Kurz-Skript zu „gewöhnliche Differenzialgleichungen“

Thomas Schick*

Last compiled 15. März 2007; last edited 13.4. 2006 or later

Hinweis: dieses Skript ist wurde nicht korrekturgelesen. Es gibt mit Sicherheit eine Menge Fehler. Für weitere Hinweise auf Fehler schreiben Sie bitte eine email an schick@uni-math.gwdg.de. Das Skript stellt nur eine Approximation an die Vorlesung dar: Nicht alle Sätze und Beweise werden notwendigerweise vorgeführt, andererseits mögen nicht alle behandelten Sätze und Beispiele hier notiert sein.

Inhaltsverzeichnis

*email: thomas.schick@uni-math.gwdg.de

1 Einleitung

1.1 Frage. Was ist eine (gewöhnliche) Differenzialgleichung (laut Duden auch Differentialgleichung)?

Eine Differenzialgleichung für eine (gesuchte) Funktion f ist eine Gleichung, welcher f und Ableitungen von f enthält.

Oft wird man gleich mit einem System von Gleichungen konfrontiert, wir sprechen dann trotzdem von einer Differenzialgleichung (man kann nämlich immer in einerGleichung für eine vektorwertige Funktion umwandeln).

Beispiele: $f'(t) = f(t)^2$, $f''(t) \cdot f'(t) \cdot f(t) = \sqrt{\exp(f(t)/f'(t))}$.

Eine Differenzialgleichung, bei der die (gesuchte) Funktion f nur von einer Variablen abhängt (wie in den obigen zwei Fällen) heißt *gewöhnliche Differenzialgleichung*.

Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen (bei denen die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängt, und in denen partielle Ableitungen nach den verschiedenen Variablen auftritt) ist deutlich anders und schwieriger als die Theorie der gewöhnlichen DGls, welche in dieser Vorlesung behandelt wird.

Bsp für eine partielle DGl (System): $du(x,y)/dx = dv(x,y)/dy$ und $du(x,y)/dy = -dv(x,y)/dx$. (Ist dies erfüllt, so sind u und v Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$).

Die Funktionen werden oft nicht einfach nur $\mathbb{R}$- (oder $\mathbb{C}$)-wertig sein, sondern vektorwertig. (Und später werden wir noch weitere Verallgemeinerungen kennen lernen).

1.2 Frage. Wozu sind (gewöhnliche) Differenzialgleichungen gut?

Sie tauchen in den vielfältigsten Kontexten auf, insbesondere bei der Modellierung zeitabhängiger Vorgänge.

1.3 Beispiel. (1) Bakterienwachstumg: für kleine Kulturen ist das Wachstum proportional zur schon vorhandenen Kultur.

(2) Radioaktiver Zerfall: (immer) ist die Zerfallsrate proportional zur vorhandenen Materialmenge. Grund: die Zerfallswahrscheinlichkeiten der einzelnen Atome sind unabhängig voneinander und alle gleich.

Ausnahme: induzierter Zerfall, z.B. Kernspaltung.

(3) logistische Differenzialgleichung für die Entwicklung einer Population mit beschränkten Ressourcen: $P' = \alpha P - \beta P^2$, $\alpha, \beta > 0$ für Bakterienkultur in einer (endlichen) Petrischale.

(4) Ausbreitung von Epidemie-Infizierten (vor dem Ausbruch) in einer Stadt ohne grossen Reiseverkehr: die Änderung der Anzahl der Infizierten ist gegeben durch die (durchschnittliche) Zahl von Kontakten k, die bereits vorhandenen Anzahl von Infizierten, die Übertragungswahrscheinlichkeit q und den Nicht-schon-Infiziert-Anteil, also $I' = qkI(N-I)/N$, wenn N die Einwohnerzahl ist.

Spannender ist natürlich, die Kontakte feiner aufzuschlüsseln (Schulen, öffentliche Einrichtungen); um ggf. auch Maßnahmen ergreifen zu können (wie verhindert man eine katastrophale Grippeepidemie).

(5) Freier Fall: die Beschleunigung (Änderung der Geschwindigkeit) ist konstant

(6) Wurf mit Luftwiderstand: die Beschleunigung ist gebremst (also verringert) durch einen Summanden, welcher proportional zur Geschwindigkeit ist. Hier gibt es ausserdem drei Komponenten der gesuchten Funktion (die drei Ortskoordinaten).

(7) Eigenschwingungen einer Saite: $f(x,t) = a(x)\sin(\omega t) + b(x)\cos(\omega t)$ (f die Auslenkung, ω die Frequenz). Die (zeitliche) Beschleunigung ist proportional zur räumlichen Steigungsänderung. Die Eigenschwinung-Bedingung macht daraus eine gewöhnliche DGl (allgemein ist es eine partielle).

1.4 Aufgabe. Leite die zugehörigen Differentialgleichungen zu den obigen Problemen her.

1.5 Frage. Was machen wir mit Differentialgleichungen?

- Finde (spezielle) Lösungen.
- Finde alle Lösungen (und beweise, dass es keine weiteren gibt): Eindeutigkeit von Lösungen
- Beweise zumindest Existenz von Lösungen.
- Bestimme (charakterisierende) Eigenschaften der Lösungen
- Beweise ggf auch, dass Lösungen nicht existieren.
- Alles wie oben, wobei zusätzliche Bedingungen gestellt werden, insbesondere Werte der Funktion (und ihrer Ableitungen) an gewissen Stellen.

  Beispiel (für obige Beispiele): Die Größe der Bakterienpopulation, die Menge radioaktiven Materials, die Anzahl der Infizierten zu einem festen Zeitpunkt ist vorgegeben. Fall: Anfangsort und -geschwindigkeit vorgegeben. Wurf: Anfangs- und Zielort vorgegeben (für den Zielort aber nicht der Zeitpunkt). Saite: falls eingespannt: Auslenkung am Anfang und Ende der Saite vorgegeben (nämlich Null).
- Beschreibe Stabilität/Instabilität der Lösungen unter (kleinen) Änderungen der Ausgangsdaten
- finde numerische Lösungsmethoden

1.6 Aufgabe. Löse die Differentialgleichungen aus Beispiel 1.3.

1.7 Satz. ***Es gibt kein allgemeines Lösungsverfahren für Differentialgleichungen. Sogar numerische Behandlungen sind im allgemeinen nicht sinnvoll durchführbar.***

Trotzdem gibt es natürlich ganz viele wichtige spezielle Arten von Differentialgleichungen, die man sowohl theoretisch als auch numerisch gut behandeln kann. Genau dies wird in dieser Vorlesung geschehen; dabei liegt der Schwerpunkt auf der Theorie. Genauere Definition (was eine DGl ist) werden dann für die speziellen Klassen, die betrachtet werden, gegeben.

Es gibt viele spezielle Lösungsverfahren ("klassisch") für diverse Klassen von DGls. Diese werden wir verstreut am Anfang des Semesters kennenlernen; und dazu immer wieder etwas Theorie durchnehmen.

2 Richtungsfelder

Ohne Anfangsbedingungen wird es in der Regel immer ganz viele verschiedene Lösungen einer Differenzialgleichung geben. In speziellen Fällen kann man sich grafisch ein schönes Bild über die verschiedenen Lösungen machen.

Dies tun wir für eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = f(t, y).$$

Wir erhalten so für jeden Punkt des Definitionsbereichs von f eine Steigung; ein dort definiertes *Steigunsfeld* oder *Richtungsfeld*. Stellt man dies (näherungsweise) graphisch dar, kann man oft die Form der zugehörigen Lösungen erkennen.

Wir werden uns im folgenden hauptsächlch mit Differenzialgleichungen der obigen Form beschäftigen (oder mit solchen, die in diese Form gebracht werden können).

3 Elementare Integrationsmethoden I: Trennung der Variablen

3.1 Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval, $f\colon I \to \mathbb{C}$, $t_0 \in I$ stetig. Dann hat $x'(t) = f(t)$ die eindeutige Lösung*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt$$

mit $x(t_0) = x_0$.

Beweis. Integrieren. □

3.2 Bemerkung. Allgemein wird das Lösen von Differenzialgleichungen "Integrieren" genannt.

Satz 3.1 ist ein Spezialfall des folgenden Satzes; welcher die Methode der "Trennung der Variablen" genannt wird.

3.3 Satz. *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f\colon I \to \mathbb{C}$, $g\colon J \to \mathbb{C}$ stetig. Sei $t_0 \in I$ und $x_0 \in J$.*

Betrachte die Gleichung $x'(t) = f(t)g(x(t))$ für eine Differenzierbare Funktion $x\colon I \to \mathbb{C}$ mit Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$.

Falls $g(x_0) = 0$, so ist $x(t) := x_0$ eine Lösung dieses Anfangswertproblems.

Falls $g(x_0) \neq 0$, so gibt es $\epsilon > 0$, so dass

$$x(t) := G^{-1}(G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds)$$

eindeutige Lösung des Anfangswertproblems ist. Hierbei ist G eine Stammfunktion von $1/g$, welche auf einer geeigneten Umgebung von x_0 definiert ist.

Besser noch: Sind $x, y\colon I \to \mathbb{C}$ Lösungen mit $g(x(t)) \neq 0 \neq g(y(t))$ für alle $t \in I$ und $x(t_0) = y(t_0)$, so stimmen x und y überein.

Beweis. Ausrechnen zeigt, dass es sich tatsächlich um Lösungen handelt (leite $G(x(t))$ ab).

Formale Lösung: $dx/dt = f(t)g(x)$ ist gleichbedeutend zu $dx/g(x) = f(t)\,dt$; dann integriert man auf beiden Seiten, dies liefert $G(x(t)) - G(x_0 = x(t_0)) = \int_{t_0}^{t} f(x)$ und man muss nur noch nach $x(t)$ auflösen.

Für die Eindeutigkeit folgt: $x'(t)/g(x(t)) = y'(t)/g(y(t))$. Man integriere beide Seiten von t_0 bis $t \in I$, substituiere und erhält direkt das gewünschte Ergebnis. □

3.4 Beispiel. $x'(t) = 3(x^2(t))^{1/3}$ hat mehrere verschiedene Lösungen mit $x(0) = 0$, insbesondere $x(t) = 0$, aber auch $x(t) = t^3$.

4 Reduktion der Ordnung

Die Trennung der Variablen funktioniert für bestimmte Differentialgleichungen für $\mathbb{C}$-wertige Funktionen von erster Ordnung. Allgemein wird man aber ein ganzes System von Differentialgleichungen für Funktionen $v_1(t), \cdots, v_n(t)$ zu lösen haben, wobei auch noch höhere Ableitungen auftreten; also gleichzeitig

$$F_1(t, v_1, \dots, v_n, v_1', \dots, v_n', v_1'', \dots) = 0,\ F_2(t, v_1, \dots) = 0, \dots, F_N(t, v_1, \dots) = 0. \tag{4.1}$$

4.2 Beispiel. Wir modellieren die Populations $W(t)$ von Wölfen und $E(t)$ von Elchen auf einem der großen Seen in Kanada (Wanderbewegungen werden ausgeschlossen).

Die relative Veränderung der Wolfspopulation ist abhängig vom Beuteangebot (pro Wolf). Ein Modell ist $W'(t)/W(t) = -c + aE(t)/W(t)$ mit geeigneten positiven Konstanten c, a ($-c$, da ohne Beute die Zahl der Wölfe abnimmt).

Genauso ist die Veränderung der Elchpopulation abhängig von der Zahl der jagenden Wölfe (welche die Elche dezimieren), während sonst die Zahl der Elche zunimmt (weiter gibt es die begrenzten Ressourcen, die bei zu großer Anzahl der Elche ebenfalls berücksichtigt werden muss). Dies modellieren wir durch die Gleichung

$$E'(t)/E(t) = b - dW(t)/E(t); \qquad E'(t) = b(E_M - E(t))E(t) - dW(t); b, d, E_M > 0.$$

(bei der zweiten Gleichung wird oberhalb der Population E_M die Veränderungsrate für die Elche auch ohne Wölfe negativ).

4.3 Beispiel. Nach dem Newtonschen Kraftgesetz erfährt eine antriebslose Rakete, die senkrecht nach oben fliegt, im Abstand x vom Erdmittelpunkt die Beschleunigung

$$mx''(t) = -gR^2 m/x(t)^2; \quad m, g, R > 0.$$

Beim Rückstoßantrieb ist auch m von der Zeit abhängig, zudem gibt es einen Term, der vom Antrieb kommt.

Es reicht nun aus, sich mit Differenzialgleichungen erster Ordnung zu beschäftigen.

4.4 Satz. *Jedes System von Differenzialgleichungen* (4.1) *ist äquivalent zu einem System von Differenzialgleichungen erster Ordnung.*

Beweis. Wir führen einfach für jede (auftretende) k-Ableitung ($k \geq 0$) jeder der Komponentenfunktionen v_j eine neue Funktion $v_{j,k}$ ein. Das zu (4.1) äquivalente System ist dann

$$\begin{aligned} v_{j,k+1}(t) &= v'_{j,k}(t) \\ F_i(t, v_{1,0}, \dots, v_{n,0}, v_{1,1}, \dots) &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Jede Lösung von (4.5) liefert eine Lösung von (4.1) mit $v_j := v_{j,0}$ und umgekehrt, mit $v_{j,k} := v_j^{(k)}$ (wie man sofort durch einsetzen sieht), die beiden Systeme sind also äquivalent. □

4.6 Beispiel. Die Rückstellkraft (Beschleunigung) einer Feder ist proportional zur Auslenkung. Man erhält also die *Schwingungsgleichung*

$$mx''(t) = -dx(t).$$

Das zugehörige System ist $y(t) = x'(t)$, $my'(t) = -dx(t)$. Zur Vereinfachung sei $m = d = 1$ (geeignete Wahl von Einheiten). Setze $z(t) = x(t) + iy(t)$. Es ergibt sich $z'(t) = -iz(t)$, mit Lösung $z(t) = a\exp(-it)$ mit $a \in \mathbb{C}$

4.7 Aufgabe. Zerlege die Lösung aus Beispiel 4.6 so, dass die reellen Lösungsfunktionen für x und $x' = v$ ablebar sind. Wie legen die Anfangsbedingungen die Konstante a fest.

4.8 Aufgabe. Mache Dir klar, dass die Aussage von Satz nicht auch andersherum geht: man kann im allgemeinen ein System von Differenzialgleichungen erster Ordnung nicht in eine äquivalente Gleichung höherer Ordnung umwandeln. (Ohne Beweis).

5 Vektorfelder und Flüsse

5.1 Definition. Ein (stetiges) Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$ (oder allgemeiner eines Banachraums V) ist eine stetige Abbildung $X\colon U \to V$.

5.2 Bemerkung. Dies ist ein Spezialfall eines Vektorfelds auf Mannigfaltigkeiten, wo die Abbildung X jedem Punkt p einen Tangentialvektor an p zuordnet: für offene Teilmengen eines Banachraums V sind alle Tangentialräume gleich V.

5.3 Definition. Eine Integralkurve zu einem Vektorfeld X ist eine differenzierbare Abbildung $u\colon I \to U$ so dass $u'(t) = X(u(t))$ für alle $t \in I$, I offenes Interval in $\mathbb{R}$.

5.4 Satz. *Sei $x' = f(t, x)$ eine Differenzialgleichung für eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}^n$. Definiere das zugeörige Vektorfeld $X\colon D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; X(x, t) := (1, f(x, t))$.*

Die Integralkurven von X entsprechen genau den Lösungen der Differenzialgleichung. Ist $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ solch eine Lösung, so ist $u(t) := (t, x(t))$ eine Integralkurve, da dann $u'(t) = (1, x'(t))$. Ist umgekehrt $u(t) = (u_0(t), u_1(t))$ eine Integralkurve, so gilt $u_0'(t) = 1$, also $u_0(t) = t_0 + t$ und $u_1'(t) = f(u_0(t), u_1(t)) = f(t_0 + t, u_1(t))$ —man erhält also eine Lösung der Differenzialgleichung mit einem verschobenen Zeitnullpunkt.

5.5 Aufgabe. Die Vektorfelder, die wir für die Integralkurven betrachten, sind Zeitunabhängig. Im Satz haben wir mit einem Trick —durch Erhöhen der Dimension, eine zeitabhängige Differenzialgleichung ($x' = f(t,x)$, und die rechte Seite hängt von t ab) in ein zeitunabhängiges Vektorfeld übersetzt. Arbeite aus, wie das durchgeführt wurde (und was sich vereinfacht, wenn f nicht von t abhängt).

5.6 Beispiel. Die Vektorfelder sind also eine gute erste graphische Moeglichkeit, um sich einen Ueberblick ueber die moeglichen Lösungen zu verschaffen.

Mit xmupad kann man diese auch relativ einfach produzieren (im 2-dimensionalen Fall).

Syntax:
$f1 := (x,y)- > -y; f2 : -(x,y)- > x$
field:= plot:: VectorField2d([f1,f2], x=-3..3, y=-3..3)
plot(field,Scaling=Constrained)

Benutze für genaue Syntax und weitere Optionen (Farbe etc) die Hilfe-Funktionen

In unserem Fall zeichnet dies das Rotations-Vektorfeld.

Im 3-dimensionalen gibt es auch noch gewisse Zeichenmoeglichkeiten (weniger Ueberblick und langsam), danach natuerlich nicht mehr so direkt.

6 Elementare Integrationsmethoden II: Euler-homogene Differentialgleichung

6.1 Definition. Die Differenzialgleichung $x'(t) = h(x(t)/t)$ (mit stetigem h) heißt *eulerhomogene Differenzialgleichung.*

6.2 Beispiel. Wachstum beruht auf Zellteilung, sollte also proportional zur vorhandenen "Größe" sein. Wenden wir dies auf den Kopfdurchmesser $D(t)$ und die Länge $L(t)$ eines wachsenden Säuglings an, erhalten wir $D' = aD$, $L' = bL$. Wir betrachten nun D in Abhängigkeit von L; es ergibt sich $dD/dL = (dD/dt)/(dL/dt) = cD/L$. Die Gleichung

$$D'(L) = cD/L; \quad c > 0$$

heißt *allometrische Differentialgleichung*; wir können sie durch Trennung der Variablen lösen.

6.3 Beispiel. Wenn ein Scheinwerfer im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems plaziert ist, muss ein Spiegel (beschrieben durch die Kurve $y(x)$), welcher alle Strahlen in parallelen zur x-Achse reflektiert, wegen Einfallswinkel glech Ausfallswinkel ergibt sich

$$y/x = (2dy/dx)/(1 - (dy/dx)^2),$$

oder äquivalent (wenn man aus Symmetriegründen nur positive dy/dx anschaut)

$$y'(x) = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} = -(x/y) + \sqrt{(x/y)^2 + 1}. \tag{6.4}$$

6.5 Aufgabe. Leite die Differenzialgleichung (6.4) aus dem geometrischen Problem her und löse sie.

6.6 Bemerkung. Geometrische Überlegungen wie die aus Beispiel 6.3, in denen die Steigung einer Kurve zum Ort in Beziehung steht, führen zu einer Vielzahl klassischer Differenzialgleichungen.

6.7 Satz. *Die eulerhomogene Differenzialgleichung aus Definition 6.1 läßt sich (solange $t \neq 0$) durch die Substitution $z(t) = y(t)/t$ auf die Differenzialgleichung*

$$z'(t) = (h(z(t)) - z(t))/t \tag{6.8}$$

zurückführen, welche durch Trennung der Variablen gelöst werden kann.

Beweis. Es gilt $y'(t) = (tz(t))' = z(t) + tz'(t)$. Durch Einsetzen sieht man, dass z die Gleichung (6.8) genau dann erfüllt, wenn y die Gleichung aus Definition 6.1 erfüllt. □

6.9 Aufgabe. Diskutiere die Lösungen der Differenzialgleichung $x' =$.

7 Numerische Verfahren

In dieser Vorlesung wollen wir nicht wesentlich auf die Numerik gewöhnlicher Differnzialgleichungen eingehen; ein sehr wichtiges Gebiet der angewandten Mathematik mit eigenen Vorlesungen, Lehrbüchern etc.

Wichtig hier ist, Näherungsverfahren für die Lösung zu entwickeln; und dann Konvergenzbeweise und Fehlerabschätzungen unter geeigneten Voraussetzungen zu gewinnen.

Behandeln wollen wir explizite Differenzialgleichungen der Form

$$x' = f(x,t); x(t_0) = x_0 \quad \text{für } x\colon I \to \mathbb{R}^n$$

mit geeignet gutem f.

Naheliegend ist das Euler-Cauchy-Polygonverfahren:

(1) Wähle eine Schrittweite $h > 0$.

(2) Konstruiere eine Näherungslösung $\overline{x}(t_0 + kh)$, $k = 0, 1, \dots$

(3) Starte mit $\overline{x}(t_0) = x_0$.

(4) Wenn $\overline{x}(t_0 + (k-1)h)$ gegeben ist, setze $\overline{x}(t_0 + kh)$ so dass

$$\frac{\overline{x}(t_0 + kh) - \overline{x}(t_0 + (k-1)h)}{h} = f(\overline{x}(t_0 + k - 1)h, t_0 + (k-1)h).$$

(5) Definiere $\overline{x}(t)$ als Polygonzug mit diesen Eckpunkten.

7.1 Bemerkung. Falls f geeignete Bedingungen erfüllt (z.B. glatt ist), kann man zeigen, dass auf jedem kompakten Interval die für die verschiedenen h gebildeten Funktionen $\overline{x}_h(t)$ gleichmäßig gegen eine Lösung der Differenzialgleichung konvergieren.

Beachte, dass dies insbesondere die Lösbarkeit der gegebenen Differenzialgleichung impliziert. FÜr praktische Anwendungen ist die Methode nicht wirklich geeignet, das sie viel zu langsam konvergiert und zu rechenaufwendig ist (ebenso, wie die Rechteck-Approximation von Integralen nicht besonders gut zur näherungsweisen Berechnung von Integralen geeignet ist).

Wesentlch besser ist zum Beispiel das *Runge-Kutta* Verfahren:

Hier wird, wenn $\overline{x}_k := \overline{x}(t_0 + kh)$ gegeben ist, mit folgenen Hilfsschritten vorgegangen:

(1) $b_{k1} := f(\overline{x}_k, t_0 + kh)$

(2) $b_{k2} := f(\overline{x}_k + hb_{k1}/2, t_0 + kh + h/2)$

(3) $b_{k3} := f(\overline{x}_k + hb_{k2}/2, t_0 + kh + h/2)$

(4) $b_{k4} := f(\overline{x}_k + hb_{k3}, t_0 + (k+1)h)$

(5) $\overline{x}_{k+1} := \overline{x}_k + h(b_{k1} + 2b_{k2} + 2b_{k3} + b_{k4})/6$

Der Fehler ist hierbei etwa proportional zu h^4; genauere Fehleruntersuchungen (und auch die Voraussetzungen, unter denen diese Verfahren funtionieren) werden in dieser Vorlesung nicht durchgeführt.

