

## MATHEMATISCHE MODELLIERUNG: SEMINAR IM MASTER OF EDUCATION

RALF MEYER

Im Schulunterricht wird seit einiger Zeit mehr Wert auf darauf gelegt, Mathematik auf die Wirklichkeit anzuwenden. Eine mathematische Modellierung ist jedoch ein komplexer Prozess mit mehreren Schritten, die ineinander greifen. Einzelne Teile dieses Prozesses für sich liefern kaum einen Erkenntnisgewinn. Insbesondere bringen die mathematischen Handlungen, losgelöst von der mathematischen Modellierung, kaum Einblick in das Anwendungsproblem. Viel kritisiert werden daher Pseudoanwendungen, die weder zum Verständnis der Wirklichkeit noch zum mathematischen Verständnis etwas beitragen. In diesem Seminar soll der Prozess der mathematischen Modellierung daher als Ganzes betrachtet und an einer Reihe von Beispielen eingeübt werden. Daneben bietet das Seminar auch die Gelegenheit, wichtige Konzepte aus der Differenzial- und Integralrechnung zu vertiefen. Oft möchte man qualitative Aussagen über das Verhalten der mathematischen Modelle herleiten und verwendet dabei oft mehr oder weniger tiefliegende mathematische Sätze.

Es gibt interessante mathematische Modellierungsprobleme in den verschiedenen Bereichen, ob Physik, Biologie, Verkehrsplanung oder die Preisfindung in der Wirtschaft. In diesem Seminar werde ich mich auf biologische Probleme konzentrieren. Eine Rechtfertigung hierfür ist der Wunsch, mit dem Seminar auch einen kleinen Beitrag zum Nachhaltigkeitsziel der Biodiversität zu leisten. Einige überraschende Vorgänge in komplexen Ökosystemen lassen sich auch schon in einfachen mathematischen Modellen beobachten. Mit Hilfe dieser Modelle kann man die Vorgänge in Ökosystemen daher besser verstehen und erklären. Ein typisches Beispiel hierfür ist das Umkippen von Gewässern. Wird zu viel Phosphat in ein Gewässer eingeleitet, so kippt es um in einen lebensfeindlichen Zustand. Danach erholt es sich erst wieder, wenn die Phosphateinleitung unter eine andere Schwelle gesenkt wird, die deutlich niedriger ist als die Schwelle, ab der das Gewässer umkippt.

Die Wirklichkeit ist so komplex, dass „exakte“ mathematische Modelle weder möglich noch nützlich sind. Denn je genauer ein Modell, desto mehr Parameter braucht es für die Beschreibung. All diese Parameter müssen aus den vorhandenen Daten geschätzt werden, aber die Auswirkungen dieser Schätzungen auf die Vorhersagen des Modells werden mit der Komplexität des Modells immer undurchsichtiger. Für bestimmte Probleme wie zum Beispiel die Wettervorhersage braucht es natürlich sehr komplexe Modelle. Wir werden uns im Seminar allerdings auf einfachere Modelle beschränken, deren Ziel das Verständnis naturwissenschaftlicher Phänomene ist. Solche Modelle enthalten eigentlich immer vereinfachende Annahmen, die offensichtlich falsch sind. Zum Beispiel werden Populationsgrößen in vielen Modellen als reelle Zahlen angesehen, die bestimmten Differenzialgleichungen genügen sollen – obwohl Populationsgrößen offensichtlich ganzzahlig sind. Darum verdient auch die Übersetzung von der Wirklichkeit zum Mathematischen Modell und zurück besondere Beachtung. Diese Schritte sind auch konzeptionell schwieriger

als die Lösung der mathematischen Probleme, die ein Modell stellt, weil sie sowohl mathematisches als auch fachwissenschaftliches Verständnis benötigen.

Die mathematische Modellierung bietet auch die Gelegenheit, unter Computereinsatz mit Daten zu experimentieren. Man kann das mathematische Modell programmieren und danach ausprobieren, wie es sich verhält, wenn man Anfangswerte und Parameter verändert. Solche Simulationen sind eine verbreitete Methode in den Naturwissenschaften, so dass es sich lohnt, wenn dies auch im Mathematikunterricht in der Schule vorkommt. Deutlich schwieriger ist es, Modelle auch quantitativ auf reale Daten anzuwenden. Dabei müssen Parameter geschätzt, dann Vorhersagen gemacht und mit der Wirklichkeit verglichen werden. Hierbei sind jedoch verschiedene Aspekte schwierig, so dass ich in diesem Seminar darauf verzichten werde. Auf die computergestützte Modellierung möchte ich jedoch nicht verzichten. In den Vorträgen des Seminars sollten daher die folgenden diversen Aspekte jeweils vorkommen, jedoch in unterschiedlicher Gewichtung:

- Übersetzen von wirklichen Problemstellungen in mathematische, und Motivation der dabei auftretenden systematischen Modellierungsfehler;
- Mathematische Sätze beweisen;
- Qualitative Aussagen über spezifische Modelle herleiten und ihre Anwendung auf die Wirklichkeit diskutieren;
- Computerexperimente mit den mathematischen Modellen, Parameter variieren und qualitative Aussagen durch Computerexperimente überprüfen.

