

Weihnachtsgeschenke 2022  
Wie werden alle glücklich?

Thomas Schick

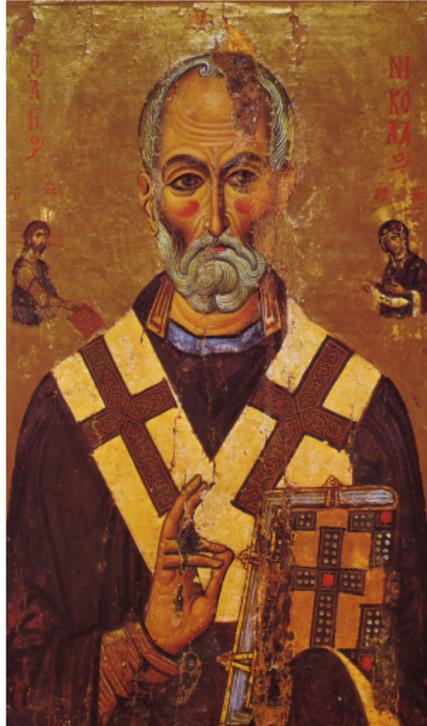
Sorry: materialistischer Ansatz

# Weihnachtsgeschenk-Theorien



- Christkind?

# Weihnachtsgeschenk-Theorien



- Weihnachtsmann?

# Weihnachtsgeschenk-Theorien

- Weihnachtsmann?

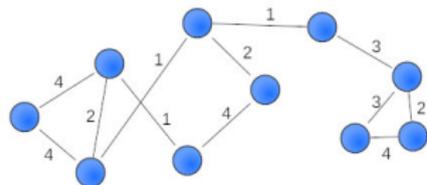


# Weihnachtsgeschenk-Theorien

- Verwandte und Freunde?  
(für ein Bild: bitte einmal rund herum schauen!)
- Weihnachtsspiel mit drei Freunden

# Weihnachtsgeschenke mathematisch

**Beobachtung:** Weihnachtsgeschenke machen im Freundeskreis wird modelliert durch einen Graphen mit gewichteten gerichteten Kanten.



- Ecken: involvierte Personen
- Gewichte der Kanten: Geschenke-Fluss
- Im Beispiel: oben die Alten, unten die Jungen, Geschenke gehen von oben nach unten.

**Satz.** In einem endlichen Geschenke-Graph ist es **nicht** möglich, dass **alle** nach Austausch der Geschenke mindestens ein Paket mehr haben als vorher.

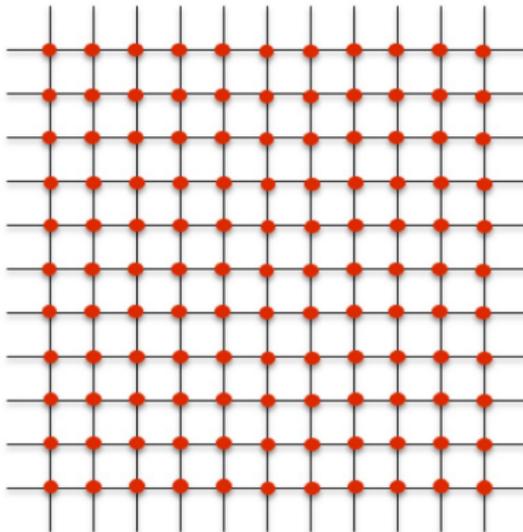
**Beweis.** Übungsaufgabe.

# Hilfe von aussen?

Wechsel zum Web-Browser, um Hilfsvorschläge zu sammeln.