8 Praktische Berechnungen

Die gängigen Verfahren zur numerischen Lösung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen (z.B. Runge-Kutta Verfahren und Varianten davon) sind in vielen Programmpaketen implementiert; z.B. auch in allen grossen Mathematikpaketen. Dazu gehören Mathematica, maple, und hier in Göttingen für den Einsatz von Studenten vorgesehen mupad (hierfür werden auch regelmäßig Einführungskurse angeboten).

8.1 Beispiel. In xmupad gibt es mehrere Befehle zur Lösung von ODes. Die Syntax des einfachsten ist die folgende:

$g := (t, y)- > [-y[2], y[1]]$

solution:= numeric::odesolve2(g,0, [1,0], EULER1, Stepsize=0.1); (hinten stehen die Anfangswerte, wir Loesen $y' = g(t, y)$,mit Anfangszeit 0, EULER1 ist die Methode (nicht zu empfehlen))

Sollte man eine DGl der Form $y' = f(t, y)$ mit 1-dimensionalem y behandeln wollen, muss man y als Vektor mit einer Komponente behandeln, diese eine Komponente wird mit $y[1]$ aufgerufen. Man hat dann also $g := (t, y)- > [f(t, y[1])]$ zu schreiben.

Die Anfangswerte in odesolve2 sind dann vektoren mit einer Komponente, z.B. [1]. solution(2) liefert dann einen Vektor (mit einem Eintrag), solution(2)[1] diese eine Komponente (eine Zahl).

9 Elementare Integrationsverfahren III: Lineare Differenzialgleichung erster Ordnung

9.1 Definition. Die Differenzialgleichung $x'(t) + f(t)x(t) = g(t)$ heißt *lineare Differenzialgleichung erster Ordnung*; *homogen*, falls $g(t) = 0$, sonst *inhomogen*.

9.2 Beispiel. Die Temperatur T einer Wasserflasche ändert sich proportional zur Differenz zur Außentemperatur T_a, also

$$T'(t) = -k(T(t) - T_a(t)). \tag{9.3}$$

9.4 Aufgabe. Berechne den Temperaturverlauf, wenn man um 22 Uhr abends ein Wasserflasche mit 15 Grad Celcius nach draußen bringt, wo die Temperatur linear von 5 Grad auf -2 Grad um 6 Uhr morgens abfällt. Benutze hier $k = 0,73/\text{Stunde}$.

Die homogene lineare Differenzialgleichung $x'(t) - f(t)x(t) = 0$ ist eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen. Ihre Lösung ergibt sich als

$$x(t) = C \exp\Big(\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt); \quad C \in \mathbb{R}.$$

9.5 Aufgabe. Leite dies mittels des allgemeinen Verfahrens her.

9.6 Satz. *Die Menge der Lösungen der homogenen linearen Differenzialgleichung bildet einen Vektorraum.*

Die Menge der Lösungen der inhomogenen linearen Differenzialgleichung (falls nicht leer) ist ein affiner Raum modelliert nach dem Lösungsraum der zugehörigen linearen Differenzialgleichung.

Beweis. Nachrechnen. Insbesondere, falls u, v die inhomogene DGl lösen, so löst $u - v$ die homogene. □

Damit ist noch nicht gezeigt, wie man Lösungen für die inhomogene lineare Differenzialgleichung finden kann. Hier benutzen wir das Prinzip der *Variation der Konstanten.*

Gegeben sei die Differenzialgleichung

$$x'(t) - f(t)x(t) = g(t) \tag{9.7}$$

mit $I \subset \mathbb{R}$ einem Intervall und $f, g \colon I \to \mathbb{C}$ stetig. g wid auch *Störfunktion* genannt. Sei $F(t) := \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von f.

Wir machen den *Ansatz*

$$x(t) = C(t)\exp(F(t)),$$

d.h. wir suchen eine spezielle Lösung von (9.7) in einer speziellen Form (in anderen Kontexten schließt man damit Lösungen aus; hier sieht man sofort, dass jede mögliche Lösung die gesuchte Form hat, da $\exp(F(t))$ nirgends verschwindet).

Setzt man dieses $x(t)$ in (9.7) ein, erhält man die äquivalente Gleichung

$$C'(t)\exp(F(t)) + C(t)f(t)exp(F(t)) - f(t)C(t)\exp(F(t)) = g(t),$$

oder äquivalent

$$C'(t) = g(t)\exp(-F(t));$$

durch Integration erhält man

$$C(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} g(t)\exp(-F(t))\,dt.$$

Man erkennt (was man durch Einsetzen überprüfen kann), dass die allgemeine Lösung die Form

$$x(t) = (c_0 + int_{t_0}^{t} g(t)\exp(-F(t))\,dt)\exp(F(t))$$

hat. Die Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ wird mit $c_0 = x_0\exp(-F(t_0))$ erfüllt.

9.8 Beispiel. $x'(t) = sin(t)x(t) + sin(t); x(0) = 0$.

Wir lösen zunächst die zugehörige homogene Gleichung (also ohne den Summanden $sin(t)$): es ist $x'/x = sin(t)$, also $\ln(x(t)) = -\cos(t) + c$,also $x(t) = C\exp(-\cos(t))$.

Dies benutzen wir als Ansatz für die inhomogene Gleichung mit Variation der Konstanten: also $x(t) = C(t)\exp(-\cos(t))$ mit unbekannter Funktion $C(t)$.

Einsetzen liefert

$$C(t)\sin(t)\exp(-\cos(t))+C'(t)\exp(-\cos(t)) = \sin(t)C(t)\exp(-\cos(t))+\sin(t),$$

äquivalent $C'(t) = \sin(t)\exp(\cos(t))$, was durch Integration liefert: $C(t) = -\exp(\cos(t))$.

Man erhält also eine spezielle Lösung $x_{sp}(t) = -1$.

Die allgemeine Lösung ergibt sich nun durch Addition der Lösungen der homogenen Gleichung, also $x(t) = -1 + C\exp(-\cos(t))$. Um die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ zu erfüllen, muss $C = e$ gewählt werden.

9.9 Beispiel. Die Variation der Konstanten funktioniert, hat aber den Nachteil, dass man nochmal möglicherweise aufwendige Integrale berechnen muss. Dies kann man in Spezialfällen manchmal umgehen:

Betrachtet man die DGl $x'() = ax(t) + b(t)$ mit *konstantem* $a \in \mathbb{R}$, so kann man je nach Form von $b(t)$ direkt einen zielführenderen Ansatz machen:

(1) Ist $b(t)$ ein Polynom vom Grad m, wird dies (falls $a \neq 0$) auch für $x(t)$ angesetzt.

(2) Gilt $b(t) = p(t)e^{ct}$ mit Polynom p, so wird für $x(t)$ eine entsprechende Fkt $q(t)e^{ct}$ angesetzt (falls $c \neq a$, falls $c = a$: $tq(t)e^{ct}$). Dies gilt auch für komplexe c, beinhaltet also auch periodische Störfaktoren.

9.10 Beispiel. Konkret betrachte man z.B. $z' = iz + e^{2it}$ (wenn man Realteil und Imaginärteil von z als Ort und Geschwindigkeit interpretiert, ist dies gerade die DGl eines ungedämpften Pendels); d.h. man addiert eine periodische Störung.

Wir setzen an $z(t) = ce^{2it}$. Daraus ergibt sich $z'(t) = 2ice^{2it}$, also $z' = iz + e^{2it}$ genau dann wenn $2ic = ic + 1$ oder äquivalent $c = -i$.

Die allgemeine Lösung ergibt sich also als Summe $z(t) = -ie^{2it} + ae^{it}$.

9.11 Aufgabe. Zeige: ist $x_{1,2}(t)$ Lösung von $x'(t) = a(t)x(t) + b_{1,2}(t)$, so ist $x_1 + x_2$ Lösung von $x' = ax + b_1 + b_2$.

10 Existenz/Eindeutigkeit von Lösungen

10.1 Definition. Ein *explizites System von Differenzialgleichungen* ist eine Gleichung der Form

$$x' = f(t, x). \tag{10.2}$$

Hierbei ist die gesuchte Funktion x eine Funktion auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Für $(t_0, x_0) \in D$ kann man zusätzlich die Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ stellen und erhält so ein *explizites Anfangswertproblem erster Ordnung*.

Unter geeigneten (schwachen) Bedingungen an f gibt es zum Anfangswertproblem immer eine eindeutige Lösung, zumindest für ein genügend kleines Zeitinterval um t_0.

10.3 Satz. ***(Satz von Picard-Lindelöff)****. Sei in* (10.2) *das "Rechteck"* $A := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_b(x_0)} \subset D$, *und sei* f *auf* A *bezüglich* x *Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante* L $(a, b, L > 0)$.

Dann gibt es $\alpha > 0$ *so dass das Anfangswertproblem auf* $I := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ *eine eindeutige Lösung* $x\colon I \to \overline{B_b(x_0)}$.

Alternativ für Vektorfelder: das Vektorfeld $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ *sei Lipschitz-stetig und* $x_0 \in U$. *Dann gibt es* $\delta > 0$ *so dass eine eindeutige Integralkurve* $c\colon (-\delta, \delta)$ *mit* $c(0) = x_0$ *existiert.*

Beweis. Zum Beweis suchen wir eine äquivalente Integralgleichung, und können dann die Lösungen der Differenzialgleichung als Fixpunkte eines (Integraloperators) bestimmen.

Diese lautet $c(t) = x_0 + \int_0^t X(c(s))\,ds$, wie sofort aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung folgt.

Die Abbildung $\Phi\colon c \mapsto (t \mapsto x_0 + \int_0^t X(c(s))\,ds)$ ist wegen der Lipschitzbedingung eine Abbildung von $C([-\delta, \delta], U) \to C([-\delta, \delta], U_0)$, welche sogar kontrahierend ist; solange δ genügend klein gewählt wird (hier geht das Supremum von $|X(x)|$ und die Lipschitz-Konstante ein) (hierbei ist $U_0 \subset U$ eine geeignete abgeschlossene Umgebung von x_0):

Abschätzung: $\left|x_0 + \int_{0^t} X(c(s))\,ds\right| \le |x_0| + |t| \sup\{|X(x)|$, sowie (für die Kontraktionseigenschaft)

$$\left|x_0 + \int_0^t X(c(s))\,ds - x_0 - \int_0^t X(d(s))\,ds\right| \le |t| \sup_s |X(c(s)) - X(d(s))|\,.$$

Wenn man mit einer beliebigen Funktion c_0 (z.B. der konstante Funktion) startet, und iterativ Φ anwendet, erhält man also ein Folge von Funktionen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ welche nach dem Banachschen Fixpunktsatz bezüglich Supremumsnorm gegen einen eindeutigen Fixpunkt x der Abbildung Φ konvergiert —man erhält also auf diese Weise die gewünschte eindeutige Lösung.

Bemerkung: Die Umwandlung in eine Integralgleichung ist nützlich, weil der zugehörige Integraloperator bessere Stetigkeitseigenschaften auf den benutzen Räumen von Funktionen besitzt.

Schließlich benutzt man einen allgemeinen Fixpunktsatz, der die Existenz des gesuchten Fixpunktes impliziert.

Oft benutzt man hier den Banachschen Fixpunktsatz:

10.4 Satz. *Sei* $M \neq \emptyset$ *ein vollständiger metrischer Raum (z.B. eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums). Sei* $A\colon M \to M$ *eine* kontrahierende *Abbildung, d.h. es gibt* $0 \le c < 1$ *so dass* $d(A(x), A(y)) \le c d(x, y)$ *für alle* $x, y \in M$.

Dann besitzt A *einen eindeutigen Fixpunkt, d.h. es gibt genau ein* $x_0 \in M$ *mit* $A(x_0) = x_0$.

Dieses x_0 *kann mittels Iteration von* A *bestimmt werden: für beliebiges* $x \in M$ *gilt* $x_0 = \lim_{n\to\infty} A^n(x)$ *(*A *n-mal angewendet).*

Beweis. Mittels der Kontraktionseigenschaft weißt man nach, dass $(A^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, also konvergiert. Nach Konstruktion ist der Limes ein Fixpunkt. Die Kontraktionseigenschaft zeigt, dass zwei beliebige Fixpunkte übereinstimmen. □

Bequemer für unsere Zwecke ist ein etwas speziellerer (aber auch stärkerer) Fixpunktsatz, von Weissinger:

10.5 Aufgabe. Beweise folgende Satz:

Sei $M \neq \emptyset$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums mit Norm $|\cdot|$, $a_n > 0$ so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. Sei $A\colon M \to M$ eine Abbildung so dass $|A^n u - A^n v| \leq a_n |u - v|$ für alle $u, v \in M$. Dann hat A genau einen Fixpunkt $x_0 \in M$, und es gilt $x_0 = \lim_{n\to\infty} A^n x$ für jedes $x \in M$.

Angewendet wird dies auf den Banachraum $C(J, \mathbb{R}^n)$ mit Supremumsnorm und mit Teilmenge $M = \{f \in C(J, \mathbb{R}^n) \mid |f - x_0| \leq b\}$ (für geeignetes Interval J).

Der Operator A wird definiert als $Ay(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^{t} f(t, y(t))\, dt$. Durch geeignete Auswahl von J und unter Benutzung der Lipschitz-Bedingung erhält man dann sofort die Kontraktionsbedingung für den Banachschen Fixpunktsatz. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung impliziert, dass die Fixpunkte von A genau die Lösung des expliziten Anfangswertproblems (10.2) sind. □

10.6 Lemma. *Jede stetig partiel differenzierbare Funktion $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ ist lokal Lipschitz-stetig. Hierbei heißt X* lokal Lipschitz-stetig, *wenn für jedes $x \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ existiert, so dass die Einschränkug von X auf V Lipschitz-stetig ist.*

Beweis. Da die partiellen Ableitungen stetig sind, existiert zu $x_0 \in U$ eine konvexe Umgebung V (z.B. ein Ball), so dass die partiellen Ableitungen durch M beschränkt sind. Sind nun $u, v \in V$, so ist die Funktion $g\colon t \mapsto X(u+t(v-u))$ nach Kettenregel (stetig) diffbar und nach Mittelwertsatz $|X(u) - X(v)| = g'(\xi) = \left|\sum_k (u_k - v_k) \frac{\partial X}{\partial x_k}(u + \xi(v-u))\right| \leq MC_n |u - v|$, für geeignetes $\xi \in (0,1)$. □

10.7 Aufgabe. Zeige, dass nicht jede lokal Lipschitz-stetige Funktion $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ auch Lipschitz-stetig ist. Zeige, dass aus lokaler Lipschitz-stetigkeit auch folgt, dass die Einschränkung auf jede kompakte Teilmenge von U Lipschitz-stetig ist. (Zeige, dass dies insbesondere aus stetiger partieller Differenzierbarkeit folgt.)

10.8 Bemerkung. Wenn man die DGl $x' = F(t, x)$ behandelt, kann man die Lipschitz bzw. Ableitbarkeitsbedingung etwas abschwächen: die t-Ableitungen von F sind nicht relevant. Für die Praxis hat diese Verallgemeinerung aber keine große Bedeutung.

10.9 Aufgabe. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz stetig für $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen; betrachte das zur DGl $x' = f(t, x)$ gehörende zeitunabhängie Vektorfeld X. Zeige, dass auch X lokal Lipschitzstetig ist.

10.10 Aufgabe. Finde und beweise die in Bemerkung 10.8 angedeutete Verallgemeinerung des Satzes von Picard-Lindelöff.

Die gefundene Eindeutigkeitsaussage ist noch nicht völlig befriedigend: man hätte gerne, dass immer dann, wenn Lösungen definiert sind, diese auch eindeutig sind. Dies ist (unter geeigneten Bedingungen) auch der Fall; besser noch, man hat für gegebene Anfangsbedingungen immer eine eindeutige *maximale Lösung*.

10.11 Satz. *Sind $c, d\colon (\alpha, \beta) \to U$ Integralkurven von $X : U \to \mathbb{R}^n$ mit $c(t_0) = d(t_0)$, und ist X lokal Lipschitz-stetig, so gilt $c = d$.*

Zu $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in U$ gibt es $a \in [-\infty, t_0)$ und $b \in (t_0, \infty]$ so dass Integralkurve $c\colon (a, b) \to U$ von X mit $c(t_0) = x_0$ existiert, aber auf keinem größeren Interval.

Solch ein c nennt man maximale Integralkurve*.*

Beweis. Betrachte die Menge $M := \{t \in (\alpha, \beta) \mid c(t) = d(t)\}$. M ist nicht leer, da $t_0 \in M$, M ist offen (wegen der lokalen eindeutigen Lösbarkeit) und M ist abgeschlossen (wegen der Stetigkeit von c und d). Da (α, β) zusammenhängend ist, gilt $M = (\alpha, \beta)$.

Das Interval (a, b) ist dann die Vereinigung aller Definitionsbereiche von Integralkurven von X mit Wert x_0 zum Zeitpunkt t_0. Wegen der gerade bewiesenen Eindeutigkeit definiereren die Lösungskurven zusammen eine (maximale) Integralkurve. □

10.12 Bemerkung. Ist eine Differenzialgleichung $x' = f(t, x)$ mit lokal Lipschitzstetigem f (oder äquivalent ein lokal Lipschitzstetiges Vektorfeld X) mit Anfanswert $x(t_0) = x_0$ gegeben, so macht es Sinn, nach *der* Lösung des Anfanswertproblems mit maximalem Definitionsbereich zu fragen; in Zukunft werden wir Aufgaben da, wo die Voraussetzungen erfüllt sind, immer so auffassen.

Ohne die Eindeutigkeitsaussage macht die Frage nach dem maximalen Definitionsbereich nicht wirklich Sinn, da er ja z.B. von den gewählten Lösungen abhängen könnte.

10.13 Frage. Wie hängen die maximalen Lösungsintervalle von den Anfangswerten ab?

10.14 Korollar. *Ist $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so geht durch jeden Punkt $x_0 \in U$ genau eine Integralkurve; die man auf geeignete Art in beide Richtungen maximal verlängern kann. Insbesondere können sich zwei Integralkurven dann nie schneiden: sie sind entweder disjunkt oder identisch.*

Es stellt sich nun die Frage, wie sehr die Bedingungen in den Existenz- und Eindeutigkeitssätzen auch notwendig sind. Wir haben bereits die DGl $x' = 3(x^2)^{1/3}$ kennen gelernt, deren Lösungen nicht eindeutig sind.

10.15 Beispiel. Die Dgl $x'(t) = \delta_{0,t}$ hat keine Lösung (die im klassischen Sinn differenzierbar ist). Dies gilt, da jede Lösung für $t < 0$ konstant sein muss, und für $t > 0$ konstant sein muss. Damit der Differenzenquotient an 0 existiert, müssen diese beiden Konstanten übereinstimmen. Dann ist aber die Ableitung an $t = 0$ wieder 0.

Dieses Beispiel ist "dumm", da die rechte Seite in $x'(t) = f(t, x)$ nicht einmal stetig war. Ausblick: es gilt der Existenzsatz von Peano: Ist f stetig, gibt es lokal eine Lösung des AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.

10.16 Beispiel. Die DGl $x'(t) = 2\sqrt{x(t)}$, $x(0) = 0$ hat die Konstante Lösung, sowie Lösungen x_λ mit $x_\lambda(t) = 0$ für $t < \lambda$ und $x_\lambda(t) = (x - \lambda)^2$ für $t \geq \lambda$ ($\lambda > 0$ beliebig).

Ähnliche DGls, wo Lösungen "zu schnell" in eine Gleichgewichtslösung hinein oder aus ihr herauslaufen, kann man in großer Zahl konstruieren.

10.17 Aufgabe. Konstruiere eine Dgl $x' = f(x)$ welche die Konstanten Lösungen $x = 0$ und $x = 1$ zuläßt, und für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Lösung, welche für $x < \lambda$ konstant 0 ist, aber nach endlicher Zeit konstant mit Wert 1 wird.

11 Bernoullische Differenzialgleichung

11.1 Definition. Eine Differenzialgleichung der Form

$$x'(t) = f(t)x(t) + g(t)x(t)^k; \quad k \in \mathbb{R}, x(t) > 0$$

(mit $k \neq 1$) und f, g stetig heißt *Bernoullishe Differenzialgleichung.*

11.2 Beispiel. Beim Wachstum von Tierpopulationen, welches begrenzten Resourcen unterliegt, wird die DGl

$$P'(t) = \gamma P(t)(1 - (P(t)/K)^\theta)$$

mit Konstanten γ, K, sowie θ vorgeschlagen, wobei $\theta > 1$ für Wirbeltiere, $\theta \leq 1$ für Wirbellose. Dies ist für $\theta \neq 0$ eine Bernoullische Differenzialgleichung. Je größer der Exponent θ, desto stärker ist die "Bremswirkung" für Populationen in der Nähe (und über) K.

11.3 Aufgabe. Löse die DGl aus Beispiel 11.2 mit der Anfangsbedingung $P_0 > 0$. Wie sieht das Verhalten der Lösungen für $t \to \infty$ aus?

11.4 Satz. *Mittels der Substitution $z(t) := x(t)^{1-k}$ wird diese Dgl in die äquivalente lineare Differenzialgleichung*

$$z'(t) = (1 - k)(f(t)z(t) + g(t)), \quad z(t) > 0$$

umgewandelt. Diese kann mittels Variation der Konstanten gelöst werden.

Beweis. Man leite einfach $z(t) = x(t)^{1-k}$ ab. □

12 Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern

Differenzialgleichungen (oder zumindest darin vorhandenen Konstanten) sind eigentlich immer nur näherungsweise bekannt, genauso Anfangswerte. Wir müssen daher untersuchen, wie sich Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten/verschiedenen DGls unterscheiden.

12.1 Beispiel. Beim Bakterienwachstum (mit unbegrenzten Resourcen) hat man ein Gesetz $P' = \lambda P$, aber die Proportionalitätskonstante (ergibt sich aus der Zellteilungsrate) ist nur ungefähr bekannt, vielleicht sogar zeitlich veränderlich; außerdem wissen wir, dass ein quadratischer Abklingterm, $P' = \lambda P - \epsilon P^2$ (für "kleines" ϵ) der Realität vielleicht noch näher kommt.