Der Computereinsatz ist auch deshalb für den Einsatz der Modellierung in Schulen wesentlich, weil er es erlaubt, die in der mathematischen Biologie verbreiteten Modelle mit Differenzialgleichungen durch Modelle mit Differenzengleichungen zu ersetzen. Letztere setzen keine Differenzialrechnung voraus, so dass ihr Einsatz im Unterricht nicht auf die Oberstufe beschränkt bleibt. Sie sind auch gerade in der Biologie sogar dichter an der Wirklichkeit, weil viele modellierte Größen von Natur aus diskret und nicht kontinuierlich sind.

Die Vortragsthemen sollen die folgenden sein:

- (1) Grundlegendes zum mathematischen Modellieren, am Beispiel eines hängenden Kabels ([1], §1.1, §2.2 Extrema unter Nebenbedingungen, explikative statt deskriptive Modellierung)
- (2) Was ist die „optimale“ Geschwindigkeit für den Verkehrsfluss ([1] §2.1), dazu entweder weitere Literatur zu anderen Verkehrsmodellierungsfragen oder §1.2 Trassierungsaufgaben und der Begriff der Krümmung
- (3) Lineare Differenzengleichungen und ihre Lösungen, logistische Modelle, Linearisierung, Stabilität von Gleichgewichten und Zyklen, Modellierung von bestimmten Insektenpopulationen, Bekämpfung von Insekten, Modellparameter anpassen, ([1] §4. [2] §2.8)
- (4) Populationsmodelle mit Differenzialgleichungen, Qualitatives Verhalten der Lösungen, Trennung der Variablen und damit Existenz von Lösungen ([1] §5.1–2, §5.5)
- (5) Fischfang, Jagdmodelle, ([1] §5.3, Aufgaben)
- (6) Blutalkoholkonzentration: Beispiel einer Abituraufgabe, explikative versus deskriptive Modelle ([1] §5.7)
- (7) Um- und zurückkippen von Seen, Hysterese, andere Beispiele für Hysterese, grafische Erklärung ([1] Aufgabe 5.4. [2] §1.6)?

- (8) Räuber-Beute-Modell 1: Lotka-Volterra, Existenz von Lösungen, Betrachtung empirischer Daten (Luchs und Schneehase) ([1] §6.1–3)
- (9) Räuber-Beute-Modell 2: Ein komplexeres Modell, inklusive Modellbildung, Theorie: Linearisierungssatz Grobman und Hartman) ([1] §6.4)
- (10) Räuber-Beute-Modell 3: Ein weiteres Modell, inklusive Modellbildung, Theorie: Satz von Poincaré-Bendixson) ([1] §6.5)
- (11) Population von Tannenwickler und Balsamtanne, inklusive numerische Simulation und asymptotische Betrachtung 1 ([1] §5.4 und §7.3)
- (12) Population von Tannenwickler und Balsamtanne, inklusive numerische Simulation und asymptotische Betrachtung 2 ([1] §5.4 und §7.3)
- (13) Das SIR-Modell für die Ausbreitung von Epidemien, Steuerung der Epidemieausbreitung, wie wirken Impfungen oder Kontaktbeschränkungen (Teile von [2] §9)
- (14) Varianten des SIR-Modells: Endemische Krankheiten, Herdenimmunität (Teile von [2] §10)

Weitere mögliche Themen hierzu sind die Verteilung bei mehreren Virusvarianten, Verteilung der Infektionen auf Altersgruppen oder räumliche Aspekte (kürzere Forschungsarbeiten)

#### REFERENCES

- [1] Sebastian Bauer, *Mathematisches Modellieren als fachlicher Hintergrund für die Sekundarstufe I+II*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-662-61788-5
- [2] Fred Brauer and Carlos Castillo-Chavez, *Mathematical models in population biology and epidemiology*, 2nd ed., Springer, New York, NY, 2012. doi: 10.1007/978-1-4614-1686-9