *Differentialgeometrie* ist es, differenzierbare Mannigfaltigkeiten entsprechend der C^k -Diffeomorphie zu klassifizieren. Eine erste *Invariante* hier ist offenbar die Dimension $\dim M$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M .²

Beispiel 13.15. In Dimension 1 gibt es bis auf Diffeomorphie genau eine kompakte Mannigfaltigkeit, nämlich \mathbb{S}^1 , und genau eine nichtkompakte Mannigfaltigkeit, nämlich \mathbb{R}^1 . (Beweis vielleicht später).

Beispiel 13.16. $\mathbb{C}P^1$ ist diffeomorph zu \mathbb{S}^2 .

13.3 Das Tangentialbündel

Wir möchten jetzt den Begriff eines Tangentialvektors an eine Kurve in einer Mannigfaltigkeit einführen.

Sei dazu M eine C^{k+1} -Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Wir betrachten C^1 -Kurven $\gamma: I \rightarrow M$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $\gamma(0) = p$.

Definition 13.17. Zwei derartige Kurven $\gamma_j: I_j \rightarrow M$ für $j = 1, 2$ berühren sich erster Ordnung in p , falls in einer Karte (U, φ) mit $p \in U$

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

gilt. Wir schreiben $\gamma_1 \sim_p \gamma_2$.

²Das ist auch für topologische Mannigfaltigkeiten richtig, nur wesentlich schwieriger zu beweisen.

Lemma 13.18. *Die angegebene Bedingung ist unabhängig von der gewählten Karte.*

Beweis. Sei (V, ψ) eine weitere Karte mit $p \in V$. Dann gilt für $j = 1, 2$

$$(\psi \circ \gamma_j)'(0) = ((\psi \circ \psi^{-1}) \circ \gamma_j)'(0) = D(\psi \circ \psi^{-1})(\varphi(p))(\varphi \circ \gamma_j)'(0),$$

woraus die Bedingung folgt. \square

Definition 13.19. (i) Für eine C^1 -Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ mit $0 \in I$, $\gamma(0) = p$ bezeichnet $\dot{\gamma}(0) \in T_p M$ die Äquivalenzklasse von γ unter \sim_p .³ $\dot{\gamma}(0)$ heißt der *Geschwindigkeitsvektor* an γ in p .

(ii) Die Menge aller Äquivalenzklassen $\dot{\gamma}(0)$ unter \sim_p ist der *Tangententialraum* $T_p M$ an M im Punkt p .

Lemma 13.20. *$T_p M$ ist in kanonischer Weise ein n -dimensionaler \mathbb{R} -linearer Raum.*

Beweis. Sei (U, φ) eine Karte mit $p \in U$. Dann gilt

$$T_p M = \{ [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)]_{\sim_p} \mid v \in \mathbb{R}^n \},$$

wobei verschiedene $v \in \mathbb{R}^n$ verschiedene Äquivalenzklassen ergeben. Das folgt daraus, wenn man $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)$ schreibt, dass dann

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = v$$

gilt. Die lineare Struktur des \mathbb{R}^n überträgt sich unmittelbar auf $T_p M$. Der Beweis des vorigen Lemmas zeigt, dass die so erhaltene lineare Struktur auf $T_p M$ unabhängig von der gewählten Karte (U, φ) ist. \square

Definition 13.21. $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ heißt das *Tangentialbündel* von M .

Bezeichne $\pi: TM \rightarrow M$ die kanonische Projektion. Sei (U, φ) eine Karte von M . Wir betrachten die vermöge der Karte (U, φ) in U eingeführten *lokalen Koordinaten* x^1, \dots, x^n . Bezüglich dieses Koordinatensystems sei

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_j)]_{\sim_p} \in T_p M$$

für $p \in U$, $j = 1, \dots, n$.⁴ Dann ist $\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)$ eine Basis in $T_p M$.

Satz 13.22. *TM ist in kanonischer Weise eine $2n$ -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit, wobei $n = \dim M$.*

³Die Bezeichnung $\dot{\gamma}(0)$ ist ebenfalls gebräuchlich.

⁴ e_1, \dots, e_n bezeichnet die Standardbasis des \mathbb{R}^n .

Beweis. Wir identifizieren $\pi^{-1}(U)$ für eine Karte (U, φ) in M als Kartenumgebung in TM . Dazu stellen wir fest, daß sich bezüglich der Basis $\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)$ jeder Vektor $\mathfrak{t} \in T_p M$ als

$$\mathfrak{t} = \sum_{j=1}^n \alpha^j \frac{\partial}{\partial x^j}(p)$$

für eindeutig bestimmte $\alpha^1, \dots, \alpha^n \in \mathbb{R}$ schreibt. Wir nehmen $x^1, \dots, x^n, \alpha^1, \dots, \alpha^n$ als Koordinaten in $\pi^{-1}(U) \approx U \times \mathbb{R}^n$ und erhalten auf diese Weise Karten in TM .

Dazu müssen wir überprüfen, dass die Kartenübergänge von der Klasse C^k sind. Sei also (V, ψ) eine weitere Karte mit $U \cap V \neq \emptyset$ und induzierten lokalen Koordinaten y^1, \dots, y^n . Für $p \in U \cap V$ und $j = 1, \dots, n$ rechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})^k}{\partial x^j}(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^k}(p)$$

nach, wobei $(\psi \circ \varphi^{-1})^k$ die k -te Komponente von $\psi \circ \varphi^{-1}$ bezeichnet. Dies folgt aus

$$\frac{d}{dt}((\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p) + te_j)) \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p)) e_k,$$

wobei Letzteres gemäß der Kettenregel gilt.

Ist nun $\mathfrak{t} \in T_p M$ mit

$$\mathfrak{t} = \sum_{j=1}^n \alpha^j \frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \sum_{k=1}^n \beta^k \frac{\partial}{\partial y^k}(p)$$

und $\beta^1, \dots, \beta^n \in \mathbb{R}$, so gilt für $k = 1, \dots, n$

$$\beta^k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})^k}{\partial x^j}(\varphi(p)) \alpha^j$$

bzw. mit $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)^T$, $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n)^T$

$$\beta = \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})}{\partial x}(\varphi(p)) \alpha.$$

Letztere Beziehung vermittelt den Übergang von den *linearen Koordinaten* α zu den linearen Koordinaten β , der von der Klasse C^k ist.⁵

Wie im Beispiel der Graßmann-Mannigfaltigkeiten $G_{\mathbb{R}}(n, k)$ liefert die Überdeckung von TM mit Kartenumgebungen eine Hausdorff-Topologie (wieso ist diese Topologie Hausdorffsch?) und damit eine C^{k-1} -Struktur auf TM . \square

⁵Informell schreibt sich diese Beziehung als $\beta = \frac{\partial y}{\partial x} \alpha$.

Sei nun $f: M \rightarrow N$ eine C^{k+1} -Abbildung. Für $p \in M$ definieren wir $(df)_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ vermöge $\gamma'(0) \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$.

Satz 13.23. *Die so eingeführte Abbildung $df: TM \rightarrow TN$ ist korrekt definiert, von der Klasse C^k und besitzt die Eigenschaft, dass $(df)_p = df|_{T_p M}: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ für jedes $p \in M$ linear ist.*

Beweis. Die Korrektheit der Definition sowie die Linearität der Abbildungen $(df)_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ überlasse ich Ihnen.

Um einzusehen, dass df von der Klasse C^k ist, nehmen wir für ein $p^* \in M$ eine Karte (U, φ) in M um p^* mit lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^m und eine Karte (V, ψ) in N um $f(p^*)$ mit $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ und lokalen Koordinaten y^1, \dots, y^n . Dann rechnet man nach, dass für $p \in U \cap f^{-1}(V)$ und $j = 1, \dots, m$

$$(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} (p) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^k}{\partial x^j} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^k} (f(p))$$

gilt. Tatsächlich ist

$$\frac{d}{dt} ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) (\varphi(p) + te_j)) \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^k}{\partial x^j} (\varphi(p)) e_k$$

gemäß der Kettenregel.

Ist nun $\mathfrak{t} \in T_p M$ mit $\mathfrak{t} = \sum_{j=1}^m \alpha^j \frac{\partial}{\partial x^j} (p)$, so erhalten wir für

$$(df)_p (\mathfrak{t}) = \sum_{k=1}^n \beta^k \frac{\partial}{\partial y^k} (f(p)),$$

dass

$$\beta^k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^k}{\partial x^j} (\varphi(p)) \alpha^j,$$

bzw. mit $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)^T$, $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n)^T$, dass

$$\beta = \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x} (\varphi(p)) \alpha$$

gilt.⁶ Folglich ist die Abbildung $df: TM \rightarrow TN$ von der Klasse C^k . □

⁶Informell schreibt sich dies als $\beta = \frac{\partial f}{\partial x} \alpha$ und verallgemeinert das totale Differential.

13.4 Untermannigfaltigkeiten

Als nächstes verallgemeinern wir Satz 11.48.

Satz 13.24 (Satz vom konstanten Rang). *Sei $f: M \rightarrow N$ eine C^k -Abbildung, so dass $(df)_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ in der Umgebung eines Punktes $p^* \in M$ konstanten Rang r hat.⁷ Dann gibt es eine Karte (U, φ) um p^* und eine Karte (V, ψ) um $f(p^*)$, so dass*

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-r)\text{-mal}})$$

in $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ gilt.

Beweis. Die behauptete Eigenschaft ist lokal, also arbeiten wir in lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^m um $p^* = 0$ und y^1, \dots, y^n um $f(p^*) = 0$. Wir schreiben $x = (x', x'')$ mit $x' = (x^1, \dots, x^r)$, $x'' = (x^{r+1}, \dots, x^m)$ bzw. $y = (y', y'')$ mit $y' = (y^1, \dots, y^r)$, $y'' = (y^{r+1}, \dots, y^n)$. Wir dürfen $\det \left(\frac{\partial f'}{\partial x'} \right) \neq 0$ nahe 0 annehmen.

Dann können wir die Gleichung $y' = f'(x', x'')$ lokal nach x' auflösen, also $x' = x'(y', x'')$. Wir betrachten dann y', x'' als neue Koordinaten nahe 0.

Bezeichnet man nun y' wiederum als x' , so nimmt die Abbildung f die Gestalt

$$f(x', x'') = (x', f''(x', x''))$$

an. Es gilt

$$Df(x', x'') = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial f''}{\partial x'} & \frac{\partial f''}{\partial x''} \end{pmatrix} (x', x''),$$

wobei in der linken oberen Ecke die $r \times r$ -Einheitsmatrix steht. Folglich hat $Df(x', x'')$ genau dann Rang r , wenn $\frac{\partial f''}{\partial x''}(x', x'') = 0$, also $f'' = f''(x')$ gilt.

Die Abbildung f schreibt sich demnach als

$$f(x', x'') = (x', f''(x')).$$

Führt man nun in \mathbb{R}^n statt (y', y'') neue Koordinaten (z', z'') vermöge $z' = y'$, $z'' = y'' - f''(y')$ ein, so schreibt sich die Abbildung f schließlich als

$$f(x', x'') = (x', 0).$$

Das ist gerade die Behauptung. □

Die beiden wichtigsten Spezialfälle treten ein, wenn $(df)_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ vollen Rang hat.

⁷ $r \leq \min\{m, n\}$.

Definition 13.25. Sei $f: M \rightarrow N$ eine C^k -Abbildung.

- (i) f heißt eine *Immersion*, falls $(df)_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ für alle $p \in M$ injektiv ist. (Insbesondere ist dann $r = \dim M \leq \dim N$.)
- (ii) f heißt eine *Submersion*, falls $(df)_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ für alle $p \in M$ surjektiv ist. (Insbesondere ist dann $\dim M \geq \dim N = r$.)

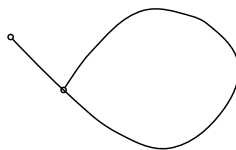
Besonders wichtig sind Einbettungen und eingebettete Untermannigfaltigkeiten.

Definition 13.26. (i) Eine C^k -Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt eine *Einbettung*, falls f injektiv, eine Immersion und eine Homöomorphie auf das Bild $f(M)$ ist, wobei $f(M) \subseteq N$ die induzierte Topologie trägt.

- (ii) M selbst bzw. auch $f(M)$ heißt dann eine *eingebettete Untermannigfaltigkeit* von N .

Bemerkung. Ist $f: M \rightarrow N$ lediglich eine Immersion, so heißt M eine *immersierte Untermannigfaltigkeit* von N .

Beispielsweise ist eine Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ eine eindimensionale immersierte Untermannigfaltigkeit von M , aber nicht notwendigerweise eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. So kann γ Selbstüberschneidung haben oder aber Situationen wie die folgende sind möglich (die beiden Endpunkte gehören nicht zur Kurve):



Satz 13.27. Ist $f: M \rightarrow N$ eine C^k -Einbettung, so ist $f(M)$ in der durch N induzierten Topologie in kanonischer Weise eine C^k -Mannigfaltigkeit, die zu M diffeomorph ist.

Beweis. Ist (U, φ) eine Karte in M , so wählen wir $(f(U), \varphi \circ f(U)^{-1})$ als Karte in $f(M)$. □

Meistens identifiziert man M und $f(M)$ vermöge der Einbettung f .

Lemma 13.28. Ist $M \subseteq N$ eine Untermannigfaltigkeit, so hat T_pM für $p \in M$ eine konkrete Realisierung als Teilraum von T_pN , d. h. wir haben $T_pM \subseteq T_pN$ in kanonischer Weise.

Beweis. Jede C^1 -Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ ist gleichzeitig auch eine Kurve in N . □

Wir kommen nun zum wichtigen *Satz vom regulären Wert*.

Definition 13.29. Sei $f: M \rightarrow N$ eine C^k -Abbildung, $q \in N$. Dann heißt q *regulärer Wert* von f , falls $(df)_p: T_p M \rightarrow T_q N$ für alle $p \in f^{-1}(q)$ surjektiv ist.

Bemerkung. Ist $f^{-1}(q) \neq \emptyset$, so folgt $\dim M \geq \dim N$.

Satz 13.30 (Satz vom regulären Wert). *Seien $f: M \rightarrow N$ eine C^k -Abbildung und $q^* \in N$ ein regulärer Wert von f . Dann ist entweder $f^{-1}(q^*) = \emptyset$ oder $M' = f^{-1}(q^*)$ ist eine $(\dim M - \dim N)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M .⁸*

Weiterhin gilt $T_p M' = \ker(df)_p$ für $p \in M'$, das heißt, die kurze Sequenz

$$0 \rightarrow T_p M' \rightarrow T_p M \xrightarrow{(df)_p} T_{q^*} N \rightarrow 0$$

ist exakt.

Beweis. (i) Sei $f^{-1}(q^*) \neq \emptyset$. Da $M' \subseteq M$ nichtleer und abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, dass sich M' lokal „geradebiegen“ läßt.

Sei dazu $p^* \in f^{-1}(q^*)$. Es gibt dann lokale Koordinaten x^1, \dots, x^m in M um p^* ⁹ und lokale Koordinaten in N um q^* , so dass sich mit $x' = (x^1, \dots, x^n)$, $x'' = (x^{n+1}, \dots, x^m)$ die Abbildung f als

$$f(x', x'') = x'$$

schreibt. In diesen Koordinaten gilt, dass $M' = \{x' = 0\}$ (lokal), und die erste Behauptung folgt.

(ii) *Erste Möglichkeit.* Obige Koordinaten induzieren Koordinaten in TM , also $TM = \{(x', x'', \alpha', \alpha'')\}$ und dann $T_{p^*} M' = \{(0, 0, 0, \alpha'')\}$. Andererseits ist $df_{p^*} = \begin{pmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{(m-n) \times n} \end{pmatrix}$, woraus $\ker df_{p^*} = \{(0, 0, 0, \alpha'')\}$ folgt. Daher $T_{p^*} M' = \ker(df)_{p^*}$.

Zweite Möglichkeit. Aus Dimensionsgründen genügt es, die Inklusion $T_{p^*} M' \subseteq \ker(df)_{p^*}$ zu zeigen. Sei $\gamma: I \rightarrow M'$ eine C^1 -Kurve in M' , $\gamma(0) = p^*$. Dann ist $f \circ \gamma$ die Kurve konstant q^* und daher

$$(df)_{p^*}(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0) = 0,$$

⁸Man sagt auch, dass M' eine $\dim N$ -kodimensionale Untermannigfaltigkeit von M ist.

⁹Zur Erinnerung:

- Ist $U \subseteq M$ offen, so sind *lokale Koordinaten* in U n reellwertige C^k -Funktionen $x^1, \dots, x^n: U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass mit $x = (x^1, \dots, x^n)^T$ die Abbildung

$$x: U \rightarrow x(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

bijektiv auf ihr Bild und zudem

$$(dx)_p: T_p M \rightarrow T_{x(p)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

für alle $p \in U$ ein linearer Isomorphismus ist.

Äquivalent ist, dass (U, x) eine mit der C^k -Struktur auf M verträgliche Karte darstellt.

- Ist $p^* \in M$, so sind *lokale Koordinaten um p^** lokale Koordinaten $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ in einer Umgebung U von p^* mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $x(p) = (0, \dots, 0)^T$ gilt.

also $\gamma'(0) \in \ker(df)_{p^*}$.

□

13.5 Vektorfelder

13.5.1 Definition und erste Eigenschaften

Sei M eine C^{k+1} -Mannigfaltigkeit.

Definition 13.31. Ein C^k -Vektorfeld X auf M ist eine C^k -Abbildung $X: M \rightarrow TM$ mit $\pi \circ X = \text{id}_M$, wobei $\pi: TM \rightarrow M$ die kanonische Projektion ist. (Dies bedeutet $X(p) \in T_p M$ für alle $p \in M$.) Den Raum aller C^k -Vektorfelder auf M bezeichnen wir mit $C^k(M; TM)$.

In lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n in M schreibt sich ein Vektorfeld X als

$$X = \alpha^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \alpha^n(x) \frac{\partial}{\partial x^n},$$

wobei $\alpha^j \in C^k(U; \mathbb{R})$ für $j = 1, \dots, n$; U bezeichnet die Koordinatenumgebung. Man kann Funktionen in Richtung von Vektorfeldern ableiten:

Definition 13.32. Für $X \in C^k(M; TM)$, $f \in C^1(M; \mathbb{R})$ ist $X(f) \in C^0(M; \mathbb{R})$ die durch

$$X(f)(p) = (df)_p(X(p)), \quad p \in M,$$

definierte Funktion. Dabei gilt $(df)_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.

Satz 13.33. Für $1 \leq r \leq k$ ist $X: C^r(M; \mathbb{R}) \rightarrow C^{r-1}(M; \mathbb{R})$ \mathbb{R} -linear. Zudem gilt

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

für $f, g \in C^1(M; \mathbb{R})$.

Beweis. In lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n wie oben haben wir $(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)$ für $j = 1, \dots, n$ und damit

$$\begin{aligned} X(f)(x) &= (df)_p \left(\sum_{j=1}^n \alpha^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha^j(x) (df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{j=1}^n \alpha^j(x) \frac{\partial f}{\partial x^j}(x). \end{aligned}$$

Die Behauptungen folgen. □

13.5.2 Der Fluss eines Vektorfeldes

Sei M eine C^{k+1} -Mannigfaltigkeit und $X \in C^k(M; TM)$ ein Vektorfeld.

Wir interessieren als nächstes uns für den Fluss von X .

Definition 13.34. Eine C^1 -Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ heißt *Integralkurve* von X , falls

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Ist $t \mapsto x(t)$ eine Kurve in lokalen Koordinaten, so schreibt sich die Bedingung, Integralkurve zu sein, als

$$\frac{dx^j}{dt}(t) = \alpha^j(X(t)), \quad j = 1, \dots, n.$$

Dies ist ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen.

Satz 13.35. Sei X ein C^k -Vektorfeld auf M , $p \in M$. Dann gilt:

- (i) Es gibt eine eindeutig bestimmte maximale Integralkurve $\gamma: I_p \rightarrow M$ durch p , d. h. es gilt $\gamma(0) = p$ und ist $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \rightarrow M$ eine weitere Integralkurve von X mit $\tilde{\gamma}(0) = p$, so gilt $\tilde{I} \subseteq I_p$ und $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$ für alle $t \in \tilde{I}$.
- (ii) Das Existenzintervall I_p ist offen.
- (iii) Ist I_p nach oben beschränkt, so verläßt $\gamma(t)$ jedes Kompaktum in M bei Annäherung von t an die obere Intervallgrenze. Analog im Fall, dass I_p nach unten beschränkt ist.

Beweis. Siehe Kapitel 12 über gewöhnliche Differenzialgleichungen. \square

Folgerung 13.36. Ist M kompakt, so gilt $I_p = (-\infty, \infty)$ für alle $p \in M$.

Integralkurven hängen unter anderem C^k von den Anfangsbedingungen ab:

Lemma 13.37. Für jedes Kompaktum $K \subseteq M$ gibt es ein $a > 0$ und eine C^k -Abbildung $\gamma: [-a, a] \times K \rightarrow M$, so dass $t \mapsto \gamma(t, p)$ für jedes $p \in K$ Integralkurve von X mit $\gamma(0, p) = p$ ist.

Für $p \in M$ bezeichne $\gamma(\cdot, p): I_p \rightarrow M$ die maximale Integralkurve zu X mit $\gamma(0, p) = p$.

Lemma 13.38. Sei $s \in I_p$. Dann gilt $t \in I_{\gamma(s, p)}$ genau dann, wenn $t + s \in I_p$. In diesem Fall

$$\gamma(t, \gamma(s, p)) = \gamma(t + s, p).$$

Beweis. $t \mapsto \gamma(t + s, p)$ ist Integralkurve zu X mit $\gamma(t + s, p)|_{t=0} = \gamma(s, p)$. \square

Satz 13.39. Die Menge

$$U = \bigcup_{p \in M} I_p \times \{p\} \subseteq \mathbb{R} \times M$$

ist offen in $\mathbb{R} \times M$. Die Abbildung $\gamma: U \rightarrow M$, $(t, p) \mapsto \gamma(t, p)$ ist C^k und besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (i) $\gamma(0, p) = p$ für alle $p \in M$,
- (ii) $\gamma(t, \gamma(s, p)) = \gamma(t + s, p)$ für alle $(s, p) \in U$ und für alle t , für die wenigstens eine der beiden Seiten definiert ist. (Dann ist automatisch die andere Seite definiert und beide Seiten sind gleich.)

Beweis. Wir haben lediglich zu zeigen, dass $U \subseteq \mathbb{R} \times M$ offen ist. Sei dazu $(t^*, p^*) \in U$, d. h. $t^* \in I_{p^*}$. Sei weiterhin K eine kompakte Umgebung von p^* in M . Dann existiert ein $a > 0$ mit $[t^* - a, t^* + a] \subseteq I_p$ für alle $p \in K$. Dann jedoch ist $[t^* - a, t^* + a] \times K$ eine kompakte Umgebung von (t^*, p^*) in $\mathbb{R} \times M$, die vollständig in U enthalten ist. Also ist U offen. \square

Folgerung 13.40. X habe die Eigenschaft, dass $I_p = (-\infty, \infty)$ für alle $p \in M$ gilt (M sei beispielsweise kompakt). Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\gamma_t: M \rightarrow M, \quad p \mapsto \gamma(t, p).$$

Dann ist $\{\gamma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ eine Gruppe von C^k -Diffeomorphismen von M , d. h. γ_t ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein C^k -Diffeomorphismus und es gilt

- (i) $\gamma_0 = \text{id}_M$,
- (ii) $\gamma_t \circ \gamma_s = \gamma_{t+s}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$.

Definition 13.41. Die Abbildung $\gamma: \bigcup_{p \in M} I_p \times \{p\} \rightarrow M$ heißt der *Fluss des Vektorfeldes* X .

13.5.3 Normalformen

Reguläre Stellen

Sei $X \in C^k(M; TM)$, $p^* \in M$ und $X(p^*) \neq 0$. Dann lässt sich das Vektorfeld X um p^* lokal „geradebiegen“:

Satz 13.42. *Es gibt lokale Koordinaten x^1, \dots, x^n um p^* , so dass $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ in diesen Koordinaten.*

Beweis. Wir wählen in einer hinreichend kleinen Umgebung U von p^* eine 1-kodimensionale Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ mit $p^* \in N$, so dass der Fluss von X transversal zu N ist. Letzteres bedeutet, dass

$$T_p N + \text{span}\{\gamma'(0, p)\} = T_p M$$

für alle $p \in N$ gilt. Als lokale Koordinaten um p^* wählen wir dann x^2, \dots, x^n in N um p^* und zusätzliche Koordinate die Zeit $x^1 = t$ entlang des Flusses von X (so normalisiert, dass $x^1(p) = t(p) = 0$ für $p \in N$). Dann gilt¹⁰

$$\begin{aligned} X(f)(p) &= \frac{d}{dt} f(x^1 + t, x^2, \dots, x^n) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, x^2, \dots, x^n), \end{aligned}$$

¹⁰Wir erinnern daran, dass $X(f)(p) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t, p)) \Big|_{t=0}$.

also $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ in diesen Koordinaten. \square

Hyperbolische kritische Stellen

Definition 13.43. $p^* \in M$ heißt *kritische* oder *stationäre Stelle* (oder auch Fixpunkt) für das Vektorfeld $X \in C^k(M; TM)$, falls

$$X(p^*) = 0.$$

Wir wollen jetzt den Fluss von X lokal in der Nähe einer stationären Stelle untersuchen, unter der zusätzlichen Annahme, dass diese Stelle hyperbolisch ist. Um diese Bedingung formulieren zu können, benötigen wir den Begriff der Linearisierung des Vektorfeldes X an der stationären Stelle p^* . Dazu schreiben wir

$$X = \sum_{j,k=1}^n x^k a_k^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

mit $a_k^j \in C^{k-1}(M; \mathbb{R})$ für eine Kartenumgebung von p^* .

Satz 13.44. *Vermöge der Matrix $(a_k^j(0))_{j,k=1,\dots,n}$ wird in korrekter Weise eine lineare Abbildung*

$$(\delta X)_{p^*}: T_{p^*}M \rightarrow T_{p^*}M$$

definiert.¹¹

Beweis. Bezüglich der fixierten Koordinaten x^1, \dots, x^n schreiben wir einen Vektor in $T_{p^*}X$ als $(t^k)_{k=1,\dots,n}$ ($= \sum_{k=1}^n t^k \frac{\partial}{\partial x^k}(p^*)$). Führen wir andere lokale Koordinaten y^1, \dots, y^n um p^* ein, so schreibt sich derselbe Vektor als $(\tilde{t}^s)_{s=1,\dots,n}$, wobei

$$\tilde{t}^s = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^s}{\partial x^k}(0) t^k, \quad s = 1, \dots, n,$$

gilt.

Die Abbildung $(\delta X)_{p^*}: T_{p^*}M \rightarrow T_{p^*}M$ in den Koordinaten x^1, \dots, x^n ist

$$(t^k)_k \mapsto \left(\sum_{k=1}^n a_k^j(0) t^k \right)_j.$$

Um zu sehen, dass dies eine korrekt definierte lineare Abbildung von $T_{p^*}M$ in sich ist, müssen wir zeigen, dass wir in den Koordinaten y^1, \dots, y^n dieselbe Abbildung erhalten.

¹¹Schreiben wir wie üblich $X = \sum_{j=1}^n \alpha^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$ in lokalen Koordinaten, so gilt $\alpha^j(0) = 0$ für $j = 1, \dots, n$ und $a_k^j(0) = \frac{\partial \alpha^j}{\partial x^k}(0)$ für $j, k = 1, \dots, n$.

Von hier ab benutzen wir die *Einsteinsche Summenkonvention*, d. h. wir summieren jeweils über gleichzeitig hoch- und tiefgestellte Indizes. Sei also

$$X = y^s b_s^r(y) \frac{\partial}{\partial y^r}.$$

Aus $\frac{\partial}{\partial y^r} = \frac{\partial x^j}{\partial y^r} \frac{\partial}{\partial x^j}$ folgt

$$X = y^s \frac{\partial x^j}{\partial y^r} b_s^r(y) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

und damit

$$a_k^j(0) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(y^s \frac{\partial x^j}{\partial y^r} b_s^r(y) \right) \Big|_{x=0} = \frac{\partial y^s}{\partial x^k}(0) \frac{\partial x^j}{\partial y^r}(0) b_s^r(0).$$

Wegen

$$\frac{\partial x^k}{\partial y^s}(0) \cdot \frac{\partial y^s}{\partial x^{k'}}(0) = \delta_{k'}^k = \begin{cases} 1, & k = k' \\ 0, & k \neq k' \end{cases}$$

erhalten wir

$$b_s^r(0) \tilde{t}^s = \frac{\partial x^k}{\partial y^s}(0) \frac{\partial y^r}{\partial x^j}(0) a_k^j(0) \frac{\partial y^s}{\partial x^{k'}}(0) t^{k'} = \frac{\partial y^r}{\partial x^j}(0) a_k^j(0) t^k.$$

Die so erhaltene Beziehung zeigt, dass sich die $(a_k^j(0)t^k)_j$ tatsächlich in korrekter Weise als Tangentialvektoren transformieren. \square

Definition 13.45. Die Abbildung $(\delta X)_{p^*} : T_{p^*}M \rightarrow T_{p^*}M$ heißt die *Linearisierung* von X an der kritischen Stelle p^* .

Bemerkung. Ist $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld in $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in U$, $X(0) = 0$, so ist

$$(\delta X)_0 = (DX)(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

Um den Fluss von X nahe p^* zu verstehen, diskutieren zuerst den Fluss der Linearisierung. Wir machen dazu eine Annahme:

Definition 13.46. Die kritische Stelle $p^* \in M$ heißt *hyperbolisch*, falls $\operatorname{Re} \mu \neq 0$ für alle Eigenwerte μ des linearen Operators $(\delta X)_{p^*} : T_{p^*}M \rightarrow T_{p^*}M$.

Da die Untersuchung des Flusses von X nahe p^* eine lokale Frage ist, betrachten wir $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ als auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $0 \in U$, $X(0) = 0$ gegeben. Sei also $A = DX(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und

$$X_0 = \langle Ax, \partial_x \rangle = \sum_{j,k=1}^n x^k a_k^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

die Linearisierung von X .¹² Zudem sei die kritische Stelle 0 hyperbolisch, d. h. $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Aus der linearen Algebra wissen wir:

¹²Man schreibt $\partial_x = (\partial_1, \dots, \partial_n) = (\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$.