12.2 Lemma. *Sei $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig und es gelte*

$$v(t) \geq c + \int_a^t f(s, v(s))\, ds$$

für eine lokal Lipschitzstetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($U \subset \mathbb{R}^2$ offen geeignet, welche in der zweiten Variablen monoton wächst.

Ist $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Lösung der Differenzialgleichung $w'(t) = f(t, w(t))$ mit $w(a) = c$, gilt also $w(t) = c + \int_a^t f(s, w(s))\, ds$, so gilt für alle $t \in [a,b]$

$$v(t) \leq w(t).$$

Beweis. Sei s_0 das Infimum aller Zeiten, so dass $v(s) > w(s)$ (oder b, wenn es keine solche Zeit gibt). Dann ist $v(s) \leq w(s)$ für alle $s \leq s_0$. Da $f(t,x)$ in x monoton wachsend ist, impliziert $v(s_0) = w(s_0)$, dass $v(s) = w(s)$ für alle $s \leq s_0$.

□

12.3 Satz. *Sei $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld mit $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Wir stellen uns X vor als eine stetige Familie von Vektorfeldern, parametrisiert durch die letzten m Koordinaten.*

Für jedes $(x_0, u_0) \in U$ gibt es $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ von u_0 und eine stetige, nach t differenzierbare Abbildung $\alpha\colon (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times V \to U$ mit

Dieses Kapitel ist nicht fertig, neuer Ansatz:

13 Differenzierbare Abhängigkeit von Anfangswerten

13.1 Beispiel. Betrachte folgendes einfache Beispiel für ein Differenzialgleichungssystem (entsteht aus der Beschreibung des Feder-Schwerependels):

Das relevante Vektorfeld $X(x,v) = (v, -mx)$, $X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Wir suchen Lösungen von $(x,v)' = X(x,v)$ mit Anfangswerten $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

Wir kennen die Lösungen bereits, nämlich $(x,v)(t) = (x_0 \cos(mt) + v_0/m \sin(mt), -mx_0 \sin(mt) + v_0 \cos(mt))$.

Betrachtet man m, x_0, v_0 nicht als Konstanten, sondern als Parameter, erhält man zusammengenommen die Lösungsfunktion

$$L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2; (t, x_0, v_0, m) \mapsto (x_0 \cos(mt) + v_0/m \sin(mt), -mx_0 \sin(mt) + v_0 \cos(mt)).$$

Klar ist, dass diese Funktion nach t partiell ableitbar ist (für festes m, x_0, v_0 als Lösung der entsprechenden Differnzialgleichung). Wir sehen aber, dass L auch nach den anderen Variablen partiell differenzierbar ist, sogar beliebig oft.

Das Beispiel zeigt eine Verbesserung der stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten (x_0, v_0) und Parametern (m) (von welchem das Vektorfeld, also die DGl, abhängen): aus der Stetigkeit wird Differenzierbarkeit. Dies ist kein Zufall, sondern allgemein richtig —natürlich muss die Differenzialgleichung/das Vektorfeld selbst genügend gut sein: die Regulärität, die bei den Lösungen herauskommen soll, muss auch schon im Vektorfeld vorhanden sein.

Allgemein erhalten wir folgenden Satz:

13.2 Satz. *Sei $X\colon U \times V \to \mathbb{R}^n$ k-mal stetig differenzierbar, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset \mathbb{R}^k$ offen.*

Sei $L\colon (-\epsilon, \epsilon) \times U_0 \times V_0 \to U$ eine Funktion mit $L(0, u_0, v) = u_0$ und $\partial L/\partial t(t, u_0, v)) = X(L(t, u_0, v), v)$ (diese Funktion existiert nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen solcher Differenzialgleichungen).

Dann ist L nach u_0 und v k-mal stetig differenzierbar.

Beweis. Durch einen einfachen Trick kann die Abhängigkeit von Anfangswerten auf Abhängigkeit von Parametern der DGl mit Vektorfeld $Y(x, u_0, v) = X(x - u_0, v)$ übersetzt werden (mit Anfangswert 0).

Für die partielle Differenzierbarkeit nach den Parametern zeigt man, dass $(L(t, u_0, v+h) - L(t, u_0, v))/h$ eine Familie von linearen Differenzialgleichungen (entstanden aus X und L) löst, welche stetig von h und v abhängt, wobei diese Differenzialgleichungsfamilie stetig nach $h = 0$ fortgesetzt werden kann (mit Hilfe der partiellen Ableitungen von X). Für $h = 0$ haben die entsprechenden linearen DGls auch Lösungen, wegen der stetigen Abhängigkeit von Lösungen von Parametern sind diese Lösungen die Partiellen Ableitungen von L (nach v).

Dieses vorgehen kann man iterieren, um höhere partielle □

14 Riccatische Differentialgleichung

14.1 Definition. Eine Differenzialgleichung der Form

$$x'(t) = f(t)x(t)^2 + g(t)x(t) + h(t)$$

mit f, g, h stetigen Funktionen heißt *Riccatische Differezialgleichung*.

14.2 Bemerkung. Die Lösungen der Riccatischen Differenzialgleichung lassen sich im allgemeinen *nicht* in geschlossener Form angeben! Konkret ist dies z.B. für $x'(t) = t^2 + x^2$ der Fall, wie von Liouville bewiesen wurde.

Wenn eine spezielle Lösung bekannt ist, können wir alle Lösungen durch Betrachtung einer äquivalenten Dgl gewinnen.

14.3 Satz. *Sei $x' = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$ eine Riccatische Dgl und $y(t)$ eine spezielle Lösung (mit Definitionsinterval I). Dann erhält man alle übrigen Lösungen (mit in I enthaltenem Definitionsbereich) aus dem Ansatz $x(t) = y(t) + 1/z(t)$ mit $z(t) \neq 0$, wobei man Lösungen genau dann erhält, wenn z die lineare inhomogene DGl*

$$z'(t) + (2f(t)y(t) + g(t))z(t) + f(t) = 0$$

löst.

Beweis. Da $F(t, x) := f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$ stetig partiell nach x ableitbar ist, greift der verschärfte Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Von y verschiedene Lsg sind also überall von $y(t)$ verschieden und haben daher die angegebene Form. Geht man mit dem Ansatz in die Riccatische Dgl, so erhalt man

$$\begin{aligned} x' &= fx^2 + gx + h = f(y + 1/z)^2 + g(y + 1/z) + h \\ &= f(y^2 + 2y/z + 1/z^2)g(y + 1/z) + h \\ &= fy^2 + gy + h + f(2y/z + 1/z^2) + g/z \\ &= y' + f(2y/z + 1/z^2) + g/z. \end{aligned}$$

Andererseits ist $x' = y' - z'/z^2$. Setzt man dies ein, erhält man die DGl

$$-z' = f(2yz + 1) + gz = z(2fy + g) + f.$$

Erfüllt umgekehrt z diese DGl und ist $z(t) \neq 0$ für alle t, so erhält man die Riccati-Gleichung für x (benutzend, dass y sie auch erfüllt). □

14.4 Beispiel. Betrachte $x' = x^2 + 3x - 4$. Diese hat die konstante Lsg $y(t) = 1$. Der Ansatz $x(t) = 1 + 1/z$ führt also nach dem Satz auf die äquivalente Dgl

$$z' + 5z + 1 = 0,$$

welche durch Trennung der Variable gelöst werden kann. Man erhält letztlich $x(t) = (c + 4e^{5t})/(c - e^{5t})$ für Konstante $c \in \mathbb{R}$.

15 Phasenraum

15.1 Beispiel. Der Wagen einer Achterbahn bewegt sich unter dem Einfluß der Schwerkraft. Man muss seinen Ort und seine Geschwindigkeit angeben. Zunächst könnte man dies durch zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ modellieren.

Es ist aber klar, dass diese Vektoren deutlich eingeschränkt sind: der Ortsvektor muss sich auf der Achterbahn befinden, der Geschwindigkeitsvektor wird dann immer tangential zur Achterbahn sein.

15.2 Beispiel. In einem Räuber-Beute System sind die Populationen immer nicht-negativ, der Phasenraum also der positive Quadrant (wobei wir ignorieren, dass es sich um ganzzahlige Größen handelt — dies bedeutet, dass spätestens bei sehr kleinen Anzahlen das Modell mit Differenzialgleichungen nicht mehr adäquat sein kann).

15.3 Definition. Die folgende Definition ist nicht mathematisch präzise! Die Menge der prinzipiell möglichen Zustände eines (von einer Differenzialgleichung beschriebenen) Systems heißt *Phasenraum*. Bei der Behandlung von Differenzialgleichungen handelt es sich hierbei normalerweise um eine glatte Mannigfaltigkeit (oft eine Untermannigfaltigkeit des euklidischen Raums).

Oft sind die "Kräfte", welche das System dazu zwingen, den Phasenraum nicht zu verlassen, nicht gut explizit beschreibbar; statt dessen ist es sinnvoll/notwendig, die Differenzialrechnung direkt im Phasenraum zu betrachten.

15.4 Beispiel. Wir wollen noch ein Beispiel betrachten, welches ohne Differenzialgleichungen auskommt.

In einer Fabrik gebe es zwei Bahnen, die von Werkbank A zu Werkbank B führen. Nun soll ein Werkstück mit Radius r auf der ersten Bahn von A nach B transportiert werden, gleichzeitig ein zweites von B nach A (mit selbem Radius). Problem: Kann man diese gleichzeitig auf die Reise schicken, d.h. gibt es Plätze auf den Bahnen, an denen sie sich passieren können?

Wir beschreiben den Phasenraum hier durch den Abstand der beiden Werkstücke auf den beiden Bahnen zu A, er hat also die Form $[0, a] \times [0, b]$ (wobei a und b die Länge der ersten und der zweiten Bahn sind).

Am Anfang befinden sich unsere Werkstücke in der Position, die im Phasenraum durch den Punkt $(0, b)$ beschrieben wird, gesucht ist eine Kurve nach $(a, 0)$.

Nun werden zwei Wagen auf den beiden Bahnen vom Punkt A zum Punkt B gefahren, die durch eine Schnur der Länge $2r$ verbunden sind — es stellt sich heraus, dass dies möglich ist, ohne dass diese Schnur reißt.

Dieses Experiment wird im Phasenraum durch eine Kurve von $(0,0)$ nach (a,b) modelliert.

Elementare Topologie (Zwischenwertsatz) sagt nun, dass jede stetige Kurve von $(0,b)$ nach $(a,0)$ die durch das Experiment erhaltene Kurve von $(0,0)$ nach (a,b) schneiden muss. Folglich wird bei *jedem* Versuch, gleichzeitig das erste Werkstück von A nach B und das zweite von B nach A zu fahren (egal wo auf dem Weg die Werkstücke schnell/langsam fahren) ein Punkt erreicht, an dem beide Abstand kleiner $2r$ haben (der Schnittpunkt mit der Kurve aus dem Experiment): Zusammenstoß.

15.5 Beispiel. Wir wollen nochmal etwas eingehender auf das Beispiel mit der Achterbahn eingehen:

Nach Newtonscher Mechanik ist für einen Massenpunkt die Beschleunigung durch die wirkenden Kräfte festgelegt. Wegen des Ordnungsreduktionsprinzips ist das System also eindeutig durch den Ort und die Geschwindigkeit bzw. Impuls festgelegt; also durch $p(t), q(t) \in \mathbb{R}^3$. Im Schwerefeld wirkt hier eine konstant nach unten wirkende Kraft; man hat also

$$q(t) = mp'(t); \quad q'(t) = -g \cdot e_3 \in \mathbb{R}^3.$$

Betrachte nun aber die Achterbahn; hier wird der Massenpunkt (der Achterbahnwagen) durch zusätzliche Kräfte, welche die Schienen ausüben, auf er Bahn festgehalten, und die Geschwindigkeit ist immer tangential zur Bahn.

Diese Kräfte sind gar nicht explizit angebbar. Statt dessen legt man von vorne herein fest, dass $(p,q) \in P$, wobei

$$P := \{(p,q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid p \text{auf Achterbahn}, q \text{tangential zur Achterbahn an } p\}$$

die Untermannigfaltigkeit der Punkte der Achterbahn und der Tangentialvektoren am jeweiligen Punkt darstellt.

Expliziter kann man die Punkte auf der Achterbahn als Bild einer Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ darstellen (wir nehmen hier an, dass c differenzierbar und injektiv ist). Durch ggf. umparametrisieren können wir erreichen, dass die Bogenlänge $|c'(s)| = 1$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

Unseren Achterbahnwagen können wir nun eindeutig durch $s \in \mathbb{R}$ (so dass $c(s) = p$ der Ort des Wagens ist) und l den (gerichteten) Betrag der Geschwindigkeit (so dass $q = c'(s)l$ der Geschwindigkeitvektor).

Es bleibt noch, die relevante Differenzialgleichung für unser System aufzustellen, also für $(s(t), l(t))$, die Position des Achterbahnwagens in Abhängigkeit von der Zeit t.

Es ist $q(t) = p'(t) = c'(s(t))s'(t)$, andererseits nach Definition $q(t) = c'(s(t))l(t)$, also $l(t) = s'(t)$.

Für die Änderung der Geschwindigkeit relevant ist nur die Komponente der Bschleunigung tangential zur Kurve. Die orthogonale Komponente wird durch Kr"fte, welche die Bahn selbst aufbringt, kompensiert, und zwar so, dass insgesamt der Wagen auf der Bahn gehalten wird. Da $|c'| = 1$, erhält man

$$l'(t) = g\langle e_3, c'(s(t))\rangle.$$

Berücksichtigt man einen Reibungsterm, der proportional zur Geschwindigkeit wirkt, erhält man alternativ

$$l'(t) = g\langle e_3, c'(s(t))\rangle - al(t).$$

Damit ist das zugehörige DGl-System hergeleitet.

Allgemein wird der Phasenraum in der Regel eine glatte Mannigfaltigkeit, oft eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, sein.

15.6 Definition. Eine *glatte Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^n$ der Dimension k ist eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^k$ so dass $\forall x \in M$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und ein C^∞-Diffeomorphismus $\phi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $\phi(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.

Der *Tangentialraum* TM besteht aus allen $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ so dass $x \in M$ und $D_x\phi(v) \in \mathbb{R}^k$. $T_xM = \{(x, v) \mid v \in TM\}$, dies ist ein Vektorraum.

Eine glatte Mannigfaltigkeit M ist ein metrischer Raum (topologischer Raum) mit einem glatten Atlas.

Ein (glattes) Vektorfeld X ist eine Abbildung, die jedem $x \in M$ ein Element $X(x) \in T_xM$ zuordnet (so dass die zugeörige Abbildung $X \circ phi^{-1}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ glatt ist).

16 Exakte Differentialgleichungen

16.1 Beispiel. Gegeben sei eine Ladungsverteilung, z.B. eine positiv geladene Ebene zusammen mit einem dazu parallelen negativ geladenen Draht. Diese erzeugt ein elektrisches Potential U, welches bezüglich Verschiebung entlang des Drahtes symmetrisch ist. In einer dazu orthogonalen Ebene suchen wir nun Äquipotentiallinien, also Kurven $y(x)$, so dass $U(x, y(x)) = c$ konstant.

Dies bedeutet, wenn man die totale Ableitung anschaut

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y(x))\frac{dy(x)}{dx} = 0.$$

Nun sind die (negativen) partiellen Ableitungen des Potentials gerade das elektrische Feld, man erhält also

$$E_x(x, y) + E_y(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \tag{16.2}$$

Das Potential kann man direkt gar nicht messen, messen kann man nur das elektrische Feld (E_x, E_y). Die eigentlich gegebene Differenzialgleichung ist also Gleichung (16.2).

Es zeigt sich also, dass die Äquipotentiallinien eine exakte Differenzialgleichung nach der folgenden Definition erfüllen.

16.3 Definition. Sei u zweimal stetig differenzierbar, $p(t, x) = u_t(t, x)$, $q(t, x) = u_x(t, x)$ (wobei $u_t = \partial u/\partial t$).

Dann heißt die Differezialgleichung $p(t, x(t)) + q(t, x(t))x'(t) = 0$ *exakte Differenzialgleichung.*

Beachte, dass die DGl natürlich nur von p und q abhängt; die *Existenz* von u ist das entscheidende Kriterium für Exaktheit.

16.4 Satz. *Eine differenzierbare Funktion $t \mapsto x(t)$ löst die exakte Differenzialgleichung $p(t,x(t)) + q(t,x(t))x'(t) = 0$ genau dann, wenn $u(t,x(t))$ eine konstante Funktion ist, wobei u ein Potential ist, also $p(t,x) - u_t(t,x)$, $q(t,x) = u_x(t,x)$.*

Letztendlich bedeutet also lösen einer exakten Differenzialgleichung genau, ein Potential zu finden; wobei man dann denkt, dass die Lösung der impliziten Gleichungen $u(t,x(t)) = const$ entweder von einfacherer (algebraischer) Natur sind, oder vielleicht gar nicht relevant.

Beweis. Ist $u(t,x(t))$ konstant, so muss man nur nach t ableiten, um zu erkennen, dass die exakte Differenzialgleichung erfüllt ist. Umgekehrt folgt aber auch, dass die Ableitung nach t von $t \mapsto u(t,x(t))$ Null ist, also diese konstant, falls $x(t)$ die exakte Differenzialgleichung löst. □

Es fragt sich nun also, wann und wie man ein Potential für eine exakte Differenzialgleichung $p(t,x(t)) + q(t,x(t))x'(t) = 0$ finden kann, und natürlich auch, wie man erkennt, ob solch eine Differenzialgleichung exakt ist. Dies wird von folgendem Satz, dem sogenannten *Lemma von Poincaré* beantwortet.

16.5 Satz. *Sei $V \subset \mathbb{R}^2$ sternförmig mit zentrum 0 und offen. Sei $E = (E_x, E_y)\colon V \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar.*

Ein Potential $U\colon V \to \mathbb{R}$ von E, also eine differenzierbare Funktion mit $\partial U/\partial x = E_x$ und $\partial U/\partial y = E_y$, existiert genau dann, wenn

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Dies wird "Integrabilitätskriterium" genannt.

In diesem Fall ist eine mögliche Formel für U gegeben durch

$$U(v) = \int_0^1 \langle E(sv), v\rangle \, ds \qquad \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

Beachte, dass $E(sv)$ für alle $s \in [0,1]$ definiert ist, weil V sternförmit ist.

Ist V ein Rechteck, kann man alternativ auch die Formel

$$U(x,y) = \int_0^x E_x(s,0)\, ds + \int_0^y E_y(x,s)\, ds$$

benutzen. Durch die Bedingung $U(0,0) = 0$ ist das Potential eindeutig festgelegt.

Beweis. Ist U Potential von E, so gilt nach dem Satz von Schwarz (da nach Voraussetzung E stetig differenzierbar und deshalb U zweimal stetig differenzierbar), das Integrabilitätskriterium erfüllt.

Ist umgekehrt das Integrabilitätskriterium erfüllt, so rechnet man direkt nach, dass die angegebene Formel ein Potenzial U definiert. □

16.6 Aufgabe. Finde, auf einem nicht-sternförmigen Gebiet $V \subset \mathbb{R}^2$, eine stetig differenzierbare Funktion $E\colon V \to \mathbb{R}^2$, welche das Integrabilitätskriterium erfüllt, welche aber kein Potential besitzt.

17 Existenzsatz von Peano

Der Satz von Picard-Lindelöff garantiert die lokale Existenz und Eindeutigket von Lösungen von Anfangswertproblemen; Voraussetzung ist, dass das zugehörige Vektorfeld Lipschitz-stetig ist. Wir haben Beispiele gesehen, welche die Eindeutigkeit verletzten, d.h., auf die Lipschitz-Bedingung kann für diesen Satz im allgemeinen nicht verzichtet werden. Für die (lokale) Existenz genügt aber die schwächere Voraussetzung, dass das Vektorfeld stetig ist:

17.1 Satz. ***Existenzsatz von Peano.*** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetiges Vektorfeld, $x_0 \in U$. Dann gibt es $\epsilon > 0$ und eine Lösung $x : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ des Anfangswertproblems $x'(t) = X(x(t))$, $x(0) = x_0$.*

Beweis. Leider kann man in dieser Allgemeinheit keine explizite Lösungsformel angeben. Unsere Strategie ist daher (wieder), die gesuchte Lösung über einen Limes-Prozess zu gewinnen. Da wir keine eindeutige Lösung erwarten können (Gegenbeispiele!), kann man erwarten, bei der Konvergenz der zu konsruierenden Folge Probleme zu haben. Typischerweise (und auch im hier gewählten Beweis) wird man Kompaktheit benutzen, um zumindest Konvergenz einer Teilfolge zu erhalten —verschiedene Lösungen können sich dann z.B. aus verschiedenen konvergenten Teilfolgen ergeben.

Zum Schluss muss man natürlich noch zeigen, dass die Limesfunktion tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das Theorem zu beweisen, wir wollen das Eulerverfahren benutzen, um eine approximierende Folge konstruieren.

Da X stetig ist, gibt es eine (kleine) Umgebung von x_0 (in U), so dass das Vektorfeld auf dieser Umgebung beschränkt ist. Verkleinern wir U entsprechend, können wir also annehmen, dass $|X(p)| < M$ für alle $x \in U$ und für geeignetes $M \in \mathbb{R}$.

Nun wenden wir das Eulerverfahren zur Schrittweite h *vorwärts und rückwärts* in der Zeit und mit Anfangswert x_0 an. Wir erhalten stetige stückweise (affin) lineare Funktionen $x_h : (a_h, b_h) \to U$, $a_h < 0, b_h > 0$. Die Norm der Ableitung ist überall durch M beschränkt.

Daraus ergibt sich sofort, dass für jedes h und jedes $t_1, t_2 \in (a_h, b_h)$

$$|x_h(t_1) - x_h(t_2)| \leq M\,|t_1 - t_2|\,. \tag{17.2}$$

Genauso sieht man, dass, wenn man $\epsilon > 0$ so wählt, dass der Ball vom Radius $2M\epsilon$ um x_0 in U enthalten ist, dann auch $[-\epsilon, \epsilon] \subset (a_h, b_h)$ für alle h. Auf diesem Intervall sind alle Funktionen x_h gleichmäßig beschränkt (die Werte liegen im Ball vom Radius ϵM um x_0).