# Unendliche Weiten

Das Modell unseres Geschenke-Graphen könnte nun folgendermaßen aussehen:



# Beispiel, das funktioniert

- Tafel.
- Problem: weit weg (in Amerika) brauchen wir sehr reiche Onkel



# Beispiel, das funktioniert?

- und noch weiter weg noch viel reichere

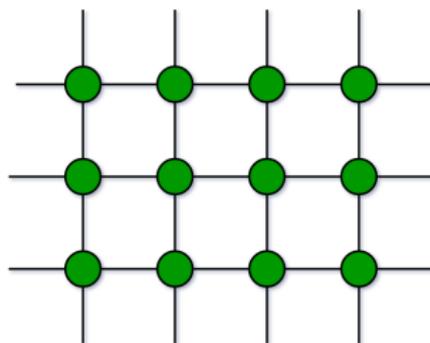


Aber: Ressourcen sind (lokal) endlich, auch ewiges exponentielles Wachstum ist unmöglich (das sollten die WiWis bald lernen).

# Unendliche Weiten - lokal beschränkte Ressourcen

**Frage.** Ist es im  $Z^n$ -Graphen möglich, Geschenke-Austausch so zu organisieren, dass

- anfangs alle maximal  $D > 0$  Geschenke haben
- nachher alle mindestens  $D + 1$  Geschenke haben?



**Definition.** Ein Graph, bei dem dies möglich ist, heißt *weihnachtlich*.

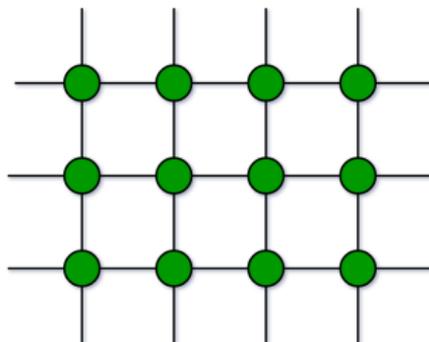
**Antwort.** Der  $Z^n$ -Graph ist nicht weihnachtlich.

# Weihnachtliche Graphen?

**Definition.** Ein Graph mit Eckenmenge  $V$  ist *unweihnachtlich*, wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  eine endliche Teilmenge  $E_\epsilon$  der Ecken gibt, so dass

$$\frac{\text{Anzahl Kanten zwischen } E_\epsilon \text{ und } V \setminus E_\epsilon}{\text{Anzahl Ecken in } E_\epsilon} < \epsilon.$$

**Beispiel.** Der  $Z^n$ -Graph ist unweihnachtlich.



# Weihnachtliche Graphen - noch nicht

**Satz.** Ein Graph, der unweihnachtlich ist, ist nicht weihnachtlich.

**Beweis.** In die Menge  $E_\epsilon$  fließen insgesamt maximal

$$(\text{Anzahl Kanten zwischen } E_\epsilon \text{ und } V \setminus E_\epsilon) \cdot D$$

viele Geschenke, das müsste mindestens

$$\text{Anzahl der Ecken in } E_\epsilon$$

ergeben, wenn  $\epsilon < \frac{1}{D}$  kommt das nicht hin:

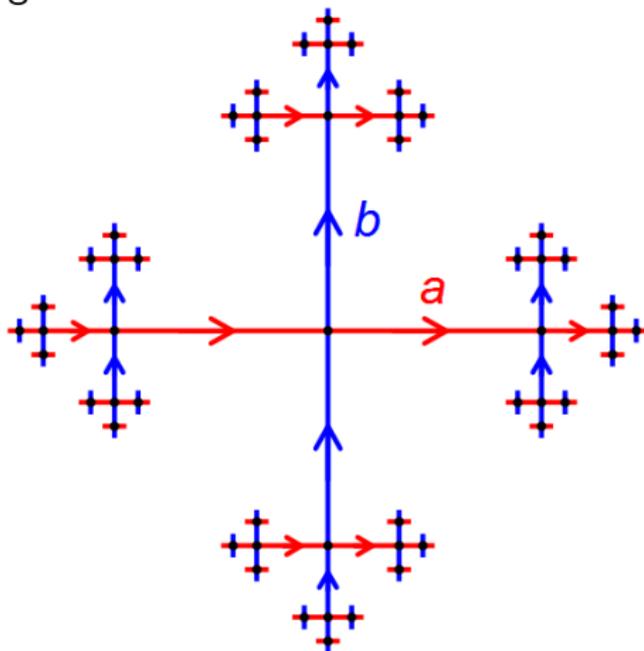
$$(\text{Anzahl Kanten zwischen } E_\epsilon \text{ und } V \setminus E_\epsilon) \cdot D$$