Lemma 13.47. *Es existieren zwei komplementäre, A -invariante Unterräume E^+ , E^- von \mathbb{R}^n (d. h. $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$, $AE^\pm \subseteq E^\pm$), so dass*

$$\sigma(A|_{E^\pm}) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Definition 13.48. Die Zahl $\sigma = \dim E^- \in \{0, 1, \dots, n\}$ heißt der *Index* der hyperbolischen kritischen Stelle 0.

Sei nun Π^- die Projektion im \mathbb{R}^n auf E^- entlang E^+ und $\Pi^+ = 1 - \Pi^-$ die komplementäre Projektion. Indem wir $(x^+, x^-) = (\Pi^+x, \Pi^-x)$ als Koordinaten in \mathbb{R}^n einführen, erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{pmatrix},$$

wobei $A^\pm = A|_{E^\pm}$ ist.

Satz 13.49. *Der Fluss des Vektorfeldes*

$$X_0 = \langle Ax, \partial_x \rangle = \langle A^+x^+, \partial_+ \rangle + \langle A^-x^-, \partial_- \rangle$$

ist gegeben durch

$$\gamma(t, x_0) = e^{tA}x_0 = (e^{tA^+}x_0^+, e^{tA^-}x_0^-)^T.$$

Insbesondere gilt

- (i) $\gamma(t, x_0) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \pm\infty \iff x_0 \in E^\mp$ (d. h. $x_0^\pm = 0$),
- (ii) $\gamma(t, x_0) \rightarrow E^\pm$ für $t \rightarrow \pm\infty$ in dem Sinne, dass

$$\operatorname{dist}(\gamma(t, x_0), E^\pm) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \pm\infty.$$

Beweis. Einfache Rechnung und Beachtung der Tatsache, dass $\pm \operatorname{Re} \mu > 0$ für alle Eigenwerte $\mu \in \sigma(A^\pm)$. \square

Dieses Resultat beschreibt bereits den allgemeinen Fall auch für nichtlineare Vektorfelder $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dazu definieren wir

$$M_s = \{x \in U \mid \gamma(t, x) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty\},$$

$$M_u = \{x \in U \mid \gamma(t, x) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow -\infty\}$$

und nennen sie die (lokale) stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit an M in p^* („s“ steht für „stable“, „u“ steht für „unstable“).

Satz 13.50. *Für U hinreichend klein sind M_s und M_u (eingebettete) C^k -Untermannigfaltigkeiten von M der Dimension σ bzw. $n - \sigma$, die sich in p^* transversal schneiden (d. h. es gilt $T_{p^*}M_s + T_{p^*}M_u = T_{p^*}M$).*

Beweis. Ohne Beweis. Tatsächlich gilt in obigen Bezeichnungen, dass $T_{p^*}M_s = E^-$, $T_{p^*}M_u = E^+$ ist. \square

Bemerkung. Ersetzt man in der Definition von M_s , M_u die Forderung $x \in U$ durch $x \in M$, so erhält man immer noch immensierte C^k -Untermannigfaltigkeiten von M . Das globale Bild kann jedoch sehr kompliziert sein. In diesem Zusammenhang heißen M_s und M_u dann die stabile bzw. instabile Untermannigfaltigkeit an M in der kritischen Stelle p^* .

Tatsächlich ist wesentlich mehr richtig:

Satz 13.51 (Satz von Hartman-Grobman). *Sei $p^* \in M$ eine hyperbolische kritische Stelle des Vektorfeldes $X \in C^k(M; TM)$ und $X_0 = (\delta X)_{p^*}: T_{p^*}M \rightarrow T_{p^*}M$ sei die Linearisierung von X an p^* . Dann gibt es eine Umgebung U von p^* in M und eine topologische oder C^0 -Einbettung $\varphi: U \rightarrow T_{p^*}M$, die die Flüsse von X und X_0 in U bzw. $\varphi(U)$ orientierungserhaltend aufeinander abbildet.¹³ Ist φ tatsächlich von der Klasse C^1 , so gilt*

$$(d\varphi)_p(X(p)) = X_0(\varphi(p))$$

für alle $p \in M$.

Beweis. Ohne Beweis. □

Bemerkung. Im Allgemeinen lässt sich φ nicht von der Klasse C^1 wählen.

13.6 Weitere Kapitel

13.6.1 Überlagerungen

Die Fundamentalgruppe

Sei X ein topologischer Raum.

Definition 13.52. (i) Wir sagen, dass zwei Kurven $\gamma, \gamma': [0, 1] \rightarrow X$ *homotop* sind, falls es eine stetige Abbildung $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit $\gamma = H(\cdot, 0)$, $\gamma' = H(\cdot, 1)$.

(ii) Gilt $\gamma(0) = \gamma'(0) = x^0$, $\gamma(1) = \gamma'(1) = x^1$, so werden wir darüber hinaus im Allgemeinen fordern, dass die Homotopie H die Anfangs- und Endpunkte festhält, d. h. dass $H(0, \cdot) \equiv x^0$, $H(1, \cdot) \equiv x^1$ gilt.

Definition 13.53. Die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, x^0)$ für $x^0 \in X$ ist die Menge aller Homotopieklassen von geschlossenen Kurven $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit Anfangs- und Endpunkt x^0 (d. h. $\gamma(0) = \gamma(1) = x^0$).

Satz 13.54. *Mit der Verknüpfung*

$$[\gamma] \circ [\gamma'] = [\gamma \circ \gamma'],$$

wobei

$$(\gamma \circ \gamma')(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma'(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

ist $\pi_1(X, x^0)$ eine Gruppe.

¹³Man sagt dann, dass die Flüsse von X , X_0 *topologisch äquivalent* sind.

Beweis. Ist H eine Homotopie zwischen γ, δ und H' eine Homotopie zwischen γ', δ' , so ist

$$(H \circ H')(t, s) = \begin{cases} H(2t, s), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ H'(2t - 1, s), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen $\gamma \circ \gamma', \delta \circ \delta'$. Folglich ist die Abbildung $[\gamma], [\gamma'] \mapsto [\gamma] \circ [\gamma']$ korrekt definiert. Die Identität unter dieser Operation ist die Homotopieklasse $[t \mapsto x^0]$, während das Inverse zu $[\gamma]$ durch $[t \mapsto \gamma(1 - t)]$ gegeben ist. \square

Bemerkung. Man kann die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x^0)$ auch als Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen $(\mathbb{S}^1, *) \rightarrow (X, x^0)$ betrachten. Hierbei ist $*$ ein beliebiger Punkt in \mathbb{S}^1 , der auf x^0 abgebildet und unter den Homotopien festgehalten wird.

Beispiel 13.55. (i) $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \pi_1(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{Z}$.

(ii) $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$ für $n \geq 2$.

(iii) $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ für $n \geq 2$.

Eigenschaften

(i) Ist $f: (X, x^0) \rightarrow (Y, y^0)$ stetig¹⁴, so induziert f einen Gruppenhomomorphismus

$$f_*: \pi_1(X, x^0) \rightarrow \pi_1(Y, y^0), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

Beweis. Sind die geschlossenen Kurven γ, γ' vermöge H homotop, so sind $f \circ \gamma, f \circ \gamma'$ vermöge $f \circ H$ homotop. Also ist f_* wohldefiniert (d. h. repräsentantenunabhängig).

Genauso leicht sieht man, dass f_* ein Gruppenhomomorphismus ist. \square

(ii) Sind $f: (X, x^0) \rightarrow (Y, y^0), g: (Y, y^0) \rightarrow (Z, z^0)$ stetige Abbildungen, so gilt

$$(gf)_* = g_* f_*$$

als Abbildungen zwischen den Fundamentalgruppen.

Beweis. Für $[\gamma] \in \pi_1(X, x^0)$ gilt

$$(gf)_*([\gamma]) = [gf\gamma] = g_*([f\gamma]) = g_*(f_*([\gamma])).$$

\square

(iii) Als (abstrakte) Gruppe hängt $\pi_1(X, x^0)$ nur von der Wegzusammenhangskomponente von x^0 ab.

¹⁴Diese Notation bedeutet, dass $f(x^0) = y^0$.

Beweis. Sei $\delta: [0, 1] \rightarrow X$ eine Kurve, die x^0, x^1 verbindet, d. h. es gilt $\delta(0) = x^0, \delta(1) = x^1$. Dann ist

$$\pi_1(X, x^0) \rightarrow \pi_1(X, x^1), \quad [\gamma] \mapsto [\delta \circ \gamma \circ \delta^{-1}],$$

wobei δ^{-1} die in umgekehrter Richtung durchlaufende Kurve δ bezeichnet, ein Gruppenisomorphismus. \square

Bemerkung. Ist X wegzusammenhängend, so schreibt man oft auch $\pi_1(X)$ anstelle von $\pi_1(X, x^0)$.

- (iv) Ist M eine C^k -Mannigfaltigkeit, so ist $\pi_1(M, p)$ abzählbar. (Das bedeutet insbesondere, dass Gruppen wie \mathbb{R}, \mathbb{S}^1 unter den Fundamentalgruppen von C^k -Mannigfaltigkeiten nicht vorkommen.)

Beispiel 13.56 (Berechnung der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$). Wir realisieren die \mathbb{S}^1 als Einheitskreis in der komplexen Ebene, d. h.

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{2\pi i t} \mid t \in [0, 1]\}.$$

Jede stetige Abbildung $\gamma: (\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$ schreibt sich (in eindeutiger Weise) als

$$\gamma(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i \varphi(t)},$$

wobei $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und $\varphi(0) = 0, \varphi(1) \in \mathbb{Z}$.

Behauptung. Die Abbildung $[\gamma] \mapsto \varphi(1)$ realisiert einen Gruppenisomorphismus zwischen $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ und \mathbb{Z} .

Beweis. Sei $\gamma': (\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$ eine weitere stetige Abbildung mit $\gamma'(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i \varphi'(t)}$, wobei $\varphi'(0) = 0, \varphi'(1) \in \mathbb{Z}$. Wir haben zu zeigen, dass γ, γ' genau dann homotop sind (unter Festhaltung des Punktes 1), wenn $\varphi(1) = \varphi'(1)$ gilt.

(\implies) Seien γ, γ' homotop. Dann gibt es eine Homotopie $K: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zwischen φ, φ' , d. h. $\varphi = K(\cdot, 0), \varphi' = K(\cdot, 1)$, mit der zusätzlichen Eigenschaft $K(1, s) \in \mathbb{Z}$ für alle $s \in [0, 1]$. Die Stetigkeit von K impliziert dann, dass

$$\varphi(1) = K(1, 0) = K(1, 1) = \varphi'(1).$$

(\impliedby) Gilt umgekehrt $\varphi(1) = \varphi'(1)$, so ist

$$H(t, s) = e^{2\pi i((1-s)\varphi(t) + s\varphi'(t))}$$

eine Homotopie zwischen γ, γ' . (Man beachte, dass $(1-s)\varphi(1) + s\varphi'(1) = \varphi(1) \in \mathbb{Z}$ für alle $s \in [0, 1]$.) \square

Definition und erste Eigenschaften von Überlagerungen

Seien X, Y topologische Räume, $\pi: X \rightarrow Y$ stetig.

Definition 13.57. (X, π, Y) (auch als $X \xrightarrow{\pi} Y$ geschrieben) heißt eine *Überlagerung*, falls es eine offene Überdeckung $\{V_j\}$ von Y und offene Mengen $U_{ij} \subseteq X$ mit $\pi^{-1}(V_j) = \coprod_i U_{ij}$ (disjunkte Vereinigung!) gibt, so dass

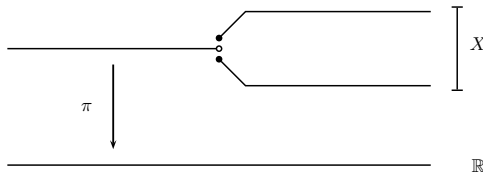
$$\pi|_{U_{ij}}: U_{ij} \rightarrow V_j$$

für alle i, j eine Homöomorphie ist.

Beispiel 13.58. (i) $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $t \mapsto e^{2\pi it}$

(ii) $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ vermöge der Identifikation diametral gegenüberliegender Punkte ist zweifache Überlagerung¹⁵.

(iii) Dies ist *keine* Überlagerung:



Eigenschaften

- (i) Ist $X \xrightarrow{\pi} Y$ eine Überlagerung, so ist die *Faser* $X_q = \pi^{-1}(q)$ über q für alle $q \in Y$ diskret.
- (ii) Ist $M \xrightarrow{\pi} N$ eine Überlagerung und N eine C^k -Mannigfaltigkeit, so trägt M in natürlicher Weise die Struktur einer C^k -Mannigfaltigkeit, so dass π ein *lokaler* C^k -Diffeomorphismus ist.

Beweis. Indem wir die V_j aus der Definition einer Überlagerung gegebenenfalls kleiner wählen, dürfen wir annehmen, dass die V_j Kartenumgebungen sind, dass wir also Karten (V_j, ψ_j) mit C^k -Kartenübergängen haben. Als Karten in M wählen wir dann $(U_{ij}, \psi_j(\pi|_{U_{ij}}))$. Diese Konstruktion ändert die Kartenübergänge nicht, gibt uns also eine C^k -Struktur auf M .

Offenbar ist M mit N auch Hausdorffsch, und die Parakompaktheit von M folgt aus der Abzählbarkeit von $\pi_1(N)$. (Dazu später mehr.) \square

Satz 13.59. Sei $X \xrightarrow{\pi} Y$ eine Überlagerung, $q^0 \in Y$, $p^0 \in \pi^{-1}(q^0)$.

¹⁵Die Vielfachheit einer Überlagerung klären wir später.

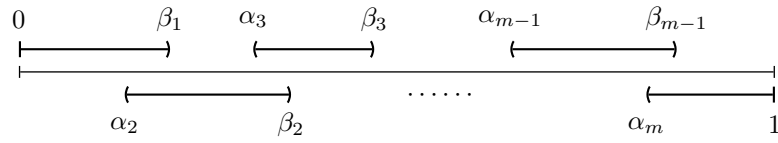
- (i) Ist $\gamma: I \rightarrow Y$ eine Kurve in Y mit $\gamma(0) = q^0$, so gibt es genau eine Kurve $\tilde{\gamma}: I \rightarrow X$ mit $\tilde{\gamma}(0) = p^0$ und $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.
- (ii) Sind die Kurven γ, γ' mit Anfangspunkt q^0 homotop in Y , so sind auch die Kurven $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$ mit Anfangspunkt p^0 homotop in X . Insbesondere gilt dann $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$.

Beweis. (i) Indem man, falls nötig, die Mengen V_j aus der Definition einer Überlagerung kleiner wählt, darf man Folgendes annehmen: $\gamma(I) \subseteq \bigcup_{l=1}^m V_l$,

$$\begin{aligned}\gamma(I) \cap V_1 &= \gamma([0, \beta_1]), \\ \gamma(I) \cap V_l &= \gamma((\alpha_l, \beta_l)), \quad 2 \leq l \leq m-1, \\ \gamma(I) \cap V_m &= \gamma((\alpha_m, 1])\end{aligned}$$

und

$$0 < \alpha_2 < \beta_1 < \alpha_3 < \beta_2 < \cdots < \beta_{m-2} < \alpha_m < \beta_{m-1} < 1.$$



Unter den Mengen U_{il} aus der angegebenen Definition gibt es eindeutig bestimmte Mengen U_l mit folgenden Eigenschaften:

- $p^0 \in U_1$,
- $\pi(U_{l-1} \cap U_l) \cap \gamma(I) \neq \emptyset$, $2 \leq l \leq m$.¹⁶

Wir setzen dann

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} (\pi|_{U_1})^{-1}(\gamma(t)), & 0 \leq t < \beta_1, \\ (\pi|_{U_l})^{-1}(\gamma(t)), & \alpha_l < t < \beta_l, \quad 2 \leq l \leq m-1, \\ (\pi|_{U_m})^{-1}(\gamma(t)), & \alpha_m < t \leq 1. \end{cases}$$

- (ii) Sei $H: I^2 \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen γ, γ' , d. h. $H(\cdot, 0) = \gamma$, $H(\cdot, 1) = \gamma'$, $H(0, \cdot) \equiv q^0$, $H(1, \cdot) \equiv \gamma(1)$. Dann liefert die Hochhebung $\widetilde{H(\cdot, s)}$ der Kurven $H(\cdot, s)$ für $0 \leq s \leq 1$ eine Homotopie zwischen $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}'$. □

¹⁶ $V_m = V_1$ ist möglich. Doch auch in diesem Fall wird im Allgemeinen $U_m \neq U_1$ sein.

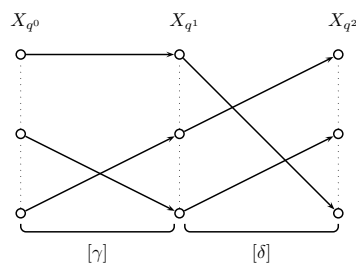
Die Kurve $\tilde{\gamma}$ aus (i) bezeichnen wir mit $\tilde{\gamma}_p = \tilde{\gamma}_p^X$.

Bezeichne nun $[N; q^0, q^1]$ die Menge aller Homotopieklassen von Kurven von q^0 nach q^1 in N . Insbesondere ist $\pi_1(N, q^0) = [N; q^0, q^1]$. Obiger Satz gibt uns eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} X_{q^0} \times [N; q^0, q^1] &\rightarrow X_{q^1} \\ (p, [\gamma]) &\mapsto p[\gamma] = \tilde{\gamma}_p(1). \end{aligned}$$

Ist $[\delta] \in [N; q^1, q^2]$, so gilt

$$(p[\gamma])[\delta] = p[\gamma\delta].$$



Insbesondere ist Rechtsmultiplikation mit $[\gamma]$ eine Bijektion $X_{q^0} \rightarrow X_{q^1}$ mit Umkehrabbildung $[\gamma^{-1}]$.

Folgerung 13.60. Alle Fasern X_q einer Überlagerung $X \xrightarrow{\pi} Y$ mit wegzusammenhängendem Y sind gleichmächtig. Die Mächtigkeit $|X_q|$ ist die Vielfachheit der Überlagerung (gleich der Anzahl der Blätter).

Folgerung 13.61. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(N, q^0)$ operiert von rechts auf X_{q^0} .

Satz 13.62. Für eine Überlagerung $X \xrightarrow{\pi} Y$ ist der induzierte Gruppenhomomorphismus $\pi_*: \pi_1(X, x^0) \rightarrow \pi_1(Y, y^0)$, wobei $x^0 \in \pi^{-1}(y^0)$, injektiv. Darüber hinaus gehört ein $[\gamma] \in \pi_1(Y, y^0)$ genau dann zum Bild von $\pi_1(X, x^0)$ in $\pi_1(Y, y^0)$, falls $\tilde{\gamma}_{x^0}$ ein geschlossener Weg ist.

Beweis. (i) Sei $[\delta] \in \pi_1(X, x^0)$, $\pi_*[\delta] = [\pi\delta] = 0$ in $\pi_1(Y, y^0)$, d. h. der Weg $\pi\delta$ ist null-homotop. Dann liftet $\pi\delta$ zum null-homotopen Weg $\delta = \tilde{\pi\delta}$, also ist $[\delta] = 0$.

(ii) $[\gamma]$ gehört zu $\pi_*\pi_1(X, x^0)$ genau dann, wenn $[\gamma] = [\pi\delta]$ für ein $[\delta] \in \pi_1(X, x^0)$, d. h. genau dann, wenn der Lift $\tilde{\gamma}$ von γ zu einem geschlossenen Weg $\pi\delta = \delta$ homotop ist.

□

Klassifikation von Überlagerungen

Ab sofort sei $Y = N$ eine zusammenhängende C^k -Mannigfaltigkeit. Wir wollen uns eine Übersicht über die möglichen Überlagerungen $M \xrightarrow{\pi} N$ verschaffen. Wenn bequem, dürfen wir dabei M als zusammenhängend annehmen.

Satz 13.63. *Sei $f: (L, r^0) \rightarrow (N, q^0)$ eine C^k -Abbildung, $p^0 \in M_{q^0}$. Dann existiert genau dann eine C^k -Abbildung $F: (L, r^0) \rightarrow (M, p^0)$ mit $\pi \circ F = f$, wenn*

$$f_*\pi_1(L, r^0) \subseteq \pi_*\pi_1(M, p^0)$$

gilt.

Beweis. (\implies) Wegen $f_* = \pi_*F_*$, also

$$f_*\pi_1(L, r^0) = \pi_*F_*\pi_1(L, r^0) \subseteq \pi_*\pi_1(M, p^0)$$

ist die angegebene Bedingung notwendig.

(\impliedby) Sei nun diese Bedingung erfüllt. Sei weiterhin $r \in L$. Um $F(r)$ zu definieren, wählen wir eine Kurve γ in L mit $\gamma(0) = r^0$, $\gamma(1) = r$. Dann ist $f \circ \gamma$ Kurve in N , $\widetilde{(f \circ \gamma)}_{p^0}$ Kurve in M mit Anfangspunkt p^0 . Wir setzen

$$F(r) = \widetilde{(f \circ \gamma)}_{p^0}(1) = p^0[f \circ \gamma].$$

Zu zeigen: F ist korrekt definiert.

Sei dazu γ' eine weitere Kurve in L mit $\gamma'(0) = r^0$, $\gamma'(1) = r$. Dann liegt $[(f \circ \gamma)(f \circ \gamma')^{-1}] = f_*[\gamma \circ \gamma'^{-1}]$ nach Voraussetzung in $\pi_*\pi_1(M, p^0)$, liftet also zu einer geschlossenen Kurve in M (mit Anfangs- und Endpunkt p^0).

Folglich gilt $\widetilde{(f \circ \gamma)}_{p^0}(1) = \widetilde{(f \circ \gamma')}_{p^0}(1)$.

Dass F tatsächlich von der Klasse C^k ist, ist nun leicht einzusehen. □

Wir betrachten jetzt die Situation, dass zwei Überlagerungen $M \xrightarrow{\pi} N$, $M' \xrightarrow{\pi'} N$ über N gegeben sind. Sei weiterhin $\Phi: M \rightarrow M'$ eine C^k -Abbildung mit $\pi'\Phi = \pi$, d. h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & M' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ N & \xrightarrow{\text{id}_N} & N \end{array}$$

kommutiert.¹⁷ Das ist gleichbedeutend mit $\Phi(M_q) \subseteq M'_q$ für alle $q \in N$, d. h. Φ induziert für jedes $q \in N$ eine Abbildung

$$\Phi_q: M_q \rightarrow M'_q.$$

¹⁷ Φ ist ein Homomorphismus von Überlagerungen von N .

Lemma 13.64. Φ_{q^0} ist $\pi_1(N, q^0)$ -invariant, d. h. es gilt

$$\Phi_{q^0}(p[\gamma]) = \Phi_{q^0}(p)[\gamma]$$

für alle $p \in M_{q^0}$, $[\gamma] \in \pi_1(N, q^0)$.

Beweis. Es gilt

$$\Phi_{q^0}(p[\gamma]) = \Phi_{q^0}((\tilde{\gamma}_p^M)(1)) = (\Phi \circ \tilde{\gamma}_p^M)(1) = \tilde{\gamma}_{\Phi(p)}^{M'}(1) = \Phi_{q^0}(p)[\gamma].$$

□

Umgekehrt gilt:

Satz 13.65. Seien $M \xrightarrow{\pi} N$, $M' \xrightarrow{\pi'} N$ zwei Überlagerungen, $q^0 \in N$ und $\psi: M_{q^0} \rightarrow M'_{q^0}$ eine $\pi_1(N, q^0)$ -invariante Abbildung. Dann gibt es genau ein $\Phi: M \rightarrow M'$ von der Klasse C^k wie oben, so dass

$$\psi = \Phi_{q^0}.$$

Beweis. Sei $p \in M$. Wir wählen eine Kurve γ in N mit $\gamma(0) = q^0$, $\gamma(1) = \pi(p)$ und setzen dann

$$\Phi(p) = \tilde{\gamma}_{\psi(p^0)}^{M'}(1) = \psi(p^0)[\gamma],$$

wobei $p^0 \in M_{q^0}$ der Anfangspunkt der Kurve $\tilde{\gamma}$ in M mit $\tilde{\gamma}(1) = p$ ist. Wir haben wiederum zu zeigen, dass $\Phi: M \rightarrow M'$ korrekt definiert ist.

Sei dazu γ' eine weitere Kurve in N mit $\gamma'(0) = q^0$, $\gamma'(1) = \pi(p)$. Sei p^1 der Anfangspunkt der Kurve $\tilde{\gamma}'$ mit $\tilde{\gamma}'(1) = p$. Dann gilt $p^1 = p^0[\gamma\gamma'^{-1}]$ und somit wegen der $\pi_1(N, q^0)$ -Invarianz von ψ

$$\psi(p^1) = \psi(p^0)[\gamma\gamma'^{-1}].$$

Es folgt, dass

$$\Phi(p) = \psi(p^0)[\gamma] = \psi(p^1)[\gamma']$$

korrekt definiert ist.

Die Tatsache, dass Φ von der Klasse C^k ist, ist jetzt wiederum einsichtig. □

Folgerung 13.66. Wir haben die folgende Bijektion:

$$\begin{aligned} & \{ \Phi: M \rightarrow M' \mid \Phi \text{ ist } C^k, \pi' \Phi = \pi \} \\ & \longrightarrow \{ \psi: M_{q^0} \rightarrow M'_{q^0} \mid \psi \text{ ist } \pi_1(N, q^0)\text{-invariant} \}, \quad \Phi \mapsto \Phi|_{M_{q^0}}. \end{aligned}$$

Wir stellen uns jetzt die Frage, wie allgemein die Faser M_{q^0} einer Überlagerung $M \xrightarrow{\pi} N$ sein kann.

Theorem 13.67. Sei X_0 eine beliebige nichtleere Menge, auf der $\pi_1(N, q^0)$ von rechts operiert.¹⁸ Dann gibt es eine (bis auf Isomorphie eindeutige) Überlagerung $M \xrightarrow{\pi} N$ mit der Faser $M_{q^0} \cong X_0$ und der gegebenen Monodromie $X_0 \times \pi_1(N, q^0) \rightarrow X_0$.

Beweis. (i) **(Eindeutigkeit)** Eindeutigkeit bis auf Isomorphie folgt aus den vorangegangenen Resultaten.

(ii) **(Existenz)** Wir konstruieren die Überlagerung $M \xrightarrow{\pi} N$. Dazu betrachten wir für $q \in N$ die Menge aller Paare $(p, [\gamma])$ mit $p \in X_0$, $[\gamma] \in [N; q^0, q]$ und folgende Äquivalenzrelation:

$$(p, [\gamma]) \sim (p', [\gamma']) \iff p' = p[\gamma\gamma'^{-1}].$$

Sei M_q die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation. Wir setzen dann

$$M = \bigsqcup_{q \in N} M_q$$

(disjunkte Vereinigung). M ist die gesuchte Überlagerung.

Wir müssen zeigen bzw. korrekt definieren:

- (a) $M_{q^0} \cong X_0$. Die Abbildung $X_0 \rightarrow M_{q^0}$, $p \mapsto [p, [0]]$ ist eine Bijektion. Tatsächlich ist diese Abbildung injektiv, denn aus $[p, [0]] = [p', [0]]$ folgt $p' = p[0] = p$. Sie ist wegen $[p, [\gamma]] = [p[\gamma], [0]]$ auch surjektiv.
- (b) *Projektion* π . Die Projektion π ist die natürliche, also $\pi([p, [\gamma]]) = q$ für $[p, [\gamma]] \in M_q$.
- (c) *Topologie von M* . Sei U eine einfach zusammenhängende Umgebung von $q \in N$.¹⁹ Dann sei die Menge

$$\{[p, [\gamma\delta]] \mid \delta \text{ ist ein Weg in } U \text{ mit Anfangswert } q\}$$

eine offene Umgebung von $[p, [\gamma]] \in M_q$. Alle Mengen dieser Form bilden eine Basis für die gesuchte Topologie von M . Bezüglich dieser Topologie wird π zu einer Überlagerungsabbildung.

- (d) *Monodromie*. Ist γ ein Weg in N von q^0 nach q , so ist für $p \in X_0$

$$\tilde{\gamma}_p(t) = [p, [\gamma(t)]].$$

Ist $q = q^0$, so ist demnach $\tilde{\gamma}_p(1) = [p, [\gamma]] = [p[\gamma], [0]]$. Folglich stimmt die Monodromie mit der ursprünglich gegebenen überein.

□

¹⁸Das heißt, wir haben eine Abbildung $X_0 \times \pi_1(N, q^0) \rightarrow X_0$ mit $(p[\gamma])[\gamma'] = p[\gamma\gamma']$ und $p[0] = p$ für alle $p \in X_0$, $[\gamma], [\gamma'] \in \pi_1(N, q^0)$.

¹⁹ U ist einfach zusammenhängend, falls U zusammenhängend ist und $\pi_1(U) = \{e\}$ gilt.

Da wir uns nun eine Übersicht über alle Überlagerungen einer gegebenen zusammenhängenden C^k -Mannigfaltigkeit N verschafft haben, verbleibt noch, zusammenhängende Überlagerungen $M \xrightarrow{\pi} N$ (d. h. solche mit zusammenhängendem M) zu klassifizieren.

Dazu bemerken wir zuerst:

Lemma 13.68. *Die im vorigen Satz konstruierte Überlagerung ist genau dann zusammenhängend, wenn die Rechtsoperation von $\pi_1(N, q^0)$ auf X_0 transitiv ist.*

Ist nun $M \xrightarrow{\pi} N$ eine zusammenhängende Überlagerung, so ordnen wir ihr den Stabilisator (auch die Isotropiegruppe genannt) $\pi_*\pi_1(M, p^0)$ von $p^0 \in M_{q^0}$ der Gruppenoperation von $\pi_1(N, q^0)$ zu. Wählen wir einen anderen Punkt $p^1 \in M_{q^0}$, so erhalten wir eine dazu konjugierte Untergruppe von $\pi_1(N, q^0)$. Ist nämlich δ ein Weg in N mit $p^1 = p^0[\delta]$ (man beachte, dass $\pi_1(N, q^0)$ transitiv auf X_0 operiert), so gilt

$$\pi_*\pi_1(M, p^1) = [\delta]^{-1}\pi_*\pi_1(M, p^0)[\delta].$$

Insgesamt haben wir damit bereits eine Hälfte des folgenden Satzes:

Theorem 13.69. *Die Isomorphieklassen von zusammenhängenden Überlagerungen von N werden durch die Konjugationsklassen von Untergruppen von $\pi_1(N, q^0)$ klassifiziert.*

Beweis. Wir müssen noch zeigen, wie wir aus einer Untergruppe H von $\pi_1(N, q^0)$ eine zusammenhängende Überlagerung von N gewinnen. Dazu bemerken wir, dass H transitiv auf der Menge der Rechtsnebenklassen

$$\{H[\gamma] \mid [\gamma] \in \pi_1(N, q^0)\}$$

von H in $\pi_1(N, q^0)$ operiert. Die gemäß dem vorigen Theorem assoziierte Überlagerung von N ist die gesuchte. \square

Tatsächlich hätten wir noch zeigen müssen, dass die beiden oben konstruierten Abbildungen

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen} \\ \text{von Überlagerungen} \\ \text{von } N \end{array}} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} \text{Konjugationsklassen} \\ \text{von Untergruppen} \\ \text{von } \pi_1(N, q^0) \end{array}}$$

zueinander invers sind. Das möchte ich Ihnen überlassen.