Ungleichung (17.2) besagt, dass die Funktionenfamilie x_h gleichmäßig gleichgradig stetig ist. Zusammen mit der gleichmäßigen Beschränktheit impliziert nun der Satz von Arzela-Ascoli, dass die Funktionenfolge $(x_{1/n} : [-\epsilon, \epsilon] \to U)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge hat, mit (stetiger) Grenzfunktion $x_\infty : [-\epsilon, \epsilon] \to U$.

Es bleibt zu zeigen, dass jede solche Grenzfunktion eine Lösung unseres Anfangswertproblems ist. Nach Konstruktion gilt nun $x_h(0) = x_0$ für jedes h, also auch $x_\infty(0) = x_0$.

Etwas schwieriger ist die Berechnung der Ableitung. Dies war bereits Inhalt einer Übungsaufgabe. Fixiere $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ und $\delta > 0$. Wir müssen zeigen dass es

$h_\delta > 0$ gibt, so dass für alle $|h| < h_0$ gilt

$$|(x_\infty(t+h) - x_\infty(t))/h - X(x_\infty(t))| < \delta. \tag{17.3}$$

Sei (x_n) die oben gewählte konvergente Teilfolge von $(x_{1/n})$ mit Limes x_∞. Wir werden Ungleichung (17.3) für x_n für alle genügend großen n zeigen, dann gilt es natürlich auch für den Limes x_∞ einer Folge.

Wegen der Stetigkeit des Vektorfelds X gibt es zu dem gewählten $\delta > 0$ ein $r > 0$, so dass $absX(p) - X(x_\infty(t)) < \delta/(10M)$ wenn $|p - x_\infty(t)| < r$. Wähle nun n_0 so gross, dass $|x_n(t) - x_\infty(t)| < r/2$ für alle $n \geq n_0$ und so dass zusätzlich $M/n_0 < r/10$ (beachte, dass $1/n_0$ größer ist als die Schrittweite des Eulerverfahrens für jede der Funktionen x_n (als Teilfolge von $x_{1/n}$)). Die Funktion $h \mapsto x_n(t+h)$ weicht von der linearen Funktion $h \mapsto x_n(t)+hX(x_\infty(t))$ maximal um $h \sup_{x\in I} |X(x(s)) - X(x_\infty(t))|$ ab. Hier ist I (falls $h > 0$) das Intervall $[t - 1/n_0, t + h]$ (entsprechend für $h < 0$); beachte, dass wir I nach links um die Schrittweite vergrößern müssen, da die Ableitung der stückweise stetigen Stücke immer an den "Knickstellen" festgelegt wird. Wähle nun h_0 so, dass $Mh_0 < r/10$ (damit wird h_0 in Abhängigkeit von r, also von δ, gewählt). Ist $n \geq n_0$ und $h \leq h_0$, ergibt sich dann mit unseren Wahlen, dass für $s \in I$ (wie oben) $|X(x(s)) - X(x_\infty(t))| < \delta$, da sich dann $x(s)$ im Ball vom Radius r um $x_\infty(t)$ befindet.

Folglich für solche n und h: $|(x_n(t+h) - x_n(t))/h - X(x_\infty(t))| < \delta$ (aus der obigen Überlegung). Damit folgt die Behauptung. □

Im Beweis haben wir den Satz von Arzela-Ascoli benutzt. Zur Vollständigkeit notieren wir hier noch einen Beweis.

17.4 Satz. *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und seien $x_n\colon [a,b] \to U$ ($n \in \mathbb{N}$) gleichmäßig gleichgradig stetige Funktionen mit Werten in einer abgeschlossenen beschränkten Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$, d.h. es gibt $C > 0$ so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $s, t \in [a,b]$ gilt*

$$d(x_n(s), x_n(t)) \leq C\,|s-t|\,.$$

Dann gibt es eine Teilfolge x_{n_k} welche gleichmäßig gegen eine Limesfunktion $x_\infty\colon [a,b] \to U$ konvergiert.

Beweis. Wähle zunächst eine abzählbare dichte Teilmenge $\{t_1, t_2, \dots\} \subset [a,b]$, z.B. $[a,b] \cap \mathbb{Q}$. Wähle dann eine Teilfolge (x_n^1) von (x_n), so dass $x_n^1(t_1)$ konvergiert (dies geht, da die Folge $(x_n(t_1))$ Werte in der kompakten Menge U annimmt).

Wähle dann eine Teilfolge (x_n^2) von der gerade eben gewählten Teilfolge (x_n^1), so dass $x_n^2(t_2)$ konvergiert. Beachte, dass dann natürlich weiterhin $x_n^2(t_1)$ konvergiert.

Induktiv bilde (x_n^k) als Teilfolge von (x_n^{k-1}), so dass $x_n^k(t_k)$ konvergiert.

Definiere nun mit dem *Diagonaltrick* $x_{n_k} := x_k^k$, also das k-te Glied der finalen Teilfolge ist das k-te Glied der vorher konstruierten k-ten Teilfolge.

Damit gilt für jedes $l \in \mathbb{N}$, dass $x_{n_k}(t_l)$ ab dem l-ten Glied eine Teilfolge von $x_n^l(t_l)$ ist, und somit konvergiert.

Sein nun $\delta > 0$. Dann gibt es endlich viele Elemente $\{t_1, \dots, t_r\}$, so dass für jedes $t \in [a,b]$ ein $i \leq r$ existiert mit $|t - t_i| < \delta/C$. Wähle n_0, so dass $|x_{n_k}(t_j) - x_{n_l}(t_j)| < \delta$ für $j = 1, \dots, r$ und alle $n, l > n_0$, was möglich ist, da diese Folgen alle konvergieren. Damit gilt weiter für solches $t \in [a,b]$ und n, l

$$\begin{aligned}|x_{n_k}(t) - x_{n_l}(t)| \leq& |x_{n_k}(t) - x_{n_k}(t_i)| + |x_{n_k}(t_i) - x_{n_l}(t_i)| + |x_{n_l}(t_r) - x_{n_l}(t)| \\ \leq& C\,|t - t_i| + \delta + C\,|t - t_i| \leq 3\delta\end{aligned}$$

(x_{n_k}) ist also eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm, und somit gleichmäßig konvergent. □

18 Systeme linearer Differenzialgleichungen

18.1 Definition. Ein System von Differenzialgleichungen $x' = A(t)x+b(t)$, mit $A\colon (a,b) \to M(n,\mathbb{R})$ ($(a,b) \subset \mathbb{R}$) heißt *lineares Differenzialgleichungssystem*. Es wird lineares Differenzialgleichungssytem *mit konstanten Koeffizienten* genannt, wenn $A(t)$ konstant ist, also nicht von t abhängt. Ist $b(t) = 0$ nennt man das System *homogen*, sonst *inhomogen*.

18.2 Beispiel. Wir haben bereist einige Beispiele kennen gelernt, insbesondere die 1-dimensionalen linearen Differenzialgleichungen, wo $n = 1$.

Bei der Betrachtung von Pendeln, und auch von Räuber-Beute-Systemen, sind uns weitere lineare Differenzialgleichungssysteme über den Weg gelaufen (teilweise nach der Reduktion auf ein System erster Ordnung).

18.3 Bemerkung. Zur Erinnerung: im 1-dimensionalen Fall löste man $x' = ax$ mit dem Ansatz $x(t) = ce^{at}$, $x' = a(t)x$ durch $x(t) = ce^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}$, und die inhomogene Gleichung durch Ansatz mit Variation der Konstanten.

Auf etwas formale Weise liefert dasselbe Vorgehen auch Lösungen für die linearen Differenzialgleichungssysteme. Wir wenden uns erst den homogenen Systemen mit konstanten Koeffizienten zu.

18.4 Definition. Sei $A \in M(n,\mathbb{C})$. Setze

$$\exp(A) := e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

$M(n,\mathbb{C})$ ist ein Banach-Raum; die Reihe konvergiert also dann, wenn sie absolut konvergiert. Da $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, folgt die absolute Konvergenz aus der Konvergenz der Exponentialreihe reeller Zahlen.

18.5 Beispiel. Ist A die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $(a_1,\dots,a_n)$, so ist $\exp(A) = diag(e^{a_1},\dots,e^{a_n})$.

Für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erhält man $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = 1$, und danach wiederholt sich das ganze periodisch.

Damit ist $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$, weil ja $\sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n+1}/(2n+1)!$, und $\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}/(2n)!$.

Um die Matrizen-Exponentialfunktion nutzen zu können, müssen wir noch einige ihrer Eigenschaften herleiten.

18.6 Lemma. *(1)* $\exp(0) = 0$.

(2) Falls $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ mit$AB = BA$, so gilt

$$\exp(AB) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A).$$

(3) Die Funktion $\mathbb{R} \to M(n, \mathbb{C}); t \mapsto \exp(tA)$ ist differenzierbar, und es gilt

$$\exp(tA)' = A\exp(tA).$$

(4) Für $A, B \in M(n, \mathbb{C})$, B invertierbar, gilt

$$\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}\exp(A)B.$$

Beweis. (1) $\exp(0) = \sum 0^k/k!$, mit $0^0 = 1$ (Konvention!).

(2) Wenn $AB = BA$, so gilt $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} A^k B^{n-k}$. Diese Formel ist die Grundlage für den Umsummierungsbeweis des Additionstheorems für die gewöhnliche Exponentialfunktion; der identische Beweis funktioniert jetzt also immer noch, und man erhält

$$\exp(A+B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!} = \exp(A)\exp(B).$$

Beachte, dass die Formeln *nicht* gelten, wenn $AB \neq BA$!

(3) Als *absolut konvergente* Potenzreihe ist die Funktion differenzierbar und man kann gliedweise differenzieren (der Beweis ist genauso wie bei normalen Potenzreihen). Man erhält also

$$\exp(tA)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1}A^k}{n!} = A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^{n-1}}{(n-1)!} = A\exp(tA).$$

Alternativ berechnet man den Differenzenquotienten

$$(\exp((t+h)A) - \exp(tA))/h = \exp(tA)(\exp(hA) - 1)/h.$$

Nun ist $(\exp(hA) - 1)/h = \sum_{k=1}^{\infty} h^{k-1}A^k/k!$ eine Potenzreihe mit konstantem Term A, so dass der Limes für $h \to 0$ gerade A ist.

(4) $\exp(B^{-1}AB) = \sum_{k=0}^{\infty}(B^{-1}AB)^k/k! = \sum_{k=0}^{\infty} B^{-1}A^kB/k! = B^{-1}\exp(A)B.$ □

18.7 Satz. *Das homogene lineare Anfangswertproblem $x' = Ax$, $x(0) = x_0$ mit $A \in M(n, \mathbb{R})$ hat die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte eindeutige Lösung*

$$x(t) = \exp(tA)x_0.$$

Beweis. Es gilt $x(0) = \exp(0)x_0 = x_0$, und $x'(t) = A\exp(tA)x_0 = Ax(t)$. Das Vektorfeld $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $x \mapsto Ax$ ist Lipschitzstetig, also ist diese Lösung eindeutig. □

18.8 Bemerkung. Lineare Differenzialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten haben in der Praxis eine besondere Bedeutung. Nicht nur, dass sie recht häufig direkt auftreten. Hinzu kommt, dass man "schwierige" andere Differenzialgleichungen oft durch lineare Differenzialgleichungen annähert (in einer Art Taylorentwicklung); und dann (zunächst) diese Linearisierungen betrachtet, die in der Regel handhabbar sind. Genauso wird man durch "Einfrieren der Koeffizienten" weiter zu einem linearen System mit konstanten Koeffizienten vereinfachen.

Die Hoffnung ist, dass zumindest für kleine "Zeit"-Intervalle die Lösungen dieser Approximationen den eigentlichen Lösungen nahe kommen —dies muss natürlich dann auch wieder genau untersucht werden. Dass dies im allgemeinen stimmt, haben wir ja schon im Satz über die stetige Abhängigkeit von Parametern gesehen.

Dies bedeutet, dass man diese linearen Systeme aber tatsächlich gut behandeln können sollte. Damit beschäftigen wir uns daher noch eine Weile.

18.9 Lemma. *Die Menge L der Lösungen von $x' = A(t)x$ (mit festem Definitionsbereich, z.B. $\mathbb{R}$) bildet einen Vektorraum.*

18.10 Definition. Sei $A\colon I \to M(n, \mathbb{R})$ stetig. Ein System $(w_1, \ldots, w_n)$, $w_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ von Lösungen von $x'(t) = A(t)x(t)$ heißt *Fundamentalsystem*, wenn die Funktionen $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig ist.

18.11 Lemma. *$(w_1, \ldots, w_n)$ ist genau dann ein Fundamentalsystem, wenn für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ die Vektoren $(w_1(t_0), \ldots, w_n(t_0))$ linear unabhängig sind.*

Eine beliebige Lösung $w(t)$ ist Linearkombination (mit reellen Koeffizienten) von $w_1, \ldots, w_n$, L ist also genau n-dimensional.

Beweis. Dies folgt aus der Eindeutigkeit von Lösungen des AWP $x' = A(t)x$, $x(t_0) = 0$. □

Unter Benutzung der Formel aus Satz 18.7 ist jetzt also die Hauptaufgabe, $\exp(tA)$ zu bestimmen. Dazu ist es (auch numerisch) nicht sinnvoll, direkt die Definition zu benutzen, da zu viele Matrizenmultiplikationen benötigt werden (insbesondere bei großem n).

Statt dessen wird man die Regel $\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}\exp(A)B$ benutzen. In anderen Worten: durch geeignete Basis des $\mathbb{R}^n$ wird die Matrix A (und damit auch die Differenzialgleichung) auf möglichst einfache Form gebracht. Ziel ist insbesondere, die Matrix A zu *diagonalisieren.* Obwohl wir bisher (und für die Praxis) in der Regel nur reelle Lösungen suchen, wird man beim Diagonalisieren den Zahlenbereich um die kompelxen Zahlen erweitern (mehr Matrizen werden diagonalisierbar).

Wir machen dazu folgende Beobachtung:

18.12 Lemma. *Sei $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung von $x' = A(t)x$, mit $A\colon \mathbb{R} \to M(n, \mathbb{R})$. Dann ist $\overline{x}(t)$, und auch $Re(x)$ und $Im(x)$ Lösungen der DGl (letztere sind natürlich reellwertige).*

Ist $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$, so ist $x(t) \in \mathbb{R}^n$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir können die ganze DGl komplex konjugieren, da $\overline{A} = A$, erhält man $\overline{x}'(t) = Ax(t)$, also ist auch $\overline{x}$ Lösung der DGl. Weiter ist $Re(x) = (x + \overline{x})/2$ und $Im(x) = (x - \overline{x})/2i$, wegen der Linearität sind dies also auch Lösungen.

Ist $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$, so erfüllt $\overline{x}$ dasselbe AWP, stimmt wegen der Eindeutigkeit also mit x überein. □

18.13 Satz. *Betrachte die DGl $x' = Ax$ mit $A \in M(n, \mathbb{R})$. Ein (reelles) Fundamentalsystem kann man sich auf folgende Weise beschaffen:*

(1) Finde eine geeignete Basis $v_1, \dots, v_n$ von $\mathbb{C}^n$, so dass A in $M(n, \mathbb{C})$ Jordan-Normalform hat. Für die zugehörige Basiswechselmatrix $B \in M(n, \mathbb{C})$ gilt also: $B^{-1}AB$ hat Jordan-Normalform.

(2) Sei C Jordan-Kästchen von A zum Eingenwert λ der Größe i. Also $C = \lambda 1 + N_i$. Hierbei ist N_i die $i \times i$-Matrix mit 1 auf der oberen Nebendiagonalen, sonst Nulleinträgen. Für die zum Kästchen C gehörenden Basisvektoren $w_1, \dots, w_i$ gilt also $Aw_1 = \lambda w_1$, $Aw_j = \lambda w_j + w_{j-1}$ für $j = 2, \dots, i$.

Da $\lambda 1$ mit N_i kommutiert, gilt $\exp(tC) = e^{t\lambda} 1 \cdot \exp(tN_i)$, und $\exp(tN_i) = \sum_{q=0}^{i} N_i^q/q!$ (da $N_i^{i+1} = 0$: N_i ist nilpotent).

(3) Für jedes Jordankästchen der Größe 1 mit zugehörigem Eigenvektor w und Eigenwert λ erhalten wir also die Lösung $x(t) = e^{\lambda t} w$ (es gilt $w = Be_j$ für geeigneten (eindeutigen) Standardbasisvektor e_j).

(4) Allgemeiner, für ein Jordankästchen der Größe i mit zugehörigem Eigenwert λ und Basisvektoren $w_1, \dots, w_i \in \mathbb{C}^n$ erhalten wir Lösungsfunktionen $x_1(t) = e^{\lambda t} w_1$, $x_2(t) = e^{\lambda t}(w_2 + t w_1)$, $\dots$, $x_i(t) = e^{\lambda t}(w_i + t w_{i-1} + t^2 w_{i-2} + \dots + t^{i-1} w_1)$ (hier ist $w_1 = Be_\alpha$, $w_2 = Be_{\alpha+1}, \dots$).

(5) Auf diese Weise erhält man n (komplexe) Lösungsfunktionen. Für $t = 0$ nehmen sie gerade wie Werte $w_1, \dots, w_n$ an, sind also linear unabhängig und somit ein "komplexes Fundamentalsystem".

(6) Ein reelles Fundamentalsystem erhält man, indem man Symmetrie unter komplexer Konjugation ausnutzt: für jeden echt komplexen Eigenwert λ mit Jordankästchen C gibt es ein entsprechendes Jordankästchen D zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ (d.h. Größe und Anzahl der Jordankästchen zu λ und $\overline{\lambda}$ entsprechen sich). Durch geeignete Wahl der Basisvektoren kann man erreichen, dass mit w_i auch $\overline{w_i}$ in der Basis auftritt.

Dann treten mit der obigen Konstruktion im komplexen Fundamentalsystem die echt komplexen Lösungen in Paaren $x(t), \overline{x}(t)$ auf. Ein reelles Fundamentalsystem erhält man, indem man in jedem dieser Paare $Re(x)$ und $Im(x)$ auswählt. Die Werte für $t = 0$ bilden dann eine Basis von $\mathbb{R}^n$, man hat also tatsächlich ein Fundamentalsystem erhalten.

Beweis. Man betrachtet ja tatsächlich nur $\exp(tA)w_1, \dots \exp(tA)w_n$, von denen wir wissen, dass sie ein Fundamentalsystem bilden.

Es bleibt vielleicht noch zu begründen, warum beim Übergang zur reellen "Fundamenallösung" tatsächlich ein linear unabhängiges System entsteht. Hierzu beachte, dass aus einer Basis von $\mathbb{C}^n$ der Form $(w_1, \dots, w_n)$, in der $w_2 = \overline{w}_1$, auch $((w_1 + w_2)/2, (w_1 - w_2)/2i, w_3, \dots, w_n)$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ bildet, also auch reell linear unabhängig bleibt. Diese Prozess haben wir endlich oft angewendet, um die reelle Fundamentallösung zu konstruieren. □

18.14 Beispiel. (1) Betrachten wir unter diesem Gesichtspunkt unser "Lieblingsbeispiel" $p'' = -ap' - p$, woraus ja das System $p' = q$, $q' = -p - aq$

wird, oder (mit Vektoren) $x' = Ax$, mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$. Der "Reibungslose" Fall $a = 0$ führt auf die Matrix A mit (komplexen) Eigenwerten $i, -i$ und somit komplexem Fundamentalsystem $e^{it}w_1, e^{-it}w_2$ mit $w_2 = \overline{w}_1$ (Berechnung: Übungsaufgabe). Realteil und Imaginärteil der ersten Funktion sind dann $\cos(t)Re(w_1) - \sin(t)Im(w_1)$, $\cos(t)Im(w_i) + \sin(t)Re(w_1)$.

Allgemein hat die Matrix A als Eigenwerte die Nullstellen von $z^2 + az + 1$, also $z_{1,2} = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - 1}$. Für $|a| < 2$ erhält man zwei nicht-reelle konjugiert komplexe Eigenwerte z_1, z_2, mit Eigenvektoren w_1, w_2. Die zugehörigen Lösungsfunktionen $f_{1,2}(t) = e^{-ta/2}e^{\pm i\sqrt{a^2/4-1}}w_{1,2}$ liefern, wenn man Realteil- und Imaginärteil anschaut, exponentiell abfallende (falls $a > 0$) oder exponentiell ansteigende (falls $a < 0$) oszillierende Lösungen.

Für $|a| > 2$ gibt es zwei reelle Eigenwerte, die zugehörigen Eigenvektoren können dann ebenfalls reell gewählt werden. Da $\sqrt{a^2/4 - 1} < |a/2|$, erhält man, wenn $a > 0$, zwei exponentiell abfallende Lösungen $e^{-a/2 \pm \sqrt{a^2/4-1}}$, wenn $a < 0$ entsprechend zwei exponentiell ansteigende Lösungen.

Zwei Sonderfälle ergeben sich mit $a = 2$ und $a = -2$ (Übergang zwischen den oszillierenden und den nicht oszillierenden Lösungen). Das charakteristische Polynom hat in diesem Fall eine doppelte Nullstelle. Da die gegebene Matrix aber sicher kein vielfaches der Identität ist, gibt es nur einen eindimensionalen zugehörigen Lösungsraum (Minimalpolynom und charakteristisches Polynom stimmen überein). Folglich ist die Jordan-Normalform $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ beziehungsweise $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Betrachten wir den Fall $a = 2$: sei w_1, w_2 die Basis zur Jordan-Normalform, dann erhalten wir zwei Lösungen $e^{-t}w_1$ und $e^{-1}w_2 + te^{-t}w_1$. Wieder können die Basisvektoren beide reell gewählt werden.

18.15 Bemerkung. Für lineare Differenzialgleichungssyteme mit *nicht-konstanten* Koeffizienten $x'(t) = A(t)x(t)$ gibt es *kein* allgemeines Lösungsverfahren (außer im Fall $n = 1$).

Insbesondere ist die Funktion $x(t) = \exp(\int_{t_0}^t A(s)\,ds)x_0$ im allgemeinen *keine* Lösung von $x'(t) = A(t)x(t)$. Berechnet man die Ableitung, stellt man insbesondere fest, dass es ein Problem ist, dass $A(s_1)$ und $A(s_2)$ im allgemeinen nicht miteinander kommutieren.