$$< \epsilon \cdot (\text{Anzahl der Ecken in } E_\epsilon) \cdot D < \frac{1}{D} \cdot (\text{Anzahl der Ecken in } E_\epsilon) \cdot D$$

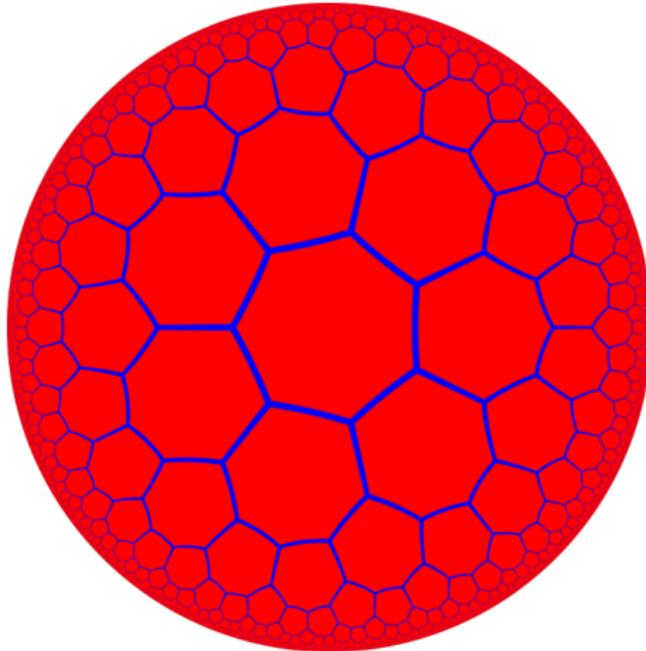
$$< \text{Anzahl der Ecken in } E_\epsilon$$

# Weihnachtliche Graphen - endlich

Juhu, auf Bäumen geht's!



# Weihnachtliche Graphen a la Escher



**Satz.** Jeder Graph, der nicht unweihnachtlich ist, ist weihnachtlich.

**Beweis.** Gar nicht so einfach, folgt aus

GAFA, Geom. funct. anal.  
Vol. 7 (1997) 403 – 419  
1016-443X/97/030403-17 \$ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel 1997

**GAFA** Geometric And Functional Analysis

## EVERY GRAPH WITH A POSITIVE CHEEGER CONSTANT CONTAINS A TREE WITH A POSITIVE CHEEGER CONSTANT

I. BENJAMINI AND O. SCHRAMM

### Abstract

It is shown that every (infinite) graph with a positive Cheeger constant contains a tree with a positive Cheeger constant. Moreover, for every nonnegative integer  $k$  there is a unique connected graph  $T(k)$  that has Cheeger constant  $k$ , but removing any edge from it reduces the Cheeger constant. This minimal graph,  $T(k)$ , is a tree, and every graph  $G$  with Cheeger constant  $h(G) \geq k$  has a spanning forest in which each component is isomorphic to  $T(k)$ .

### 1 Introduction

Let  $G$  be an infinite, locally finite graph; that is, every vertex has finitely

## **Frage ans Publikum:**

Wünschen Sie sich, dass wir untersuchen, ob das ein exponentielles Phänomen ist?

# Vokabel-Übersetzungen

heute	üblicherweise
unweihnachtliche Graphen	mittelbare/amenable Graphen
nicht unweihnachtlicher Graph	Graph mit positiver Cheeger-Konstante
weihnachtliche Graphen	Graphen, die ein Ponzi-Schema/Kettenbrief-Schema zulassen (Terminologie nach John Roe)