Folgerung 13.70. Eine einer Untergruppe $H \subseteq \pi_1(N, q^0)$ entsprechende zusammenhängende Überlagerung von N hat die Blätterzahl

$$[\pi_1(N, q^0) : H] = \frac{|\pi_1(N, q^0)|}{|H|}.$$

Die universelle Überlagerung

Sei N wiederum eine zusammenhängende C^k -Mannigfaltigkeit. Unter allen Untergruppen H von $\pi_1(N, q^0)$ gibt es eine kleinste, nämlich $\{[0]\}$, der die „größte“ Überlagerung entspricht.

Definition 13.71. Eine zusammenhängende Überlagerung $\tilde{N} \xrightarrow{\tilde{\pi}} N$ heißt *universelle Überlagerung*, falls \tilde{N} einfach zusammenhängend ist (d. h. falls $\pi_1(\tilde{N}) = \{e\}$ ist).

Satz 13.72. Die universelle Überlagerung $\tilde{N} \xrightarrow{\tilde{\pi}} N$ existiert und ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Dies folgt aus unseren bisherigen Ergebnissen. \square

Beispiel 13.73. (i) $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2\pi it}$.

(ii) $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n, n \geq 2$.

Bemerkung. Die Faser von \tilde{N} können wir mit $\pi_1(N, q^0)$ identifizieren. Die Rechtsoperation von $\pi_1(N, q^0)$ auf der Faser wird dann einfach die Gruppenmultiplikation

$$\pi_1(N, q^0) \times \pi_1(N, q^0) \rightarrow \pi_1(N, q^0).$$

Die universelle Überlagerung \tilde{N} ist universell in dem Sinne, dass sie jede andere zusammenhängende Überlagerung $M \xrightarrow{\pi} N$ von N überlagert:

Theorem 13.74. Sei $M \xrightarrow{\pi} N$ eine zusammenhängende Überlagerung, $q^0 \in N$, $p^0 \in M_{q^0}$, $\tilde{q}^0 \in \tilde{N}_{q^0}$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\Phi: \tilde{N} \rightarrow M$ von Überlagerungen von N mit $\Phi(\tilde{q}^0) = p^0$. Dieses Φ ist selbst Überlagerung von M .

Beweis. Der erste Teil des Theorems folgt aus

$$\{e\} = \tilde{\pi}_* \pi_1(\tilde{N}, \tilde{q}^0) \subseteq \pi_* \pi_1(M, p^0).$$

Da sich die lokalen Homöomorphien (kleiner) offener Teilmengen von M und N bzw. \tilde{N} und N auf die Abbildung $\Phi: \tilde{N} \rightarrow M$ „hochziehen“, überlagert \tilde{N} die Mannigfaltigkeit M vermöge Φ . \square

Definition 13.75. Eine zusammenhängende Überlagerung $M \xrightarrow{\pi} N$ heißt *regulär*, falls die ihr vermöge des Theorems 13.69 zugeordnete Untergruppe ein Normalteiler in $\pi_1(N, q^0)$ ist.

Es gibt wiederum ein einfaches geometrisches Kriterium dafür, wann eine zusammenhängende Überlagerung regulär ist.

Satz 13.76. Eine zusammenhängende Überlagerung $M \xrightarrow{\pi} N$ ist regulär genau dann, wenn es keinen geschlossenen Weg γ in N (mit Anfangs- und Endpunkt q^0) gibt, der gleichzeitig zu einem geschlossenen Weg $\tilde{\gamma}_{p^0}$ und einem nicht-geschlossenen Weg $\hat{\gamma}_{p^1}$ liftet (hierbei ist natürlich $p^0, p^1 \in M_{q^0}$).

Beweis. Selbst. □

Folgerung 13.77. Die universelle Überlagerung ist regulär und besitzt somit die erwähnte Eigenschaft.

13.6.2 Zerlegung der Eins

Zerlegungen der Eins werden es uns ermöglichen, lokal in Karten durchgeführte Konstruktionen zu globalisieren.

Lemma 13.78. *Seien $0 < a < b$. Dann gibt es ein $k \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ mit $k(x) = 1$ für $|x| \leq a$, $0 < k(x) < 1$ für $a < |x| < b$ und $k(x) = 0$ für $|x| \geq b$.*

Beweis. O.E.d.A. sei $a = 1$, $b = 3$. Wir setzen

$$\varphi(s) = \begin{cases} e^{-1/(1-s^2)}, & -1 < s < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Sei weiterhin $k_0 = \int_{-1}^1 \varphi(s) ds > 0$. Wir setzen schließlich

$$k(x) = \frac{1}{k_0} \int_{-1}^{2-|x|} \varphi(s) ds, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Funktion k hat die verlangten Eigenschaften. □

Sei jetzt M eine C^k -Mannigfaltigkeit.

Definition 13.79. Sei $f \in C^k(M; \mathbb{R})$. Dann heißt

$$\text{supp } f = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}$$

(Abschluss in M) der Träger von f .

Bemerkung. $\text{supp } f$ ist das Komplement der größten offenen Menge in M , in der f identisch verschwindet.

Definition 13.80. Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M . Dann heißt eine Familie $\{\varphi_i\}_{i \in I} \subset C^k(M; \mathbb{R})$ eine der Überdeckung $\{U_i\}$ untergeordnete *Zerlegung der Eins*, falls

- (i) $\text{supp } \varphi_i \subseteq U_i$ für alle i ,
- (ii) die Familie $\{\text{supp } \varphi_i\}_{i \in I}$ lokal endlich²⁰ ist,
- (iii) $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1$ für jedes $p \in M$.²¹

²⁰Das heißt, für jedes $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq M$ mit $\#\{i \mid U \cap \text{supp } \varphi_i \neq \emptyset\} < \infty$.

²¹Wegen (ii) ist diese Summe tatsächlich endlich.

Satz 13.81. Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M . Dann gibt es eine lokal endliche, offene Überdeckung $\{V_j\}_{j \in J}$ von M , die aus Kartenumgebungen mit zugehörigen Karten (V_j, φ_j) besteht und die die Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ verfeinert²², so dass $\varphi_j(V_j) = B_3(0)$ ²³ für jedes j gilt und $\{\varphi_j^{-1}(B_1(0))\}_{j \in J}$ ebenfalls M überdeckt.

Beweis. Ohne Beweis. Die Parakompaktheit von M ist hier entscheidend. \square

Satz 13.82. Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M . Dann gibt es eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins.

Beweis. 1. Schritt. Sei $\{V_j\}_{j \in J}$ eine offene Überdeckung aus dem vorigen Satz. Wir definieren dann $h_j = k \circ \varphi_j$, wobei k eine gemäß Lemma 13.78 gewählte Funktion (mit $a = 1$, $b = 2$) ist. Weiterhin setzen wir

$$g_j(p) = \begin{cases} h_j(p)/h(p), & p \in V_j, \\ 0, & p \in M \setminus V_j, \end{cases}$$

wobei $h(p) = \sum_j h_j(p)$. Dann ist $\{g_j\}$ eine $\{V_j\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins.

2. Schritt. Wir fixieren nun eine Abbildung $\kappa: J \rightarrow I$ mit $V_j \subseteq U_{\kappa(j)}$ für alle $j \in J$. Weiterhin sei

$$f_i(p) = \sum_{j: \kappa(j)=i} g_j(p).$$

Dann ist $\{f_i\}$ die gesuchte, $\{U_i\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Insbesondere folgt die lokale Endlichkeit von $\{\text{supp } f_i\}_{i \in I}$ aus

$$\text{supp } f_i \subseteq \bigcup_{j: \kappa(j)=i} \text{supp } g_j$$

und der lokalen Endlichkeit von $\{\text{supp } g_j\}_{j \in J}$. \square

Folgerung 13.83. Seien $F \subseteq U \subseteq M$, F abgeschlossen, U offen. Dann gibt es ein $f \in C^k(M; \mathbb{R})$ mit $f|_F \equiv 1$ und $\text{supp } f \subseteq U$.

Beweis. $\{U, M \setminus F\}$ ist eine offene Überdeckung von M . Wir wählen eine untergeordnete Zerlegung $\{f, g\}$ der Eins. Die Funktion f hat die gesuchten Eigenschaften. \square

²²Das heißt, für jedes $j \in J$ gibt es ein $i \in I$ mit $V_j \subseteq U_i$.

²³ $B_r(0)$ ist die offene Kugel in \mathbb{R}^n um 0 mit Radius r .

13.6.3 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Wir wollen jetzt Mannigfaltigkeiten mit Rand (auch berandete Mannigfaltigkeiten genannt) einführen. Prototyp ist die Vollkugel

$$\overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}.$$

Hier ist der (topologische) Rand S^{n-1} selbst eine Mannigfaltigkeit (ohne Rand), die sich insbesondere lokal „geradebiegen“ lässt. Die Vollkugel liegt dann lokal einseitig bezüglich ihres Randes. In ähnlicher Weise modellieren wir Mannigfaltigkeiten mit Rand über offenen Teilmengen des abgeschlossenen Halbraumes

$$\overline{\mathbb{R}_+^n} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}.$$

Wir schreiben im Weiteren $x = (x', x^n)$ mit $x' = (x^1, \dots, x^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$ ist das Innere von $\overline{\mathbb{R}_+^n}$, $\partial\overline{\mathbb{R}_+^n} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0\}$ ist sein Rand.

Wir benötigen nun Funktionen bzw. Abbildungen, die C^k bis zum Rand sind.

Definition 13.84. Sei $U \subseteq \overline{\mathbb{R}_+^n}$ offen. Dann besteht der Raum $C^k(U; \mathbb{R})$ aus allen Funktionen $f \in C^k(U \setminus \partial\overline{\mathbb{R}_+^n}; \mathbb{R})$, so dass $\partial^\alpha f$ für alle $|\alpha| \leq k$ lokal gleichmäßig stetig auf U ist (das heißt einschließlich des Randes $U \cap \partial\overline{\mathbb{R}_+^n}$).

Bemerkung. Die Forderung in der Definition ist gleichbedeutend mit der Existenz von

$$\partial^\alpha f(x', +0) = \lim_{x^n \rightarrow +0} \partial^\alpha f(x', x^n)$$

für alle $(x', 0) \in U$.

Die C^k -Verträglichkeit von Karten (U, φ) , (V, ψ) mit $U, V \subseteq M$, $\varphi: U \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+^n}$, $\psi: V \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+^n}$ bezieht sich im Weiteren auf diesen Begriff der C^k -Glattheit bis zum Rand.

Definition 13.85. Eine Mannigfaltigkeit M mit Rand ist ein parakompakter Hausdorffraum zusammen mit einem Atlas C^k -verträglicher Karten (U, φ) , wobei $\varphi: U \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+^n}$.

Wir wollen als Erstes sehen, dass die Begriffe Inneres M° und Rand ∂M für eine Mannigfaltigkeit M mit Rand wohldefiniert sind.

Lemma 13.86. Sei $U \subseteq \overline{\mathbb{R}_+^n}$ (relative) offen, $x^0 \in U$, $f: U \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+^n}$ eine C^k -Abbildung mit $f^n(x^0) = 0$. Dann gilt

$$Df(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x^0) & * \\ 0 & \frac{\partial f^n}{\partial x^n}(x^0) \end{pmatrix},$$

wobei $\frac{\partial f^n}{\partial x^n}(x^0) \geq 0$.

Beweis. Für $1 \leq j \leq n$ gilt wegen $f^n(x^0) = 0$, dass

$$\frac{\partial f^n}{\partial x^j}(x^0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f^n(x^0 + he_j)}{h} \geq 0.$$

Analog erhalten wir für $1 \leq j \leq n-1$, dass

$$\frac{\partial f^n}{\partial x^j}(x^0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f^n(x^0 + he_j)}{h} \leq 0.$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Folgerung 13.87. Ist tatsächlich $x^0 \in U \setminus \partial \overline{\mathbb{R}_+^n}$, so ist auch $\frac{\partial f^n}{\partial x^n}(x^0) = 0$. Insbesondere ist dann $Df(x^0)$ nicht invertierbar.

Beweis. Das Argument im vorigen Beweis liefert nun auch $\frac{\partial f^n}{\partial x^n}(x^0) \leq 0$. \square

Folgerung 13.88. Sind (U, φ) , (V, ψ) Karten für eine Mannigfaltigkeit M mit Rand, so gilt für den Kartenübergang

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(U \cap V) \cap \mathbb{R}_+^n) &= \psi(U \cap V) \cap \mathbb{R}_+^n, \\ (\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(U \cap V) \cap \partial \overline{\mathbb{R}_+^n}) &= \psi(U \cap V) \cap \partial \overline{\mathbb{R}_+^n}. \end{aligned}$$

Definition 13.89. Die Menge der Punkte $p \in M$ mit $\varphi(p) \in \partial \overline{\mathbb{R}_+^n}$ für (wenigstens) eine Karte (U, φ) von M heißt der *Rand* ∂M von M . Die Menge $M \setminus \partial M$ heißt das *Innere* M° von M .

Bemerkung. Die vorangegangene Folgerung zeigt, dass es genügt, die Bedingung für die Zugehörigkeit von $p \in M$ zu ∂M für eine beliebige Karte (U, φ) von M mit $p \in U$ zu überprüfen.

Satz 13.90. M° ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand und ∂M ist eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand.

Beweis. Einschränkung der Karten eines Atlases von M auf M° bzw. ∂M liefert Atlanten für M° und ∂M . \square

Beispiel 13.91. Sei N eine Mannigfaltigkeit ohne Rand, $f \in C^k(N; \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von f . Dann ist

$$M = \{p \in N \mid f(p) \geq c\} = f^{-1}([c, \infty))$$

eine berandete Untermannigfaltigkeit von M mit

$$\partial M = f^{-1}(c).$$

(Übungsblatt 6, Aufgabe 1.)

Bemerkung. (a) Für berandete Mannigfaltigkeiten M hat man Begriffe wie im unberandeten Fall: Tangentialbündel TM , differenzierbare Abbildungen $f: M \rightarrow N$ zwischen berandeten Mannigfaltigkeiten, deren Differenzial df , Vektorfelder $X \in C^{k-1}(M; TM)$, Fluss eines Vektorfeldes, Zerlegung der Eins.

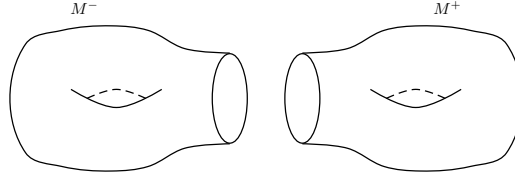
- (b) Das Produkt zweier berandeter Mannigfaltigkeiten ist (bezüglich der natürlichen Struktur) im Allgemeinen keine Mannigfaltigkeit. Ein einfaches Beispiel ist

$$I^2 = [0, 1]^2.$$

mit dem Intervall $I = [0, 1]$.

Die obige Bemerkung, Teil (a) wird noch einsichtiger, wenn wir festhalten, dass das Beispiel mit $M = f^{-1}([c, \infty))$ bereits der allgemeine Fall einer berandeten Mannigfaltigkeit ist.

Satz 13.92. *Identifiziert man zwei Kopien M^+ , M^- von M entlang des gemeinsamen Randes, so erhält man eine Mannigfaltigkeit $2M$ ohne Rand, die M ($= M^+$) als Untermannigfaltigkeit enthält.*



Beweis. Wir schreiben $(p, +)$ mit $p \in M$ für Punkte in M^+ , analog $(p, -)$ mit $p \in M$ für Punkte in M^- . Dann gilt

$$2M = (M^+ \sqcup M^-) / \sim,$$

wobei

$$(p, +) \sim (p', -) \iff p = p' \in \partial M.$$

Wir versehen $2M$ zuerst mit der Struktur einer topologischen Mannigfaltigkeit. Sei $\pi: M^+ \sqcup M^- \rightarrow 2M$ die kanonische Projektion. Dann

$$2M = \pi(M^+ \setminus \partial M^+) \sqcup \pi(M^- \setminus \partial M^-) \sqcup \pi(\partial M^\pm).$$

Für Punkte in $\pi(M^+ \setminus \partial M^+)$ und $\pi(M^- \setminus \partial M^-)$ sind die Kartenumgebungen klar. Für $p^* \in \partial M$ wählen wir eine Karte (U, φ) mit $p^* \in U$ und $\varphi: U \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+^n}$. Dann ist

$$\tilde{U} = \varphi(U) \cup \{(x', -x^n) \in \mathbb{R}^n \mid (x', x^n) \in \varphi(U)\}$$

eine offene Menge in \mathbb{R}^n und $(\pi((U, +) \sqcup (U, -)), \tilde{\varphi})$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: \pi((U, +) \sqcup (U, -)) &\rightarrow \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \tilde{\varphi}((p, +)) &= \varphi(p), \quad \tilde{\varphi}((p, -)) = (\varphi'(p), -\varphi^n(p)) \end{aligned}$$

ist die gesuchte Karte für p^* .

Die topologische Verträglichkeit all dieser so konstruierten Karten ist klar, gleichfalls die Hausdorff-Eigenschaft und Parakompaktheit. \square

Um tatsächlich eine C^k -Struktur auf $2M$ zu erhalten, müssen wir ein wenig härter arbeiten.

Definition 13.93. Eine *Kragenumgebung* von ∂M in M ist ein C^k -Diffeomorphismus $\varphi: \partial M \times [0, 1) \rightarrow W$, wobei W eine Umgebung von ∂M in M ist, mit $\varphi(p, 0) = p$ für alle $p \in \partial M$.

Satz 13.94. ∂M besitzt eine *Kragenumgebung*.

Beweis. Zu dem Fall, dass ∂M kompakt ist, kommen wir später. (Nachdem Sie die aktuellen Hausaufgaben abgegeben haben.) \square

Ende des Beweises von Satz 13.92. Wir fixieren eine Kragenumgebung $\varphi: \partial M \times [0, 1) \rightarrow W$ von ∂M , d. h. wir identifizieren W mit $\partial M \times [0, 1)$. Als Kartenumgebungen eines Punktes $p^* \in \partial M$ wählen wir dann Mengen der Form $\pi((U, +) \sqcup (U, -))$ wie im ersten Teil des Beweises mit $U = V \times [0, 1)$ und $\varphi: V \times [0, 1) \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+^n}$ ist von der Form $\varphi(p, +) = (\psi(p), t)$, wobei (V, ψ) eine Karte für p^* in ∂M ist.

Man prüft jetzt leicht nach, dass die Kartenübergänge von der Klasse C^k sind. \square

Folgerung 13.95. Die im Beispiel 13.91 beschriebene Situation ist tatsächlich die allgemeine.

Beweis. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Als N wählen wir $N = 2M$. So dann sei $\varphi: \partial M \times (-1, 1) \rightarrow W \subseteq 2M$ eine „beidseitige“ Kragenumgebung von ∂M , d. h. $\varphi|_{\partial M \times [0, 1)}: \partial M \times [0, 1) \rightarrow W \cap \pi(M^+)$ ist Kragenumgebung von $\partial\pi(M^+)$ in $\pi(M^+)$ und $\varphi|_{\partial M \times (-1, 0]}: \partial M \times (-1, 0] \rightarrow W \cap \pi(M^-)$ ist Kragenumgebung von $\partial\pi(M^-)$ ($= \partial\pi(M^+)$) in $\pi(M^-)$, so dass die globale Koordinaten $t \in [0, 1)$ bzw. $t \in (-1, 0]$ „ C^k -glatt an $t = 0$ zusammenpassen“.²⁴ Es ist dann $\{W^+, W, W^-\}$ mit $W^+ = \pi(M^+) \setminus \varphi(\partial M \times [0, \frac{1}{2}))$, $W^- = \pi(M^-) \setminus \varphi(\partial M \times [-\frac{1}{2}, 0])$ eine offene Überdeckung von $2M$. Sei $\{\psi^+, \psi, \psi^-\}$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann leistet die Funktion

$$f = \psi^+ + t\psi - \psi^-$$

mit $c = 0$ das Verlangte. \square

²⁴Eine derartige „beidseitige“ Kragenumgebung W wird auch Tubenumgebung genannt. Allgemein ist eine *Tubenumgebung* einer eingebetteten Mannigfaltigkeit N in N' eine Umgebung von N , die zu $N^n \times B_1^{n'-n}(0)$, $n = \dim N$, $n' = \dim N'$, diffeomorph ist.

Kapitel 14

Differenzialformen

14.1 Differenzialformen vom Rang 1

14.1.1 Das Kotangentialbündel

Sei M eine n -dimensionale C^{k+1} -Mannigfaltigkeit.¹

Mit $T_p^*M = L(T_pM, \mathbb{R})$ für $p \in M$ bezeichnen wir den Dualraum zu T_pM , d. h. den Raum der Linearformen auf T_pM . Dann ist T_p^*M ein n -dimensionaler linearer Raum über \mathbb{R} und heißt der *Kotangentialraum* an M in p . Elemente in T_p^*M heißen auch *Kovektoren*.

Definition 14.1. Das *Kotangentialbündel* T^*M über M ist definiert als

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Lemma 14.2. T^*M ist in kanonischer Weise eine $2n$ -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit. Die kanonische Projektion $\pi: T^*M \rightarrow M$ ist von der Klasse C^k .

Beweis. Seien x^1, \dots, x^n lokale Koordinaten in $U \subseteq M$. Dann ist $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ eine lineare Basis in jedem Tangentialraum in $TM|_U$. Bezeichne dx^1, \dots, dx^n die dazu duale Basis, d. h. wir haben

$$\left\langle dx^j, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \delta_k^j = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k, \\ 0, & \text{für } j \neq k. \end{cases}$$

Jeder Kovektor $\omega \in T_p^*M$ für $p \in U$ schreibt sich dann als

$$\omega = a_1(p)dx^1 + \dots + a_n(p)dx^n$$

¹Im Weiteren werden wir die Konzepte im unberandeten Fall entwickeln. Sie gelten dann analog für berandete Mannigfaltigkeiten.

mit $a_1(p), \dots, a_n(p) \in \mathbb{R}$. Wir nehmen $x^1, \dots, x^n, a_1, \dots, a_n$ als lokale Koordinaten in $\pi^{-1}(U) = T^*M|_U$.

Wir müssen zeigen, dass Kartenwechsel von der Klasse C^k sind. Sei also $y = y(x)$ ein Kartenwechsel in M der Klasse C^{k+1} . Wir schreiben ω in den neuen Koordinaten y^1, \dots, y^n als

$$\omega = b_1 dy^1 + \dots + b_n dy^n.$$

Dann gilt $b_r = \langle \omega, \frac{\partial}{\partial y^r} \rangle$. Wir erhalten also

$$b_r = \left\langle \omega, \frac{\partial}{\partial y^r} \right\rangle = \left\langle \omega, \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^r} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^r} \left\langle \omega, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^r} a_j$$

und folglich mit $a = (a_1, \dots, a_n)^T$, $b = (b_1, \dots, b_n)^T$

$$b = \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^{-1} \right)^T a.$$

Somit sind die Kartenübergänge von der Klasse C^k . □

14.1.2 Definition und erste Eigenschaften

Sei M eine C^{k+1} -Mannigfaltigkeit, T^*M das Kotangententialbündel über M .

Definition 14.3. Eine *Differentialform vom Rang 1* oder *1-Form* ist eine Abbildung $\omega \in C^k(M; T^*M)$ mit $\pi \omega = \text{id}_M$ (d. h. $\omega(p) \in T_p^*M$ für alle $p \in M$).

In lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n in $U \subseteq M$ schreibt sich eine 1-Form als

$$\omega = a_1(x) dx^1 + \dots + a_n(x) dx^n,$$

wobei $a_1, \dots, a_n \in C^k(U; \mathbb{R})$.

Beispiel 14.4. Für $f \in C^{k+1}(M; \mathbb{R})$ ist $df \in C^k(M; T^*M)$.

Beweis. Es ist $(df)_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, also können wir $(df)(p) = (df)_p \in T_p^*M$ setzen. In lokalen Koordinaten²,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n.$$

df ist damit von der Klasse C^k . □

Lemma 14.5. (i) *Die kanonische Paarung zwischen Vektorfeldern und 1-Formen definiert eine Abbildung*

$$\begin{aligned} C^k(M; TM) \times C^k(M; T^*M) &\rightarrow C^k(M; \mathbb{R}) \\ (X, \omega) &\mapsto \langle X, \omega \rangle = \omega(X). \end{aligned}$$

² $(df)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = (df)\left(\frac{d}{dt}(x + te_j)\Big|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}f(x + te_j)\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x).$

(ii) Für $f \in C^{k+1}(M; \mathbb{R})$, $X \in C^k(M; TM)$ ist $\langle X, df \rangle = df(X) = X(f)$ die Ableitung der Funktion f in Richtung des Vektorfeldes X .

Beweis. (i) In lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n haben wir $X = \alpha^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \alpha^n(x) \frac{\partial}{\partial x^n}$, $\omega = a_1(x) dx^1 + \dots + a_n(x) dx^n$ und dann

$$\langle X, \omega \rangle = \sum_{j=1}^n a_j(x) \alpha^j(x).$$

(ii) Gemäß (i) gilt

$$\langle X, df \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha^j(x) \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) = X(f).$$

□

Definition 14.6. Ist $f: M \rightarrow N$ von der Klasse C^{k+1} und $\omega \in C^k(N; T^*N)$, so heißt die durch

$$\langle (f^*\omega)(p), \mathfrak{t} \rangle = \langle \omega(f(p)), (df)_p(\mathfrak{t}) \rangle, \quad \forall p \in M, \mathfrak{t} \in T_p M,$$

definierte Abbildung $f^*\omega$ das *Pullback* der 1-Form ω unter f .

Lemma 14.7. (i) $f^*\omega$ ist von der Klasse C^k , d. h. wir erhalten eine Abbildung

$$f^*: C^k(N; T^*N) \rightarrow C^k(M; T^*M).$$

(ii) Ist $g: N \rightarrow N'$ eine weitere C^{k+1} -Abbildung, so gilt

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

(iii) Ist $h \in C^{k+1}(N; \mathbb{R})$, so gilt

$$f^*(dh) = d(f^*h).$$

Beweis. (i) In lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^m in M und y^1, \dots, y^n in N gilt

$$\begin{aligned} \left\langle f^*(dy^r), \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle &= \left\langle dy^r, (df) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle dy^r, \frac{\partial f^1}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^1} + \dots + \frac{\partial f^n}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^n} \right\rangle = \frac{\partial f^r}{\partial x^j}, \end{aligned}$$

also $f^*(dy^r) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f^r}{\partial x^j} dx^j$ und dann mit $\omega = \sum_{r=1}^n b_r(y) dy^r$

$$f^*\omega = \sum_{r=1}^n b_r(y) f^*(dy^r) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{r=1}^n b_r(y) \frac{\partial f^r}{\partial x^j}(x) \right) dx^j,$$

wobei in dieser Darstellung $y = f(x)$ zu setzen ist.

- (ii) Selbst.
 (iii) Gemäß (i) gilt

$$\begin{aligned} f^*(dh) &= f^*\left(\sum_r \frac{\partial h}{\partial y^r}(y) dy^r\right) = \sum_{j,r} \frac{\partial h}{\partial y^r}(y) \frac{\partial f^r}{\partial x^j}(x) dx^j \\ &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j}(h(f(x))) dx^j = \sum_j \frac{\partial(f^*h)}{\partial x^j}(x) dx^j = d(f^*h). \end{aligned}$$

□

14.1.3 Kurvenintegrale zweiter Art

Wir definieren jetzt das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega$ zweiter Art einer 1-Form ω entlang einer Kurve γ . Sei dazu $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ eine stückweise C^1 -Kurve, d. h. γ ist eine stetige Kurve und es gibt eine Partition

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b,$$

so dass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ für $1 \leq j \leq m$ eine C^1 -Kurve ist. Ferner sei $\omega \in C^0(M; T^*M)$. Wir benutzen nun den Umstand, dass 1-Formen auf \mathbb{R} von der Form $a(t) dt$ sind und somit für stetiges $a(t)$ integriert werden können.

Definition 14.8. Das *Kurvenintegral* $\int_\gamma \omega$ zweiter Art (orientierte Integration) ist definiert als

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}} \omega = \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma^* \omega.$$

Bemerkung. Gilt in lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n , dass $\omega = \sum a_j(x) dx^j$, und ist γ gegeben durch $x = x(t)$ für $a \leq t \leq b$, so ist

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^n \int_a^b a_j(x(t)) \frac{dx^j}{dt}(t) dt.$$

Lemma 14.9. Der Wert des Integrals $\int_\gamma \omega$ ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung der Kurve γ .

Beweis. O. E. d. A. sei γ eine C^1 -Kurve, die vollständig in einer Kartenumgebung mit Koordinaten x^1, \dots, x^n enthalten ist. Eine Umparametrisierung $[a, b] \rightarrow [c, d]$ mit $s = s(t)$ liefert dann

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_c^d a_j(x(s)) \frac{dx^j}{ds}(s) ds &= \sum_{j=1}^n \int_a^b a_j(x(s(t))) \frac{dx^j}{ds}(s(t)) \frac{ds}{dt}(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \int_a^b a_j(x(t)) \frac{dx^j}{dt}(t) dt. \end{aligned}$$

Folglich ändert sich der Wert von $\int_\gamma \omega$ unter einer Umparametrisierung von γ nicht. □

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung schreibt sich jetzt in folgender Form:

Satz 14.10. Für $f \in C^{k+1}(M; \mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Beweis. O.E.d.A. dürfen wir die Situation des vorigen Beweises annehmen. Dann

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} df &= \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x^j}(x(t)) \frac{dx^j}{dt}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(f(x(t))) dt = f(x(b)) - f(x(a)). \end{aligned}$$

□

Der Satz über Variablenwechsel unter dem Integral schreibt sich wie folgt:

Satz 14.11. Sei $f: M \rightarrow N$ eine C^1 -Abbildung, $\omega \in C^0(N; T^*N)$. Dann gilt

$$\int_{f \circ \gamma} \omega = \int_{\gamma} f^* \omega.$$

Beweis. Mit $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ gilt

$$\int_{f \circ \gamma} \omega = \int_a^b (f \circ \gamma)^* \omega = \int_a^b \gamma^*(f^* \omega) = \int_{\gamma} f^* \omega.$$

□

14.2 Vektorbündel

14.2.1 Definition, Schnitte

Sei M eine C^k -Mannigfaltigkeit. Beispiele von Vektorbündeln über M sind das Tangentialbündel TM und das Kotangentialbündel T^*M .