19 Inhomogene lindare Differenzialgleichungen

20 Eulersche Differenzialgleichungen

20.1 Beispiel. Modelliert man die Wärmeverteilung einer kreisrunden Metallscheibe, unter Verwendung von Polarkoordinaten (r, ϕ), so stellt man fest dass eine stationäre (also zeitlich unveränderliche) Wärmeverteilung $u(r, \phi)$ die partielle Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \tag{20.2}$$

erfüllt. Macht man nun den (sehr speziellen) Produktansatz $u(r,\phi) = v(r)w(\phi)$ (wobei klar ist, dass nicht jede Funktion $u(r,\phi)$ auf diese Weise geschrieben werden kann; aber viele Funktionen Linearkombinationen solch spezieller Funktionen sind), so ergibt sich aus (20.2) die äquivalente Gleichung

$$r^2\frac{v''(r)}{v(r)} + r\frac{v'(r)}{v(r)} = -\frac{w''(\phi)}{w(\phi)}. \tag{20.3}$$

Dies soll nun bei festem ϕ für alle $r > 0$ gelten, und umgekehrt bei festem r für alle ϕ. Folglich ist äquivalent, dass beide Seiten konstant sind, mit derselben Konstante λ.

Wir erhalten also äquivalent die Differenzialgleichungen $w''(\phi) + \lambda w(\phi) = 0$ und

$$r^2 v''(r) + rv'(r) - \lambda v(r) = 0$$

für geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir wollen nun untersuchen, wie man Differnzialgleichungen des zweiten Typs lösen kann.

20.4 Definition. Seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Eine Differenzialgleichung der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k t^k x^{(k)}(t) = 0; \qquad t > 0 \tag{20.5}$$

heißt Eulersche Differenzialgleichung.

20.6 Satz. *Man erhält genau alle Lösungen der Eulerschen Differenzialgleichung* (20.5) *in der Form* $t \mapsto u(\ln(t))$, *wobei* $u(s)$ *eine Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{d}{ds} - (k-1)\right) \circ \cdots \circ \left(\frac{d}{ds} - 1\right) \circ \frac{d}{ds} = 0 \tag{20.7}$$

ist. Hierbei ist der Operator $\left(\frac{d}{ds} - j\right)$ *definiert als Differenz aus Ableitung nach* s *und Multiplikation mit* j.

Beweis. Wir betrachten Funktionen der Form $x(t) = u(\ln(t))$, also äquivalent $u(s) = x(e^s)$ für $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Da hier der Logarithmus und die Exponentialfunktion zueinander inverse Diffeomorphismen sind, muss man einfach nur die gegebene Differenzialgleichung fÜr $x(t)$ in die sich ergenbende, automatisch äquivalente Differenzialgleichung für $u(s)$ umformen. Nun sieht man (unter der vorausgesetzten Beziehung zwischen x und u)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{du}{ds}(\ln(t))\frac{1}{t} = e^{-\ln(t)}\frac{du}{ds}(\ln(t)).$$

Nun wendet man die Kettenregel auf die Funktion $s \mapsto e^{-s}\frac{du}{ds}$ an, und erhält

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(-e^{-s}\frac{du}{ds} + e^{-s}\frac{d^2u}{ds^2}\right)|_{s=\ln(t)}\frac{1}{t} = e^{-2s}\left(\frac{d}{ds} - 1\right)\frac{d}{ds}u(s)|_{s=\ln(t)}.$$

Induktiv erhält man

$$\frac{d^kx}{dt^k} = e^{-ks}\left(\frac{d}{ds} - (k-1)\right)\cdots\left(\frac{d}{ds} - 1\right)\frac{d}{ds}u|s = \ln(t).$$

Setzt man dies in die Eulersche Differenzialgleichung (20.5) ein, erh"alt man sofort die behauptete äquivalente Gleichung (20.7). $\square$

21 Reduktionsverfahren für lineare Differenzialgleichungssysteme

Ziel dieses Abschnitts ist es, unter Verwendung einer schon gegebenen Lösung eines Differenzialgleichungssystems ein einfacheres System zu finden, dessen Lösungen dann dazu genutzt werden können, die weiteren Lösungen des ursprünglichen Systems (algebraisch) zu gewinnen. Letztendlich geht es weiterhin darum, ein Fundamentalsystem zu bestimmen.

Unpräzise kann man das so formulieren:

21.1 Satz. *Sei $x'(t) = A(t)x(t)$ eine n-dimensionale Differenzialgleichung mit $A\colon I \to M(n, \mathbb{R})$ stetig, und sei $x_1 : I \to \mathbb{R}^n$ eine nicht-triviale Lösung.*

Dann kann man ein eine Dimension kleineres System $y' = B(t)y$ mit $B\colon I \to M(n-1, \mathbb{R})$ bestimmen, so dass aus den Lösungen dieses Systems auf "algebraischem" Weg weitere Lösungen von $x' = A(t)x$ gewonnen werden können. Insbesondere kann man mit Hilfe eines Fundamentalsystems von $y' = B(t)y$ und mit x_1 ein Fundamentalsystem bestimmen.

Ehe wir diesen Satz präzisieren und beweisen, wollen wir speziell den Fall $n = 2$, mit einem speziellen Verfahren, behandeln.

21.2 Satz. *Sei also $A\colon I \to M(2, \mathbb{R})$ und $x_1 = (x_1^1, x_1^2)\colon I \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar mit $x_1' = A(t)x_1(t)$, und es gelte $x_1^1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Sei $x_2 = (u, v)\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

Bildet man die Fundamentalmatrix $U(t) = (x_1, x_2)$, so gilt (wobei $t_0 \in I$)

$$\det U(t) = x_1^1(t)v(v) - x_1^2 u(t) = \exp(\int_{t_0}^t \operatorname{tr}(A(s))\, ds).$$

und $u(t)$ erfüllt die (inhomogene lineare) Differenzialgleichung

$$u'(t) = a_{11}(t)u(t) + a_{12}(t)\frac{x_1^2(t)}{x_1^1(t)}u(t) + \frac{a_{12}(t)}{x_1^1(t)}\exp(\int_{t_0}^t (a_{11}(s) + a_{22}(s))\, ds) \quad (21.3)$$

wobei $A = (a_{ij})$.

Dann ist $x_2(t)$ zweite Lösung von $x' = A(t)x$, linear unabhängig von x_1.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Determinante der "Fundamentalmatrix" $U(t)$ nirgends Null, also sind die beiden Funktionen x_1 und x_2 nirgendswo linear abhängig.

Es muss noch gezeigt werden, dass x_2 tatsächlich $x_2' = A(t)x_2$ erfüllt. Sei $y(t) = (y^1, y^2)$ eine Lösung der DGl, welche linear unabhängig von x_1 ist, und so dass die Fundamentalmatrix $\det(x_1, y)(t_0) = 1$ erfüllt (solch eine Funktion existiert, ggf. muss ein Element einer Fundamentalmatrix skaliert werden). Beachte, dass y genau bis auf Addition eines skalaren Vielfachen von x_1 eindeutig ist.

Nach dem Satz von Liouville wissen wir, dass $\det(x_1(t), y(t)) = \exp(\int_{t_0}^t \operatorname{tr}(A(s))\, ds)$, genau wie für x_2. Somit gilt $y^2(t) = \frac{1}{x_1^1(t)}(x_1^2(t)y^1(t) + \exp(\int_{t_0}^t \operatorname{tr}(A(s))\, ds))$, wieder entsprechend der Relation zwischen den Komponenten u und v von x_2.

Mit dieser Beziehung ergibt sich aus $y' = A(t)y$, dass y^1 die Differenzialgleichung (21.3) erfüllt, genau wie u. Daher unterscheiden sich y^1 und u nur um eine Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. Man überzeugt sich sofort, dass $x_1^1(t)$ eine solche Lösung ist, jede andere Lösung ist ein Vielfaches davon, also $u(t) = y^1(t) + \lambda x_1^1(t)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Setzt man dies jetzt in die Gleichungen ein, welche u mit v und y^1 mit y^2 verbinden, so folgt genauso, dass $v(t) = y^2(t) + \lambda x_1^2(t)$, somit $x_2 = y + \lambda x_1$; somit ist tatsächlich x_2 Lösung der linearen Differenzialgleichung $x' = A(t)x$. □

21.4 Beispiel. Betrachte die Differenzialgleichung $x'(t) = \begin{smallmatrix} 0 & e^{-t} \\ e^t & 1 \end{smallmatrix} x(t)$. Diese hat eine Lösung $t \mapsto (e^t, e^{2t})$, wie man durch nachrechnen sofort überprüft. Gesucht ist eine zweite linear unabhänige Lösung $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$. Mittels der Wronski-Determinante (wobei wir $t_0 = 0$ wählen) erhalten wir

$$e^t u_2(t) - e^{2t} u_1(t) = \exp\left(\int_0^t 1\, ds\right) = e^t,$$

oder äquivalent $u_2(t) = e^t u_1(t) + 1$. Damit ergibt sich für u_1 die inhomogene lineare Differenzialgleichung $u_1'(t) = u_1 + e^{-t}$, welche z.B. Lösung $u_1(t) = -e^{-t}/2$ hjat. Damit erhält man die zweite linear unabhängige Lösung $u(t) = (e^{-t}, -1)$ (indem man die gerade eben gefundene Lösung mit -2 multpliziert, was erlaubt ist, da wir Lösungen einer homogenene lineraren Differenzialgleichung suchen).

Nun soll ein allgemeines Reduktionsverfahren präsentiert werden.

21.5 Satz. *Sei $x_1 \colon I \to \mathbb{R}^n$ Lösung von $x'(t) = A(t)x(t)$ mit $A \colon I \to M(n, \mathbb{R})$ stetig.*

Wähle differenzierbaren Funktionen $x_2, \dots, x_n \colon I \to \mathbb{R}^n$, so dass $x_1(t), \dots, x_n(t)$ punktweise eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden (dies geht nach Aufgabe 21.8).

Sei nun $x(t) \colon I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Schreibe $x(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) x_i(t)$ mit differenzierbaren Funktionen $f_i \colon I \to \mathbb{R}$ (die f_i sind differenzierbar nach Aufgabe 21.9).

Schreibe insbesondere $A(t)x_i(t) - x_i'(t) = \sum_{j=1}^n b_{ji}(t) x_j(t)$ mit stetigen Funktionen $b_{ij} \colon I \to \mathbb{R}$.

Dann gilt $x'(t) = A(t)x(t)$ genau dann, wenn folgendes gilt:

(1) $f_1'(t) = \sum_{j=2}^n f_j b_{1j}(t)$

(2)
$$f_i'(t) = \sum_{j=2}^n b_{ij} f_j(t), \tag{21.6}$$

d.h., $f_2, \dots, f_n$ lösen ein $n-1$-dimensionales lineares Differenzialgleichungssystem, und f_1 ist aus $f_2, \dots, f_n$ durch eine "einfache" Intgration zu gewinnen.

Ein Fundamentalsystem $((f_j^2), \dots, (f_j^n))$ von Lösungen von (21.6) liefert auf diese Weise, zusammen mit x_1, ein Fundamentalsystem $(x_1, x_1 \int \sum_{j=2}^n f_j^k b_{1j} + \sum_{i=2}^n f_i^k x_i(t), k = 2, \dots, n)$ von $x' = A(t)x$.

Beweis. Mit $x(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)(x_i(t))$ folgt durch Einsetzen (und indem man die Linearität ausnutzt), dass $x'(t) = A(t)x(t)$ genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^n f_i'(t) x_i(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)\left(A(t)x_i(t) - x_i'(t)\right) = \sum_{i=1}^n b_{ji}(t) x_j(t) f_i(t).$$

Da x_1 die Differenzialgleichung $x_1'(t) = A(t)x_1(t)$ löst, gilt $b_{j1}(t) = 0$ für $j = 1, \dots, n$.

Wir benutzen nun, dass $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ für jedes $t \in I$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist und machen Koeffizientenvergleich bezüglich dieser Basis. Also ist $x'(t) = A(t)x(t)$ äquivalent zu (21.6) und $f_1'(t) = \sum_{j=2}^n f_j(t)b_{1j}(t)$.

Lineare Algebra impliziert, dass die angegebenen Funktionen des Fundamentalsystems linear unabhängig sind, wenn man mit einem Fundamentalsystem von (21.6) startet. □

21.7 Beispiel. Falls $x_1'(t) = A(t)x(t)$ mit $x_1 \colon I \to \mathbb{R}^n$ so dass die erste Komponente $x_1^1(t) \neq 0$ für alle t, so kann man $x_j(t) = e_j$ für $j = 2, \dots, n$ wählen. Auch b_{ij} vereinfacht sich dann entsprechend (aber Achtung: man muss bezüglich der Basis $(x_1(t), e_2, \dots, e_n)$ entwickeln!).

21.8 Aufgabe. Seien $x_1, \dots, x_k \colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ punktweise linear unabhängige differenzierbare Funktionen. Zeige, dass es dann *differenzierbare* Funktionen $x_{k+1}, \dots, x_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$, so dass $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ für jedes $t \in [0,1]$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist.

21.9 Aufgabe. Seien $x_1, \dots, x_n \colon I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbare Funktionen, welche punktweise eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Sei $x \colon I \to \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion. Dann gibt es eindeutige Funktionen $f_i \colon I \to \mathbb{R}$, so dass $x(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)x_i(t)$.

Zeige, dass x genau dann differenzierbar ist, wenn dies für alle Funktionen f_i gilt.

21.10 Aufgabe. Das Reduktionstheorem 21.5 hat in der bestehenden Form den Nachteil, dass eine wenig explizite Entwicklung bezüglich neuer Basen des $\mathbb{R}^n$ notwendig ist. Dies kann unter guten Umständen durch ein entsprechend verändertes Verfahren umgangen werden:

Sei dazu $x'(t) = A(t)x(t)$ für $x \colon I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, und so dass die erste Komponente $x^1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Sei $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$. Betrachte nun die $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen

$$(b_{ij}(t) := a_{ij}(t) - \frac{u_i(t)}{u_1(t)} a_1 j(t))_{i,j=2,\dots,n}.$$

Ist $v^2, \dots, v^n$ Lösung von $v^i(t)' = \sum_{j=2}^n b_{ij}(t)v_j(t)$, so ist

$$(v^1(t) := \int \frac{1}{u_1(t)} \sum_{j=2}^n a_{1j}(t)v^j(t), v^2(t), \dots, v^n(t))$$

eine Lösung der ursprünglichen Differenzialgleichung, linear unabhängig von $x(t)$; entsprechend erhält man auch ein Fundamentalsuystem.

22 Fixpunkte und Zykel

22.1 Definition. Sei $U \colon U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Punkt $x \in U$ mit $X(x) = 0$ heißt *Fixpunkt* oder *kritischer Punkt* oder *Gleichgewichtspunkt* des Vektorfelds X.

Beobachtung: Ist $x \in U$ Fixpunkt von X, so ist die konstante Kurve $c\colon \mathbb{R} \to U; t \mapsto x$ Integralkurve von X. Es ist also wichtig, Fixpunkt von Vektorfeldern zu bestimmen.

Von Bedeutung ist auch, wie sich Integralkurven verhalten, die durch Punkte in der Nähe eines Fixpunktes laufen.

22.2 Beispiel. Das (gedämpfte) Feder-Schwere-Pendel ist durch die DGL

$$x''(t) = -Dx(t) - Rx'(t)$$

beschrieben, mit Konstanten $D > 0$, $R \geq 0$. Äquivalent dazu ist das System erster Ordnung

$$y' = -Dx - Ry, \qquad x' = y;$$

das zugehörige Vektorfeld ist also

$$X(x, y) = (y, -Dx - Ry)$$

Hier gibt es genau den einen Fixpunkt $(0, 0)$.

Dies entspricht der unausgelenkten Feder, bei der das Gewicht Geschwindigkeit 0 hat. Für $R > 0$ (Reibung vorhanden) sollten sich die anderen Integralkurven der konstanten Lösung annähern.

22.3 Aufgabe. Bestimme das zugehörige Vektorfeld und seine Fixpunkte für folgende Systeme von Differenzialgleichungen.

(1) $x' = y^2 + x - 2$, $y' = x^2 - y^2$

(2) $x'(y - 1) = x - 5$, $y' = (x - 3)(y + 2)$

(3) $x' = (-ax - by)x$, $y' = (f - cx - dy)y$.

22.4 Definition. Ein *Zykel* für ein Vektorfeld $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ ist eine periodische Integralkurve $c\colon \mathbb{R} \to U$, d.h. eine Integralkurve, so dass $T \geq 0$ existiert mit $c(t + T) = c(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$. Das kleinste T mit dieser Eigenschaft heißt *Periode* des Zykels.

Ein Zykel entspricht einer *periodischen Lösung* der zugehörigen Differenzialgleichung.

22.5 Beispiel. Ist $R = 0$ (also ohne Reibung) im Feder-Schwere-Pendel, so sind alle (nicht-konstanten) Integralkurven periodisch.

23 Transformationen von gewöhnlichen Differenzialgleichungen

Wir haben bereits Vielfach Differenzialgleichungen behandelt, indem wir sie auf eine “einfachere Form” gebracht haben. Dieses Vorgehen soll nun systematisch und allgemein untersucht werden.

23.1 Definition. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Sei $f\colon U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, d.h. f ist bijektiv und f und seine Inverse sind stetig differenzierbar.

Definiere $f_*X\colon V \to \mathbb{R}^n$ durch $f_*X(q) = Df_{f^{-1}(q)}X(f^{-1}(q))$. Dies ist das mittels f *transformierte Vektorfeld*, es wird auch *push forward* von X genannt.

23.2 Definition. Zwei stetige Vektorfelder $X: U \to \mathbb{R}^n$ und $Y: V \to \mathbb{R}^n$ heißen (differenzierbar) äquivalent, falls es einen C^1-Diffeomorphismus $f: U \to V$ gibt, so dass $Y = f_*X$.

23.3 Beispiel. Sei $Q \in M(n, \mathbb{R})$ invertierbar. Dann ist die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; x \mapsto Qx$ ein Diffeomorphismus. Es gilt $Df_x = Q$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, und somit ist für ein Vektorfeld $X: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f_*X(q) = Q \cdot X(Q^{-1}q) \qquad \forall q \in \mathbb{R}^n.$$

Wir haben insbesondere bereits lineare Vektorfelder der Form $X(x) = Ax$ für ein $A \in M(n, \mathbb{R})$ betrachtet. In diesem Fall ist f_*X ebenfalls linear, nämlich

$$f_*X(q) = QAQ^{-1} \cdot q.$$

Beim Lösen linearer Differenzialgleichungen haben wir also eine lineare Transformation Q bestimmt, so dass das transformierte Vektorfeld einfach Form (Jordanform) hat, und somit leicht direkt zu lösen ist.

23.4 Bemerkung. Oft ist statt $f: U \to V$ die Inverse $f^{-1}: V \to U$ gegeben (was natürlich mathematisch äquivalent ist). Zur Berechnung von f_*X benötigt man dann nur noch Df. Dies erhält man aber leicht mit der Kettenregel: $1 = D(\mathrm{id}) = D(f \circ f^{-1}) = Df \circ D(f^{-1})$, oder (mit Berücksichtigung der Stellen, an denen man die Ableitung auswerten muss)

$$D_{f(x)}(f^{-1}) = (D_x f)^{-1}.$$

23.5 Aufgabe. Bei der Behandlung Eulerscher Differenzialgleichungen in Abschnitt 20 haben wir mittels des Diffeomorphismus $\ln: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit Inverser $\exp: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ gearbeitet. Übersetzt man mit Hilfe des Standard-Verfahrens die Differenzialgleichung n-ter Ordnung in eine Differenzialgleichung erster Ordnung für eine n-dimensionale Funktion; führt man eine verwandte, Transformation aus. Ermittle diese, und prüfe nach, dass das Vektorfeld in der erwarteten Weise transformiert wird.

Wir sind natürlich an den Lösungen von Differenzialgleichungen interessiert (oder äquivalent den Integralkurven von Vektorfeldern). Diese sollten bei äquivalenten Vektorfeldern ineinander übergehen, was auch der Fall ist:

23.6 Satz. *Sei $f: U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $X: U \to \mathbb{R}^n$, $Y: V \to \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder. Dann sind äquivalent:*

(1) $f_*X = Y$

(2) für jede Integralkure $c: I \to \mathbb{R}^n$ von X ist die Kurve $f_*c: I \to \mathbb{R}^n; t \mapsto f(c(t))$ eine Integralkurve von Y.

Beweis. Sei $Y = f_*X$ und $c: I \to \mathbb{R}^n$ erfülle $c'(t) = X(c(t))$ für jedes $t \in I$. Dann ist

$$f_*c'(t) = D_{c(t)}f \cdot c'(t) = D_{c(t)}fX(c(t)) = D_{f^{-1}(f_*c(t))}fX(f^{-1}(f_*c(t))) = Y(f_*c(t)).$$

Sei umgekehrt für jede Integralkurve c von X auch f_*c eine Integralkurve von Y. Für $q \in V$ und $x \in U$ mit $f(x) = q$ wähle eine Integralkurve $c: I \to U$

mit $f(0) = x$ (wähle I so, dass $0 \in I$). Dies geht wegen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Integralkurven von Vektorfeldern. Dann ist f_*c eine Integralkurve von Y, also $Y(q) = Y(f_*c(0)) = f_*c'(0) = D_x f c'(0) = D_x f X(x) = D_{f^{-1}(Q)} X(f^{-1}(q))$, also $Y = f_*X$. □

23.7 Bemerkung. Die Definition von "differenzierbarer Äquivalenz" erlaubt es, ein Vektorfeld in ein einfacheres zu transformieren (insbesondere wenn man, mit etwas Geschick und Erfahrung der Form von X einen sinnvollen Diffeomorphsmus f ablesen kann); dies haben wir insbesondere im 1-dimensionalen Fall mehrfach durchgeführt (Übungsaufgabe: gehe die "speziellen Lösungsmethoden" unter diesem Gesichtspunkt nochmal durch).

Die äquivalente zweite Formulierung in Satz 23.6 zeigt, dass, bis auf die durch den Diffeomorphismus f gegebene Distortion, die Flusskurven von äquivalenten Vektorfeldern einander entsprechen. Insbesondere kann man (auch ohne zurückzurechnen) das qualitative Verhalten direkt den Integralkurven des transformierten Systems ablesen (Fixpunkte, Verhalten bei Fixpunkten, geschlossene Integralkurven,...).

23.8 Proposition. *Differenzierbare Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ definierten stetigen Vektorfelder.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

23.9 Beispiel. Betrachte $X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $X(x, y) = ((1-r)x - y, x + (1-r)y)$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Beobachtung: ähnlich dem Rotationsvektorfeld $Y(x, y) = (-x - y, x + y)$.

Wir wollen dieses System in Polarkoordinaten transformieren, benutzen also $g: (0, \infty) \times (-\pi/1, \pi/2) \to \mathbb{R}^2; (r, \phi) \mapsto (r\cos(\phi), r\sin(\phi))$ (ein Diffeomorphismus auf sein Bild) mit gewisser Inverser f. Dann gilt $D_{(r,\phi)} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) \end{pmatrix}$ mit Inverse $1/r \begin{pmatrix} r\cos(\phi) & r\sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ „$=$" $\begin{pmatrix} x(x^2+y^2)^{-1/2} & y(x^2+y^2)^{-1/2} \\ -y(x^2+y^2)^{-1} & x(x^2+y^2)^{-1} \end{pmatrix}$ wobei die letzte „Gleichung" implizit meint, dass wir $r = r(x, y) = x^2 + y^2$, and $\sin(\phi) = x/r$, $\cos(\phi) = y/r$ betrachten.

Damit erhalten wir $f_*X(r, \phi) = (D_{g(r,\phi)}g)^{-1} X(g(r, \phi)) = ((1 - r)r, 1)$.

Dies kann man einfach lösen: die r-Komponente (eindimensionales Problem) durch Separation der Variablen, dann die ϕ-Komponente durch Integration (da das Vektorfeld unabhängig von ϕ).

24 Linearisierung und Flussboxen

Nahe eines nicht-Fixpunktes ist jedes Vektorfeld lokal äquivalent zum Standard-Vektorfeld $Y: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; q \mapsto (1, 0, \dots, 0)$.

24.1 Satz. *Sei $U \subset]\mathbb{R}^n$ offen und $X: U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $c \in U$ mit $X(c) \neq 0$. Dann gibt es offene Umgebung $V \subset U$ von c und $W \subset \mathbb{R}^n$ von 0 und einen C^1-Diffeomorphismus $f: V \to W$ so dass $f_*X = Y$, das Standard-Vektorfeld.*

Beweis. Wir konstruieren tatsächlich eine Inverse $g\colon W \to V$ mit $g_*Y = X$. Sei V der Orthogonalraum zu $X(c) \neq 0$ mit (beliebiger) Basis $(v_2, \dots, v_n)$. Für genügend kleine Koeffizienten ist dann $c+\sum \lambda_i v_i \in V$, und für genügend kleine t ist zudem der Fluss $\phi_t(c+\sum \lambda_i v_i) \in V$ ebenfalls definiert. Wir definieren somit, für eine geeignete Umgebung W_1 von 0 in $\mathbb{R}^n$ $g(t, \lambda_2, \dots, \lambda_n) := \phi_t(c+\sum \lambda_i v_i)$. Dabei ist $g(0) = c$.

Mit Hilfe des Satzes über die lokale Inverse Abbildung wollen wir zeigen, dass durch eventuell Verkleinern von W_1 zu W die Abbildung g ein Diffeomorphismus zwischen offenen Umgebungen von 0 und c wird. Dazu müssen wir nur die Ableitung von g an Null berechnen und zeigen, dass sie invertierbar ist.

Nun ist nach Definition des Flusses ϕ $\partial\phi/\partial t(t, x) = X(\phi(t, x))$. Mit der Kettenregel erhalten wir so

$$Dg(t, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (X(\phi_t(c + \sum \lambda_i v_i)), D_{c+\sum \lambda_i v_i}\phi_t v_2, \dots, D_{c+\sum \lambda_i v_i} v_n)$$

Wir betrachten dies nun am Ursprung $(t, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$. Es gilt $\phi_0 = \mathrm{id}$, somit auch $D\phi_0 = \mathrm{id}$, so dass

$$D_0 g = (X(c), v_2, \dots, v_n)$$

also eine Matrix, deren Spalten eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Somitist $D_0 g$ invertierbar, und für genügend kleine Umgebungen von V von c und W von 0 ist $g\colon W \to V$ ein Diffeomorphismus, mit Inverse $f\colon V \to W$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $g_*Y = X$. Dazu erinnere man sich, dass per Definition für $x = g(y)$, $y = (t, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$g_*Y(x) = D_y g \cdot Y(y) = (X(x), D_x\phi_t v_2, \dots, D_x\phi_t v_n) \cdot (1, 0, \dots, 0)^t = X(x),$$

was zu beweisen war. □

25 Linearisierung nahe Fixpunkten

Wir wollen uns nun dem Problem zuwenden, wie man ein Differenzialgleichungssystem/Vektorfeld nahe eines Fixpunkts auf "Normalform" bringen kann. Wir haben aus der Betrachtung linearer Differenzialgleichungen (mit konstanten Koeffizienten) gesehen, dass es hier viele ganz verschiedene Phänomene geben kann. Das Ziel ist daher nicht, eine einzige Normalform zu finden. Statt dessen werden wir versuchen, ein gegebenes Vektorfeld durch ein äquivalentes lineares zu ersetzen.

Dies gelingt im grossen und ganzen auch; allerdings muss man einen schwächeren Äquivalenzbegriff benutzen: den der "topologischen Äquivalenz".

25.1 Definition. Seien $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ und $Y\colon V \to \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder, definiert auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. X und Y heißen *topologisch äquivalent* (vermöge der Abbildung $f\colon U \to V$), wenn es eine stetige bijektive Abbildung $f\colon U \to V$ mit stetiger Umkehrfunktion gibt (solch ein f heißt *Homöomorphismus*), so dass f die Integralkurven von X genau auf die Integralkurven von Y abbildet, d.h. für jede Integralkurve $c\colon I \to U$ von X ist $f \circ c\colon I \to V$ Integralkurve von Y, und für jede Integralkurve $c\colon I \to V$ von Y ist $f^{-1} \circ c\colon I \to U$ Integralkurve von X.

25.2 Bemerkung. Der Unterschied zur C^1-Äquivalenz ist, dass die Abbildung f nur stetig, aber nicht differenzierbar sein muss. Entsprechend macht der Ausdruck f_*X auch keinen Sinn, der ja das Differenzial von f benutzt.

Per Definition entsprechen sich natürlich bei topologisch äquivalenten Vektorfeldern die Lösungen von $x' = X(x)$ und $y' = Y(y)$ unter der Abbildung f¿

25.3 Bemerkung. Topologische Äquivalenz ist ein deutlich schwächerer Begriff als C^1-Äquivalenz (viel mehr Vektorfelder werden topologisch äquivalent). Wir werden dies in Abschnitt 26 am Beispiel linearer Vektorfelder genau sehen; das Vektorfeld $X(x,y) = (-x,-y)$, dessen Integralkurven auf Ursprungsgeraden verlaufen, ist topologisch äquivalent zum Vektorfeld $Y(x,y) = (-x+y,-y-x)$, dessen Integralkuren auf Spiralen Richtung Ursprung verlaufen.

25.4 Satz. ***Linearisierungssatz für Vektorfelder nahe Fixpunkten***
Sei $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld und $p \in U$ ein Fixpunkt, also $X(p) = 0$. Alle (komplexen) Eigenwerte von D_pX haben von Null verschiedenen Realteil (dann nennt man den Fixpunkt hyperblisch).

In diesem Fall gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von p und $W \subset \mathbb{R}^n$ von Null und einen Homöomorphismus $f\colon V \to W$, so dass $X|V$ und $v \mapsto (D_pX)v$ vermöge f topologisch äquivalent sind

Beweis. Der Beweis dieses Satzes ist sehr umfangreich, und wird erst einmal verschoben. □

Wir kennen das Verhalten der Integralkurven in der Nähe der Null (des Fixpunktes) für ein lineares System. Der Linearisierungssatz 25.4 sagt, dass quantitativ dasselbe Verhalten auch im allgemeinen zu beobachten ist. Dies motiviert die folgende Begriffsbestimmung.

25.5 Definition. Ein hyperbolischer Fixpunkt $p \in U$ eines C^1-Vektorfelds $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) heißt

(1) *Quelle*, wenn der Realteil aller Eigenwerte von D_pX positiv ist

(2) *Senke*, wenn der Realteil aller Eigenwerte von D_pX negativ ist

(3) *Sattel*, sonst

25.6 Beispiel. Die Bedingung, dass die Fixpunkt hyperbolisch sind, ist im Linearisierungssatz 25.4 notwendig.

Im Beispiel $x' = x^2$ und $y' = y$ (zugehöriges Vektorfeld $X(x,y) = (x^2,y)$) gibt es genau den Fixpunkt $(0,0)$ mit $D_0X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. In der Linearisierung besteht also die gesamte x-Achse aus Fixpunkten. Damit kann die Linearisierung nicht lokal topologisch äquivalent zum ursprünglichen System mit seinem einzigen Fixpunkt sein, da der zugeörige Homöomorphismus die Fixpunkte des einen Systems bijektiv auf die Fixpunkte des anderen Systems abbilden muss.

Im Beispiel $X(x,y) = (-y-(x^2+y^2)x, x-(y^2+x^2)y)$ gibt es ebenfalls genau den Fixpunkt $(0,0)$. Das zugehörige lineare Vektorfeld ist $Y(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(x,y)^t$ mit Eigenwerten $i,-i$. Wir wissen bereits, dass die zugehörigen Integralkurven periodisch sind, und auf Kreisen um den Ursprung verlaufen.

Im ursprünglichen System ist jedoch für jede Integralkurve der Abstand zum Ursprung strong monoton fallend, insbesondere gibt es keine periodischen Integralkurven.

Andererseits würden unter einem Homöomorphismus, welcher eine (lokale) topologische Äquivalenz induzieren würde, geschlossene (also periodische) Integralkurven des einen Systems bijektiv auf entsprechende Integralkurven des anderen Systems abgebildet.

26 Topologische Klassifikation linearer Vektorfelder

Um die Bedeutung des Begriffs "topologische Äquivalenz" genauer auszuloten, wollen wir anschauen, welche linearen Systeme genau topologisch äquivalent zueinander sind.

26.1 Satz. *Seien $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ so, dass der Realteil jedes Eigenwerts verschieden von Null ist. Sei $n_+(A)$ die Summe der Größe der Jordanblöcke, welche zu Eigenwerten mit positivem Realteil gehören; entsprechend $b_-(A)$ für Eigenwerte mit negativem Realteil (also $n_+(A) + n_-(A) = n$).*

Die Vektorfelder $x \mapsto Ax$ und $x \mapsto Bx$ sind genau dann topologisch äquivalent, wenn $n_+(A) = n_+(B)$.

Wir beweisen zunächst, dass Produkte von topologisch äquivalenten Systemen wieder topologisch äquivalent sind. Dies wird dazu dienen, den Beweis von Satz 26.1 auf einen einfacheren Fall zu reduzieren.

26.2 Satz. *Seien $X_1 \colon U_1 \to \mathbb{R}^k$ und $Y_1 \colon V_1 \to \mathbb{R}^k$ topologisch äquivalent vermöge des Homöomorphismus $f_1 \colon U_1 \to V_1$, und seien entsprechend $X_2 \colon U_2 \to \mathbb{R}^l$ und $Y_2 \colon V_2 \to \mathbb{R}^l$ topologisch äquivalent vermöge des Homöomorphismjus $f_2 \colon U_2 \to V_2$.*

Dann sind auch $X_1 \times Y_1 \colon U_1 \times V_1 \to \mathbb{R}^{k+l}$ und $X_2 \times Y_2 \colon U_2 \times V_2 \to \mathbb{R}^{k+l}$ topologisch äquivalent, vermöge des Homöomorphismus $f_1 \times f_2$.

Beweis. Entscheidende Beobachtung ist, dass für ein Produkt-Vektorfeld wie $X_1 \times X_2$ die Integralkurven $c \colon I \to U_1 \times V_1$ genau Tupel $c = (c_1, c_2)$ von Integralkurven $c_1 \colon I \to U_1$ von X_1 und $c_2 \colon I \to U_2$ von X_2 sind (was ohne Schwierigkeiten folgt, da die Kurven ja komponentenweise abgeleitet werden).

Es folgt, dass $f_1 \times f_2$ tatsächlich Integralkurven auf Integralkurven abbildet, und seine Inverse $f_1^{-1} \times f_2^{-1}$ macht dasselbe. □

Wie man sofort erkennt, ist topologische Äquivalent tatsächlich eine Äquivalenzrelation. Außerdem folgt aus Satz 23.6, dass C^1-Äquivalenz topologische Äquivalenz impliziert. Für eine invertierbare Matrix Q ist nun aber das lineare System, welches zu A gehört, äquivalent zum System mit QAQ^{-1} (der zugehörige Diffeomorphismus ist ja gerade Multiplikation mit Q). Somit können wir im Satz 26.1 A und B durch ihre Jordan-Matrizen ersetzen. Dann erkennt man aber, dass das zur Jordanmatrix von A gehörende System ein Produkt ist: ein Faktor $\mathbb{R}^{n_+(A)}$ besteht aus den Jordan-Kästchen mit Eigenwerten mit postivem Realteil, der zweite Faktor $\mathbb{R}^{n_-(A)}$ aus den Jordan-Kästchen mit Eigenwerten mit negativem Realteil.

Es genügt also wegen Satz 26.2, folgendes Lemma zu zeigen.

26.3 Lemma. *Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$, und alle Eigenwerte von A haben positiven Realteil. Dann ist das Vektorfeld $x \mapsto Ax$ topologisch äquivalent zum Vektorfeld $x \mapsto x$.*

Entsprechend ist, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben, $x \mapsto Ax$ topologisch äquivalent zu $x \mapsto -x$.

Auch dieser Satz benötigt noch einige Vorbereitungen. Wie im Theorem 24.1 über die Flussboxen muss man den Fluss des Vektorfelds (die Integralkurven) selbst benutzen, um den gesuchten Homöomorphismus zu konstruieren. Dort wählte man eine Ebene durch den gegebenen Punkt, welche (nahe des Punktes) alle Flusslinien in genau einem Punkt transversal schnitt. Dies ist offensichtlich bei einem kritischen Punkt nicht möglich (z.B. ist ja die Integralkurve durch den kritischen Punkt konstant, es macht also keinen Sinn, hier von "transversalem Schnitt" zu sprechen). Als Ersatz bietet sich für das Standard-Vektorfeld $x \mapsto x$ eine Sphäre (z.B. vom Radius 1) um den Ursprung an; diese schneidet alle nicht-konstanten Integralkurven (auf Strahlen die vom Ursprung ausgehen) orthogonal.

Es stellt sich jedoch schnell heraus, dass für das Vektorfeld $x \mapsto Ax$ im allgemeinen keine Sphäre um den Ursprung diese Eigenschaft hat: die "Spiralkurven" werden häufig mehrere, und auch tangentiale Schnitte mit diesen Sphären haben.

Entscheidende Idee ist nun, diese Sphären durch Ellipsen zu ersetzen: so wie die Integralkurven zum Vektorfeld $x \mapsto Ax$ "deformiert" sind, muss auch die Sphäre zu einer Ellipse "deformiert" werden, damit hinterher die Integralkurven die Sphäre wieder orthogonal schneiden.

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass Ellipsen sich gerade als Mengen der Punkte mit konstanter Norm ergeben, wobei die Norm sich aus einen allgemeinen positiv definiten symmetrischen Skalarprodukt ergeben; wir suchen also ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mit zugehöriger sogenannter positiv definiter quatratischer Form $r^2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; v \mapsto (v, v)$, so dass die Ellipse $E := \{v \in \mathbb{R}^n \mid r^2(v) = 1\}$ alle Integralkurven transversal (also nicht tangential) schneidet.

Aus der Analysis wissen wir, dass im Punkt $v \in E$ der Tangentialraum an E gerade der Kern der linearen Abbildung $D_v r^2$ ist. Nach Definition von Integralkurven ist die Tangente an eine Integralkurve durch v gerade der Wert des Vektorfelds am Punkt v, in unserem Fall also Av. Wir müssen also sicherstellen, dass Av nicht im Kern von $D_v r^2$ liegt. Etwas präziser wollen wir fordern, dass $(D_v r^2) \cdot Av > 0$. Das heisst, dass der Geschwindigkeitsvektor Av in eine Richtung zeigt, so dass r^2 anwächst, also nach aussen aus der Ellipse E heraus.

Ziel ist also, ein positiv definites symmetrisches Skalarprodukt mit zugehöriger Quadratischer Form r^2 zu finden, so dass $(D_v r^2)Av > 0$ für alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (eigentlich genügt es, dies für v mit $r^2(v) = 1$ zu fordern, dann folgt aber die Ungleichung für alle Vektoren $\neq 0$, da man leicht kontrollieren kann, was beim Skalieren passiert, wie wir gleich bei der Berechnung von $D_v r^2$ sehen werden).

Zur Bestimmung von r^2 werden wir die Jordan-Form von A benutzen. Um dies tun zu können, ist es notwendig, die obige Situation etwas zu verallgemeinern: wir wollen Matrizen $A \in M(n, \mathbb{C})$ betrachten, so dass jeder Eigenwert positiven Realteil hat. Wir werden dann positiv definite sesquilinearformen $(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ betrachten, mit zugehöriger (reeller) quadratischer Form

$r^2\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}; v \mapsto (v,v)$. Das Ziel bleibt genau das gleiche wie oben: finde eine entsprechende quadratische Form, so dass $(D_v r^2) \cdot Av > 0$ für alle $v \neq 0$. Falls A tatsächlich aus $M(n,\mathbb{R})$ stammt, kann man durch einschränken von r^2 auf $\mathbb{R}^n$ dann natürlich auch eine geeignete Ellipse für das ursprüngliche Problem erhalten.

Nun benutzen wir ein weiteres Resultat aus der linearen Algebra, den Satz über Hauptachsentransformationen. Das heisst, dass sich jede positiv definite Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^n$ auf folgende Weise ergibt: es gibt eine Basis $(v_1,\dots,v_n)$, so dass

$$(\sum a_i v_i, \sum b_i v_i) = \sum a_i \overline{b_i},$$

entsprechend

$$r^2(\sum a_i v_i) = \sum |a_i|^2 .$$

Damit ist es nicht schwer, die Ableitung von r^2 am Punkt $v \in \mathbb{C}^n$ zu berechnen:

$$D_v r^2 \cdot w = (v,w) + (w,v) = 2\Re(v,w) \qquad w \in \mathbb{C}^n \tag{26.4}$$

26.5 Aufgabe. Beweise Gleichung (26.4).

Wir suchen also jetzt eine an A angepasste Basis von $\mathbb{C}^n$, so dass $\Re(v,Av) > 0$ für alle $v \neq 0$ für das sich ergebende Skalarprodukt. Diese Basis wird aus einer zur Jordan-Normalform gehörenden Basis konstruiert. Wir benötigen zur Vorbereitung folgendes Lemma.

26.6 Lemma. *Sei $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ linear und $(v_1,\dots,v_n)$ Basis von $\mathbb{C}^n$, so dass A bezüglich dieser Basis obere Dreiecksgestalt hat, also $Av_k = \sum_{i\le k} a_{ik} v_i$, und so dass $|a_{ik}| \le 1$ für $i < k$ (z.B. Jordan-Form, wo die Einträge außerhalb der Diagonalen ja entweder 1 oder 0 sind).*

Für $1 > \epsilon > 0$ betrachte die Basis $B_\epsilon = (\epsilon v_1, \epsilon^2 v_2, \dots, \epsilon^n v_n)$. Bezüglich dieser Basis hat A weiterhin obere Dreiecksgestalt, und alle Einträge ausserhalb der Diagonalen haben Betrag $\le \epsilon$.

Beweis. Es gilt $A(\epsilon^k v_k) = \epsilon^k A(v_k) = \epsilon^k \sum_{i\le k} a_{ik} v_k = \sum_{i \le k} \epsilon^{k-i} a_{ik} (\epsilon^i v_i)$. Für $i < k$ hat man also den Matrixeintrag $\epsilon^{k-i} a_{ik}$ mit Betrag $\le \epsilon^{k-i} \le \epsilon$, da $k > i$ und $0 < \epsilon < 1$. □

Wir werden noch ein weiteres Lemma benötigen:

26.7 Lemma. *Die symmetrischen Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n$ sind (via der Gramschen Matrix) bijektiv zu den symmetrischen Matrizen also (wenn man nur den oberen Dreiecksanteil einer symmetrischen Matrix betrachtet) zu $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. In diesem Sinn bilden die positiv definiten symmetrischen Bilinearformen eine* offene *Teilmenge von $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$.*

Ausserdem gibt es für jede positiv definite symmetrische Blinearform $(\cdot,\cdot)$ $0 < \alpha \le \beta$, so dass

$$\alpha\,|x|^2 \le (x,x) \le \beta\,|x|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{26.8}$$

Beweis. Die zu einer positiv definiten symmetrischen Biliearform $(\cdots,\cdots)$ gehörende quadratische Form r^2 hat die Form $r^2(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j} g_{ij} x_i x_j$, wobei $g_{ij} = (e_i, e_j)$ die Einträge der Gramschen Matrix. Da die Bilienarform nach Voraussetzung positiv definit ist, hat die Einschränkung von r^2 auf $S^{n-1} = \{v \in$

$\mathbb{R}^n \mid |v|^2 = 1\}$ Werte in $(0, \infty)$. Da S^{n-1} kompakt ist, nimmt die Funktion dort ihr Minimum $\alpha > 0$ und ihr Maximum $\beta \geq \alpha$ an; insbesondere $\alpha \leq r^2(v) \leq \beta$ für $v \in S^{n-1}$. Durch Skalieren von v ergibt sich die gewünschte Ungleichung für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Für jede symmetrische Matrix h_{ij} mit $|g_{ij} - h_{ij}| < \alpha/2n^2$ ergibt sich nun für die zugehörige quadratische Form r_h^2

$$r_h^2(x_1, \dots, x_n) = \sum h_{ij}x_ix_j = \sum g_{ij}x_ix_j + \sum (h_{ij} - g_{ij})x_ix_j \geq \alpha \sum x_i^2 - \frac{\alpha}{2n^2} n^2 |x|^2 > 0.$$

In der durch die Bedingung $|g_{ij} - h_{ij}| < \alpha/2n^2$ definierten Umgebung der ursprünglichen positiv definiten Form $(\cdot, \cdot)$ sind also alle Bilinearformen ebenfalls positiv definit, wie behauptet. □

Nun können wir die gewünschte Ellipse mit den oben beschriebenen Eigenschaften konstruieren.