Definition 14.12. Ein *Vektorbündel* (auch Vektorraumbündel) der Klasse C^k und vom Rang N über M ist eine C^k -Mannigfaltigkeit E zusammen mit einer Abbildung $\pi: E \rightarrow M$, so dass Folgendes gilt:

- (i) Jede Faser $E_p: \pi^{-1}(p)$ ist ein N -dimensionaler linearer Raum über \mathbb{R} .

- (ii) Zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine Umgebung U von p in M und einen C^k -Diffeomorphismus $\varphi_U: E|_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^N$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E|_U & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times \mathbb{R}^N \\ & \searrow \pi_U & \swarrow \pi_1 \\ & U & \end{array}$$

kommutiert (hierbei $\pi_U = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$, $\pi_1: U \times \mathbb{R}^N \rightarrow U$ — Projektion auf erste Komponente) und die Abbildung $\varphi_U|_{E_p}: E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ für jedes $p \in M$ \mathbb{R} -linear ist.

Man sagt auch, dass das Vektorbündel E über U *trivial* ist, und φ_U heißt eine *Trivialisierung*.

Bemerkung. Manchmal betrachtet man auch $(E, \pi, M, \mathbb{R}^N)$ als Vektorbündel. E heißt dann der *Totalraum*, π die *Projektion*, M die *Basis* und \mathbb{R}^N die *allgemeine* (oder typische) *Faser*.

Seien nun E, F zwei Vektorbündel über M mit Projektionen π, π' .

Definition 14.13. (i) Ein *Homomorphismus der C^k -Vektorbündel E, F über M* ist eine C^k -Abbildung $\varphi: E \rightarrow F$, die *fasererhaltend* (d. h. $\pi = \pi' \circ \varphi$ bzw. $\varphi(E_p) \subseteq F_p$ für alle $p \in M$) und *linear in den Fasern* (d. h. die induzierten Abbildungen $\varphi_p: E_p \rightarrow F_p$ sind \mathbb{R} -linear) ist.

- (ii) Ein Homomorphismus φ zwischen E, F heißt ein *C^k -Isomorphismus*, falls φ bijektiv und $\varphi^{-1}: F \rightarrow E$ ebenfalls ein Bündelhomomorphismus ist. (Letzteres ist gerade die Bedingung, dass φ^{-1} von der Klasse C^k ist.)

- (iii) Das Vektorbündel E über M heißt *trivial*, falls es C^k -isomorph zum trivialen Bündel $M \times \mathbb{R}^N$ über M ist.

Seien nun $\varphi_U: E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^N$, $\varphi_V: E|_V \rightarrow V \times \mathbb{R}^N$ zwei Trivialisierungen eines C^k -Vektorbündels E , wobei $U \cap V \neq \emptyset$. Dann hat die Abbildung $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}: (U \cap V) \times \mathbb{R}^N \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^N$ die Form

$$(\varphi_V \circ \varphi_U^{-1})(p, e) = (p, g_{VU}(p)e), \quad p \in U \cap V, e \in \mathbb{R}^N,$$

für eine C^k -Abbildung

$$g_{VU}: U \cap V \rightarrow \text{Gl}(N; \mathbb{R}).$$

Die Abbildungen g_U^V heißen *Übergangsabbildungen* und beschreiben, wie die trivialen Bündel $U \times \mathbb{R}^N$ und $V \times \mathbb{R}^N$ über $U \cap V$ verklebt werden, um $E|_{U \cup V}$ zu erhalten.

Beispiel 14.14. Seien U, V Kartenumgebungen in M mit Koordinaten x bzw. y .

(a) *Das Tangentialbündel TM .* Die Übergangsabbildungen sind

$$g_{VU}(x) = \frac{\partial y}{\partial x}(x).$$

(b) *Das Kotangentialbündel T^*M .* Die Übergangsabbildungen sind

$$g_{VU}(x) = \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x) \right)^{-1} \right)^T.$$

Lemma 14.15. *Für U, V, W mit $U \cap V \cap W \neq \emptyset$ gilt*

$$g_{WU} = g_{WV} \cdot g_{VU} \text{ in } U \cap V \cap W.$$

Beweis. Für $p \in U \cap V \cap W$, $e \in \mathbb{R}^N$ haben wir

$$\begin{aligned} (p, g_{WU}(p)e) &= (\varphi_W \circ \varphi_U^{-1})(p, e) \\ &= (\varphi_W \circ \varphi_V^{-1} \circ \varphi_V \circ \varphi_U^{-1})(p, e) \\ &= (\varphi_W \circ \varphi_V^{-1})(p, g_{VU}(p)e) \\ &= (p, g_{WV}g_{VU}(p)e). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 14.16. Seien z weitere lokale Koordinaten in $W \subseteq M$.

(a) *Das Tangentialbündel TM .* Es gilt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Beweis. Es ist $z = z(y(x))$. Die Behauptung folgt mit der Kettenregel. □

(b) *Das Kotangentialbündel T^*M .* Es gilt

$$\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-1} \right)^T = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^{-1} \right)^T \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^{-1} \right)^T.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus (a). □

Lemma 14.17. *Aus $g_{WU} = g_{WV} \cdot g_{VU}$ für alle U, V, W folgt*

(a) $g_{UU} = 1_N$ für alle U ,

(b) $g_{UV} = g_{VU}^{-1}$ für alle U, V .

Beweis. (a) Man setze $U = V = W$.

(b) Man setze $U = W$ und benutze (a). □

Das Vektorbündel E lässt sich aus seinen Übergangsabbildungen g_{VU} bis auf Isomorphie eindeutig zurückgewinnen.

Satz 14.18. *Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M und sei für alle $U, V \in \mathcal{U}$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ eine C^k -Abbildung $g_{VU}: U \cap V \rightarrow \text{Gl}(N; \mathbb{R})$ gegeben, so dass*

$$g_{WU} = g_{WV} \cdot g_{VU} \text{ in } U \cap V \cap W$$

für alle $U, V, W \in \mathcal{U}$ mit $U \cap V \cap W \neq \emptyset$ gilt. Dann gibt es ein (bis auf Isomorphie) eindeutiges C^k -Vektorbündel E über M , das genau die g_{VU} als Übergangsabbildungen besitzt.³

Beweis. Wir setzen

$$E = \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} (U \times \mathbb{R}^N) / \sim,$$

wobei für $(p, e) \in U \times \mathbb{R}^N$, $(p', e') \in V \times \mathbb{R}^N$

$$(p, e) \sim (p', e') \iff p = p', e' = g_{VU}(p)e.$$

Wir behaupten, dass E das gesuchte Vektorbündel ist.

- (i) \sim ist eine Äquivalenzrelation.
- (ii) Karten in E sind von der Form $[U \times \mathbb{R}^N]_{\sim} \subseteq E$ für $U \in \mathcal{U}$ mit den kanonischen Kartenabbildungen $[U \times \mathbb{R}^N]_{\sim} \rightarrow U \times \mathbb{R}^N$.
- (iii) Kartenübergänge sind von der Form

$$(U \cap V) \times \mathbb{R}^N \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^N, \quad (p, e) \mapsto (p, g_{VU}(p)e),$$

und somit von der Klasse C^k .

□

Die Kenntnis der Übergangsabbildungen g_{VU} ist ausreichend, um Operationen mit Vektorbündeln eindeutig zu beschreiben. Zum Beispiel:

Satz 14.19. *Seien E, F zwei C^k -Vektorbündel über M , die beide über den Elementen einer offenen Überdeckung \mathcal{U} von M trivial sind. Seien g_{VU} bzw. h_{VU} die entsprechenden Übergangsabbildungen. Dann ist ein C^k -Vektorbündelhomomorphismus $f: E \rightarrow F$ gegeben durch eine Familie $\{f_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ von C^k -Abbildungen $f_U: U \rightarrow M(N' \times N; \mathbb{R})$ (N — Rang von E , N' — Rang von F), so dass*

$$f_V \cdot g_{VU} = h_{VU} \cdot f_U \text{ in } U \cap V$$

für alle $U, V \in \mathcal{U}$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ gilt.

Beweis. Selbst als Übungsaufgabe auf dem Blatt für nächste Woche. □

³Zudem ist E über jeder der Mengen $U \in \mathcal{U}$ trivial.

Folgerung 14.20. Der Homomorphismus aus vorigem Satz ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $M = N$ und $\varphi_U: U \rightarrow \text{Gl}(N; \mathbb{R})$ für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt.

Wir benötigen noch den wichtigen Begriff eines Schnittes in einem Vektorbündel.

Definition 14.21. Ein C^k -Schnitt s in einem C^k -Vektorbündel E über M ist eine C^k -Abbildung $s: M \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = \text{id}_M$ (d. h. $s(p) \in E_p$ für alle $p \in M$).

Den Raum aller C^k -Schnitte in E bezeichnen wir mit $C^k(M; E)$. Im Fall des trivialen Bündels $M \times \mathbb{R}^N$ schreiben wir auch $C^k(M; \mathbb{R}^N)$ anstelle von $C^k(M; M \times \mathbb{R}^N)$.

Bemerkung. $C^k(M; E)$ ist ein linearer Raum über \mathbb{R} und tatsächlich ein Modul über $C^k(M; \mathbb{R})$.

Beispiel 14.22. Vektorfelder sind Schnitte im Tangentialbündel, 1-Formen sind Schnitte im Kotangentialbündel.

Satz 14.23. In lokalen Trivialisierungen von E wie im vorigen Satz wird ein C^k -Schnitt s durch eine Familie $\{s_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ von C^k -Abbildungen $s_U: U \rightarrow \mathbb{R}^N$ (N — Rang von E) gegeben, so dass

$$s_V = g_{VU} s_U \text{ in } U \cap V$$

für alle $U, V \in \mathcal{U}$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ gilt.

Beweis. Dies folgt direkt aus vorigem Satz, indem man M mit dem trivialen Bündel $M \times \mathbb{R}^0$ identifiziert. \square

14.2.2 Operationen mit Vektorbündeln

Das Prinzip ist einfach: „Jeder“ natürlichen Operation mit linearen Räumen entspricht eine Operation mit Vektorbündeln.

Seien V, W lineare Räume über \mathbb{R} . Dann haben wir:

Dualraum	V'
Direkte Summe	$V \oplus W$
Tensorprodukt	$V \otimes W$
Lineare Abbildungen von V nach W	$L(V, W)$
Äußeres Produkt	$\bigwedge^q V$

Erinnerung. (i) In der Tensoralgebra $\bigoplus_{q=0}^{\infty} V^{\otimes q}$ mit $V^{\otimes q} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q\text{-mal}}$ ha-

ben wir das graduierte Ideal $I = \bigoplus_{q=0}^{\infty} I^q$, das durch alle Elemente der Form $v \otimes w + w \otimes v$ für $v, w \in V$ erzeugt wird. Dann $\bigwedge^q V = V^{\otimes q} / I^q$.

Bezeichnet $v^1 \wedge v^2 \wedge \cdots \wedge v^q$ die Klasse des Elements $v^1 \otimes v^2 \otimes \cdots \otimes v^q$ in $\bigwedge^q V$, so gilt nach Konstruktion

$$v^{\sigma(1)} \wedge v^{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge v^{\sigma(q)} = (-1)^{\text{sgn } \sigma} v^1 \wedge v^2 \wedge \cdots \wedge v^q$$

für alle Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_q$.

- (ii) $\bigwedge^q V'$ ist (kanonisch isomorph zum) Raum aller q -linearen alternierenden Formen auf $\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q\text{-mal}}$.

Seien nun E, F Vektorbündel über M vom Rang N bzw. N' mit Übergangsabbildungen g_{VU} bzw. h_{VU} . Dann haben wir:

		Faser	Übergangsabbildungen
Duales Bündel	E'	E'_p	$(g_{VU}^{-1})^T$
Direkte Summe	$E \oplus F$	$E_p \oplus F_p$	$g_{VU} \oplus h_{VU}$ ⁴
Tensorprodukt	$E \otimes F$	$E_p \otimes F_p$	$g_{VU} \otimes h_{VU}$
Bündelhomomorphismen von E nach F	$\text{Hom}(E, F)$	$L(E_p, F_p)$	$L(g_{VU}, h_{VU})$ ⁵
Äußeres Produkt	$\bigwedge^q E$	$\bigwedge^q E_p$	$\bigwedge^q g_{VU}$

Insbesondere gilt:

Lemma 14.24. T^*M ist das Dualbündel zu TM .

Die Analogie zwischen linearen Räumen und Vektorbündeln geht noch weiter: Jeder natürlichen Isomorphie auf Seiten der linearen Räume entspricht eine Isomorphie auf Seiten der Vektorbündel.

Beispiel 14.25. Einige Beispiele sind:

1. $E \oplus F \cong F \oplus E$,
2. $(E \otimes F) \otimes G \cong E \otimes (F \otimes G)$,
3. $\text{Hom}(E, F) \cong E' \otimes F$,
4. $E \otimes \mathbb{R} \cong E$, wobei \mathbb{R} das triviale Bündel über M vom Rang 1 bezeichnet.

14.3 Differenzialformen vom Rang q

Sei M eine C^{k+1} -Mannigfaltigkeit. Dann haben wir das C^k -Vektorbündel $\bigwedge^q T^*M$ über M . Die Faser $(\bigwedge^q T^*M)_p$ für $p \in M$ ist der Raum der q -linearen alternierenden Formen auf $\underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{q\text{-mal}}$.

Definition 14.26. Eine Differenzialform vom Rang q (oder q -Form) der Klasse C^k ist ein Schnitt ω des Bündels $\bigwedge^q T^*M$.

Der Raum all dieser Schnitte ist $C^k(M; \bigwedge^q T^*M)$. Im Fall $k = \infty$ schreiben wir dafür auch $\Omega^q(M)$.

$${}^4 g_{VU} \oplus h_{VU} = \begin{pmatrix} g_{VU} & 0 \\ 0 & h_{VU} \end{pmatrix}.$$

⁵Übergangsabbildungen sind $M(N' \times N; \mathbb{R}) \rightarrow M(N' \times N; \mathbb{R})$, $f \mapsto h_{VU} \cdot f \cdot g_{VU}^{-1}$.

Erinnerung. Ist V ein linearer Raum über \mathbb{R} und ist e^1, \dots, e^n eine Basis in V , so ist $\{e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_q} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n\}$ eine Basis in $\bigwedge^q V$.

In lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n in $U \subseteq M$ schreibt sich eine q -Form als

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n} a_{i_1 \dots i_q}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$$

mit $a_{i_1 \dots i_q} \in C^k(U; \mathbb{R})$.

Beispiel 14.27. Im Fall $q = 1$ kennen wir dies bereits:

$$\omega = a_1(x) dx^1 + a_2(x) dx^2 + \dots + a_n(x) dx^n.$$

Wie im Fall $q = 1$ haben wir auch für $q > 1$ ein Pullback von q -Formen unter C^{k+1} -Abbildungen. Dazu sei $f: M \rightarrow N$ eine C^{k+1} -Abbildung und $\omega \in C^k(N; \bigwedge^q T^*N)$.

Definition 14.28. Wir definieren $f^*\omega$ durch

$$(f^*\omega)_p(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_q) = \omega_{f(p)}((df)_p(\mathbf{t}_1), \dots, (df)_p(\mathbf{t}_q))$$

für $p \in M$, $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_q \in T_pM$.

Lemma 14.29. Wir haben $f^*\omega \in C^k(M; \bigwedge^q T^*M)$ und damit eine Abbildung

$$f^*: C^k(N; \bigwedge^q T^*N) \rightarrow C^k(M; \bigwedge^q T^*M).$$

Beweis. Nach Konstruktion gilt $(f^*\omega)_p \in (\bigwedge^q T^*M)_p$ für alle $p \in M$. Wir müssen lediglich prüfen, ob die Konstruktion in C^k -glatter Weise vom Fußpunkt $p \in M$ abhängt.

Dies geschieht am besten in lokalen Koordinaten: Seien also x^1, \dots, x^m lokale Koordinaten in M und y^1, \dots, y^n lokale Koordinaten in N . Weiter sei in diesen Koordinaten $y^j = f^j(x^1, \dots, x^m)$ für $j = 1, \dots, n$ und

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} b_{j_1 \dots j_q}(y) dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_q}.$$

Lemma 14.30. Es gilt:

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} (f^*b_{j_1 \dots j_q})(x) f^*(dy^{j_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dy^{j_q}) \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} b_{j_1 \dots j_q}(f(x)) df^{j_1} \wedge \dots \wedge df^{j_q}, \end{aligned}$$

wobei $df^{j_l} = \frac{\partial f^{j_l}}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f^{j_l}}{\partial x^m} dx^m$ für $l = 1, \dots, q$.

Beweis. Der Einfachheit halber behandeln wir den Fall $q = 2$. Der allgemeine Fall ist analog.

Sei also $\omega = b(y) dy^1 \wedge dy^2$. Dann haben wir für $1 \leq j < k \leq m$

$$\begin{aligned} (f^*\omega) \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) &= \omega \left((df) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right), (df) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) \right) \\ &= (b(y) dy^1 \wedge dy^2) \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial f^2}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^2}, \frac{\partial f^1}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial f^2}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \\ &= b(y) \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^j} \frac{\partial f^2}{\partial x^k} - \frac{\partial f^1}{\partial x^k} \frac{\partial f^2}{\partial x^j} \right) \\ &= b(f(x)) (df^1 \wedge df^2) \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

Somit gilt tatsächlich $f^*\omega \in C^k(M; \wedge^q T^*M)$. □

13.3.1 Das äußere Differenzial

Sei M eine C^{k+1} -Mannigfaltigkeit. Eine q -Form ω auf M der Klasse C^k ist eine Familie $\{\omega_p\}_{p \in M}$ von q -linearen alternierenden Formen auf $\underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{q\text{-mal}}$,

die C^k -glatt mit dem Fußpunkt $p \in M$ variieren. Formal:

$$\omega \in \Omega_k^q(M) = C^k(M; \wedge^q T^*M).$$

In lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n in $U \subseteq M$:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} a_{i_1 \dots i_q}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}$$

mit $a_{i_1 \dots i_q} \in C^k(U; \mathbb{R})$.

Bemerkung. Rang des Vektorbündels $\wedge^q T^*M$ ist $\binom{n}{q}$, $0 \leq q \leq n$.

Wir kennen bereits zwei Operationen auf den Differenzialformen:

1. *Äußeres Produkt.* $\wedge: \Omega_k^q(M) \times \Omega_k^{q'}(M) \rightarrow \Omega_k^{q+q'}(M)$.

Hier gilt für $\omega \in \Omega_k^q(M)$, $\omega' \in \Omega_k^{q'}(M)$, dass

$$\omega \wedge \omega' = (-1)^{qq'} \omega' \wedge \omega$$

(siehe AGLA II).

2. *Pullback.* Eine C^{k+1} -Abbildung $f: M \rightarrow N$ induziert eine Abbildung $f^*: \Omega_k^q(N) \rightarrow \Omega_k^q(M)$ vermöge

$$(f^*\omega)_p(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_q) = \omega_{f(p)} \left((df)_p(\mathbf{t}_1), \dots, (df)_p(\mathbf{t}_q) \right)$$

für $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_q \in T_p M$.

Wir haben bereits gesehen:

Lemma 13.31. *Äußeres Produkt und Pullback sind verträglich, d. h.*

$$f^*(\omega \wedge \omega') = (f^*\omega) \wedge (f^*\omega')$$

für $\omega \in \Omega_k^q(M)$, $\omega' \in \Omega_k^{q'}(M)$.

Beispiel 13.32. Sei $\Phi: (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ gegeben durch $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} dx &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \\ dy &= \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

also beispielsweise

$$\begin{aligned} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} &= \frac{1}{r^2} [r \cos \varphi (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) \\ &\quad - r \sin \varphi (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi)] = d\varphi, \\ x dx + y dy &= r \cos \varphi (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi) \\ &\quad + r \sin \varphi (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) = r dr. \end{aligned}$$

Letzteres folgt auch durch Differentiation von $r^2 = x^2 + y^2$, also $2r dr = 2x dx + 2y dy$, während man im ersten Fall für $x \neq 0$, d. h. für $\varphi \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ mit einem eindeutigen $k \in \mathbb{Z}$, die Formel $\varphi = \arctan \frac{y}{x} + k\pi$ benutzen kann. Differentiation ergibt

$$d\varphi = \frac{\frac{dy}{x} - \frac{y dx}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Statt dessen hätte man auch die Beziehung $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ verwenden können. Im Fall $y \neq 0$ argumentiert man ähnlich, indem man statt des Tangens den Kotangens benutzt.

Bemerkung. Koordinatenwechsel in Differenzialformen sind tatsächlich ein Spezialfall der Pullback-Operation.

Das äußere Differenzial d verallgemeinert die Operation $d: C^{k+1}(M; \mathbb{R}) \rightarrow C^k(M; T^*M)$, $f \mapsto df$.

Definition 13.33. Sei $\omega \in C^k(M; \bigwedge^q T^*M)$,

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} a_{i_1 \dots i_q}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$$

in lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n . Dann definieren wir

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} da_{i_1 \dots i_q} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}.$$

Lemma 13.34. (i) d ist wohldefiniert als Abbildung

$$d: C^k(M; \bigwedge^q T^*M) \rightarrow C^{k-1}(M; \bigwedge^{q+1} T^*M).$$

(ii) Ist $\omega \in C^k(M; \bigwedge^q T^*M)$, $\omega' \in C^k(M; \bigwedge^{q'} T^*M)$, so gilt

$$d(\omega \wedge \omega') = (d\omega) \wedge \omega' + (-1)^q \omega \wedge (d\omega').$$

(iii) Ist $f: M \rightarrow N$ eine C^{k+1} -Abbildung, so gilt

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$$

für $\omega \in C^k(N; \bigwedge^q T^*N)$.

Beweis. Es genügt, (ii), (iii) im Spezialfall $M = U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $N = V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen zu zeigen. Koordinateninvarianz in (i) folgt dann aus (iii), wenn f ein Kartenwechsel ist.

(ii) Sei $\omega = a(x) dx^I$, $\omega' = b(x) dx^J$ mit $|I| = q$, $|J| = q'$. Dann

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \omega') &= d(a(x)b(x) dx^I \wedge dx^J) \\ &= d(ab) \wedge dx^I \wedge dx^J = (b da + a db) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (da \wedge dx^I) \wedge (b dx^J) + (-1)^q (a dx^I) \wedge (db \wedge dx^J) \\ &= (d\omega) \wedge \omega' + (-1)^q \omega \wedge (d\omega'). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $db \wedge dx^I = (-1)^q dx^I \wedge db$ benutzt.

(iii) Wir halten zuerst fest, dass $d^2h = 0$ für eine beliebige Funktion $h = h(x)$ gilt. In der Tat,

$$\begin{aligned} d^2h &= d\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial h}{\partial x^k} dx^k\right) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x^j \partial x^k} dx^j \wedge dx^k \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^k \partial x^j}\right) dx^j \wedge dx^k = 0. \end{aligned}$$

Somit haben wir für $\omega = b(y) dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_q}$, dass $f^*\omega = (f^*b)(x) df^{j_1} \wedge \dots \wedge df^{j_q}$ und daher mit (ii)

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= d(f^*b) \wedge df^{j_1} \wedge \dots \wedge df^{j_q} \\ &\quad + (f^*b) \sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} df^{j_1} \wedge \dots \wedge \underbrace{(d^2 f^{j_k})}_{=0} \wedge \dots \wedge df^{j_q} \\ &= f^*(db) \wedge f^* dy^{j_1} \wedge \dots \wedge f^* dy^{j_q} \\ &= f^*(db \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_q}) = f^*(d\omega). \end{aligned}$$

□

Satz 14.35. Für $\omega \in \Omega_k^q(M)$, $k \geq 2$ gilt

$$d^2\omega = 0.$$

Beweis. In lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n sei $\omega = a(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$. Dann ist $d\omega = da \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$. Da $d(\omega \wedge \omega') = (d\omega) \wedge \omega' + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge (d\omega')$ und $d^2h = 0$ für Funktionen h , so folgt $d^2\omega = 0$. □

14.3.2 Differenzialformen im \mathbb{R}^3

Wir setzen jetzt die neue Sprache der Differenzialformen zu klassischen Begriffsbildungen im \mathbb{R}^3 in Beziehung.

0-Formen und 3-Formen entsprechen *Funktionen*, 1-Formen und 2-Formen entsprechen *Vektorfeldern*. Sei ω_q für $q = 0, 1, 2, 3$ die generische q -Form, d. h.

$$\begin{aligned}\omega_0 &= f, \\ \omega_1 &= f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \\ \omega_2 &= g_1 dy \wedge dz + g_2 dz \wedge dx + g_3 dx \wedge dy, \\ \omega_3 &= g dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Dann schreiben sich die Differenziale $d: \Omega^q(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{R}^3)$ für $q = 0, 1, 2$ als

$$\begin{aligned}d\omega_0 &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz, \\ d\omega_1 &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \\ d\omega_2 &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

In klassischen Termen haben wir folglich:

$$\begin{aligned}d: \Omega^0(\mathbb{R}^3) &\rightarrow \Omega^1(\mathbb{R}^3) \quad \text{entspricht} \quad f \mapsto \nabla f, \\ d: \Omega^1(\mathbb{R}^3) &\rightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{entspricht} \quad X \mapsto \text{rot } X, \\ d: \Omega^2(\mathbb{R}^3) &\rightarrow \Omega^3(\mathbb{R}^3) \quad \text{entspricht} \quad X \mapsto \text{div } X.\end{aligned}$$

14.4 Orientierte Mannigfaltigkeiten

Erinnerung. Sei V ein n -dimensionaler linearer Raum über \mathbb{R} . Dann zerfällt die Menge der Basen e_1, \dots, e_n von V in zwei Klassen, wobei e_1, \dots, e_n und e'_1, \dots, e'_n zur selben Klasse gehören, falls die Basiswechselmatrix positive Determinante hat. V zu orientieren bedeutet die Wahl einer dieser beiden Klassen.

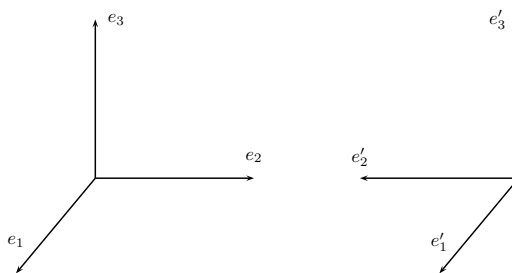


Abbildung 14.1: Rechts- und linkshändiges Koordinatensystem

Die Basen in der gewählten Klasse heißen *positiv orientiert*, die Basen in der anderen Klasse *negativ orientiert*.

In \mathbb{R}^n wählen wir immer die durch $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)^T$ gegebene Orientierung als *Standardorientierung*.

Sei jetzt M eine C^k -Mannigfaltigkeit.

Definition 14.36. (i) Man sagt, dass M *orientiert* ist, falls für jedes $p \in M$ in $T_p M$ in konsistenter Weise eine Orientierung gewählt wurde. Konsistent bedeutet, dass für jedes $p \in M$ Koordinaten x^1, \dots, x^n um p existieren, so dass $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ positiv orientiert ist.

(ii) Man sagt, dass M *orientierbar* ist, falls M orientiert werden kann. Andernfalls heißt M *nicht orientierbar*.

Definition 14.37. Wir definieren die *Orientierungsüberlagerung* $\text{Or}(M)$ von M wie folgt: Die Faser $\text{Or}(M)_p$ für $p \in M$ besteht aus den beiden möglichen Orientierungen von $T_p M$, die Monodromie

$$\text{Or}(M)_p \times \pi_1(M, p) \rightarrow \text{Or}(M)_p$$

transportiert eine gegebene Orientierung von $T_p M$ entlang eines geschlossenen Weges γ mit Anfangs- und Endpunkt p , indem γ mit einfach zusammenhängenden Kartenumgebungen überdeckt wird, in denen jeweils die Orientierung in konsistenter Weise gewählt werden kann.

Satz 14.38. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) M ist orientierbar.
- (ii) Es existiert ein Atlas von M , so dass sämtliche Kartenübergänge eine Jacobische mit positiver Determinante haben.
- (iii) $\text{Or}(M) \cong M \times \mathbb{Z}_2$ ist trivial.
- (iv) Es existiert eine n -Form $\omega \in C^0(M; \bigwedge^n T^* M)$, die auf M nirgends verschwindet.

Beweis. (i), (ii) und (iii) sind offenbar äquivalent.

(i) \Rightarrow (iv) Wir wählen eine Orientierung von M und überdecken M durch Kartenumgebungen U_i , $i \in I$, so dass es in jedem U_i Koordinaten x^1, \dots, x^n gibt, so dass $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ eine positiv orientierte Basis ist. Wir setzen dann $\omega_i = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ in U_i . Sei $\{\chi_i\}_{i \in I}$ eine der offenen Überdeckungen $\{U_i\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann hat die n -Form $\omega = \sum_i \chi_i \omega_i$ die verlangte Eigenschaft.

(iv) \Rightarrow (i) Sei umgekehrt ω eine nirgends verschwindende n -Form auf M . Wir erklären dann eine Basis e_1, \dots, e_n von $T_p M$ für positiv orientiert, falls $\omega_p(e_1, \dots, e_n) > 0$ gilt. Da ω_p in stetiger Weise vom Fußpunkt $p \in M$ abhängt, stellt dies eine konsistente Wahl der Orientierungen der Räume $T_p M$ dar.

□

Ein Atlas wie in (ii) heißt auch *orientiert*.

Weiterhin sagt man, dass die Wahl einer nirgends verschwindenden n -Form $\omega \in \Omega_0^n(M)$ die Mannigfaltigkeit M orientiert (in der im Beweisschritt (iv) \Rightarrow (i) angegebenen Weise). Jede andere n -Form, die M gleichartig orientiert, ist von der Form $a\omega$ mit $a \in C^0(M; \mathbb{R})$ und $a > 0$ überall in M .