26.9 Lemma. *Sei $A \in M(n, \mathbb{R}^n) \subset M(n, \mathbb{C}^n)$ so, dass die Realteile aller Eigenwerte positiv sind. Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$, bezüglich der A Jordanform (als obere Dreiecksmatrix) hat. Falls $\epsilon > 0$ genügend klein, wird mit der zu $B_\epsilon = (\epsilon v_1, \dots \epsilon^n v_n)$ gehörenden quadratischen Form r_ϵ^2 gelten: $D_v r_\epsilon^2 \cdot Av > 0$ für alle $v \neq 0$, d.h. die Integralkurven zum Vektorfeld $v \mapsto Av$ schneiden die von r_ϵ^2 gehörende Ellipse $E = \{v \in \mathbb{C}^n \mid r_\epsilon^2(v) = 1\}$ transversal nach aussen.*

Außerdem gibt es dann $0 < \alpha \leq \beta$, so dass

$$\alpha r_\epsilon^2(v) \leq D_v r_\epsilon^2 \cdot Av \leq \beta r_\epsilon^2(v) \qquad \forall v \in \mathbb{C}^n.$$

Beweis. Sei $Av_k = \sum_{i \leq k} a_{ik}v_i$, also a_{kk} sind die Eigenwerte von A (mit positivem Realteil). Dann gilt für $v = \sum \lambda_i \epsilon^i v_i$

$$\begin{aligned} D_v r_\epsilon^2 A(v) =& 2\Re(Av, v)_\epsilon \\ &= 2\Re(\sum_{i \leq k} \epsilon^{k-i} a_{ik} \lambda_k \overline{\lambda_i}) \\ &= 2 \sum_{i=k} \Re(a_{kk}\lambda_k\overline{\lambda_k}) + 2\Re(\sum_{i<k} \epsilon^{k-i} a_{ik}\lambda_k\overline{\lambda_i}). \end{aligned}$$

Nun ist $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum \Re(a_{kk}) |\lambda_k|^2$ eine positiv definite quadratische Form (beschränkt durch $\min\{\Re(a_{kk})\} \cdot \sum |\lambda_k|^2 > 0$). Für genügend kleine $\epsilon > 0$ bleibt dann der gesamte Ausdruck positiv und ist von unten beschränkt durch $\alpha \sum |\lambda_k|^2 = \alpha\rho_\epsilon^2(v)$ für geeignetes $\alpha > 0$. Die Abschätzung

$$D_v r_\epsilon^2 Av \leq \beta \rho_\epsilon^2(v) \qquad v \in \mathbb{C}^n$$

ergibt sich entsprechend (β ist bestimmt durch $\max\{\Re(a_{kk})\}$). □

Mit den Eigenschaften, die unsere in Lemma 26.9 gefundene Ellipse hat, soll nun gezeigt werden, dass die Flusslinien des Vektorfelds $x \mapsto Ax$ tatsächlich die Ellipse eindeutig und in guter Weise schneiden.

26.10 Lemma. *Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ und E eine Ellipse wie in Lemma 26.9. Dann gilt: für jedes $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $v_w \in E$ und ein $t \in \mathbb{R}$, so dass $\phi_t(v) = w$, wobei $t \mapsto \phi_t(v)$ die Flusslinie zu $x' = Ax$ mit Anfangswert $\phi_0(v) = v$.*

Genauer: falls $0 < \alpha \leq \beta$ so gewählt sind, dass $\alpha r_\epsilon^2(v) \leq D_v r_\epsilon^2 \cdot Av \leq \beta r_\epsilon^2(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, und $\rho_v(t) = \ln(r_\epsilon^2(\phi_t(v)))$, dann ist für $v \neq 0$ $\rho_v \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus mit $\alpha \leq \rho_v'(t) \leq \beta$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wegen der Eindeutigkeit der Integralkurven, läuft durch 0 nur die Konstante Integralkurve. Da r_ϵ^2 positiv definit, ist also für $v \neq 0$ $\phi_t(v) \neq 0$ für alle t und damit auch $r_\epsilon^2(\phi_t(v)) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit macht die Definition von $\rho_v(t)$ Sinn für alle $t \in \mathbb{R}$. Weiter berechnet man

$$\frac{d\rho_v(t)}{dt} = \frac{D_{\phi_t(v)} r_\epsilon^2 \cdot \phi_t(v)'}{r_\epsilon^2(\phi(t))} = \frac{D_{\phi_t(v)} r_\epsilon^2 \cdot A\phi_t(v)}{r_\epsilon^2(\phi(t))}.$$

Unsere Abschätzung an $D_v r_\epsilon^2 Av$ impliziert also, dass $0 < \alpha < \rho_v'(t) < \beta$. Damit ist ρ_v streng monoton wachsend, und da die Steigung wie angegeben nach unten und oben beschränkt ist, tatsächlich surjektiv $rho_v \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für jedes $w \in \mathbb{R}^n$ ist das gesuchte t_w nun das eindeutige $t_w \in \mathbb{R}$ mit $\rho_w(t_w) = 0$, und $v_w \in E$ ist $\phi_{t_w}(w)$. □

Nun können wir Lemma 26.3 beweisen.

Wegen Lemma 26.10 ist die Abbildung $E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; (v,t) \mapsto \phi_t(v)$ bijektiv. Differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten impliziert, dass diese Abbildung stetig differenzierbar ist. Wir werden gleich Vektorfelder und Flüsse etwas genauer anschauen um zu schließen, dass die Abbildung auch eine differenzierbare Umkehrung hat, also differenzierbar ist.

Die Aussagen von Lemma 26.10 gelten genauso auch, wenn man A durch die Einheitsmatrix ersetzt es läuft nur darauf hinaus, dass $(\cdot,\cdot)$ positiv definit ist. Wenn wir mit dem Fluss von $x' = x$ arbeiten, erhalten wir also ganz entsprechende Aussagen.

Verknüpft man die Inverse der gerade gewonnene Abbildung $E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ für A mit der entsprechenden Abbildung für id, erhält man eine Bijektion

$$h \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

welche nach Konstruktion gerade die Flusslinien von $x' = Ax$ auf die Flusslinien von $x' = x$ abbildet. Diese Abbildung ist ein C^1-Diffeomorphismus.

Unsere Abschätzungen zeigen weiterhin, dass für v nahe Null auch $h(v)$ nahe Null sein wird, und umgekehrt. Man kann die Abbildung h also stetig zu einem Homöomorphismus $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fortsetzen, mit $h(0) = 0$.

27 Vektorfelder und Flüsse II

27.1 Beispiel. Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$. Wir betrachten die Differenzialgleichung $x' = Ax$.

Ihre Lösungen können zusammengefasst werden zu einer Abbildung, *Fluss* genannt,

$$\phi \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n; (x,t) \mapsto \phi(x,t) = \phi_t(x) = \exp(tA) \cdot x.$$

$t \mapsto \phi_t(x_0)$ ist also die Lösung des Anfangswertproblems $x' = Ax$, $x(0) = x_0$.

Beachte, dass wir aus der Funktionalgleichung (welche man benutzen kann, da tA und sA kommutieren) für jedes $t, s \in \mathbb{R}$ erhält

$$\phi_t(\phi_s(x)) = \exp(tA) \cdot \exp(sA)x = \exp((s+t)A)x = \phi_{s+t}(x).$$

Diese Eigenschaft nennt man *Halbgruppeneigenschaft* des Flusses.

27.2 Lemma. *Sei $X: U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

Sei $V \subset U \times (-\infty, \infty) = \{(v,t) \mid t \in (a_v, b_v)\}$ wobei (a_v, b_v) das maximale Definitionsinterval für die Lösung $t \mapsto \phi_t(v)$ des Anfangswertproblem $x'(t) = X(x(t))$, $x(0) = v$.

Dann ist V eine offene Teilmenge von $U \times \mathbb{R}$, welche $U \times \{0-\}$ enthält. Die Abbildung $\phi\colon V \to U \times \mathbb{R}^n; (v,t) \mapsto (\phi_t(v), t)$ ist C^1, und es gilt die Halbgruppeneigenschaft

$$\phi_t(\phi_s(v)) = \phi_{t+s}(v)$$

soweit alle Ausdrücke links definiert sind (also $(v,s) \in V$ und $(\phi_s(v), t) \in V$). Insbesondere ist dann auch $(v, t+s) \in V$.

ϕ wird der (maximale) Fluss *von X genannt (manchmal auch die Komposition mit der Projektion auf U).*

Ist für ein $t \in \mathbb{R}$ $U \times \{t\} \in V$, so ist $\phi_t: U \to U$ ein C^1-Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung ϕ_{-1}.

Beweis. Wir wissen bereits aus einer Übungsaufgabe dass V, die „Kombination" der maximalen Definitionsbereiche, offen ist. Wegen Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der Anfangswertprobleme ist ϕ sinnvoll definiert. Aus der differenzierbaren Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen folgt, dass ϕ stetig partiell differenzierbar ist.

Betrachtet man $t \mapsto \phi_{t+s}(v)$, so handelt es sich um eine Lösung von $x' = X(x)$ mit Anfangswert $x(0) = \phi_s(v)$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen folgt die Halbgruppeneigenschaft.

Daraus ergibt sich dann, dass $\phi_{-t}(\phi_t(v)) = \phi_0(v) = v$, somit ist ϕ_t, soweit auf ganz U definiert, ein C^1-Diffeomorphismus mit inverser Abbildung ϕ_{-t}. □

27.3 Korollar. *Betrachte in der Situation von Lemma 27.2 eine Teilmenge $E \subset U$ so dass $E \times (a,b) \subset V$, so dass $E = f^{-1}(0)$ für eine stetig differenzierbare Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ mit $D_v f \neq 0$ für alle $v \in E$. Dann ist $\ker(D_v f)$ der Tangentialraum $T_v E$ an E am Punkt $v \in E$.*

Falls gilt, dass $X(v) \notin T_v E$, dann gilt $X(\phi_t(v)) \notin D\phi_t(v)(T_v E)$ für alle $t \in (a,b)$.

Beweis. ϕ_t ist Diffeomorphismus, und $D_v \phi_t(v) \cdot X(v) = D_v \phi_t(v) \cdot \phi_t'(v) = X(\phi_t(v))$. □

27.4 Aufgabe. Beweise für ein genügend glattes Vektorfeld $X: U \to \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) mit Fluss $\phi\colon E \times (a,b)$ wie im Korollar 27.3, dass tatsächlich $D_{(v,t)}\phi \cdot X(v) = X(\phi(v,t))$.

28 Stabilitätstheorie

28.1 Beispiel. Betrachte ein massives Pendel, welches an einem starren Stab (masselos angenommen) aufgehängt ist, und in einer Ebene rotieren kann. Das Pendel unterliege der Schwerkraft, Reibung wird vernachlässigt.

Die Position ist dann durch den Winkel ϕ gegenüber der senkrechten Position unten festgelegt. Die Schwerkraft wirkt senkrecht nach unten, wegen des Stabs beschleunigt aber nur die Komponente dieses Vektors orthogonal zur Achse. Sind die Einheiten passend gewählt, erhält man die Differenzialgleichung

$$\phi''(t) = -k\sin(\phi),$$

oder, wenn man in ein System erster Ordnung umwandelt

$$\phi' = v, \quad v' = -k\sin(\phi).$$

Dieses System (mit $\phi \in [0, 2\pi)$) hat genau zwei Fixpunkte: $(\phi, v) = (0, 0)$ und $(\phi, v) = (\pi, 0)$.

Diese haben qualitativ völlig verschiedenes Verhalten: der untere Fixpunkt $(0, 0)$ ist *stabil*: beginnt man mit Anfangswerten in der Nähe dieses Anfangsorts- und geschwindigkeit, erhält man eine Pendelbewegung mit kleiner Amplitude und kleinen Geschwindigkeiten; die Bahn bleibt also für alle Zeiten nahe bei $(0, 0)$.

Betrachtete man statt dessen eine Bewegung mit Reibung, z.B. beschrieben durch

$$\phi' = v, \quad v' = -k\sin(\phi) - bv$$

mit $b > 0$, so erhält man einen *asymptotisch stabilen* Fixpunkt: wenn die Anfangswerte nahe bei $(0, 0)$ liegen, werden die Lösungen für $t \to \infty$ sogar gegen $(0, 0)$ konvergieren.

(Dieses System ist speziell dahingehend, dass dies sogar für beliebige Anfangswerte gilt —es ist aber klar, dass man ähnliche Systeme haben könnte, welche mehrere asymptotisch stabile Fixpunkte haben, man muss dann tatsächlich in der Nähe eines Fixpunktes beginnen, um für $t \to \infty$ dorthin zu konvergieren.)

Der Fixpunkt $(\pi, 0)$ ist dagegen von ganz anderem Charakter: er ist *instabil*: bei Anfangswerten beliebig nahe an $(\pi, 0)$ wird man sich vom Fixpunkt (zunächst) wegbewegen —nur wenn das Pendel genau am Fixpunkt startet, bleibt es auch dort (praktisch ist dies fast nicht möglich).

28.2 Definition. Sei $X \colon U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen), und $\phi \colon V \to \mathbb{R}^n$ sein Fluss (mit maximalem Definitionsbereich). Für $x \in U$ bezeichne (a_x, b_x) das maximale Definitionsinterval der Integralkurve durch v, also $V \cap \{x\} \times \mathbb{R} = \{x\} \times (a_x, b_x)$.

Ein Fixpunkt $p \in U$ von X wird *stabil* genannt, wenn es $\forall \epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jedes $x \in U$ mit $d(x, p) < \delta$ gilt, dass

$$d(\phi(x, t) - p) < \epsilon \qquad \forall t \in [0, b_x).$$

Ein Fixpunkt ist *unstabil*, wenn er nicht stabil ist.

Wenn ein Fixpunkt stabil ist, können Integralkurven durch Punkte in der Nähe des Fixpunkts beliebig weit in die “Zukunft” fortgesetzt werden:

28.3 Lemma. *Sei $p \in U$ ein stabiler Fixpunkt wie in Definition . 28.2 Dann gibt es $\forall \epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in U$ mit $d(x, p) < \delta$ gilt:*

$$b_x = \infty \qquad \textit{und} \quad d(\phi(x, t), p) < \epsilon \quad \forall t \geq 0.$$

28.4 Bemerkung. Die Aussage des Lemma impliziert natürlich auch, dass p stabiler Fixpunkt ist.

Beweis. **(Beweis von Lemma 28.3)**
Aus der präzisen Form (dem Beweis) des Existenzsatzes für Lösungen von Anfangswertproblemen wissen wir, dass wenn man $\epsilon_0 > 0$ genügend klein vorgibt ein $K > 0$ existiert, so dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ mit $d(x,p) < \epsilon_0$ die Integralkurve durch x auf dem Zeitinterval $[-K, K]$ definiert ist.

Wähle nun, die Stabilität benutzend, δ so, dass die Integralkurven die $\min\{\epsilon_0, \epsilon\}$-Kurve um p nicht verlassen, wenn $d(x,p) < \delta$. Wäre für ein solches x $b_x < \infty$, so wähle $t = b_x - K/2$. Dann ist $d(\phi_t(x), p) < \epsilon_0$, also $s \mapsto \phi_s(\phi_t(x))$ definiert auf $[-K, K]$. Wegen der Flusseigenschaft ist dann $t \mapsto \phi_t(x)$ noch definiert auf $(a_x, t+K] = (a_x, b_x + K/2]$, im Widerspruch zur Maximalität von b_x. □

28.5 Definition. Sei in der Situation von Definition 28.2 $p \in U$ ein stabiler Fixpunkt. Er wird *asymptotisch stabil* genannt, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\lim_{t\to\infty} \phi_t(x) = p$$

für alle $x \in U$ mit $d(x,p) < \delta$. Wir benutzen dabei Lemma 28.3 um zunächst zu garantieren, dass für genügend kleines δ $\phi_t(x)$ für alle $t \geq 0$ definiert ist.

Stabilität ist eine *lokale* Eigenschaft des Fixpunkts in folgendem Sinn.

28.6 Lemma. *Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld und $V \subset U$ sei offen.*

Sei $p \in V$ ein Fixpunkt von X (und damit auch von $X|_V$). p ist stabiler/instabiler/asymptotisch stabiler Fixpunkt von X genau dann, wenn er dieselbe Eigenschaft als Fixpunkt von $X|_V$ hat

28.7 Satz. *Seien $x' = X(x)$ und $x' = Y(x)$ zwei topologisch äquivalente Vektorfelder vermöge des Homöomorphismus $h : U \to V$ mit Fixpunkten $p \in U$ und $q \in V$ so dass $h(p) = q$.*

Dann gilt: p ist stabil/asymptotisch stabil/instabil genau dann wenn q dieselbe Eigenschaft hat.

Beweis. Sei p stabiler Fixpunkt. Sei $\epsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $y \in V$ mit $d(y,q) < \delta$ auch gilt, dass $d(\phi_t(y), q) < \epsilon$ für alle $t \geq 0$.

Wähle dazu zunächst (die Stetigkeit von h ausnutzend) $\epsilon_1 > 0$, so dass für $x \in U$ mit $d(x,p) \leq \epsilon_1$ folgt, dass $d(h(x), q) < \epsilon$.

Nach Voraussetzung findet man dann $\delta_1 > 0$ so, dass für $x \in U$ mit $d(x,p) < \delta_1$ auch gilt, dass $d(\phi_t^X(x), p) < \epsilon_1$ für alle $t \geq 0$ (und dass die Flusskurve für alle $t \geq 0$ existiert). Wähle nun $\delta > 0$ so, dass $d(h^{-1}(y), p) < \delta_1$ falls $d(y,q) < \delta$ (dies geht, da h^{-1} stetig). Sei nun $y \in V$ mit $d(y,q) < \delta$. Da h die topologisch Äquivalenz implementiert, gilt für die Integralkurven $\phi_t^Y(y) = h(\phi_t^X(h^{-1}(y)))$. Somit $d(\phi_t^Y(y), q) < \epsilon$, da $d(\phi_t^X(h^{-1}(y), p)) < \epsilon_1$ (da $d(h^{-1}(y), p) < \delta$).

Die anderen Aussagen werden auf völlig entsprechende Weise bewiesen. □

28.1 Stabilität in linearen Systemen

28.8 Theorem. *Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ mit Vektorfeld $X(x) = Ax$. Dann ist 0 der einzige Fixpunkt von X. Falls alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben, ist 0 asymptotisch stabiler Fixpunkt.*

Sind die Eigenwerte alle ≤ 0, und taucht 0 nicht als Eigenwert eines Jordanblocks von Größe ≥ 2 auf, so ist der Ursprung immer noch stabiler Fixpunkt.

Falls ein Eigenwert positiven Realteil hat, ist 0 instabil.

Beweis. Der Fluss des Vektorfelds ist gegeben durch $\phi(x,t) = e^{tA}x$. Wir wissen dass wir (ausgehend von der Jordan-Normalform) eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ finden können, so dass

$$e^{tA}v_k = \sum_{j=0}^{n_k} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_k t} v_{k-j}$$

für die v_k mit einem reellen Eigenwert λ_k des zugehörigen Jordanblocks, und

$$e^{tA}v_k = \sum_{j=0}^{n_k} \frac{t^j}{j!} \Re(e^{\lambda_k t} v_{k-2j} + iv_{k-2j+1})$$
$$e^{tA}v_{k+1} = \sum_{j=0}^{n_k} \frac{t^j}{j!} \Im(e^{\lambda_k t} v_{k-2j} + iv_{k-2j+1})$$

wenn $v_k + iv_{k+1}$ Basisvektor (zerlegt in Real- und Imaginärteil) eines komplexen Jordanblocks mit Eigenwert $\lambda_k = \alpha_k + i\phi_k$.

Wegen der Linearität ist jede andere Integralkurve Linearkombination der oben angegebenen Integralkurven.

Um Stabilität oder asymptotische Stabilität oder Instabilität nachzuweisen reicht es also (wegen der Dreiecksungleichung) das entsprechende für die oben angegebenen Integralkurven zu tun.

Dies ist nun recht übersichtlich: wenn $\Re(\lambda_k) < 0$ gilt $\lim_{t\to\infty} t^j e^{\lambda_k t} = 0$, und folglich konvergieren auch die Integralkurven gegen Null.

Ist jedoch $\Re(\lambda_k) > 0$, so gilt $\lim_{t\to\infty} \left|e^{\lambda_k t}\right| = \infty$, und folglich divergiert für jedes $\epsilon \neq 0$ auch die Integralkurve $\phi_t(\epsilon v_k)$ gegen unendlich.

Ist schließlich $\Re(\lambda_k) = 0$, so ist $\left|e^{\lambda_k t}\right|$ konstant, also $\left|e^{\lambda_k t}\delta(v_k + iv_{k+1})\right| < \epsilon$ für alle t, falls δ genügend nahe bei Null. □

28.2 Stabilität Nichtlinearer Systeme

28.9 Satz. *Sei $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in U$ ein Fixpunkt von X.*

Falls die Realteile alle Eigenwerte von D_pX negativ sind, ist p ein asymptotisch stabiler Fixpunkt von X, falls ein Realteil positiv ist, ein instabiler Fixpunkt.

Beweis. Wegen Lemma 28.6 und Satz 28.7 kommt es nur auf die lokale topologische Äquivalenzklasse von X nahe p an. Wegen Satz 25.4 ist das Stabilitätsverhalten dasjenige des linearen Systems $x' = D_pX \cdot x$. Die Aussage folgt dann mit Satz 28.8. □

28.10 Beispiel. Betrachte $x' = (x^2-1)y$, $y' = (x+2)(y-1)(y+2)$. Das zugehörige Vektorfeld hat 5 Fixpunkte: $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-2)$, $(-1,-2)$, $(0,-2)$. Plots des Richtungsfelds und von Integralkurven findet man in Betounes, S. 47,48. Auf der Gerade $x = -1$, $x = 1$ und auf den Geraden $y = -2$ und $y = 1$ verlaufen Integralkurven, die asymptotisch in den Fixpunkten starten bzw. enden; man "sieht" asymptotisch stabile" (anziehende) und "instabile" (abstoßende) Fixpunkte, hierbei ist $(-1,-2)$ z.B. abstoßend, obwohl Integralkurven (aber nur genau 2) hineinlaufen, nämlich auf der Achse $x = -1$. $(-2,0)$ ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil, in Umgebung gibt es lauter periodische Integralkurven die drum herum laufen.

29 Lyapunov Funktionen

Der Linearisierungssatz zeigt seine Nützlichkeit darin, dass für viele Fixpunkte die Stabilität mit Hilfe der Linearisierung auf einfache Weise entschieden werden kann. Das ganze funktioniert dann nicht, wenn Eigenwerte mit Realteil Null auftreten. Eine alternative (genaugenommen etwas allgemeinere) Methode benutzt sogenannte Lyapunov Funktionen.