Folgerung 14.39. (i) M ist genau dann orientierbar, wenn jede Zusammenhangskomponente von M orientierbar ist.

(ii) Ist M orientierbar und hat M l Zusammenhangskomponenten, so kann M auf 2^l verschiedene Weisen orientiert werden.

Beweis. (i) Offensichtlich.

(ii) Jede Zusammenhangskomponente von M kann auf zwei verschiedene Weisen orientiert werden.

□

Beispiel 14.40. (i) \mathbb{R}^n ist orientierbar.

(ii) \mathbb{S}^n ist orientierbar.

(iii) $\mathbb{R}P^2$ ist nicht orientierbar.

Beweis. (i) Man wählt die Standardorientierung.

(ii) Unten werden wir sehen, dass jede Mannigfaltigkeit, die eine offene Menge in \mathbb{R}^n berandet, orientierbar ist.

(iii) **Behauptung.** $\text{Or}(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{S}^2$.

\mathbb{S}^2 ist zusammenhängend und überlagert damit $\mathbb{R}P^2$ nicht trivial. Folglich ist $\mathbb{R}P^2$ nicht orientierbar.

Beweis der Behauptung. Ein halber Großkreis auf \mathbb{S}^2 wird unter der kanonischen Projektion $\pi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ auf eine geschlossene Kurve im $\mathbb{R}P^2$ abgebildet. Der Transport einer gegebenen Orientierung von $T_{\pi(p)}(\mathbb{R}P^2)$ entlang dieser Kurve kehrt die Orientierung von $T_{\pi(p)}(\mathbb{R}P^2)$ gerade um. \square

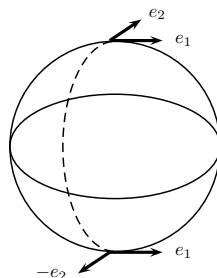


Abbildung 14.2: Transport der Orientierung entlang eines Großkreises

\square

Bemerkung. Die Orientierungsüberlagerung $\text{Or}(M)$ einer jeden Mannigfaltigkeit M ist kanonisch orientiert: Die kanonische Projektion $\pi: \text{Or}(M) \rightarrow M$ ist ein lokaler Diffeomorphismus, deshalb entsprechen die Basen in $T_p M$ für $p \in M$ und $T_q(\text{Or}(M))$ für $q \in \pi^{-1}(p)$ einander. Wir nennen dann eine Basis e_1, \dots, e_n von $T_q(\text{Or}(M))$ positiv orientiert, falls $(e_1, \dots, e_n) \in q$.

Für die Formulierung des Stokesschen Satzes benötigen wir noch, dass der Rand ∂M jeder orientierten Mannigfaltigkeit M mit Rand in kanonischer Weise orientiert ist:

Dazu erinnern wir an $T_p(\partial M) \subset T_p M$ für $p \in \partial M$ und daran, dass $T_p M \setminus T_p(\partial M)$ in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt, wobei die eine Komponente aus nach außen gerichteten Tangentialvektoren und die andere aus nach innen gerichteten Tangentialvektoren besteht.

Definition 14.41. Sei M orientiert. Dann heißt eine Basis e_1, \dots, e_{n-1} von $T_p(\partial M)$ für $p \in \partial M$ positiv orientiert, falls v, e_1, \dots, e_{n-1} eine positiv orientierte Basis von $T_p M$ für einen nach außen gerichteten Vektor $v \notin T_p(\partial M)$ ist.

Bemerkung. Diese Bedingung ist von der Wahl des Vektors v unabhängig. Jede andere Wahl eines derartigen Vektor v' schreibt sich als $v' = \alpha v + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_{n-1} e_{n-1}$ mit $\alpha > 0$, $\beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{R}$. Folglich

$$\det(v', e_1, \dots, e_{n-1}) = \alpha \det(v, e_1, \dots, e_{n-1}) > 0.$$

Beispiel 14.42. Betrachtet man eine einfache (keine Doppelpunkte enthaltende) geschlossene Kurve γ in \mathbb{R}^2 als Rand ihres Inneren, so wird γ auf diese Weise *mathematisch positiv* (d. h. entgegen dem Uhrzeigersinn) orientiert.

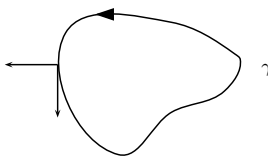


Abbildung 14.3: Eine mathematisch positiv orientierte ebene Kurve

14.5 Integration von n -Formen

14.5.1 Definition des Integrals

Sei M eine orientierte C^1 -Mannigfaltigkeit, $\dim M = n$, und sei $\omega \in \Omega_0^n(M)$ eine stetige n -Form auf M mit *kompaktem* Träger $\text{supp } \omega = \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}}$. Wir möchten das Integral $\int_M \omega$ definieren.

Bemerkung. Man kann eine Integrationstheorie für n -Formen in wesentlich größerer Allgemeinheit (für Riemann-integrierbare, absolut Riemann-integrierbare, Lebesgue-integrierbare, usw. Formen) entwickeln. Das soll uns hier nicht beschäftigen.

Wir wählen einen *orientierten Atlas* $\{U_i\}_{i \in I}$ von M , der aus Kartenumgebungen mit zugehörigen Karten (U_i, h_i) besteht, und eine untergeordnete Zerlegung $\{\chi_i\}_{i \in I}$ der Eins.

Definition 14.43. Wir setzen

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{h_i(U_i)} (h_i^{-1})^* (\chi_i \omega).$$

Da $\chi_i \omega = 0$ für fast alle i ist (d. h. mit Ausnahme endlich vieler i), steht auf der rechten Seite tatsächlich eine endliche Summe. Wir müssen zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der (U_i, h_i) , χ_i ist.

Lemma 14.44. *Das Integral $\int_M \omega$ ist wohldefiniert.*

Beweis. 1. Schritt. Sei zuerst $U \subseteq M$ eine offene Menge mit Koordinaten $x = (x^1, \dots, x^n)$ und $y = (y^1, \dots, y^n)$, so dass $\det \frac{\partial y}{\partial x} > 0$ in U gilt. Weiterhin sei $\text{supp } \omega \subseteq U$ sowie

$$\omega = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = g(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
 dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n &= \left(\sum_{i_1=1}^n \frac{\partial y^1}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} \right) \wedge \left(\sum_{i_2=1}^n \frac{\partial y^2}{\partial x^{i_2}} dx^{i_2} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_n=1}^n \frac{\partial y^n}{\partial x^{i_n}} dx^{i_n} \right) \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \frac{\partial y^1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^n}{\partial x^{i_n}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \\
 &= \sum_{\sigma \in \gamma_n} \operatorname{sgn} \sigma \frac{\partial y^1}{\partial x^{\sigma_1}} \cdots \frac{\partial y^n}{\partial x^{\sigma_n}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\
 &= \det \frac{\partial(y^1, \dots, y^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.
 \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$f(x) = g(y) \det \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{y=y(x)}.$$

Die obige Definition gibt uns nun zwei verschiedene Möglichkeiten $\int_M \omega$ in diesem Fall zu berechnen, nämlich als $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ und als $\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy$. Es gilt jedoch

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y(x)) \left| \det \frac{\partial y}{\partial x}(x) \right| dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

wegen $\det \frac{\partial y}{\partial x} > 0$, so dass beide Möglichkeiten dasselbe Ergebnis liefern.

2.Schritt. Unabhängigkeit von der Wahl der (U_i, h_i) , χ_i unter Benutzung von Schritt 1 zeigt man jetzt wie im Beweis von Lemma 11.56 im Skript zur Diff II. \square

14.5.2 Der Satz von Stokes

Wir haben nun sämtliche Zutaten zusammen, um den wichtigen Satz von Stokes zu formulieren und zu beweisen. Der Satz von Stokes verallgemeinert den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und die partielle Integration auf den Fall der Integration auf Mannigfaltigkeiten. Den Beweis des Satzes von Stokes werden wir auf den Satz von Gauß zurückführen.

Sei also M eine berandete und orientierte C^2 -Mannigfaltigkeit, $\dim M = n \geq 1$, der Rand ∂M trage seine kanonische Orientierung und es sei $\omega \in \Omega_1^{n-1}(M)$ mit $\operatorname{supp} \omega \subseteq M$ kompakt.

Theorem 14.45 (Satz von Stokes). *Unter diesen Voraussetzungen gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Bemerkung. Hierbei ist $\int_{\partial M} \omega$ als $\int_{\partial M} \omega|_{\partial M}$ zu lesen, wobei $\omega|_{\partial M} = i^* \omega$ für die kanonische Einbettung $i: \partial M \rightarrow M$.

Beweis. 1.Schritt. Sei $U \subseteq M$ offen mit Koordinaten $x = (x^1, \dots, x^n)$ und $\text{supp } \omega \subseteq U$. Weiterhin sei

$$\omega = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

wobei $\widehat{dx^j}$ bedeutet, dass der entsprechende Faktor auszulassen ist, also

$$dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^n da_j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Der Faktor vor $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ ist dabei gerade die Divergenz eines Vektorfeldes. Folglich

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_U d\omega = \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x^j} \right) dx \\ &= \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} (a_1, -a_2, \dots, (-1)^{n-1} a_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx' \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_n(x', 0) dx'. \end{aligned}$$

Hier haben wir $\partial \mathbb{R}_+^n$ mit \mathbb{R}^{n-1} identifiziert und $x' = (x^1, \dots, x^{n-1})$ geschrieben. Andererseits gilt

$$\omega|_{\partial M} = a_n(x', 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$$

und wegen der gewählten Orientierung von ∂M

$$\int_{\partial M} \omega = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_n(x', 0) dx'.$$

Das beweist den Satz von Stokes in diesem Spezialfall.

2.Schritt. Sei nun $\omega \in \Omega_0^{n-1}(M)$ eine allgemeine Form mit kompaktem Träger. Die (U_i, h_i) und χ_i seien wie in der Definition des Integrals einer Form gewählt. Dann gilt mit Schritt 1

$$\int_M d\omega = \sum_i \int_{U_i} d(\chi_i \omega) = \sum_i \int_{U_i \cap \partial M} \chi_i \omega = \int_{\partial M} \omega,$$

wobei wir benutzen, dass mit $I_0 = \{i \in I \mid U_i \cap \partial M \neq \emptyset\}$ die Familie $\{U_i \cap \partial M\}_{i \in I_0}$ eine offene Überdeckung von ∂M mit Kartenumgebungen und zugehörigen orientierten Karten $(U_i \cap \partial M, h_i|_{U_i \cap \partial M})$ für $i \in I_0$ und $\{\chi_i|_{U_i \cap \partial M}\}_{i \in I_0}$ eine zugehörige Zerlegung der Eins ist. \square

Folgerung 14.46. Gilt $\text{supp } \omega \cap \partial M = \emptyset$ (insbesondere im Fall $\partial M = \emptyset$), so ist

$$\int_M d\omega = 0.$$

Kapitel 15

De Rham-Kohomologie

15.1 Das Poincaré-Lemma

Ab sofort sind Mannigfaltigkeiten, Formen, usw. stets von der Klasse C^∞ .

Definition 15.1. (i) Eine Form $\omega \in \Omega^q(M)$ heißt *geschlossen*, falls $d\omega = 0$ gilt.

(ii) Eine Form $\omega \in \Omega^q(M)$ mit $q > 0$ heißt *exakt*, falls $\omega = d\eta$ für ein $\eta \in \Omega^{q-1}(M)$ gilt. η heißt dann eine *Stammform* von ω .

(iii) Eine Form $\omega \in \Omega^q(M)$ mit $q > 0$ heißt *lokal exakt*, falls jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung U besitzt, in der ω exakt ist (d. h. es gibt ein $\eta \in \Omega^{q-1}(U)$ mit $\omega|_U = d\eta$).

Offenbar gilt (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i) (im Fall $q > 0$). Eine Folgerung des Poincaré-Lemmas wird sein, dass (i), (iii) tatsächlich äquivalent sind.

Satz 15.2 (Poincaré). *Sei die Mannigfaltigkeit M auf einen Punkt zusammenziehbar, d. h. es gibt eine Abbildung $H: [0, 1] \times M \rightarrow M$ mit $H(0, \cdot) = \text{konst.}$ und $H(1, \cdot) = \text{id}_M$. Dann ist jede geschlossene Form $\omega \in \Omega^q(M)$ mit $q > 0$ exakt.*

Beispiel 15.3. Sternförmige Gebiete $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sind auf einen Punkt zusammenziehbar. Dabei heißt Ω *sternförmig*, falls es ein $x^0 \in \Omega$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ gibt es ein $t_\omega > 0$ ($t_\omega = \infty$ ist möglich) mit $(-x^0 + \Omega) \cap \overline{\mathbb{R}_+\omega} = [0, t_\omega)\omega$. Insbesondere ist \mathbb{R}^n bezüglich eines jeden seiner Punkte sternförmig.

Ist Ω sternförmig bezüglich x^0 , so können wir $H(s, x) = x^0 + s(x - x^0)$ als Abbildung $H: [0, 1] \times \Omega \rightarrow \Omega$ wählen.

Beweis des Poincaré-Lemmas. Wir schreiben q -Formen Ω auf $[0, 1] \times M$ als

$$\Omega = \Omega' + ds \wedge E,$$

wobei $\Omega' \in C^\infty([0, 1]; \Omega^q(M))$, $E \in C^\infty([0, 1]; \Omega^{q-1}(M))$. Ist in lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n in M

$$\Omega = \sum_{|I|=q} a_I(s, x) dx^I + \sum_{|J|=q-1} b_J(s, x) ds \wedge dx^J,$$

so ist

$$\Omega' = \sum_{|I|=q} a_I(s, x) dx^I, \quad E = \sum_{|J|=q-1} b_J(s, x) ds \wedge dx^J.$$

Dann gilt

$$d\Omega = d_M \Omega + ds \wedge \frac{\partial \Omega'}{\partial s},$$

wobei d_M Differenziation in Richtung der x -Variablen ist¹ und in lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n in M

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial s} = \sum_{|I|=q} \frac{\partial a_I}{\partial s}(s, x) dx^I.$$

Sei nun $\omega \in \Omega^q(M)$. Wir schreiben $H^*\omega$ ($= \sum_{|I|=q} a_I(H(s, x)) dH^{i_1} \wedge \dots \wedge dH^{i_q}$, falls $\omega = \sum_{|I|=q} a_I(x) dx^I$ in lokalen Koordinaten) als

$$H^*\omega = \Omega' + ds \wedge E$$

wie oben und definieren

$$I^q \omega = \int_0^1 E(s, \cdot) ds.$$

Dann gilt $I^q \omega \in \Omega^{q-1}(M)$.

Behauptung. Es gilt $I^{q+1}d + dI^q = \text{id}_{\Omega^q(M)}$.

$$\begin{array}{ccc} & \Omega^q(M) & \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(M) \\ & \swarrow I_q & \searrow I^{q+1} \\ \Omega^{q-1}(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^q(M) \end{array}$$

Beweis der Behauptung. Wir berechnen

$$\begin{aligned} H^* d\omega &= dH^*\omega = d(\Omega' + ds \wedge E) \\ &= d\Omega' - ds \wedge dE = d_M \Omega' + ds \wedge \frac{\partial \Omega'}{\partial s} - ds \wedge d_M E, \end{aligned}$$

also

$$I^{q+1} d\omega = \int_0^1 \frac{\partial \Omega'}{\partial s} ds - \int_0^1 d_M E ds.$$

¹Bezüglich des gegebenen „Splitting“ $[0, 1] \times M$.

Andererseits

$$dI^q\omega = d \int_0^1 E ds = d_M \int_0^1 E ds = \int_0^1 d_M E ds$$

und folglich

$$\begin{aligned} I^{q+1} d\omega + dI^q\omega &= \int_0^1 \frac{\partial \Omega'}{\partial s} ds = \Omega'(1, \cdot) - \Omega'(0, \cdot) \\ &= i_1^* H^* \omega - i_0^* H^* \omega = (Hi_1)^* \omega - (Hi_0)^* \omega = \omega, \end{aligned}$$

wobei $i_s: M \rightarrow [0, 1] \times M$, $p \mapsto (s, p)$ für $s \in [0, 1]$. \square

Sei schließlich $\omega \in \Omega^q(M)$, $d\omega = 0$. Dann

$$\omega = I^{q+1} d\omega + dI^q\omega = d(I^q\omega),$$

und ω ist exakt. \square

Folgerung 15.4. Jede geschlossene Form $\omega \in \Omega^q(M)$ mit $q > 0$ ist lokal exakt.

Beweis. Jedes $p \in U$ besitzt eine Umgebung, die diffeomorph zur Einheitskugel ist. \square

15.2 Die graduierte Algebra $H_{\text{DR}}^*(M)$

Erinnerung. Eine Algebra A über \mathbb{R} heißt *graduiert*, falls A in der Form $A = \bigoplus_{q=0}^{\infty} A^q$ mit \mathbb{R} -linearen Teilräumen A^q von A gegeben ist und die Multiplikation in A diese Graduierung respektiert, d. h. $ab \in A^{q+q'}$ folgt aus $a \in A^q$, $b \in A^{q'}$.

Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Wir betrachten den *de Rham-Komplex*

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \rightarrow 0,$$

wobei das Wort „Komplex“ sich auf die Eigenschaft $d^2 = 0$ des Differential d bezieht.

Seien

$$Z^q(M) = \{\omega \in \Omega^q(M) \mid d\omega = 0\} = \ker d^q$$

der Raum der geschlossenen q -Formen und

$$B^q(M) = \{d\eta \mid \eta \in \Omega^{q-1}(M)\} = \text{im } d^{q-1}$$

der Raum der exakten q -Formen, wobei wir $d = d^q: \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^{q+1}(M)$ geschrieben haben.

Definition 15.5. Wir setzen

$$H_{\text{dR}}^q(M) = Z^q(M)/B^q(M), \quad q \geq 0,$$

$$H_{\text{dR}}^*(M) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} H_{\text{dR}}^q(M) = \bigoplus_{q=0}^n H_{\text{dR}}^q(M).$$

$H_{\text{dR}}^q(M)$ heißt die q -te de Rham-Kohomologiegruppe von M . Tatsächlich ist $H_{\text{dR}}^q(M)$ ein linearer Raum über \mathbb{R} .

Bemerkung. Seien M_i für $i \in I$ die Zusammenhangskomponenten von M . Dann gilt

$$H_{\text{dR}}^q(M) = \bigoplus_{i \in I} H_{\text{dR}}^q(M_i).$$

Deswegen dürfen wir im Weiteren o. B. d. A. annehmen, dass M zusammenhängend ist.

Beispiel 15.6. Ist M zusammenhängend, so ist

$$Z^0(M) = \{f: M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist konstant}\}, \quad B^0(M) = 0,$$

wobei 0 den trivialen \mathbb{R} -linearen Raum bezeichnet, also

$$H_{\text{dR}}^0(M) = Z^0(M)/B^0(M) \cong \mathbb{R}.$$

Lemma 15.7. *Es gilt*

$$H_{\text{dR}}^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & q = 0, \\ 0, & q > 0. \end{cases}$$

Beweis. Dies ist eine äquivalente Formulierung des Poincaré-Lemmas für den \mathbb{R}^n . \square

Lemma 15.8. *Es gilt*

$$H_{\text{dR}}^q(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & q = 0, 1, \\ 0, & q \geq 2. \end{cases}$$

Beweis. Lediglich $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1)$ müssen wir noch berechnen. Dazu stellen wir fest, dass eine 1-Form $\omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ genau dann exakt ist, wenn $\int_{\mathbb{S}^1} \omega = 0$ gilt. Gemäß Satz 14.10 ist diese Bedingung notwendig; sie ist auch hinreichend, da dann offenbar die Funktion $F: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(p) = \int_{\widehat{p^0 p}} \omega$ für ein beliebiges $p^0 \in \mathbb{S}^1$ eine Stammfunktion von ω ist, wobei $\widehat{p^0 p}$ das orientierte Kurvenstück auf \mathbb{S}^1 von p^0 nach p bezeichnet.

Andererseits ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} (x dy - y dx) = 1$$

(hier ist \mathbb{S}^1 in der üblichen Weise in \mathbb{R}^2 eingebettet, x, y sind Euklidische Koordinaten in \mathbb{R}^2).

Folglich ist die kurze Sequenz

$$0 \rightarrow B^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow Z^1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{f_{\mathbb{S}^1}} \mathbb{R} \rightarrow 0$$

exakt und wir erhalten

$$H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) = Z^1(\mathbb{S}^1)/B^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}.$$

□

Satz 15.9. *Das äußere Produkt induziert eine wohldefinierte Operation*

$$\begin{aligned} H_{\text{dR}}^q(M) \times H_{\text{dR}}^{q'}(M) &\longrightarrow H_{\text{dR}}^{q+q'}(M), \\ [\omega], [\omega'] &\mapsto [\omega] \cup [\omega'] = [\omega \wedge \omega'], \end{aligned}$$

bezüglich der $H_{\text{dR}}^*(M)$ zu einer graduierten Algebra wird.

Beweis. Wir müssen $\wedge: Z^q(M) \times Z^{q'}(M) \rightarrow Z^{q+q'}(M)$ und $\wedge: Z^p(M) \times B^{q'}(M) \rightarrow B^{q+q'}(M)$ (bzw. $\wedge: B^q(M) \times Z^{q'}(M) \rightarrow B^{q+q'}(M)$) zeigen.

(i) Seien $\omega \in \Omega^q(M)$, $\omega' \in \Omega^{q'}(M)$ und $d\omega = 0$, $d\omega' = 0$. Dann

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \omega') &= (d\omega) \wedge \omega' + (-1)^q \omega \wedge (d\omega') \\ &= 0 \wedge \omega' + (-1)^q \omega \wedge 0 = 0, \end{aligned}$$

also $\omega \wedge \omega' \in Z^{q+q'}(M)$.

(ii) Seien $\omega \in \Omega^q(M)$, $\eta' \in \Omega^{q'-1}(M)$ und $d\omega = 0$. Dann

$$\omega \wedge d\eta' = d((-1)^q \omega \wedge \eta'),$$

also $\omega \wedge d\eta' \in B^{q+q'}(M)$.

□

Definition 15.10. $\cup: H_{\text{dR}}^*(M) \times H_{\text{dR}}^*(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^*(M)$ heißt das *cup-Produkt*.

Beispiel 15.11. Das cup-Produkt auf $H_{\text{dR}}^*(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$(a, b) \cup (c, d) = (ac, ad + bc)$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. (i) $H_{\text{dR}}^*(M)$ ist eine Algebra mit Einheit. Die Einheit ist die Klasse $[1] \in H_{\text{dR}}^0(M)$ der Funktion konstant 1.

(ii) $H_{\text{dR}}^*(M)$ ist *graduiert-kommutativ* in dem Sinne, dass

$$[\omega] \cup [\omega'] = (-1)^{qq'} [\omega'] \cup [\omega]$$

für $[\omega] \in H_{\text{dR}}^q(M)$, $[\omega'] \in H_{\text{dR}}^{q'}(M)$.

Satz 15.12. Sei $f: M \rightarrow N$ eine C^∞ -Abbildung. Dann induziert $f^*: \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ einen Homomorphismus $f^*: H_{\text{dR}}^*(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^*(M)$ graduierter Algebren.

Beweis. Da wir bereits $f^*(\omega \wedge \omega') = (f^*\omega) \wedge (f^*\omega')$ für $\omega \in \Omega^q(N)$, $\omega' \in \Omega^{q'}(N)$ wissen, bleibt $f^*(Z^q(N)) \subseteq Z^q(M)$ und $f^*(B^q(N)) \subseteq B^q(M)$ zu zeigen.

(i) Sei $\omega \in \Omega^q(N)$, $d\omega = 0$. Dann

$$df^*\omega = f^*d\omega = 0,$$

also $f^*\omega \in Z^q(M)$.

(ii) Sei $\eta \in \Omega^{q-1}(N)$. Dann

$$f^*(d\eta) = df^*\eta,$$

also $f^*(d\eta) \in B^q(M)$.

□

Wir verallgemeinern jetzt das Argument, das zum Beweis des Poincaré-Lemmas führte.

Satz 15.13. Seien $f, g: M \rightarrow N$ C^∞ -Abbildungen und sei $H: [0, 1] \times M \rightarrow N$ eine C^∞ -Homotopie zwischen f, g , d. h. es gilt $H(1, \cdot) = f$, $H(0, \cdot) = g$. Dann gilt

$$f^* = g^*: H_{\text{dR}}^q(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^q(M)$$

für alle $q = 0, 1, \dots$

Beweis. Wie im Beweis des Poincaré-Lemmas konstruieren wir die Abbildung $I^q: \Omega^q(N) \rightarrow \Omega^{q-1}(M)$, indem wir für $\omega \in \Omega^q(N)$

$$H^*\omega = \Omega' + ds \wedge E$$

mit $\Omega' \in C^\infty([0, 1]; \Omega^q(M))$, $E \in C^\infty([0, 1]; \Omega^{q-1}(M))$ schreiben und dann

$$I^q\omega = \int_0^1 E(s, \cdot) ds$$

setzen. Wie im Beweis des Poincaré-Lemmas erhalten wir

$$I^{q+1}d\omega + dI^q\omega = \int_0^1 \frac{\partial \Omega'}{\partial s}(s, \cdot) ds = \Omega'(1, \cdot) - \Omega'(0, \cdot).$$

Jetzt gilt $\Omega'(s, \cdot) = i_s^*H^*\omega = (Hi_s)^*\omega$ mit $i_s: M \rightarrow [0, 1] \times M$, $p \mapsto (s, p)$. Insbesondere $\Omega'(1, \cdot) = f^*\omega$, $\Omega'(0, \cdot) = g^*\omega$ und damit

$$I^{q+1}d\omega + dI^q\omega = f^*\omega - g^*\omega.$$

Gilt schließlich $d\omega = 0$, so ist $f^*\omega - g^*\omega = d(I^q\omega) \in B^q(M)$, also $f^*[\omega] = g^*[\omega]$. □

Folgerung 15.14. Sind M, N C^∞ -homotopie-äquivalent, d. h. gibt es C^∞ -Abbildungen $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow M$ mit $g \circ f \approx \text{id}_M$, $f \circ g \approx \text{id}_N$, wobei \approx die C^∞ -Homotopie von Abbildungen meint, so haben M, N die gleiche de Rham-Kohomologie, d. h. es gilt $H_{\text{dR}}^*(M) \cong H_{\text{dR}}^*(N)$ als graduierte Algebren. Tatsächlich

$$f^* g^* = \text{id}_{H_{\text{dR}}^*(M)}, \quad g^* f^* = \text{id}_{H_{\text{dR}}^*(N)}.$$

Beweis. Es gilt

$$\text{id}_{H_{\text{dR}}^*(M)} = (\text{id}_M)^* = (g \circ f)^* = f^* g^*,$$

analog für die zweite Beziehung. \square

Beispiel 15.15. Es gilt $H_{\text{dR}}^*(M \times \mathbb{R}^l) \cong H_{\text{dR}}^*(M)$ für alle $l = 0, 1, 2, \dots$

Beweis. Wir behaupten, dass $f: M \times \mathbb{R}^l \rightarrow M$, $(p, t) \mapsto p$ und $g: M \rightarrow M \times \mathbb{R}^l$, $p \mapsto (p, 0)$ Homotopie-Äquivalenzen wie in der Folgerung sind. Tatsächlich $f \circ g = \text{id}_M$, während $g \circ f$ zu $\text{id}_{M \times \mathbb{R}^l}$ vermöge der Abbildung

$$H: [0, 1] \times M \times \mathbb{R}^l \rightarrow M \times \mathbb{R}^l, \quad (s, p, t) \mapsto (p, st)$$

homotop ist. Die Folgerung liefert das Ergebnis. \square

15.3 Die Mayer-Vietoris-Sequenz

Wir werden jetzt ein starkes technisches Hilfsmittel zur Berechnung der de Rham-Kohomologie kennen lernen. Insbesondere werden wir $H_{\text{dR}}^*(\mathbb{S}^n)$ berechnen.

15.3.1 Die Kohomologie eines Komplexes

Wir erinnern daran, dass ein *Komplex* A eine Folge von linearen Räumen A^q (in unserem Fall über \mathbb{R}) und linearen Abbildungen $d = d_A^q: A^q \rightarrow A^{q+1}$,

$$0 \rightarrow A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} A^2 \xrightarrow{d} \dots,$$

mit $d^2 = d_A^{q+1} \circ d_A^q = 0$ ist. Man kann dann in üblicher Weise die *Kohomologie* $H^*(A) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} H^q(A)$ dieser Komplexe vermöge

$$H^q(A) = Z^q(A)/B^q(A)$$

mit

$$Z^q(A) = \{a \in A^q \mid da = 0\}, \quad B^q(A) = \{da' \mid a' \in A^{q-1}\}$$

definieren. Wie zuvor misst der lineare Raum $H^q(A)$, inwieweit die *Exaktheit des Komplexes A an der Stelle A^q verletzt ist*. ($H^q(A) = 0$ bedeutet gerade, dass der Komplex A an der Stelle A^q exakt ist.)

Definition 15.16. Seien A, B zwei Komplexe. Dann ist eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ zwischen diesen Komplexen eine Folge $f^q: A^q \rightarrow B^q$ linearer Abbildungen, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^0 & \xrightarrow{d_A} & A^1 & \xrightarrow{d_A} & A^2 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow f^0 & & \downarrow f^1 & & \downarrow f^2 \\ 0 & \longrightarrow & B^0 & \xrightarrow{d_B} & B^1 & \xrightarrow{d_B} & B^2 \longrightarrow \dots \end{array}$$

Lemma 15.17. $f: A \rightarrow B$ induziert eine Abbildung $f: H^*(A) \rightarrow H^*(B)$ graduierter Vektorräume.

Beweis. Wir müssen $f(Z^q(A)) \subseteq Z^q(B)$ und $f(B^q(A)) \subseteq B^q(B)$ zeigen.

(i) Sei $a \in A^q$, $da = 0$. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^q & \xrightarrow{d} & A^{q+1} \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ B^q & \xrightarrow{d} & B^{q+1} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(a) & \longrightarrow & df(a) = 0 \end{array}$$

erhalten wir $df(a) = 0$.

(ii) Sei $a = da'$, $a' \in A^{q-1}$. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^{q-1} & \xrightarrow{d} & A^q \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ B^{q-1} & \xrightarrow{d} & B^q \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} a' & \longrightarrow & a \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(a') & \longrightarrow & df(a') = f(a) \end{array}$$

erhalten wir $f(a) = df(a')$.

□

Definition 15.18. Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ Abbildungen zwischen Komplexen. Dann heißt die kurze Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

exakt, falls in folgendem Diagramm die Vertikalen exakt sind:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A^0 & \xrightarrow{d_A} & A^1 & \xrightarrow{d_A} & A^2 \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f \\
 0 & \longrightarrow & B^0 & \xrightarrow{d_B} & B^1 & \xrightarrow{d_B} & B^2 \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow g \\
 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{d_C} & C^1 & \xrightarrow{d_C} & C^2 \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Satz 15.19. Eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ von Komplexen induziert eine lange exakte Sequenz in der Kohomologie:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & H^0(A) & \xrightarrow{f} & H^0(B) & \xrightarrow{g} & H^0(C) \\
 & & & & \searrow & & \searrow \\
 & & H^1(A) & \xrightarrow{f} & H^1(B) & \xrightarrow{g} & H^1(C) \\
 & & & & \searrow & & \searrow \\
 & & H^2(A) & \xrightarrow{f} & H^2(B) & \xrightarrow{g} & H^2(C) \\
 & & & & \searrow & & \searrow \\
 & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

Beweis. Wir definieren den *Verbindungshomomorphismus* $\delta: H^q(C) \rightarrow H^{q+1}(A)$ wie folgt: Wir wählen $c \in C^q$ mit $dc = 0$ und schauen auf folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & A^{q+1} & \longrightarrow & A^{q+2} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 B^q & \longrightarrow & B^{q+1} & \longrightarrow & B^{q+2} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C^q & \longrightarrow & C^{q+1} & & \\
 \downarrow & & & & \\
 0 & & & &
 \end{array}
 \quad , \quad
 \begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & a & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow \\
 b & \longrightarrow & db & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \\
 c & \longrightarrow & 0 & & \\
 \downarrow & & & & \\
 0 & & & &
 \end{array}$$

Wegen der Surjektivität von g^q existiert ein $b \in B^q$ mit $g(b) = c$. Wir haben $g(db) = dg(b) = dc = 0$, also $db \in \ker g^{q+1} = \text{im } f^{q+1}$. Folglich existiert ein

$a \in A^{q+1}$ mit $f(a) = db$. Wegen $f(da) = df(a) = d^2b = 0$ und der Injektivität von f ist $da = 0$, also $a \in Z^{q+1}(A)$. Wir definieren dann

$$\delta[c] = [a].$$

Wir müssen zeigen, dass δ wohldefiniert und die entstehende lange Kohomologiesequenz exakt ist. Wir erledigen nur ersteres und verweisen für die Exaktheit auf die Literatur.² Sei also $\tilde{b} \in B^q$ und $g(\tilde{b}) = c$. Dann ist $g(b - \tilde{b}) = 0$, also $b - \tilde{b} \in \ker g = \operatorname{im} f$ und es existiert ein $a' \in A^q$ mit $f(a') = b - \tilde{b}$. Damit $d(b - \tilde{b}) = df(a') = f(da')$. Ist also $f(\tilde{a}) = d\tilde{b}$, so haben wir wegen der Injektivität von f , dass $a - \tilde{a} = da'$, also $[a] = [\tilde{a}]$ und $\delta[c] = [a]$ ist korrekt definiert. \square

15.3.2 Die lange exakte Kohomologiesequenz

Seien jetzt $U, V \subseteq M$ offen mit $M = U \cup V$. Unter dieser Bedingung definieren wir eine kurze exakte Sequenz von Komplexen:

Satz 15.20 (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Die kurze Sequenz*

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{-j_U^* + j_V^*} \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0$$

ist exakt. Hierbei sind $i_U: U \rightarrow M$, $i_V: V \rightarrow M$, $j_U: U \cap V \rightarrow U$ und $j_V: U \cap V \rightarrow V$ die jeweiligen Einbettungen.

Beweis. Die Exaktheit der Sequenz in $\Omega^*(M)$ und in $\Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$ ist offensichtlich. Wir überprüfen die Surjektivität der Abbildung $\Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \rightarrow \Omega^*(U \cap V)$, $(\omega, \omega') \mapsto -j_U^*\omega + j_V^*\omega'$. Sei dazu $\eta \in \Omega^*(U \cap V)$ und sei $\{h, h'\}$ eine der Überdeckung $\{U, V\}$ von M untergeordnete Zerlegung der Eins. Wir definieren dann

$$\omega = \begin{cases} -h'\eta & \text{in } U \cap V, \\ 0 & \text{in } U \setminus V, \end{cases} \quad \omega' = \begin{cases} h\eta & \text{in } U \cap V, \\ 0 & \text{in } V \setminus U. \end{cases}$$

Dann ist $\omega \in \Omega^*(U)$, $\omega' \in \Omega^*(V)$ sowie

$$-j_U^*\omega + j_V^*\omega' = (h' + h)\eta = \eta.$$

\square

Die Ergebnisse des vorigen Unterabschnitts führen zu:

Satz 15.21. *Wir haben die lange exakte Sequenz*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_{\text{dR}}^0(M) & \longrightarrow & H_{\text{dR}}^0(U) \oplus H_{\text{dR}}^0(V) & \longrightarrow & H_{\text{dR}}^0(U \cap V) \hookrightarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H_{\text{dR}}^1(M) & \longrightarrow & H_{\text{dR}}^1(U) \oplus H_{\text{dR}}^1(V) & \longrightarrow & H_{\text{dR}}^1(U \cap V) \hookrightarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H_{\text{dR}}^2(M) & \longrightarrow & H_{\text{dR}}^2(U) \oplus H_{\text{dR}}^2(V) & \longrightarrow & H_{\text{dR}}^2(U \cap V) \hookrightarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

²Zum Beispiel auf S. MacLane "Homology", Springer, New York, 1967 oder (fast) jedes andere Lehrbuch der Algebraischen Topologie.

15.3.3 Die Kohomologie der Sphäre

Als Beispiel berechnen wir $H_{\text{dR}}^*(\mathbb{S}^n)$.

Satz 15.22. Für $n \geq 1$ gilt

$$H_{\text{dR}}^q(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & q = 0, n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wir benutzen die Mayer-Vietoris-Sequenz mit $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, $V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. Dann $U \approx \mathbb{R}^n$, $V \approx \mathbb{R}^n$, $U \cap V \approx \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Weiterhin dürfen wir $1 \leq q \leq n$ annehmen.

(i) Wir berechnen zuerst $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^n)$.

(a) $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$ wissen wir bereits, erhalten wir aber nochmals wie folgt:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H_{\text{dR}}^0(U) \oplus H_{\text{dR}}^0(V) \longrightarrow H_{\text{dR}}^0(U \cap V) \longrightarrow \\ \longrightarrow H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H_{\text{dR}}^1(U) \oplus H_{\text{dR}}^1(V) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

ergibt die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0.$$

Die beiden Glieder mit $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ haben jeweils eindimensionalen Kern und eindimensionales Bild, also $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$.

(b) Sei $n \geq 2$. Mit demselben Abschnitt der Mayer-Vietoris-Sequenz erhalten wir (da \mathbb{S}^{n-1} für $n \geq 2$ zusammenhängend ist)

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0.$$

Diese Sequenz ist im dritten Glied surjektiv, also $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^n) \cong 0$.

(ii) Sei nun $q \geq 2$. Dann schauen wir auf die exakte Sequenz

$$H_{\text{dR}}^{q-1}(U) \oplus H_{\text{dR}}^{q-1}(V) \longrightarrow H_{\text{dR}}^{q-1}(U \cap V) \longrightarrow H_{\text{dR}}^q(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_{\text{dR}}^q(U) \oplus H_{\text{dR}}^q(V).$$

Also ist

$$0 \longrightarrow H_{\text{dR}}^{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow H_{\text{dR}}^q(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0$$

exakt und somit $H_{\text{dR}}^q(\mathbb{S}^n) \cong H_{\text{dR}}^{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} H_{\text{dR}}^q(\mathbb{S}^n) &\cong \begin{cases} H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^{n-q+1}), & 1 \leq q < n, \\ H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1), & q = n, \end{cases} \\ &\cong \begin{cases} 0, & 1 \leq q < n, \\ \mathbb{R}, & q = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. \square

15.4 Endlich-Dimensionalität der de Rham-Kohomologie

Wir werden jetzt zeigen, dass insbesondere kompakte Mannigfaltigkeiten eine endlich-dimensionale de Rham-Kohomologie haben.

Definition 15.23. (i) Eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ einer Mannigfaltigkeit heißt *gut*, falls alle endlichen Durchschnitte $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_l}$ entweder leer oder diffeomorph zum \mathbb{R}^n sind.

(ii) Eine Mannigfaltigkeit M heißt vom *endlichen Typ*, falls M eine *endliche gute Überdeckung* besitzt.

Satz 15.24. (i) *Jede Mannigfaltigkeit besitzt eine gute Überdeckung.*

(ii) *Kompakte Mannigfaltigkeiten sind vom endlichen Typ.*

Beweis. Im Abschnitt über Riemannsche Metriken. □

Wir benötigen das folgende Resultat:

Lemma 15.25. *Haben $U, V, U \cap V$ endlich-dimensionale de Rham-Kohomologie, so auch $U \cup V$.*

Beweis. Wir betrachten den Abschnitt der langen exakten Kohomologiesequenz

$$\dots \longrightarrow H_{\text{dR}}^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H_{\text{dR}}^q(U \cup V) \xrightarrow{i^*} H_{\text{dR}}^q(U) \oplus H_{\text{dR}}^q(V) \longrightarrow \dots$$

Aus der Exaktheit folgt

$$H_{\text{dR}}^q(U \cup V) \cong \ker i^* \oplus \text{im } i^* = \text{im } \delta^* \oplus \text{im } i^*.$$

Damit ist $H_{\text{dR}}^q(U \cup V)$ endlich-dimensional. □

Satz 15.26. *Jede Mannigfaltigkeit vom endlichen Typ hat endlich-dimensionale de Rham-Kohomologie.*

Beweis. Mittels Induktion über die Länge l einer guten Überdeckung.

Induktionsanfang $l = 1$. Klar.

Induktionsschritt $l \rightarrow l + 1$. Sei $\{U_0, U_1, \dots, U_l\}$ für $l \geq 1$ eine gute Überdeckung von M . Wir setzen $U = U_0, V = U_1 \cup \dots \cup U_l$. Nach Induktionsannahme haben U, V und $U \cap V = \bigcup_{j=1}^l (U_0 \cap U_j)$ endlich-dimensionale de Rham-Kohomologie und dann mittels des Lemmas auch $M = U \cup V$. □

Folgerung 15.27. *Kompakte Mannigfaltigkeiten haben endlich-dimensionale de Rham-Kohomologie.*

Definition 15.28. *Hat M endlich-dimensionale de Rham-Kohomologie, so heißen*

(i)

$$b_q(M) = \dim H_{\text{dR}}^q(M)$$

die q -te Bettizahl von M ,

(ii)

$$\chi(M) = \sum_{q=0}^n (-1)^q b_q(M) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim H_{\text{dR}}^q(M)$$

die Eulercharakteristik von M .*Beispiel 15.29.* Es gilt

$$\chi(\mathbb{S}^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade,} \\ 2, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

15.5 De Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger

15.5.1 Definition und erste Berechnungen

Es existiert eine Variante der de Rham-Kohomologie, in der alle beteiligten Formen kompakten Träger haben. Wir betrachten dazu den Komplex

$$0 \rightarrow \Omega_c^0(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega_c^n(M) \rightarrow 0,$$

wobei

$$\Omega_c^q(M) = \{\omega \in \Omega^q(M) \mid \text{supp } \omega \text{ ist kompakt}\}$$

(c steht für „compactly supported“) und $\text{supp } \omega = \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}}$. Wir setzen wie zuvor

$$Z_c^q(M) = \{\omega \in \Omega_c^q(M) \mid d\omega = 0\},$$

$$B_c^q(M) = \{d\eta \mid \eta \in \Omega_c^{q-1}(M)\}$$

und dann

$$H_{c,\text{dR}}^q(M) = Z_c^q(M)/B_c^q(M), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Definition 15.30. $H_{c,\text{dR}}^* = \bigoplus_{q=0}^{\infty} H_{c,\text{dR}}^q(M)$ heißt die *de Rham-Kohomologie* von M mit kompaktem Träger.

Bemerkung. (a) Für kompaktes M gilt natürlich

$$H_{\text{dR}}^*(M) = H_{c,\text{dR}}^*(M).$$

(b) Sind M_i für $i \in I$ die Zusammenhangskomponenten von M , so gilt

$$H_{c,\text{dR}}^*(M) = \bigoplus_{i \in I} H_{c,\text{dR}}^*(M_i).$$

Lemma 15.31. *Es gilt*

$$H_{c,\text{dR}}^0(M) \cong \mathbb{R}^l,$$

wobei l die Anzahl der kompakten Zusammenhangskomponenten von M bezeichnet.

Beweis. O. B. d. A. sei M zusammenhängend. Dann

$$Z_c^0(M) = \begin{cases} \{f: M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist konstant}\}, & \text{falls } M \text{ kompakt,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$B_c^0(M) = 0,$$

also

$$H_{c,\text{dR}}^0(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls } M \text{ kompakt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

□

Beispiel 15.32. Im Gegensatz zu $H_{\text{dR}}^*(M)$ ist $H_{c,\text{dR}}^*(M)$ keine Invariante bis auf C^∞ -Homotopie-Äquivalenz. Beispielsweise sind $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und \mathbb{S}^1 sind C^∞ -homotopie-äquivalent, jedoch gilt

$$H_{c,\text{dR}}^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) = 0, \quad H_{c,\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}.$$

Satz 15.33. *Es gilt*

$$H_{c,\text{dR}}^q(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} 0, & q \neq n, \\ \mathbb{R}, & q = n. \end{cases}$$

Beweis. O. B. d. A. sei $n \geq 1$, $q \geq 1$.

- (i) Wir betrachten zuerst den Fall $0 < q < n$. Sei $\omega \in \Omega_c^q(\mathbb{R}^n)$, $d\omega = 0$. Wir identifizieren $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$. Insbesondere ist dann $\omega \in \Omega^q(\mathbb{S}^n)$, $d\omega = 0$ und $\omega = 0$ in einer Umgebung $U \subseteq \mathbb{S}^n$ von N . O. B. d. A. sei U diffeomorph zum \mathbb{R}^n .

Aus $H_{\text{dR}}^q(\mathbb{S}^n) = 0$ folgt, dass es eine Form $\eta \in \Omega^{q-1}(\mathbb{S}^n)$ mit $\omega = d\eta$ gibt. Insbesondere $d\eta = 0$ in U . Wir wollen η so wählen, dass auch $\eta = 0$ in einer kleinen Umgebung von N gilt.

- (a) Sei $q = 1$. Aus $d\eta = 0$ in U folgt $\eta = c$ in U mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Dann $d(\eta - c) = \omega$ und $\eta - c = 0$ in U , also $\omega \in B_c^q(\mathbb{R}^n)$.
- (b) Sei $2 \leq q \leq n - 1$. Aus $d\eta = 0$ in U und U diffeomorph zum \mathbb{R}^n folgt, dass es eine Form $\eta' \in \Omega^{q-2}(U)$ mit $d\eta' = \eta$ in U gibt. Wir wählen $h \in C_c^\infty(U; \mathbb{R})$ mit $h \equiv 1$ in einer Umgebung $V \subseteq U$ von N und betrachten $h\eta'$ als Form auf \mathbb{S}^n , indem wir diese Form durch Null von U nach $\mathbb{S}^n \setminus U$ fortsetzen. Dann $d(\eta - d(h\eta')) = \omega$ sowie $\eta - d(h\eta') = 0$ in V , also auch hier $\omega \in B_c^q(\mathbb{R}^n)$.

- (ii) Sei nun $q = n$. Wir stellen fest, dass eine Form $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ ($= Z_c^n(\mathbb{R}^n)$) genau dann zu $B_c^q(\mathbb{R}^n)$ gehört, wenn $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$ gilt. Aus dem Satz von Stokes folgt, dass diese Bedingung notwendig ist.

Sei umgekehrt $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$. Wie in Teil (i) schließen wir auf die Existenz einer Form $\eta \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{S}^n)$ mit $d\eta = \omega$ (da für $\omega \in Z_c^n(\mathbb{S}^n)$ genau dann $\omega \in B_c^q(\mathbb{S}^n)$ gilt, wenn $\int_{\mathbb{S}^n} \omega = 0$ ist). Indem wir weiter wie in (i) argumentieren, zeigen wir, dass wir tatsächlich η mit $\eta = 0$ in einer Umgebung von N wählen können. Also $\eta \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ und $\omega \in B_c^n(\mathbb{R}^n)$.

Wir erhalten die kurze exakte Sequenz³

$$0 \rightarrow B_c^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega_c^n(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\int_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R} \rightarrow 0$$

und damit

$$H_{c,\text{dR}}^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}.$$

□

15.5.2 Die Mayer-Vietoris-Sequenz mit kompaktem Träger

Wir haben wiederum eine Mayer-Vietoris-Sequenz und eine sich ergebende lange exakte Sequenz in der Kohomologie. Dazu stellen wir fest, dass wenn U eine offene Teilmenge von M ist und $i: U \rightarrow M$ die entsprechende Einbettung, so haben wir eine induzierte Injektion $i_*: \Omega_c^q(U) \rightarrow \Omega_c^q(M)$.

Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit, $U, V \subseteq M$ offen und $M = U \cup V$.

Satz 15.34 (Mayer-Vietoris-Sequenz mit kompaktem Träger). *Die folgende kurze Sequenz ist exakt:*

$$0 \rightarrow \Omega_c^q(U \cap V) \xrightarrow{(-j_U)_*, (j_V)_*} \Omega_c^q(U) \oplus \Omega_c^q(V) \xrightarrow{(i_U)_* + (i_V)_*} \Omega_c^q(M) \rightarrow 0.$$

Hierbei sind $i_U: U \rightarrow M$, $i_V: V \rightarrow M$, $j_U: U \cap V \rightarrow U$ und $j_V: U \cap V \rightarrow V$ die entsprechenden Einbettungen.

Beweis. Eine direkte Verifikation. Um beispielsweise zu sehen, dass

$$(i_U)_* + (i_V)_*: \Omega_c^q(U) \oplus \Omega_c^q(V) \rightarrow \Omega_c^q(M)$$

surjektiv ist, wählen wir eine Form $\omega \in \Omega_c^q(M)$ und Funktionen $h, h' \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ mit $\text{supp } h \subseteq U$, $\text{supp } h' \subseteq V$ und $h + h' = 1$ und beobachten, dass

$$(i_U)_*(h\omega) + (i_V)_*(h'\omega) = (h + h')\omega = \omega$$

gilt.

□

³Die Surjektivität von $\int_{\mathbb{R}^n}: \Omega_c^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ist offensichtlich. Weshalb?

Satz 15.35. Für M, U, V wie oben haben wir die folgende lange exakte Sequenz:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & H_{c,\text{dR}}^0(U \cap V) & \longrightarrow & H_{c,\text{dR}}^0(U) \oplus H_{c,\text{dR}}^0(V) & \longrightarrow & H_{c,\text{dR}}^0(M) \hookrightarrow \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & H_{c,\text{dR}}^1(U \cap V) & \longrightarrow & H_{c,\text{dR}}^1(U) \oplus H_{c,\text{dR}}^1(V) & \longrightarrow & H_{c,\text{dR}}^1(M) \hookrightarrow \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & H_{c,\text{dR}}^2(U \cap V) & \longrightarrow & H_{c,\text{dR}}^2(U) \oplus H_{c,\text{dR}}^2(V) & \longrightarrow & H_{c,\text{dR}}^2(M) \hookrightarrow \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Folgerung 15.36. Mannigfaltigkeiten M vom endlichen Typ haben endlich-dimensionale de Rham-Kohomologie $H_{c,\text{dR}}^*(M)$ mit kompaktem Träger.

Satz 15.37. Sei M zusammenhängend, $n = \dim M$. Dann

$$H_{c,\text{dR}}^n(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & M \text{ orientierbar,} \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Beweis. Wir behandeln hier den orientierbaren Fall. Der nichtorientierbare Fall wird im nächsten Abschnitt behandelt.

Sei also M orientiert. Dann $\Omega_c^n(M) = Z_c^n(M)$ und die Abbildung $\int_M: \Omega_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \int_M \omega$ ist surjektiv. Wir behaupten, dass $\ker \int_M = B_c^n(M)$.

- $B_c^n(M) \subseteq \ker \int_M$ folgt aus dem Satz von Stokes.
- Zu $\ker \int_M \subseteq B_c^n(M)$: Sei $\omega \in \Omega_c^n(M)$, $\int_M \omega = 0$. Seien $U_1, \dots, U_r \subseteq M$ offen mit $U_i \approx \mathbb{R}^n$ für alle i , $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ für $i = 1, \dots, r-1$ und $\text{supp } \omega \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_r$. Wir zeigen mittels Induktion über r , dass es ein $\eta \in \Omega_c^{n-1}(M)$ mit $d\eta = \omega$ gibt.

Induktionsanfang $r = 1$. Dies folgt aus $\ker \int_{\mathbb{R}^n} = B_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, siehe den Beweis von $H_{c,\text{dR}}^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$.

Induktionsschritt $r-1 \rightarrow r$. Sei $r \geq 2$. Wir setzen $U = U_1 \cup \dots \cup U_{r-1}$, $V = U_r$. Seien $h, h' \in C^\infty(U \cup V; \mathbb{R})$ mit $\text{supp } h \subseteq U$, $\text{supp } h' \subseteq V$ und $h + h' = 1$ auf $U \cup V$. Dann $h\omega \in \Omega_c^n(U)$, $h'\omega \in \Omega_c^n(V)$. Sei

$$\alpha = \int_U h\omega = - \int_V h'\omega$$

und sei $\tilde{\omega} \in \Omega_c^n(U \cap V)$ mit $\int_{U \cap V} \tilde{\omega} = \alpha$. Dann

$$\int_U (h\omega - \tilde{\omega}) = 0, \quad \int_V (h'\omega + \tilde{\omega}) = 0.$$

Nach Induktionsannahme existieren $\eta \in \Omega_c^{n-1}(U)$, $\eta' \in \Omega_c^{n-1}(V)$ mit $d\eta = h\omega - \tilde{\omega}$, $d\eta' = h'\omega + \tilde{\omega}$. Dann $\eta + \eta' \in \Omega_c^{n-1}(U \cup V)$ sowie

$$d(\eta + \eta') = h\omega - \tilde{\omega} + h'\omega + \tilde{\omega} = \omega.$$

□

Definition 15.38. Ist M zusammenhängend und *orientiert*, so heißt $[\omega_M] \in H_{c, \text{dR}}^n(M)$ mit $\int_M \omega_M = 1$ die *Fundamentalklasse* von M .

Bemerkung. Ändert man die Orientierung von M ($M \mapsto -M$), so ändert die Fundamentalklasse ihr Vorzeichen,

$$[\omega_{-M}] = -[\omega_M].$$

15.5.3 Der Abbildungsgrad

Sei jetzt $f: M \rightarrow N$ eine C^∞ -Abbildung. Im Allgemeinen induziert $f^*: \Omega^q(N) \rightarrow \Omega^q(M)$ keine Abbildung $f^*: \Omega_c^q(N) \rightarrow \Omega_c^q(M)$, d. h. im Allgemeinen gilt *nicht*

$$f^*(\Omega_c^q(N)) \subseteq \Omega_c^q(M).$$

Dies ist jedoch unter einer Zusatzannahme an f richtig.

Definition 15.39. Die Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt *eigentlich*, falls $f^{-1}(K) \subseteq M$ kompakt für alle kompakten $K \subseteq N$ ist.

Lemma 15.40. *Ist f eigentlich, so gilt $f^*(\Omega_c^q(N)) \subseteq \Omega_c^q(M)$ für alle q . Wir erhalten einen induzierten Homomorphismus*

$$f^*: H_{c, \text{dR}}^*(N) \rightarrow H_{c, \text{dR}}^*(M)$$

graduierter Algebren.

Beweis. Für jede Form $\omega \in \Omega^*(N)$ gilt

$$\text{supp } f^*\omega \subseteq f^{-1}(\text{supp } \omega).$$

Ist f eigentlich und $\text{supp } \omega$ kompakt, so ist also auch $\text{supp } f^*\omega$ kompakt. □

Diese Beobachtung führt uns zu einer weiteren Invarianten:

Seien M, N orientierte, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, $\dim M = \dim N = n$ und $f: M \rightarrow N$ eigentlich. Dann ist

$$f^*: H_{c, \text{dR}}^n(N) \longrightarrow H_{c, \text{dR}}^n(M)$$

Multiplikation mit einer reellen Zahl $\deg f$,

$$\begin{array}{ccc} H_{c, \text{dR}}^n(N) & \xrightarrow{f^*} & H_{c, \text{dR}}^n(M) \\ \int_N \Big\| \cong & & \int_M \Big\| \cong \\ \downarrow & \cdot \deg f & \downarrow \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

Nach Definition gilt also

$$\int_M f^*\omega = (\deg f) \int_N \omega$$

für jede Form $\omega \in \Omega_c^n(N)$ und insbesondere

$$\deg f = \int_M f^* \omega_N.$$

Definition 15.41. $\deg f$ heißt der *Abbildungsgrad* von f .

Satz 15.42. *Es gilt $\deg f \in \mathbb{Z}$, genauer*

$$\deg f = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \deg_p f$$

für jeden regulären Wert $q \in N$ von f , wobei $\deg_p f \in \{\pm 1\}$ für alle $p \in f^{-1}(q)$. ($\deg_p f$ wird im Beweis definiert.)

Beweis. Sei $q \in \mathbb{N}$ ein regulärer Wert von f , d. h. für jedes $p \in f^{-1}(q)$ ist $df_p: T_p M \rightarrow T_q N$ ein Isomorphismus (man beachte $\dim M = \dim N$). Nach dem Satz über die inverse Abbildung ist die Menge $f^{-1}(q)$ diskret und, da f eigentlich ist, sogar endlich. Sei also $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_N\}$. Nochmals mittels des Satzes über die inverse Abbildung existieren Umgebungen U_j von p_j in M und V von q in N , so dass $f|_{U_j}: U_j \rightarrow V$ jeweils ein Diffeomorphismus ist.

Wir sehen jetzt $\deg_{p_j} f = +1$, falls $f|_{U_j}$ die Orientierung erhält, und $\deg_{p_j} f = -1$ andernfalls. Sei $\omega_N = \omega_V \in \Omega_c^n(V)$ mit $\int_V \omega_V = 1$. Dann

$$\begin{aligned} \deg f &= \int_M f^* \omega_N = \sum_j \int_{U_j} f^* \omega_V \\ &= \sum_j \int_{U_j} (\deg_{p_j} f) \omega_{U_j} = \sum_j \deg_{p_j} f, \end{aligned}$$

wobei $\omega_{U_j} \in \Omega_c^n(U_j)$, $\int_{U_j} \omega_{U_j} = 1$.

Letzteres ist gerade die Behauptung.

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir noch anmerken, dass es reguläre Werte q gibt. Dies jedoch folgt aus dem Satz von Sard. \square

Satz 15.43 (Sard). *Sind M, N Mannigfaltigkeiten und ist $f: M \rightarrow N$ eine C^∞ -Abbildung, so ist die Menge der kritischen Werte von f eine Nullmenge.*

Dabei heißt eine Menge $A \subseteq N$ Nullmenge, falls in jeder Karte (V, ψ) von N $\psi(A \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.

Beweis. Ohne Beweis. \square

Wir sehen, dass die Menge der regulären Werte von $f: M \rightarrow N$ dicht in N und insbesondere nichtleer ist.

Folgerung 15.44. Gilt unter den Voraussetzungen des obigen Satzes $f(M) \neq N$ (d. h. ist f nicht surjektiv), so ist $\deg f = 0$.

Beweis. Wir wählen $q \in N \setminus f(M)$. Dann ist q ein regulärer Wert von f und $f^{-1}(q) = \emptyset$, also

$$\deg f = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \deg_p f = 0.$$

□

Bemerkung. $\deg f$ ist gleich der orientiert gezählten Anzahl der Urbilder eines regulären Wertes von f ,

15.6 Ein Beispiel: Die Kohomologie einer endlichen Überlagerung

15.6.1 Der allgemeine Fall

Ein Spezialfall einer eigentlichen Abbildung ist die Projektion π einer Überlagerung $M \xrightarrow{\pi} N$ mit *endlicher* Blätterzahl.

Ist $M \xrightarrow{\pi} N$ eine derartige Überlagerung, so haben wir zum einen die Abbildung $\pi^* : \Omega_{(c)}^*(N) \rightarrow \Omega_{(c)}^*(M)$, wobei $\Omega_{(c)}^*$ sowohl für Ω^* als auch für Ω_c^* steht. Wir haben aber noch eine weitere Abbildung π_* .

Lemma 15.45. (i) Die Abbildung $\pi_* : \Omega_{(c)}^*(M) \rightarrow \Omega_{(c)}^*(N)$ ist vermöge

$$(\pi_* \omega)_q = \sum_{p \in \pi^{-1}(q)} ((\pi|_{U_p})^{-1})^* \omega_p, \quad \forall \omega \in \Omega^*(M),$$

korrekt definiert. Dabei ist $U_p \subseteq M$ für $p \in M$ eine offene Umgebung von p , die vermöge π diffeomorph auf eine offene Umgebung von q abgebildet wird.

- (ii) $\pi_* \pi^* = b \cdot \text{id}_{\Omega^*(N)}$, wobei b die Anzahl der Blätter von $M \xrightarrow{\pi} N$ ist.
 (iii) $d\pi_* = \pi_* d$. Insbesondere erhalten wir eine Abbildung $\pi_* : H_{(c), \text{dR}}^*(M) \rightarrow H_{(c), \text{dR}}^*(N)$ mit

$$\frac{1}{b} \pi_* \pi^* = \text{id}_{H_{(c), \text{dR}}^*(N)}.$$

π_* ist surjektiv, π^* ist injektiv.⁴

Beweis. (i) Ist V eine offene Umgebung von $q \in N$ mit $\pi^{-1}(V) = \bigsqcup_{p \in \pi^{-1}(q)} U_p$

und $\pi|_{U_p} : U_p \rightarrow V$ diffeomorph für alle $p \in \pi^{-1}(q)$, so ist nach Konstruktion $\pi_* \omega|_V \in \Omega^*(V)$ für $\omega \in \Omega^*(M)$. Folglich $\pi_* \omega \in \Omega^*(N)$.

Dabei gilt $\text{supp}(\pi_* \omega) \subseteq \pi(\text{supp} \omega)$, insbesondere respektiert π_* kompakte Träger.

⁴ $\frac{1}{b} \pi_* \pi^*$ ist eine Projektion in $H_{(c), \text{dR}}^*(M)$ auf das Bild von π^* .

(ii) Für $q \in N$ gilt

$$\begin{aligned}
 (\pi_* \pi^* \omega)_q &= \sum_{p \in \pi^{-1}(q)} ((\pi|_{U_p})^{-1})^* (\pi^* \omega)_p \\
 &= \sum_{p \in \pi^{-1}(q)} ((\pi|_{U_p})^{-1})^* (\pi|_{U_p})^* \omega_q \\
 &= \sum_{p \in \pi^{-1}(q)} ((\pi|_{U_p})(\pi|_{U_p})^{-1})^* \omega_q \\
 &= \sum_{p \in \pi^{-1}(q)} \omega_q = b \omega_q.
 \end{aligned}$$

(iii) π_* ist lokal durch Pullbacks von Formen definiert. Dies vertauscht mit dem äußeren Differential d .

□

Folgerung 15.46. Wir erhalten

$$H_{(c), dR}^*(N) \cong \text{im } \pi^* \subseteq H_{(c), dR}^*(M),$$

wobei der Isomorphismus durch die gegenseitig inversen Abbildungen π^* und $\frac{1}{b} \pi_*$ vermittelt wird.

15.6.2 Normale Überlagerungen

Ist die Überlagerung *normal*, so lässt sich das Bild von π^* in $\Omega_{(c)}^*(M)$ genau charakterisieren. Sei G also eine *endliche Gruppe*, die C^∞ -glatt und *frei* auf M operiert, d. h. wir haben eine C^∞ -Abbildung $\chi: G \times M \rightarrow M$, die einen Gruppenhomomorphismus

$$G \rightarrow \text{Diff}(M), \quad g \mapsto \chi_g,$$

induziert, so dass aus $\chi_g(p) = p$ für ein $p \in M$ bereits $g = e$ folgt. Sei $N = M \setminus G$ der Bahnenraum dieser Gruppenoperation und $\pi: M \rightarrow N$ die kanonische Projektion. Dann ist $M \xrightarrow{\pi} N$ eine $|G|$ -blättrige Überlagerung.

Satz 15.47. *In diesem Fall gilt:*

(i)
$$\text{im } \pi^* = \{ \omega \in \Omega_{(c)}^*(M) \mid \chi_g^* \omega = \omega \text{ für alle } g \in G \}.$$

Dieser Raum wird auch mit $\Omega_{(c)}^(M)^G$ bezeichnet.*

(ii)
$$\frac{1}{b} \pi^* \pi_* \omega = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_g^* \omega.$$

(iii) Das Bild von $\pi^*: H_{(c), \text{dR}}^*(N) \rightarrow H_{(c), \text{dR}}^*(M)$ ist

$$H_{(c), \text{dR}}^*(M)^G = \{[\omega] \mid \chi_g^*[\omega] = [\omega] \text{ für alle } g \in G\}.$$

Beweis. (ii) Für $q \in N$ haben wir $\pi^{-1}(q) = \{gp \mid g \in G\}$ mit einem (beliebigen) $p \in \pi^{-1}(q)$, wobei wir $gp = \chi_g(p)$ schreiben. Dann $U_{gp} = gU$ (Bezeichnungen wie im vorigen Beweis), wobei $U = U_p$, und für $\omega \in \Omega^*(M)$

$$\begin{aligned} (\pi^* \pi_* \omega)|_U &= \pi^* ((\pi_* \omega)|_V) \\ &= \pi^* \left(\sum_{g \in G} ((\pi|_{gU})^{-1})^* \omega|_{gU} \right) \\ &= \sum_{g \in G} ((\pi|_{gU})^{-1} \pi|_U)^* (\omega|_U) \\ &= \sum_{g \in G} \chi_g^* \omega|_U. \end{aligned}$$

(i) Folgt aus (ii).

(iii) (ii) ergibt auf dem Niveau von Kohomologieklassen, dass

$$\frac{1}{|G|} \pi^* \pi_* [\omega] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_g^* [\omega],$$

und daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung. (a) Die Gruppe G operiert von *rechts* auf $\Omega_{(c)}^*(M)$ bzw. auf $H_{(c), \text{dR}}^*(M)$. Dies folgt aus

$$\chi_g^* \chi_h^* = (\chi_h \chi_g)^* = \chi_{hg}^*$$

für alle $g, h \in G$.

(b) $H_{(c), \text{dR}}^*(M)^G$ ergibt sich auch als Kohomologie des Komplexes

$$0 \rightarrow \Omega_{(c)}^0(M)^G \xrightarrow{d} \Omega_{(c)}^1(M)^G \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega_{(c)}^n(M)^G \rightarrow 0.$$

Beispiel 15.48. (a) $\mathbb{S}^n \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}P^n$ ist zweifache Überlagerung vermöge der Identifikation diametral gegenüberliegender Punkte. Hier ergibt sich eine weitere Möglichkeit, die Kohomologie von $\mathbb{R}P^n$ zu berechnen. (Dies ist eine aktuelle Übungsaufgabe!)

(b) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} \text{Möb}$ ist zweifache Überlagerung wiederum vermöge der Identifikation diametral gegenüberliegender Punkte. (Dies war ein Beispiel in einer Saalübung.) Wir benutzen dies, um nochmals $H_{\text{dR}}^*(\text{Möb})$ zu berechnen.

Wir schreiben $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und führen p als 1-periodische Variable auf \mathbb{S}^1 ein (d. h. wir identifizieren Funktionen auf \mathbb{S}^1 mit 1-periodischen Funktionen auf \mathbb{R}). $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ operiert auf $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ vermöge $\chi_1 = \text{id}_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}}$ und

$$\chi_{-1}: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \quad (p, t) \mapsto (p + \frac{1}{2}, -t).$$

Wir erhalten

$$H_{\text{dR}}^q(\text{Möb}) \cong H_{\text{dR}}^q(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})^{\mathbb{Z}_2},$$

insbesondere $H_{\text{dR}}^q(\text{Möb}) = 0$ für $q \geq 2$. Weiterhin ist $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \cong H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ mit den Erzeugern $[1] \in H_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$, $[dp] \in H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$. Beide Erzeuger sind \mathbb{Z}_2 -invariant, z. B.

$$\chi_{-1}^*[dp] = [d(p - \frac{1}{2})] = [dp].$$

Folglich

$$H_{\text{dR}}^q(\text{Möb}) \cong H_{\text{dR}}^q(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})^{\mathbb{Z}_2} = H_{\text{dR}}^q(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$$

auch im Fall $q = 0, 1$.

Ende des Beweises von Satz 15.37. Sei jetzt M zusammenhängend und nicht orientierbar. Sei weiterhin $\text{Or}(M) \xrightarrow{\pi} M$ die Orientierungsüberlagerung von M . Dies ist eine zweifache Überlagerung und $\text{Or}(M)$ ist eine zusammenhängende, (kanonisch) orientierte C^∞ -Mannigfaltigkeit.

Außerdem gilt $M = \text{Or}(M)/\mathbb{Z}_2$, wobei $\chi_{-1} = \sigma$ der Diffeomorphismus von $\text{Or}(M)$ ist, der die beiden Blätter von $\text{Or}(M)$ vertauscht. Da σ die Orientierung von $\text{Or}(M)$ umkehrt, ist σ eine eigentliche Abbildung mit $\deg \sigma = -1$.

Folglich erhalten wir einen linearen Isomorphismus

$$\int_{\text{Or}(M)} : H_{c, \text{dR}}^n(\text{Or}(M)) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$$

sowie für jedes $[\omega] \in H_{c, \text{dR}}^n(\text{Or}(M))^{\mathbb{Z}_2}$

$$\begin{aligned} [\omega] &= \frac{1}{2} ([\omega] + \sigma^*[\omega]) \cong \frac{1}{2} \left(\int_{\text{Or}(M)} \omega + \int_{\text{Or}(M)} \sigma^* \omega \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\text{Or}(M)} \omega + (\deg \sigma) \int_{\text{Or}(M)} \omega \right) = 0. \end{aligned}$$

Somit ist

$$H_{c, \text{dR}}^n(M) \cong H_{c, \text{dR}}^n(\text{Or}(M))^{\mathbb{Z}_2} = 0.$$

□

15.7 Poincaré-Dualität

Sei M orientiert. Dann haben wir eine Paarung

$$\Omega^q(M) \times \Omega_c^{n-q}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\omega, \omega') \mapsto \int_M \omega \wedge \omega'.$$

Lemma 15.49. *Diese Paarung induziert eine Paarung*

$$H_{\text{dR}}^q(M) \times H_{c,\text{dR}}^{n-q}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad ([\omega], [\omega']) \mapsto \int_M \omega \wedge \omega'.$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die angegebene Paarung korrekt definiert ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass wenn $\eta \in \Omega^{q-1}(M)$, $\omega' \in \Omega^{n-q}(M)$, $d\omega' = 0$ und wenigstens eine der beiden Formen mit kompaktem Träger hat, so folgt, dass

$$\int_M d\eta \wedge \omega' = 0.$$

Es gilt jedoch $d\eta \wedge \omega' = d(\eta \wedge \omega')$. Dann ist das angestrebte Ergebnis eine Konsequenz des Stokesschen Satzes. \square

Bemerkung. Sind E, F lineare Räume über \mathbb{R} , so wissen wir aus der linearen Algebra, dass

$$B(E, F; \mathbb{R}) \cong L(E, F'),$$

wobei $B(E, F; \mathbb{R})$ den Raum der Bilinearformen $\alpha: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. Gegenseitig inverse Abbildungen sind

$$(\alpha: E \times F \rightarrow \mathbb{R}) \longmapsto (e \mapsto \alpha(e, \cdot)),$$

$$((e, f) \mapsto \langle \beta(e), f \rangle) \longleftarrow (\beta: E \rightarrow F').$$

Aus dem Lemma folgt also, dass wir für jedes $q = 0, 1, \dots, n$ eine lineare Abbildung

$$\Phi_q: H_{\text{dR}}^q(M) \rightarrow H_{c,\text{dR}}^{n-q}(M)'$$

erhalten.

Theorem 15.50 (Poincaré-Dualität). Φ_q ist für $q = 0, 1, \dots, n$ ein linearer Isomorphismus.

Zum Beweis benötigen wir zwei Lemmata:

Lemma 15.51 (Fünferlemma). *Sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von \mathbb{R} -linearen Räumen und \mathbb{R} -linearen Abbildungen, wobei die beiden Zeilen exakt sind. Weiterhin sei f_1 surjektiv, f_5 injektiv und f_2, f_4 seien Isomorphismen. Dann ist auch f_3 ein Isomorphismus.

Beweis. (Fast) jedes Lehrbuch über Homologische Algebra. \square

Lemma 15.52. *Sind $U, V \subseteq M$ offen und gilt die Poincaré-Dualität für $U, V, U \cap V$, so gilt sie auch für $U \cup V$.*

Beweis. Wir benutzen die Mayer-Vietoris-Sequenz für U, V sowie das Duale der Mayer-Vietoris-Sequenz mit kompaktem Träger, ebenfalls für U, V , und erhalten:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^0(U \cup V) & \longrightarrow & H^0(U) \oplus H^0(V) & \longrightarrow & H^0(U \cap V) \longrightarrow \\
 & & \Phi_0 \downarrow & & \Phi_0 \downarrow \cong & & \Phi_0 \downarrow \cong \\
 0 & \longrightarrow & H_c^n(U \cup V)' & \longrightarrow & H_c^n(U)' \oplus H_c^n(V)' & \longrightarrow & H_c^n(U \cap V)' \longrightarrow \\
 & & & & & & \\
 & \longrightarrow & H^1(U \cup V) & \longrightarrow & H^1(U) \oplus H^1(V) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \Phi_1 \downarrow & & \Phi_1 \downarrow \cong & & \\
 & \longrightarrow & H_c^{n-1}(U \cup V)' & \longrightarrow & H_c^{n-1}(U)' \oplus H_c^{n-1}(V)' & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Die Zeilen in diesem Diagramm sind exakt und das Diagramm ist bis auf Vorzeichen kommutativ. Für die Quadrate

$$\begin{array}{ccc}
 H^q(U \cup V) & \longrightarrow & H^q(U) \oplus H^q(V) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^{n-q}(U \cup V)' & \longrightarrow & H_c^{n-q}(U)' \oplus H_c^{n-q}(V)'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 [\omega] & \longmapsto & ([\omega|_U], [\omega|_V]) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 ([\eta] \mapsto \int_M \omega \wedge \eta) & \longmapsto & ([\eta'] \mapsto -\int_M \omega \wedge \eta', [\eta''] \mapsto \int_M \omega \wedge \eta'')
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc}
 H^q(U) \oplus H^q(V) & \longrightarrow & H^q(U \cap V) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^{n-q}(U)' \oplus H_c^{n-q}(V)' & \longrightarrow & H_c^{n-q}(U \cap V)'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 ([\omega'], [\omega'']) & \longmapsto & [\omega''|_{U \cap V}] - [\omega'|_{U \cap V}] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 ([\eta'] \mapsto -\int_M \omega' \wedge \eta', [\eta''] \mapsto \int_M \omega'' \wedge \eta'') & \longmapsto & ([\eta] \mapsto \int_M (\omega'' - \omega') \wedge \eta)
 \end{array}$$

ist dies offensichtlich, für das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} H^q(U \cap V) & \longrightarrow & H^{q+1}(U \cup V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^{n-q}(U \cap V)' & \longrightarrow & H_c^{n-q-1}(U \cap V)' \end{array}$$

ist das eine aktuelle Übungsaufgabe.

Das Fünferlemma zusammen mit unseren Annahmen liefert dann, dass

$$\Phi_q: H^q(U \cup V) \rightarrow H_c^{n-q}(U \cup V)'$$

ebenfalls ein Isomorphismus ist. \square

Beweis des Theorems. Wir beweisen das Theorem im Fall, dass M von endlichem Typ ist, d. h. dass M eine endliche gute Überdeckung besitzt. Wir führen dann den Beweis durch Induktion über die Anzahl r der Elemente einer guten Überdeckung von M .

Induktionsanfang $r = 1$. Hier haben wir $M \approx \mathbb{R}^n$ und

$$H_{\text{dR}}^q(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0, \end{cases} \quad H_{c,\text{dR}}^q(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & q = n, \\ 0, & q \neq n \end{cases}$$

sowie, dass die Paarung $H_{\text{dR}}^0(M) \times H_{c,\text{dR}}^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$, $([\omega], [\omega']) \mapsto \int_M \omega \wedge \omega'$ nicht entartet ist. Folglich gilt die Behauptung in diesem Fall.

Induktionsschritt $r \rightarrow r + 1$. Sei U_0, U_1, \dots, U_r eine gute Überdeckung von M . Wir setzen $U = U_0, V = U_1 \cup \dots \cup U_r$. Dann ist $U \cap V = (U_0 \cap U_1) \cup \dots \cup (U_0 \cap U_r)$. Nach Induktionsannahme gilt die Poincaré-Dualität für $U, V, U \cap V$. Gemäß Lemma gilt die Poincaré-Dualität dann auch für $M = U \cup V$. \square

Folgerung 15.53. Sei M orientierbar, kompakt. Dann:

- (i) $b_q(M) = b_{n-q}(M)$ für $q = 0, 1, \dots, n$.
- (ii) $\chi(M) = 0$, falls $\dim M$ ungerade ist.

Beweis. (i) Wir haben $H_{\text{dR}}^q(M) \cong H_{\text{dR}}^{n-q}(M)'$ gemäß Poincaré-Dualität, also

$$b_q(M) = \dim H_{\text{dR}}^q(M) = \dim H_{\text{dR}}^{n-q}(M) = b_{n-q}(M).$$

(ii) Die alternierende Summe

$$\begin{aligned} \chi(M) &= b_0(M) - b_1(M) + b_2(M) \mp \dots - b_{n-2}(M) + b_{n-1}(M) - b_n(M) \\ &= b_0(M) - b_1(M) + b_2(M) \mp \dots - b_2(M) + b_1(M) - b_0(M) \end{aligned}$$

verschwindet im Fall, dass n ungerade ist. \square

Beispiel 15.54. Wir berechnen $H_{c,dR}^*(\text{Möb})$ mittels der zweifachen Überlagerung $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Möb}$. Wir benötigen dazu die Kohomologie $H_{c,dR}^*(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$, die wir dual zu $H_{dR}^*(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \cong H_{dR}^*(\mathbb{S}^1)$ finden. Folglich

$$H_{c,dR}^q(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & q = 1, 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei nun $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $f(t) = f(-t)$ für alle t und $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$. Dann ist $[f(t) dt]$ Erzeuger von $H_{c,dR}^1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$ und $[f(t) dp \wedge dt]$ Erzeuger von $H_{c,dR}^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$ (Beziehungen wie in Beispiel 15.48 (b)). Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \chi_{-1}^*[f(t) dt] &= [f(-t) d(-t)] = -[f(t) dt], \\ \chi_{-1}^*[f(t) dp \wedge dt] &= \left[f(-t) d\left(p - \frac{1}{2}\right) \wedge d(-t) \right] = -[f(t) dp \wedge dt], \end{aligned}$$

so dass insgesamt

$$H_{c,dR}^*(\text{Möb}) \cong H_{c,dR}^*(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})^{\mathbb{Z}_2} = 0.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass Poincaré-Dualität ohne die Annahme der Orientierbarkeit im Allgemeinen nicht gilt.⁵

⁵Tatsächlich gilt Poincaré-Dualität niemals im nichtorientierbaren Fall. Wieso?

Kapitel 16

Hodge-Theorie

16.1 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

16.1.1 Riemannsche Metriken

Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit.

Definition 16.1. Eine *Riemannsche Metrik* g auf M ist eine Familie g_p für $p \in M$ von Skalarprodukten auf $T_p M$, die C^∞ -glatt mit dem Fußpunkt $p \in M$ variiert. Letztere Bedingung kann man beispielsweise als $g \in C^\infty(M; T^*M \otimes T^*M)$ formulieren. (Außerdem ist der Schnitt g *symmetrisch* und punktweise *positiv definit*.)

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist eine mit einer Riemannschen Metrik g versehene Mannigfaltigkeit M .

In lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n in $U \subseteq M$ haben wir

$$g = \sum_{j,k=1}^n g_{jk}(x) dx^j \otimes dx^k,$$

wobei $g_{jk} \in C^\infty(U; \mathbb{R})$ für alle j, k und die Matrix $(g_{jk}(x))_{j,k=1}^n$ für alle $x \in U$ symmetrisch und positiv definit ist.

Definition 16.2. (a) Für $\mathbf{t} \in T_p M$ heißt die Zahl

$$|\mathbf{t}|_g = g_p(\mathbf{t}, \mathbf{t})^{1/2} = \left(\sum_{j,k=1}^n g_{jk}(x) a^j a^k \right)^{1/2},$$

die *Länge* des Vektors \mathbf{t} , wobei $\mathbf{t} = \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ ist.

(b) Der *Winkel* φ zwischen zwei Vektoren $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in T_p M$ ist durch

$$g(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = |\mathbf{t}|_g |\mathbf{t}'|_g \cos \varphi$$

gegeben.

Lemma 16.3. *Jede Mannigfaltigkeit M besitzt eine Riemannsche Metrik.*

Beweis. Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M durch Kartenumgebungen und $\{h_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Für jedes $U \in \mathcal{U}$ wählen wir die *Euklidische Metrik*

$$g_U = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + \cdots + dx^n \otimes dx^n$$

als Metrik in U . Dann ist $g = \sum_{U \in \mathcal{U}} h_U g_U$ eine Metrik auf M . □

16.1.2 Geodäten und Normalkoordinaten

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ eine C^1 -Kurve.

Definition 16.4. Die *Länge* $l(\gamma)$ der Kurve γ ist definiert als

$$l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_g dt.$$

Lemma 16.5. *Die Länge einer Kurve ist invariant unter Umparametrisierungen der Kurve.*

Beweis. Sei $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ ein C^1 -Diffeomorphismus und $\delta(s) = \gamma(\varphi(s))$. Dann

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_g dt = \int_c^d |\dot{\gamma}(\varphi(s))|_g \left| \frac{d\varphi}{ds}(s) \right| ds = \int_c^d |\dot{\delta}(s)|_g ds.$$

□

Definition 16.6. Eine *Geodäte* oder *geodätische Linie* ist eine Kurve γ in M , die lokal kürzester Länge ist.

Beispiel 16.7. (a) Geodäten im \mathbb{R}^n mit der Euklidischen Metrik sind die Geraden.

(b) Geodäten auf $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ mit der von der Euklidischen Metrik induzierten Metrik sind die Großkreise.

Um die geodätischen Linien für eine allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^n, g) zu bestimmen, betrachten wir das *Energiefunktional*

$$e(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|^2 dt$$

für eine C^1 -Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ und die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen.

Satz 16.8. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $F: [a, b] \times U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion, wobei wir $F = F(t, x, v)$ schreiben. Eine notwendige Bedingung dafür, dass das Funktional*

$$I(x) = \int_a^b F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

für eine C^2 -Kurve $x: [a, b] \rightarrow U$ mit fixierten Endpunkten $x(a) = x^0$, $x(b) = x^1$ ein Maximum annimmt, ist das Erfülltsein der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} F_v(t, x(t), \dot{x}(t)) = F_x(t, x(t), \dot{x}(t)).$$

Beweis. Das Funktional I nehme an der Stelle $x: [a, b] \rightarrow U$ ein Minimum an. Sei $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^2 -Kurve mit $y(a) = y(b) = 0$. Dann ist für $|\epsilon|$ klein $x + \epsilon y: [a, b] \rightarrow U$ eine Kurve in U . Folglich erhalten wir die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} I(x + \epsilon y)|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} \int_a^b F(t, x + \epsilon y, \dot{x} + \epsilon \dot{y}) dt \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_a^b [F_x(t, x, \dot{x}) y + F_v(t, x, \dot{x}) \dot{y}] dt \\ &= F_v(t, x, \dot{x}) y \Big|_{t=a}^b + \int_a^b \left[F_x(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} F_v(t, x, \dot{x}) \right] y dt \\ &= \int_a^b \left[F_x(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} F_v(t, x, \dot{x}) \right] y dt. \end{aligned}$$

Da letztere Beziehung für alle C^2 -Kurven $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $y(a) = y(b) = 0$ gilt, erhalten wir, dass

$$F_x(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} F_v(t, x, \dot{x}) = 0.$$

Dies sind gerade die Euler-Lagrange-Gleichungen für das Funktional F . \square

Außerdem stellen wir fest:

Lemma 16.9. *Es gilt stets*

$$l(\gamma)^2 \leq 2(b-a) e(\gamma),$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $|\dot{\gamma}(t)|_g \equiv \text{konst}$ ist.

Beweis. Die Hölder-Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_a^b 1 \cdot |\dot{\gamma}(t)|_g dt \leq \left(\int_a^b 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_g^2 dt \right)^{1/2} \\ &= (b-a)^{1/2} (2e(\gamma))^{1/2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die zu beweisende Ungleichung einschließlich der Aussage über die Gleichheit beider Seiten. \square

Da wir Kurven beliebig umparametrisieren können, ohne deren Länge zu ändern, dürfen wir immer annehmen, dass eine Geodäte proportional zur *Bogenlänge* parametrisiert ist, d. h. so dass $|\dot{\gamma}(t)|_g \equiv \text{konst}$ gilt. Dann zeigt obiges Lemma, dass es genügt, die Minima des Energiefunktional zu finden, um die Geodäten zu bestimmen.

Satz 16.10. Die C^2 -Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ verlaufe vollständig in einer Karten-
umgebung $U \subseteq M$ mit Koordinaten x^1, \dots, x^n . Dann lauten die Euler-Lagrange-
Gleichungen für das Funktional e und $\gamma = (x^1, \dots, x^n)$

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dabei sind die Γ_{jk}^i die sogenannten Christoffel-Symbole, die durch

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right)$$

mit $(g^{jk}) = (g_{jk})^{-1}$ gegeben sind.

Bemerkung. Die Christoffel-Symbole sind ein Ausdruck der (intrinsischen) Krüm-
mung der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g) .

Beweis des Satzes. Wir haben

$$F(x, v) = g_{jk}(x) v^j v^k$$

und damit

$$F_{x^l}(x, v) = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x) v^j v^k,$$

$$F_{v^l}(x, v) = 2g_{jl}(x) v^j.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (2g_{jl}(x) \dot{x}^j) &= \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k, \\ 2g_{jl}(x) \ddot{x}^j + 2 \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k &= \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$g_{jl}(x) \ddot{x}^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x) + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x) \right) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$$

für $l = 1, \dots, n$. Multiplikation dieser Gleichungen mit $g^{il}(x)$ und Summation
von $l = 1, \dots, n$ liefert das gewünschte Ergebnis

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0.$$

□

Bemerkung. Jede C^2 -Kurve, die den Bedingungen

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

genügt, ist so parametrisiert, dass

$$|\dot{x}(t)|_g \equiv \text{konst}$$

gilt.

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\dot{x}(t)|_g^2 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k) \\ &= g_{jk}(x) \ddot{x}^j \dot{x}^k + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \dot{x}^j \dot{x}^k \dot{x}^l \\ &= \left(g_{jl}(x) \ddot{x}^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k \right) \dot{x}^l \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Wir arbeiten jetzt in lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n um einen Punkt $p \in M$, so dass dieser Punkt die Koordinaten $x = 0$ bekommt.

Satz 16.11. *Die Gleichungen*

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i(x(t)) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

besitzen unter den Anfangsvorgaben $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v$ eine lokal eindeutige Lösung.

Beweis. Siehe das Kapitel über gewöhnliche Differenzialgleichungen in Diff II. □

Für $v \in T_p M$ bezeichnen wir diese eindeutige Lösung mit $\gamma(t; p, v)$ und denken uns diese Kurve auf ein maximales Existenzintervall fortgesetzt (gegebenenfalls durch Lösung dieser Gleichungen in anderen Koordinaten und in einer anderen Kartenumgebung). Hierbei hängt die Kurve $t \mapsto \gamma(t; p, v)$ tatsächlich nur von der Richtung von v ab. $|v|$ gibt lediglich die Geschwindigkeit an, mit der die Kurve durchlaufen wird, also

$$\gamma(\lambda t; p, v) = \gamma(t; p, \lambda v)$$

für $p \in M$, $v \in T_p M$, $\lambda > 0$.

Wir setzen jetzt

$$\tilde{U}_p = \{v \in T_p M \mid t \mapsto \gamma(\lambda; p, v) \text{ existiert auf dem Intervall } [0, 1]\}$$

und

$$\begin{aligned} \exp_p : \tilde{U}_p \subseteq T_p M &\rightarrow M, \\ v &\mapsto \gamma(1; p, v). \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass \tilde{U}_p eine sternförmige, offene Umgebung der Null in $T_p M$ ist.

Definition 16.12. \exp_p heißt die *Exponentialabbildung*.

Satz 16.13. *Es gibt eine offene Umgebung $U_p \subseteq \tilde{U}_p$ der Null in T_pM , so dass $\exp_p|_{U_p}: U_p \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist.*

Beweis. Nach dem Satz über die inverse Abbildung genügt es zu zeigen, dass

$$d(\exp_p)_0: T_0(T_pM) \cong T_pM \rightarrow T_pM$$

ein Isomorphismus ist. Hierbei identifizieren wir $T_0(T_pM)$ und T_pM in kanonischer Weise. Es gilt jedoch

$$d(\exp_p)_0(v) = \frac{d}{dt}\gamma(1; p, tv)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma(t; p, v)|_{t=0} = \dot{\gamma}(0; p, v) = v,$$

also ist $d(\exp_p)_0$ die Identität auf T_pM . □

Bezeichne $V_p = \exp_p(U_p) \subseteq M$ das Bild von U_p unter \exp_p . Wir identifizieren $\varphi: T_pM \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ nach Auswahl einer Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n bezüglich g_p (d. h. es gilt $g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ für alle i, j).

Definition 16.14. Die Kartenabbildung $(V_p, \varphi \circ \exp_p^{-1})$ führt *Normalkoordinaten* in V_p um p ein.

Lemma 16.15. *In Normalkoordinaten x^1, \dots, x^n um p gilt $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $\Gamma_{jk}^i(0) = 0$ (und sogar $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0$) für alle i, j, k .*

Beweis. $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ ist bereit durch die Auswahl einer Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n \in T_pM$ bezüglich g_p realisiert.

Um $\Gamma_{jk}^i(0) = 0$ zu zeigen, bemerken wir, dass in Normalkoordinaten $\gamma(t; p, v) = \gamma(1; p, tv) = tv$ für $|t|$ hinreichend klein gilt. Es folgt $\ddot{x}^i(t) = 0$ für alle i und somit

$$\Gamma_{jk}^i(tv)v^jv^k = 0.$$

Insbesondere für $t = 0$ ergibt sich

$$\Gamma_{jk}^i(0)v^jv^k = 0.$$

Da hier $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig ist, folgt $\Gamma_{jk}^i(0) = 0$ für alle i, j, k . Aus letzterer Beziehung ergibt sich weiterhin, dass

$$g^{il}(0) \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(0) + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}(0) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(0) \right) = 0,$$

bzw. wegen $g^{il}(0) = \delta_{il}$, dass

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(0) + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}(0) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(0) = 0.$$

Zyklisches Vertauschen der Indizes j, k, l liefert

$$\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}(0) + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l}(0) - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j}(0) = 0$$

bzw. wegen $g_{ij} = g_{ji}$

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(0) = 0$$

für alle j, k, l . □

Seien nun x^1, \dots, x^n Normalkoordinaten um $p \in M$. Wir führen jetzt eine *radiale Koordinate* r vermöge

$$r = \left((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ein.

Lemma 16.16. *In diesen Koordinaten gilt*

$$g = dr^2 + h,$$

wobei h eine r -abhängige Riemannsche Metrik aus $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist, d. h. in lokalen Koordinaten $\varphi^1, \dots, \varphi^{n-1}$ auf \mathbb{S}^{n-1}

$$h = \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}(r, \varphi) d\varphi^i d\varphi^j$$

mit $h_{ij} = h_{ji}$ wie üblich.

Beweis. Zusätzlich zu r wählen wir lokale Koordinaten $\varphi^1, \dots, \varphi^{n-1}$ auf \mathbb{S}^{n-1} . Bezüglich dieser Koordinaten müssen wir $g_{1j} = \delta_{1j}$ für alle $j = 1, \dots, n$ zeigen. Wir wissen bereits

$$g_{11}(0) = 1, \quad g_{1j}(0) = 0, \quad 2 \leq j \leq n,$$

da dies richtig ist, wenn man die Euklidische Metrik in Polarkoordinaten schreibt. Wir zeigen jetzt noch, dass $\frac{\partial g_{1j}}{\partial r} = 0$ für alle j ist.

Die Lösungen zu $\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$ mit $x(0) = 0$ ($x^1 = r$, $x^j = \varphi^{j-1}$ für $j \geq 2$) sind gerade durch $\varphi \equiv \text{konst.}$ gegeben. Damit erhalten wir

$$\Gamma_{11}^i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Es folgt $g^{il} \left(2 \frac{\partial g_{1l}}{\partial r} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^l} \right) = 0$ bzw.

$$2 \frac{\partial g_{1l}}{\partial r} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^l} = 0, \quad l = 1, \dots, n.$$

Für $l = 1$ ergibt sich

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial r} = 0,$$

also mit $g_{11}(0) = 1$, dass $g_{11} = 1$, und dann für beliebige l

$$\frac{\partial g_{1l}}{\partial r} = 0,$$

also mit $g_{1l}(0) = \delta_{1l}$, dass $g_{1l} = \delta_{1l}$. □

Wir können jetzt zeigen, dass die durch die Gleichungen

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$$

gegebenen Kurven tatsächlich Kurven lokal kürzester Länge, also Geodäten sind.

Satz 16.17. *Sei $p \in M$. Dann existiert ein $\varrho > 0$, so dass in Riemannschen Polarkoordinaten in $\overline{B(p, \varrho)} = \{q \in M \mid d(p, q) \leq \varrho\}$ für jeden Punkt $q \in \partial B(p, \varrho)$ (also $d(p, q) = \varrho$) genau eine Geodäte kürzester Länge existiert, die p und q verbindet. Diese Kurve ist durch (r, φ) mit $\varphi \equiv \text{konst.}$ gegeben.*

Beweis. Sei $(r(t), \varphi(t))$ für $0 \leq t \leq t^0$ eine Kurve γ , die p, q verbindet. (O. E. d. A. dürfen wir annehmen, dass diese Kurve vollständig in $\overline{B(p, \varrho)}$ verläuft.) Dann

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^{t^0} |\dot{\gamma}(t)|_g dt \\ &\geq \int_0^{t^0} \left(g_{11}(r(t), \varphi(t)) \dot{r}(t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\geq \int_0^{t^0} \dot{r}(t) dt = r(t) \Big|_{t=0}^{t^0} = \varrho. \end{aligned}$$

Gleichheit tritt dabei genau dann ein, wenn $\dot{r}(t) \geq 0$ für alle t und $\varphi(t) \equiv \text{konst.}$ ist. \square

Insbesondere erhalten wir, dass

$$\exp_p(B_{\text{Eukl.}}(0, \varrho')) = B(p, \varrho')$$

für alle $0 < \varrho' \leq \varrho$ gilt, wobei $B_{\text{Eukl.}}(0, \varrho')$ die Euklidische Kugel in $T_p M$ um 0 mit Radius ϱ' (bezüglich der gewählten Normalkoordinaten) ist.

16.1.3 Der Hodge-*-Operator

Lineare Algebra

Sei nun V ein endlich-dimensionaler linearer Raum über \mathbb{R} , wobei $\dim V = n$, mit einem Skalarprodukt (\cdot, \cdot) ¹ und einer ausgezeichneten Orientierung.

Wir arbeiten in der äußeren Algebra $\Lambda^* V = \bigoplus_{q=0}^n \Lambda^q V$. Zum einen stellen wir fest, dass

$$(v, w) = \det \left((v_j, w_k)_{j,k=1}^q \right)$$

für $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_q$, $w = w_1 \wedge \cdots \wedge w_q \in \Lambda^q V$ ein Skalarprodukt auf $\Lambda^q V$ definiert, wobei eine Orthonormalbasis durch

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_q}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leq n,$$

für eine beliebige Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n von V gegeben ist. Sodann definieren wir den Operator

$$*: \Lambda^q V \rightarrow \Lambda^{n-q} V, \quad q = 0, 1, \dots, n.$$

¹Das heißt, (\cdot, \cdot) ist eine symmetrische und positiv-definite Bilinearform auf $V \times V$.

Definition 16.18. Sei e_1, \dots, e_n eine fixierte *positive* Orthonormalbasis von V . Dann definieren wir

$$*(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q}) = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{n-q}},$$

falls $e_{i_1}, \dots, e_{i_q}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-q}}$ eine positive Orthonormalbasis in V ist.

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} *(1) &= e_1 \wedge \dots \wedge e_n, \\ *(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) &= 1. \end{aligned}$$

Lemma 16.19. *Der Hodge*-Operator $*$: $\Lambda^q V \rightarrow \Lambda^{n-q} V$ hängt vom Skalarprodukt (\cdot, \cdot) und der Orientierung in V ab, ist jedoch unabhängig von der gewählten positiven Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n in V .*

Beweis. Folgt später. □

Lemma 16.20. *Es gilt*

$$** = (-1)^{q(n-q)}$$

auf $\Lambda^q V$.

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} ** (e_1 \wedge \dots \wedge e_q) &= *(e_{q+1} \wedge \dots \wedge e_n) \\ &= (-1)^{q(n-q)} e_1 \wedge \dots \wedge e_q, \end{aligned}$$

da $e_{q+1} \wedge \dots \wedge e_n \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_q = (-1)^{q(n-q)} e_1 \wedge \dots \wedge e_n$. □

Lemma 16.21. *Das Skalarprodukt $(v, w) = \det((v_j, w_k))_{j,k=1}^q$ für $v = v_1 \wedge \dots \wedge v_q$, $w = w_1 \wedge \dots \wedge w_q \in \Lambda^q V$ schreibt sich als*

$$(v, w) = *(v \wedge *w).$$

Beweis. Es ist ausreichend, diese Beziehung für $v = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q}$, $w = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_q}$ und eine gegebene positiv orientierte Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n in V zu zeigen. Dabei dürfen wir $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n$ annehmen.

1. Fall. Gilt $\{i_1, \dots, i_q\} \neq \{j_1, \dots, j_q\}$, so sind beide Seiten in der zu zeigenden Gleichheit gleich Null, also gilt diese Gleichheit in diesem Fall.

2. Fall. Gilt $\{i_1, \dots, i_q\} = \{j_1, \dots, j_q\}$, so haben wir $v = w$ und

$$(v, w) = |v|^2 = 1$$

sowie

$$*(v \wedge *w) = *(v \wedge *v) = *(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = 1.$$

Auch in diesem Fall sind beide Seiten gleich. □

Lemma 16.22. *Ist v_1, \dots, v_n eine beliebige positive Basis in V , so gilt*

$$*(1) = \frac{1}{\sqrt{\det((v_j, v_k))_{j,k=1}^n}} v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n.$$

Beweis. Es gilt $v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \alpha e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ mit $\alpha > 0$. Weiterhin ist

$$\alpha^2 = |v_1 \wedge \dots \wedge v_n|^2 = \det((v_j, v_k))$$

und damit

$$\begin{aligned} *(1) &= e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \alpha^{-1} v_1 \wedge \dots \wedge v_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det((v_j, v_k))_{j,k=1}^n}} v_1 \wedge \dots \wedge v_n. \end{aligned}$$

□

Der Hodge*-Operator auf Mannigfaltigkeiten

Sei nun (M^n, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Metrik g gestattet es uns, Tangential- und Kotangentialräume zu identifizieren; die Abbildung

$$T_p M \rightarrow T_p^* M, \quad \mathbf{t} \mapsto g(\mathbf{t}, \cdot)$$

für $p \in M$ ist nämlich ein Isomorphismus. Dies gestattet uns weiterhin, das auf $T_p M$ gegebene Skalarprodukt und die auf $T_p M$ gegebene Orientierung nach $T_p^* M$ herüberzuziehen. In lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n in $U \subseteq M$ erhalten wir, dass der Tangentialvektor $\frac{\partial}{\partial x^j}$ dem Kotangentialvektor $g_{jk} dx^k$ entspricht, da

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = g_{jl} = g_{jk} dx^k \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right).$$

Dementsprechend ist das Skalarprodukt auf $T^* M$ durch

$$g(dx^j, dx^k) = g^{jk}$$

mit $(g^{jk}) = (g_{jk})^{-1}$ gegeben. Zudem ist die Basis dx^1, \dots, dx^n positiv orientiert in $T_p^* M$, falls $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ positiv orientiert in $T_p M$ ist. Schließlich erhalten wir den *-Operator

$$*: \Lambda^q T_p^* M \rightarrow \Lambda^{n-q} T_p^* M.$$

Definition 16.23.

$$*: \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^{n-q}(M)$$

bezeichnet den durch $*: \Lambda^q T_p^* M \rightarrow \Lambda^{n-q} T_p^* M$ für $p \in M$ induzierten Operator.

Lemma 16.24. *Für $1 \in \Omega^0(M)$ gilt*

$$*(1) = \sqrt{\det(g_{jk})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Insbesondere ist die durch den Ausdruck auf der rechten Seite in lokalen Koordinaten gegebene n -Form global auf M definiert.

Beweis. Dies folgt aus obigem Lemma und der Feststellung, dass $\det(g^{jk}) = \det(g_{jk})^{-1}$ gilt. \square

Definition 16.25. Die in diesem Lemma definierte n -Form heißt auch die *Volumenform* von (M^n, g) .

Von nun an sei M zusätzlich *kompakt*. Dann können wir als erstes ein Skalarprodukt auf $\Omega^q(M)$ definieren.

Definition 16.26. Für $\omega, \omega' \in \Omega^q(M)$ setzen wir

$$(\omega, \omega') = \int_M g_p(\omega_p, \omega'_p) * (1).$$

Lemma 16.27. *Es gilt*

$$(\omega, \omega') = \int_M \omega \wedge *\omega'.$$

Beweis. Für V wie oben und $v \in \Lambda^n V$ gilt offenbar $*(v) * (1) = v$. Folglich gilt

$$(\omega, \omega') = \int_M g(\omega, \omega') * (1) = \int_M *(\omega \wedge *\omega') * (1) = \int_M \omega \wedge *\omega'.$$

\square

Bemerkung. $\Omega^q(M)$ mit dem angegebenen Skalarprodukt ist ein *Prähilbertraum*. Die Vervollständigung dieses Prähilbertraumes (siehe die Vorlesungen „Funktionalanalysis“ und „Maßtheorie“) wird mit

$$L^2(M; \Lambda^q T^* M)$$

bezeichnet. Die induzierte Norm auf $L^2(M; \Lambda^q T^* M)$ (und auf $\Omega^q(M)$) bezeichnen wir mit $\| \cdot \|$.

Definition 16.28. Der Operator $\delta: \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^{q-1}(M)$ wird durch

$$\delta = (-1)^{n(q+1)+1} * d*$$

erklärt.

Satz 16.29. *Für $\omega \in \Omega^{q-1}(M)$, $\eta \in \Omega^q(M)$ gilt*

$$(d\omega, \eta) = (\omega, \delta\eta).$$

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge *\eta) &= (d\omega) \wedge (*\eta) + (-1)^{q-1} \omega \wedge (d*\eta) \\ &= (d\omega) \wedge (*\eta) - (-1)^{n(q+1)+1} \omega \wedge (* * d*\eta) \\ &= (d\omega) \wedge (*\eta) - \omega \wedge (*\delta\eta). \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Stokes ist $\int_M d(\omega \wedge *\eta) = 0$, also gilt

$$(d\omega, \eta) = \int_M (d\omega) \wedge *\eta = \int_M \omega \wedge (*\delta\eta) = (\omega, \delta\eta).$$

\square

Damit können wir jetzt den Laplace-Operator auf q -Formen einführen.

Definition 16.30. (i) Der *Laplace-Operator* Δ ist auf q -Formen durch

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

gegeben.

(ii) Eine q -Form ω im Kern von Δ (d. h. es gilt $\Delta\omega = 0$) heißt *harmonisch*. Der Raum aller harmonischen q -Formen wird mit $\mathcal{H}^q(M)$ bezeichnet.

Lemma 16.31. Für eine q -Form $\omega \in \Omega^q(M)$ gilt $\Delta\omega = 0$ genau dann, wenn $d\omega = 0$, $\delta\omega = 0$ ist.

Beweis. (\Leftarrow) Klar.

(\Rightarrow) Sei $\Delta\omega = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta\omega, \omega) = (\delta d\omega, \omega) + (d\delta\omega, \omega) \\ &= \|d\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2, \end{aligned}$$

also $d\omega = 0$, $\delta\omega = 0$. □

Satz 16.32. Auf Funktionen schreibt sich der Laplace-Operator Δ als

$$\Delta = -\operatorname{div} \circ \operatorname{grad} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

mit $g = \det(g_{jk})$, wobei

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} &= \nabla_g: C^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M; TM), \\ \operatorname{div} &= \nabla': C^\infty(M; TM) \rightarrow C^\infty(M; \mathbb{R}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \nabla_g f &= g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j}, \\ \operatorname{div} X &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} X^j) \end{aligned}$$

in lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n in M .

Beweis. Auf $\Omega^0(M)$ gilt $\delta = 0$, also $\Delta = \delta \circ d$. Bezeichnet g die Identifikation $C^\infty(M; TM) \xrightarrow{\cong} \Omega^1(M) = C^\infty(M; T^*M)$, so $\Delta = -\operatorname{div} \circ \operatorname{grad}$ mit $\operatorname{grad} = g^{-1}d$ und $\operatorname{div} = -\delta g = *d * g$.

Wir erhalten

$$\operatorname{grad}: f \xrightarrow{d} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \xrightarrow{g^{-1}} g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

sowie

$$\begin{aligned} \operatorname{div}: X^j \frac{\partial}{\partial x^j} &\xrightarrow{g} g_{jk} X^j dx^k \\ &\xrightarrow{*} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sqrt{g} X^j dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &\xrightarrow{d} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} X^j) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &\xrightarrow{*} \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} X^j). \end{aligned}$$

Hierbei ist die Abbildung $\sum_k g_{jk} dx^k \xrightarrow{*} (-1)^{j-1} \sqrt{g} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n$ eine Aufgabe in der aktuellen Übungsgruppe. \square

Beispiel 16.33. Im \mathbb{R}^n mit der Euklidischen Metrik $g = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2$ haben wir $g_{jk} = \delta_{jk}$ und damit $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right)$ und $\operatorname{div} X = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X^j}{\partial x^j}$ wie zuvor. Hier ist der Laplace-Operator tatsächlich der geometrische (negative) Laplace-Operator $\Delta = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

16.2 Die Hodge-Zerlegung

16.2.1 Einige Fakten aus der Theorie der Hilberträume

Details hierzu finden sich in vielen Lehrbüchern, z. B. W. Rudin "Functional Analysis", K. Yosida "Functional Analysis", etc.

Sei H ein reeller separabler² Hilbertraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) . Insbesondere ist H ein vollständiger normierter Raum mit der Norm $u \mapsto \|u\| = (u, u)^{1/2}$. Weiterhin gilt die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|, \quad u, v \in H.$$

Ist $M \subseteq H$ ein linearer Unterraum, so bezeichnet

$$M^\perp = \{v \in H \mid (u, v) = 0 \text{ für alle } u \in M\}$$

das *orthogonale Komplement* von M in H .

Satz 16.34. (i) M^\perp ist ein abgeschlossener Unterraum von H und es gilt $M^{\perp\perp} = \overline{M}$.

²Separabel bedeutet, dass H eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt.

(ii) Ist M abgeschlossen, so gilt

$$H = M \oplus M^\perp.$$

Man sagt, dass eine Folge $\{u^m\} \subset H$ schwach gegen $u \in H$ konvergiert, im Zeichen $u^m \rightharpoonup u$ für $m \rightarrow \infty$, falls

$$(u^m, v) \rightarrow (u, v) \text{ für } m \rightarrow \infty$$

und alle $v \in H$.

Eigenschaften

(a) Jede (stark) konvergente Folge ist schwach konvergent, und zwar gegen denselben Grenzwert.

(b) Gilt $u^m \rightharpoonup u$ für $m \rightarrow \infty$, so

$$\|u\| \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u^m\|.$$

Beispiel 16.35. Ist $\{e^m\}$ eine Orthonormalbasis in H , so schreibt sich jedes $u \in H$ als

$$u = \sum_m (u, e^m) e^m.$$

Dabei gilt

$$\|u\|^2 = \sum_m |(u, e^m)|^2.$$

Insbesondere gilt $(u, e^m) \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$, also $e^m \rightharpoonup 0$ für $m \rightarrow \infty$. Es ist jedoch $e^m \not\rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$.

Satz 16.36 (Schwache Kompaktheit der Einheitskugel in H). *Aus jeder beschränkten Folge $\{u^m\}$ in H lässt sich eine schwach konvergente Teilfolge auswählen.*

Mit H' bezeichnen wir den *topologischen* Dualraum zu H , d. h. den Raum aller *beschränkten* Linearformen $\Phi: H \rightarrow \mathbb{R}$. Beschränktheit bedeutet, dass

$$|\Phi(u)| \leq C \|u\|, \quad u \in H,$$

für eine geeignete Konstante $C \geq 0$. Das kleinste derartige C ist die *Norm* $\|\Phi\|$ von Φ in H' , d. h.

$$\|\Phi\| = \sup_{\|u\| \leq 1} |\Phi(u)|.$$

Satz 16.37 (Rieszscher Darstellungssatz). *Die Abbildung $H \rightarrow H'$, $u \mapsto (u, \cdot)$ ist ein normerhaltender linearer Isomorphismus.*

Wenn bequem, so können wir also H und H' identifizieren.

16.2.2 Die Räume $H^s\Omega^q(M)$ für $s = 1, 0, -1$

Ab sofort sei M wieder kompakt.

Bemerkung. Ist E ein Vektorbündel über M , so haben wir die *Sobolevräume* $H^s(M; E)$ für $s \in \mathbb{R}$ von (verallgemeinerten) Schnitten des Bündels E der Sobolevglattheit s . Wir interessieren uns hier für den Fall $E = \Lambda^q T^*M$ und schreiben dann

$$H^s\Omega^q(M) = H^s(M; \Lambda^q T^*M).$$

Definition 16.38. (i) Der Raum $L^2\Omega^q(M)$ ist die Vervollständigung von $\Omega^q(M)$ bezüglich der Norm

$$\omega \mapsto \|\omega\| = \left(\int_M \omega \wedge * \omega \right)^{1/2}.$$

(ii) Der Raum $H^1\Omega^q(M)$ ist die Vervollständigung von $\Omega^q(M)$ bezüglich der Norm

$$\omega \mapsto \|\omega\|_1 = \left(\|\omega\|^2 + \|d\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2 \right)^{1/2}.$$

Offenbar bettet der Raum $H^1\Omega^q(M)$ *stetig* und *dicht* in den Raum $L^2\Omega^q(M)$ ein. Im Weiteren identifizieren wir

$$L^2\Omega^q(M) \cong L^2\Omega^q(M)'$$

vermöge des Rieszschen Darstellungssatzes und definieren dann:

Definition 16.39. Der Raum $H^{-1}\Omega^q(M)$ ist der Dualraum zu $H^1\Omega^q(M)$ bezüglich des Skalarproduktes in $L^2\Omega^q(M)$.

Dies bedeutet, dass wir $H^{-1}\Omega^q(M) = H^1\Omega^q(M)'$ setzen und diese Räume vermöge

$$H^1\Omega^q(M) \xrightarrow{i} L^2\Omega^q(M) \cong L^2\Omega^q(M)' \xrightarrow{i'} H^{-1}\Omega^q(M)$$

zueinander in Beziehung bringen. Insbesondere wird jedes $\omega' \in L^2\Omega^q(M)$ vermöge

$$H^1\Omega^q(M) \ni \omega \mapsto (\omega, \omega')$$

zu einem beschränkten linearen Funktional auf $H^1\Omega^q(M)$.

Als Norm auf $H^{-1}\Omega^q(M)$ definieren wir

$$\eta \mapsto \|\eta\|_{-1} = \sup_{\|\omega\|_1 \leq 1} |(\eta, \omega)|,$$

wobei (\cdot, \cdot) die Dualpaarung zwischen $H^{-1}\Omega^q(M)$ und $H^1\Omega^q(M)$ bezeichnet. Wir sehen nun, dass

$$\begin{aligned} d &\in \mathcal{L}(H^1\Omega^q(M), L^2\Omega^{q+1}(M)), \\ \delta &\in \mathcal{L}(H^1\Omega^q(M), L^2\Omega^{q-1}(M)). \end{aligned}$$

Dual dazu erhalten wir

$$\begin{aligned} d' &\in \mathcal{L}(L^2\Omega^{q+1}(M), H^{-1}\Omega^q(M)), \\ \delta' &\in \mathcal{L}(L^2\Omega^{q-1}(M), H^{-1}\Omega^q(M)). \end{aligned}$$

Wegen

$$(d\omega, \omega') = (\omega, \delta\omega'), \quad \omega \in \Omega^{q-1}(M), \quad \omega' \in \Omega^q(M)$$

können wir $d' = \delta$ und $\delta' = d$ identifizieren und erhalten

$$\begin{aligned} d &\in \mathcal{L}(H^{\sigma+1}\Omega^q(M), H^\sigma\Omega^{q+1}(M)), \quad \sigma = 0, -1, \\ \delta &\in \mathcal{L}(H^{\sigma+1}\Omega^q(M), H^\sigma\Omega^{q-1}(M)), \quad \sigma = 0, -1. \end{aligned}$$

Somit haben wir:

Lemma 16.40. *Der Laplace-Operator $\Delta = d\delta + \delta d$ bildet $H^1\Omega^q(M)$ nach $H^{-1}\Omega^q(M)$ (beschränkt und) stetig ab.*

16.2.3 Schwache Formulierung

Wir interessieren uns jetzt für die Lösbarkeit der Gleichung

$$\Delta\omega = \eta$$

mit einem gegebenen $\eta \in H^{-1}\Omega^q(M)$.

Satz 16.41. *Sei $\omega \in H^1\Omega^q(M)$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) ω löst die Gleichung $\Delta\omega = \eta$.

(b) Es gilt

$$(d\omega, d\omega') + (\delta\omega, \delta\omega') = (\eta, \omega'), \quad \forall \omega' \in H^1\Omega^q(M).$$

Hier steht auf der rechten Seite die Paarung eines Elements aus $H^{-1}\Omega^q(M)$ mit einem Element aus $H^1\Omega^q(M)$.

(c) Es gilt

$$(d\omega, d\omega') + (\delta\omega, \delta\omega') = (\eta, \omega'), \quad \forall \omega' \in \Omega^q(M).$$

Beweis. Um die Äquivalenz von (a), (b) einzusehen, folge man den Identifikationen, die zu

$$H^1\Omega^q(M) \xrightarrow{i} L^2\Omega^q(M) \cong L^2\Omega^q(M)' \xrightarrow{i'} H^{-1}\Omega^q(M)$$

geführt haben. (b), (c) sind äquivalent, da $\Omega^q(M)$ dicht in $H^1\Omega^q(M)$ ist. \square

Folgerung 16.42. Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung $\Delta\omega = \eta$ für ein gegebenes $\eta \in H^{-1}\Omega^q(M)$ ist, dass $\eta \in (\ker \Delta)^\perp$ gilt, wobei hier $(\ker \Delta)^\perp$ bezüglich der Dualpaarung zwischen $H^1\Omega^q(M)$ und $H^{-1}\Omega^q(M)$ genommen wurde.

Beweis. Für $\omega' \in \ker \Delta$ wird die linke Seite in (b) des vorigen Satzes zu

$$(d\omega, d\omega') + (\delta\omega, \delta\omega') = (\omega, \delta d\omega') + (\omega, d\delta\omega') = (\omega, \Delta\omega') = 0.$$

Also muss $(\eta, \omega') = 0$ gelten. \square

16.2.4 Das Dirichlet-Prinzip

Später werden wir sehen, dass obige Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung $\Delta\omega = \eta$ auch hinreichend ist. Wir betrachten dazu für $\omega \in (\ker \Delta)^\perp \cap H^1\Omega^q(M)$ das Funktional

$$J(\omega) = \frac{1}{2}\|d\omega\|^2 + \frac{1}{2}\|\delta\omega\|^2 - (\eta, \omega),$$

wobei $\eta \in (\ker \Delta)^\perp$ gegeben ist.

Satz 16.43. $\omega \in (\ker \Delta)^\perp \cap H^1\Omega^q(M)$ löst genau dann die Gleichung $\Delta\omega = \eta$, wenn

$$J(\omega) = \inf\{J(\omega') \mid \omega' \in (\ker \Delta)^\perp \cap H^1\Omega^q(M)\}$$

gilt.

Beweis. Sei zuerst $J(\omega) = \inf J(\omega')$, wobei das Infimum über die ω' wie angegeben erstreckt wird. Dann gilt für ein beliebiges $\omega' \in (\ker \Delta)^\perp \cap H^1\Omega^q(M)$, dass

$$0 = \frac{d}{d\epsilon} J(\omega + \epsilon\omega') \Big|_{\epsilon=0} = (d\omega, d\omega') + (\delta\omega, \delta\omega') - (\eta, \omega').$$

Weiterhin gilt für $\omega'' \in \ker \Delta$, dass

$$(d\omega, d\omega'') + (\delta\omega, \delta\omega'') = (\omega, \Delta\omega'') = 0 = (\eta, \omega'')$$

wegen der Voraussetzung $\eta \in (\ker \Delta)^\perp$ an η . Insgesamt ist also (b) des vorigen Satzes erfüllt, d. h. ω löst $\Delta\omega = \eta$.

Ist umgekehrt $\omega \in (\ker \Delta)^\perp \cap H^1\Omega^q(M)$ eine Lösung von $\Delta\omega = \eta$, so gilt für beliebiges $\omega' \in (\ker \Delta)^\perp \cap H^1\Omega^q(M)$

$$\begin{aligned} J(\omega + \omega') &= \frac{1}{2}\|d\omega + d\omega'\|^2 + \frac{1}{2}\|\delta\omega + \delta\omega'\|^2 - (\eta, \omega + \omega') \\ &= J(\omega) + (d\omega, d\omega') + (\delta\omega, \delta\omega') - (\eta, \omega') + \frac{1}{2}\|d\omega'\|^2 + \frac{1}{2}\|\delta\omega'\|^2 \\ &\geq J(\omega). \end{aligned}$$

□

16.2.5 Konstruktion eines minimierenden Elements

Es verbleibt, das Funktional $J(\omega)$ auf $(\ker \Delta)^\perp \cap H^1\Omega^q(M)$ zu minimieren. Dazu benötigen wir ein weiteres Resultat:

Satz 16.44 (Rellich-Kondrachov). *Die Einbettung $H^1\Omega^q(M) \hookrightarrow L^2\Omega^q(M)$ ist kompakt. Das bedeutet im vorliegenden Fall, dass man aus jeder in $H^1\Omega^q(M)$ beschränkten Folge $\{\omega^m\}$ eine in $L^2\Omega^q(M)$ (stark) konvergente Teilfolge $\{\omega^{m_i}\}$ auswählen kann.*

Bemerkung. Die Kompaktheit von M ist für die Gültigkeit dieses Resultats entscheidend.

Lemma 16.45. *Es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $\omega \in (\ker \Delta)^\perp \cap H^1\Omega^q(M)$ die Abschätzung*

$$\|\omega\|^2 \leq c \left(\|d\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2 \right)$$

gilt.

Beweis. Angenommen, dies wäre nicht der Fall.

Dann gibt es eine Folge $\{\omega^m\}$ in $(\ker \Delta)^\perp \cap H^1\Omega^q(M)$ mit $\|\omega^m\| = 1$ und

$$\|d\omega^m\|^2 + \|\delta\omega^m\|^2 \leq \frac{1}{m}$$

für alle m . Es folgt dann $d\omega^m \rightarrow 0$ in $L^2\Omega^{q+1}(M)$ und $\delta\omega^m \rightarrow 0$ in $L^2\Omega^{q-1}(M)$ für $m \rightarrow \infty$. Insbesondere ist die Folge $\{\omega^m\}$ in $H^1\Omega^q(M)$ beschränkt. Nach dem Satz von Rellich–Kondrachov dürfen wir demnach $\omega^m \rightarrow \omega$ in $H^1\Omega^q(M)$ und $\omega^m \rightarrow \omega$ in $L^2\Omega^q(M)$ für $m \rightarrow \infty$ und ein $\omega \in H^1\Omega^q(M)$ annehmen. Es gilt dann $\omega \in (\ker \Delta)^\perp$ sowie $d\omega^m \rightarrow d\omega$ in $L^2\Omega^{q+1}(M)$ und $\delta\omega^m \rightarrow \delta\omega$ in $L^2\Omega^{q-1}(M)$ für $m \rightarrow \infty$. Wir erhalten $\|\omega\| = 1$, $d\omega = 0$ und $\delta\omega = 0$, also $\Delta\omega = 0$ und

$$\omega \in \ker \Delta \cap (\ker \Delta)^\perp = \{0\}$$

im Widerspruch zu $\|\omega\| = 1$.

Dieser Widerspruch zeigt, dass es eine Konstante $c > 0$ mit der angegebenen Eigenschaft gibt. \square

Folgerung 16.46. Das Funktional J ist auf $(\ker \Delta)^\perp \cap H^1\Omega^q(M)$ nach unten beschränkt.

Beweis. Aus dem vorigen Lemma folgt, dass es eine Konstante $c' > 0$ mit

$$c' \|\omega\|_{H^1\Omega^q}^2 \leq \left(\|d\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2 \right)$$

für alle $\omega \in (\ker \Delta)^\perp \cap H^1\Omega^q(M)$ gibt. Wir schätzen $J(\omega)$ dann wie folgt ab:

$$\begin{aligned} J(\omega) &= \frac{1}{2} \|d\omega\|^2 + \frac{1}{2} \|\delta\omega\|^2 - (\eta, \omega) \geq \frac{c'}{2} \|\omega\|_1^2 - \frac{1}{c'} \|\eta\|_{-1}^2 - \frac{c'}{4} \|\omega\|_1^2 \\ &\geq \frac{c'}{4} \|\omega\|_1^2 - \frac{1}{c'} \|\eta\|_{-1}^2 \geq -\frac{1}{c'} \|\eta\|_{-1}^2. \end{aligned}$$

\square