29.1 Definition. Sei $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $p \subset U$ ein Fixpunkt von X. Eine C^1-Funktion $\Lambda\colon V \to \mathbb{R}$, definiert auf einer offenen Umgebung $V \subset U$ von p heißt *Lyapunov Funktion* für p, falls

(1) p ist striktes (lokales) Minimum von Λ, also $\Lambda(p) < \Lambda(x)$ für alle $p \neq x \in V$.

(2) $D_x\Lambda \cdot X(x) \le 0$ für alle $x \in V$.

Falls sogar $D_p\Lambda \cdot X(x) < 0$ für alle $x \in V \setminus \{p\}$, dann heißt Λ *strikte* Lyapunov Funktion von p.

Ist Λ eine Lyapunov Funktion für p, so gilt $D_p\Lambda = 0$, da p MInimum. Weiter ist (wegen der Kettenregel)

$$D_x\Lambda \cdot X(x) = D_x\Lambda \cdot \frac{d}{dt}\phi_t(x) = \frac{d}{dt}\Lambda(\phi_t(x)).$$

Die Bedingung sagt also, dass entlang von Flusslinien die Funktion Λ nicht zunimmt (oder abnimmt, wenn Λ strikte Lyapunov Funktion ist). Damit das möglich ist, müssen sich die Integralkurven auf das Minimum zu (oder zumindest “nicht davon weg”) bewegen. Das erklärt, warum man den folgenden Satz erwarten kann.

29.2 Satz. *Sei $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in U$ ein Fixpunkt von X.*

Falls eine Lyapunov Funktion für p existiert, ist p stabiler Fixpunkt. Falls sogar eine strikte Lyapunov Funktion existiert, ist p asymptotisch stabiler Fixpunkt.

29.3 Beispiel. Sei $X\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (y(z-1), x(z+1), -2xy)$. Betrachte den (einzigen) Fixpunkt $p = (0,0,0)$. Dann gilt $D_0X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Diese Matrix hat Eigenwerte $0, i, -i$, folglich ist der Fixpunkt p nicht hyperbolisch.

Wir setzen nun an $\Lambda(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Diese Funktion hat ein striktes Minimum bei Null, und $D_{(x,y,z)}\Lambda = (2x, 2y, 2z)$.

Damit ist $D_{(x,y,y)}\Lambda \cdot X(x,y,z) = 2xy(z-1) + 2yx(z+1) - 2z \cdot 2xy = 0$. Somit ist Λ eine Lyapunov Funktion, und mit Satz 29.2 ist $(0,0,0)$ ein stabiler Fixpunkt.

Beweis. **Beweis von Satz 29.2**
Wir müssen zeigen, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass falls $d(x,p) < \delta$, dann auch $d(\phi_t(x), p) < \epsilon$ für alle $t \in [0, b_x)$, wobei b_x das Ende des maximalen Definitionsintervalls der Lösungskurve $t \mapsto \phi_t(x)$ des AWP $\phi_0(x) = x$, $\phi_t'(x) = X(\phi_t(x))$.

Verkleinere ϵ ggf so, dass $\overline{B_\epsilon(p)} \subset U$. Der Rand $S_\epsilon(p)$ dieses Balls ist dann eine kompakte Teilmenge von U. Nach Voraussetzung ist $\Lambda(x) > \Lambda(p)$ für jedes $x \in S_\epsilon(p)$. Da $S_\epsilon(x)$ kompakt, nimmt Λ dort sein Minimum an, also gibt es $c > \Lambda(p)$ mit $\Lambda(x) \geq c$ für alle $x \in S_\epsilon(0)$.

Nutze nun die Stetigkeit von Λ, um $\delta > 0$ zu wählen, so dass $\Lambda(y) < c$ falls $y \in B_\delta(p)$. Für einen Anfangswert $y \in B_\delta(p)$ gilt dann für die zugehörige Integralkurve $\phi_t(y)$ $\frac{d}{dt}\Lambda(\phi_t(y)) = D_{\phi_t(y)}\Lambda \cdot \phi_t'(y) = D_{\phi_t(y)}\Lambda \cdot X(\phi_t(y)) \leq 0$ (nach Definition der Lyapunov Funktion). Also gilt für $t \geq 0$ $\Lambda(\phi_t(y)) \leq \Lambda(\phi_0(y)) = \Lambda(y) < c$.

Würde die (stetige) Kurve $t \mapsto \phi_t(y)$ den Ball $B_\epsilon(p)$ verlassen, so würde wegen des Zwischenwertsatzes für ein $t_0 > 0$ $\phi_{t_0}(y) \in S_\epsilon(p)$ gelten (die Kurve kreuzt den Rand des Balles). Dort gilt aber $\Lambda(x) > c$, und $\Lambda(\phi_t(y)) < c$ für alle $t > 0$. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Kurve für alle positiven Zeiten im Ball vom Radius ϵ bleibt. Aus Lemma 28.3 folgt, dass die Integralkurve auf sogar auf $[0, \infty)$ definiert ist.

Ist Λ sogar eine strikte Lyapunov Funktion, dann sind die Funktionen $\Lambda(\phi_t(y))$ sogar streng monoton fallend (und falls $d(y,p) < \delta$, für alle $t \geq 0$ definiert).

Sei für solch ein y $z \in B_\epsilon(p)$ ein Häufungspunkt von $\{\phi_t(y) \mid t \in \mathbb{N}\}$ (existiert, da der Ball kompakt ist). Insbesondere gibt es $t_n \to \infty$ mit $\phi_{t_n}(y) = z$, wegen der Monotonie von $t \mapsto \Lambda(\phi_t(y))$ ist somit $\Lambda(z) \leq \Lambda(\phi_t(y))$ für alle $t \geq 0$. Falls $z \neq p$, wähle $s > 0$, so dass $\Lambda(\phi_s(z)) < \Lambda(z)$. Wegen der Stetigkeit des Flusses gilt dann für w genügend nahe bei z, dass auch $\Lambda(\phi_s(w)) < \Lambda(z)$.

Andererseits finden wir $t_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\phi_{t_0}(y)$ die "genügend nahe bei z" bedingung erfüllt (da z Häufungspunkt). Somit, wegen der Flusseigenschaft, $\Lambda(\phi_{s+t_0}(y)) = \Lambda(\phi_s(\phi_{t_0}y)) < \Lambda(z)$. Dies steht im Widerspruch zur obigen Beobachtung, dass $\Lambda(\phi_t(Y))/ge\Lambda(z)$ für alle $t \geq 0$. □

29.4 Beispiel. Falls $X(x,y) = (-y+xy-x^3-xy^2/2, -3y+xy+x^2y-xy^2/2)$, so ist $p = (0,0)$ Fixpunkt, mit $D_0X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Geeignete Lyapunov-Funktion ist $2x^2 + (x-y)^2$. (Während $x^2 + y^2$ nicht funktioniert: beweise dies mit Hesse Matrix).

Problem: Es wird im allgemeinen sehr schwierig sein, eine geeigenete Lyapunov-Funktion zu finden.

30 Potenzreihenlösungen

In diesem Abschnitt wollen wir nochmal zurückkehren zu den linearen Anfangswertproblemen für reellwertige Funktionen, aber höherer Ordnung, nämlich vom Typ

$$x^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)}(t) = b(t). \tag{30.1}$$

Wir haben bereits gesehen, dass solche Differenzialgleichungen sich aus physiklaischen Fragestellungen häufig ergeben (meist zweiter Ordnung, wenn Beschleunigungen gegeben sind). Wir wollen nun ein klassisches, aber häufig sehr wirkungsvolles Verfahren kennen lernen, um mittels Potenzreihen diese DGl zu lösen.

30.2 Satz. *Seien in Gleichung* (30.1) *die Funktionen* a_k *(*$k = 0, \cdots n-1$*) und* b *auf einem Intervall* $(t_0 - r, t_0 + r)$ *in konvergente Potenzreihen entwickelbar (insbesondere sind die Funktionen in diesem Fall dann* C^∞*). Dann gilt dasselbe auch für die (eindeutige) Lösung* $x\colon (t_0-r, t_0+r) \to \mathbb{R}$ *des Anfangswertproblems* $\sum_{k=0}^n a_k(t)x^{(k)}(t) = b(t)$*,* $x^{(k)}(t_0) = x_k$ *(*$k = 0, \dots, n-1$*) mit vorgegebenen Konstanten* $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$*.*

Die Koeffizienten c_k *der Potenzreihenentwicklung* $x(t) = \sum_{k=0}^\infty c_k(t-t_0)^k$ *lassen sich induktiv durch Koeffizientenvergleich aus denen von* a_k *und* b *bestimmen.*

30.3 Beispiel. Wir betrachten die sogenannte *Airysche Differenzialgleichung*

$$x''(t) - tx(t) = 0.$$

Da $a_2(t) = 1$, $a_0(t) = t$ und $a_1(t) = b(t) = 0$ alle auf ganz $\mathbb{R}$ Potenzreihen konvergente Potenzreihen sind, gilt dies nach Satz 30.2 auch für jede Lösung $x(t) = \sum_{k=0}^\infty c_k t^k$ (wobei wir $t_0 = 0$ wählen).

Setzt man dies in die Differenzialgleichung $x'' = tx$ ein, so erhält man

$$\sum_{k=0}^\infty (k+1)(k+2)c_{k+2}t^k = \sum_{k=0}^\infty c_{k-1}t^k.$$

Koeffizientenvergleich liefert also

$$(k+1)(k+2)c_{k+2} = c_{k-1}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Hierbei gilt $c_0 = x(0)$ und $c_1 = x'(0)$, diese beiden Koeffizienten werden also durch die Anfangsbedingungen festgelegt (oder bleiben unbestimmt), ansonsten erhält man

$$c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{2\cdot 3}c_0, c_4 = \frac{1}{3\cdot 4}c_1, c_5 = \frac{1}{4\cdot f}c_2 \dots$$

Man erhält drei simple Rekursionsgleichungen, die liefern

$$c_{3k+2} = 0, c_{3k} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\dots(3k-1)\cdot 3k}c_0, c_{3k+1} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3k\cdot(3k+1)}c_1.$$

Die üblichen Kriterien zeigen leicht, dass es sich um auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihen handelt (dies folgt aber auch bereits aus Satz 30.2).

Für $|t|$ klein, kann man auch recht vernünftig mit abgeschnittenen Potenzreihen als Approximation an die echte Lösung arbeiten (wobei die üblichen Kriterien auch Fehlerabschätzungen liefern können).

30.4 Beispiel. Die Differenzialgleichung

$$(1+t)x'(t) - \alpha x(t) = 0 \iff x'(t) - \frac{\alpha}{1+t}x(t) = 0$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$ hat im Intervall $(-1, 1)$ die eindeutige Lösung $x(t) = (1+x)^\alpha$ mit $x(0) = 1$.

Andererseits folgt aus Satz 30.2, dass diese Lösung dort konvergente Potenzreihe ist (da die Neumann-Reihe $\frac{1}{1+t} = \sum(-1)^k t^k$ auf $(-1, 1)$ konvergiert).

Mit dem entsprechenden Potenzreihenansatz und der Rekursionsmethode kann man damit die Binomialentwicklung

$$\frac{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^\infty(\alpha}{k)x^k}$$

beweisen.

Beweis. (**Beweis von Satz 30.2**): Wir erinnern uns nochmals an den Beweis für die Existenz der Lösungen des Anfangswertproblems $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$, $x(t_0) = x_0$ mit $A\colon [a,b] \to nM(n,\mathbb{R})$ stetig und $b\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig.

$x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig ist genau dann eine Lösung dieses Anfangswertproblems, wenn sie Lösung der Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s) + b(s)\, ds$$

ist. Dies sind wir mit dem Banachschen Fixpunktsatz angegangen. Die Besonderheit bei den linearen Differenzialgleichungen war nun, dass wir beim Iterieren der zugehörigen Abbildung von Funktionenräumen T mit $Tx(t) = (x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\, ds) + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\, ds =: g(t) + (Kx)(t)$ folgern konnten, dass

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} K^k g,$$

wobei wir zeigen konnten, dass diese Reihe auf ganz $[a,b]$ (in Supremumsnorm, also im Banachraum der stetigen Funktionen mit sup-Norm) konvergierte.

Sei nun b und A auf $[a,b] = [t_0 - r, t_0 + r]$ in konvergente Potenzreihen entwickelbar (d.h., eintragsweise). Dies ist z.B. für das sich aus (30.1) ergebende System der Fall. Dann ist dies auch für $g(t)$ und $K^k g(t)$ der Fall (im zweiten Fall wendet man Induktion an, und benutzt natürlich, dass Summen, Produkte, Integrale von konvergenten Potenzreihen wieder konvergente Potenzreihen sind).

Man muss nun (nur) noch die Ableitungen von $K^k g(t)$ berechnen (induktiv nicht so schwierig) und absolute Konvergenz auch aller Ableitungen der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} K^k g$ nachweisen. Dann folgt mit weiteren Überlegungen aus der Theorie der konvergenten Potenzreihen, dass auch der Limes $x(t)$ konvergente Potenzreihe ist.

□

31 Laplace Tranformation

Wir betrachten noch eine weitere (klassische) Methode, mit der Differenzialgleichungen (z.T. auch routinemäßig) gelöst werden können:

mittels einer (ganz anderen als bisher betrachteten) Art von Transformation werden geeignete Klassen von DGls in algebraische Probleme umgewandelt. Hierzu dient die Laplace-Transformation.

31.1 Definition. Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar und es gebe $s \in \mathbb{R}$, so dass

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

absolut konvergiere. Da für jedes $t > 0$ die Abbildung $s \mapsto e^{-st}$ streng monoton wachsend ist, gibt es dann $\sigma \in [-\infty, \infty)$, so dass $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ konvergiert, falls $s > \sigma$, und divergiert, falls $s < \sigma$.

Der Konvergenzbereich $K_f := (\sigma, \infty)$ ist die Menge aller s-Werte, auf denen obiges Integral konvergiert. Die Laplacetranformierte ist dann die Funktion

$$F := \mathcal{L}(f)\colon K_f \to \mathbb{R}; s \mapsto \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

31.2 Lemma. *Die Laplacetransformation ist eine lineare Abbildung f mapsto$\mathcal{L}(f)$ (wobei man natürlich mit den Definitionsbereichen etwas vorsichtig sein muss).*

31.3 Beispiel. Für die Konstante Funktion $1\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, t \mapsto 1$ erhalt man

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1}{s}$$

für $s > 0$, während für $s \le 0$ das Integral divergiert.

Ähnlich ergibt sich

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, \quad s \in (a,\infty).$$

Linearität impliziert für $\cosh(at) = (e^{at} - e^{-at})/2$ $\mathcal{L}(\cosh(at))(s) = \frac{s}{s^2-a^2}$ für $s > |a|$.

Definiere die Heavisidefunktion $H(t) := 1$, falls $t \ge 0$, $H(t) = 0$ falls $t < 0$. Damit ergibt sich

$$\mathcal{L}(H)(t-a) = \inf_a^\infty e^{-st}\,dt = e^{-as}/s \quad s > 0.$$

Rechteckfunktion als Linearkombination von Heaviside-Funktionen. Rechteckschwingung als unendliche Linearkombination: beachte Konvergenz für gliedweise Berechnungen ist o.K..

Um die Laplac-Transformation zur Lösung von Differenzialgleichungen einsetzen zu können, benötigt man Informationen über ihr Verhalten bezüglich Differenziation (und anderen elementaren Operationen, z.B. Multiplikation von Funktionen).

31.4 Satz. *Es gilt (für geeignete Funktionen) für $s > 0$, $s \in K_f$ (oder andere geeignete $s \in \mathbb{R}$)*

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0).$$

Induktiv

$$\mathcal{L}(f^{(k)})(s) = s^k\mathcal{L}(f)(s) - s^{k-1}f(0) - \cdots - sf^{(k-2)}f(0) - f^{(k-1)}f(0).$$

Beweis. Benutze partielle Differenziation $\int_0^T e^{-st}f'(t)\,dt = e^{-sT}f'(T) - f(0) - \int_0^T (-s)e^{-st}f(t)\,dt$.

Wir erkennen also, dass unsere Formel Sinn macht für $s > 0$ und f' so, dass $f'(T)$ durch ein Polynom in T beschränkt. Erfüllt f' dies nicht, aber ist es beschränkt durch Ce^{at}, so gilt die Formel für $s > a$.

Für die höheren Ableitungen muss man die partielle Integration induktiv mehrfach durchführen. Man erkennt, dass man Wachstumsbeschränkungen an alle involvierten Ableitungen von f stellen muss. □

31.5 Satz. *Seien $f, g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$. Dann gilt $f = g$.*

Die Laplace-Transformation ist also invertierbar. Für die Inverse ergibt sich folgende Regel:

Die Laplace-Transformation macht auch Sinn für $s \in \mathbb{C}$, und konvergiert (absolut) auf $\Re(s) > a$, falls $K_f = (a,\infty)$.

Für die Umkehrfunktion ergibt sich dann (für jedes $c > a$)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(c+is)t} F(c+is)\, ds.$$

Wir bezeichnen die Umkehrung der Laplace-Transformation mit $\mathcal{L}^{-1}$.

Beweis. Der Satz ergibt sich aus den entsprechenden Eigenschaften der (komplexen) Fouriertransformation, wenn man beachtet, dass die Laplace-Transformation genau die Fouriertransformation, ausgewertet auf der imaginären Achse, ist.

Die Sätze über die Fouriertransformation sollen hier nicht bewiesen werden. □

Weitere Formeln, um mit der Laplace-Transformation rechnen zu können:

31.6 Satz. *$F = \mathcal{L}(f)$, $\mathcal{L}(g) = G$.*

(1) ***Ähnlichkeitssatz*** *$\mathcal{L}(f(at))(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)(s/a)$ für $a > 0$. $\mathcal{L}^{-1}F(s/a) = af(at)$.*

(2) $\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = F(s-a)$, $\mathcal{L}^{-1}(F)(s-a) = e^{at}f(t)$.

(3) $\mathcal{L}(f(t-a)H(t-a))(s) = e^{-as}F(s)$, $A > 0$

(4) $\mathcal{L}(f * g)(s) = F(s)G(s)$

Hierbei ist $f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau$ die Faltung von f und g.

Da die analytischen Details zur Laplace-Transformation hier nicht sauber ausgearbeitet wurden, wollen wir keinen festen Satz formulieren, sondern einfach an Beispielen zeigen, wie man die Laplace-Transformation zur Lösung von Differenzialgleichungen höherer für reellwertige Funktionen einsetzen kann. Wir nehmen ab jetzt also einfach immer an, dass alle gewünschten Laplace-Transformationen existieren und die Regeln wie getan angewendet werden können. Im Zweifel muss man durch „Probe“ überprüfen, dass die gefundenen Funktionen Lösungen bilden.

31.7 Beispiel. Betrachte AWP $u'' + au' + bu = f(t)$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_0'$, a, b konstant.

Laplace-Transformation ergibt

$$(s^2U - su_0 - u_0') + a(sU - u_0) + bU = F(s),$$

also

$$U(s) = \frac{(s+a)u_0 + u_0' + F(s)}{s^2 + as + b}$$

31.8 Beispiel. $u'' - 9u = e^t$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$. Die Laplacetransformation liefert

$$s^2U(s) - s - 9U = \frac{1}{s-1},$$

also $U(s) = \frac{s(s-1)+1}{(s-1)(s-3)(s+3)}$. Man zerlegt nun die rechte Seite mittels Partialbruchzerlegung:

$$\frac{s^2 - s + 1}{(s-1)(s-3)(s+3)} = \frac{-1/8}{s-1} + \frac{7/12}{s-3} + \frac{13/24}{s+3}.$$

Durch Rücktransformation erhalten wir die Lösung $u(t)$ des Anfangswertproblems. Dies ist hier besonders einfach, Linearität und die bekannte Regel $\mathcal{L}(e^{at})(s) = 1/(s-a)$ benutzend. Man erhält

$$u(t) = -\frac{1}{8}e^t + \frac{7}{12}e^{3t} + \frac{13}{24}e^{-3t}.$$

Für kompliziertere Beispiele muss man natürlich mehr Fouriertransformationen (und Rücktransformationen) kennen. Es zeigt sich, dass dies insbesondere auch bei einigen unstetigen Funktionen (Heaviside-Funktion, Treppenfunktionen) besonders gut funktioniert.

32 Randwertaufgaben

32.1 Beispiel. Gesucht ist die (stationäre) Temperaturverteilung in einem Stab (der Länge L), dessen linke Seite auf Temperatur T_l, rechte Seite auf Temperatur T_r gehalten wird, bei ansonsten gegebener Umgebungstemperatur T_a. Die zugehörige Differenzialgleichung für die Temperatur T in Abhängigkeit von der Position x ist

$$\frac{d^2T}{dx^2} = a^2(T(x) - T_a),$$

mit den Randbedingungen $T(0) = T_l$ und $T(L) = T_r$.

Wir haben es also nicht mit einem klassischen Anfangswertproblem zu tun: dann würden wir Anfangsbedingungen $T(0) = T_l$, $T'(0) = b$ erwarten!

Ähnliche Probleme treten in der Praxis häufig auf: bei der Berechnung von Eigenschwingungen einer schwingenden Saite sind die Enden fest eingespannt, ...

Allgemein betrachte man das lineare Differenzialgleichungssystem

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t),$$

mit $I = [a, b]$ und $A\colon I \to M(n, \mathbb{R})$ und $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Weiter gegeben seinen $t_1, \dots, t_n \in [a, b]$ und die "Randbedingungen"

$$R_k u := R_k u(t_k) = \rho_k, k = 1, \dots, n$$

mit $R_1, \dots, R_n \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{R}$. Es handele sich also auch um *lineare* Randbedingungen.

Das zugehörige *Randwertproblem* sucht eine Funktion $x\colon I \to \mathbb{R}^n$, welche die Differenzialgleichung erfüllt, und so dass gleichzeitig die Randbedingungen $R_k x = \rho_k$ $k = 1, \dots, n$ erfüllt sind.

Oft wird $n = 2$ sind, und $t_1 = a$, $t_2 = b$. Dies erklärt den Term "Randbedingungen".

32.2 Bemerkung. Das so gestellte Randwertproblem ist nicht immer lösbar, und wenn eine Lösung existiert, ist diese im allgemeinen auch nicht eindeutig. Dabei haben wir vorsichtig auch wieder genau n Bedingungen gestellt.

32.3 Beispiel. $u''(t) + u(t) = 0$, $u(0) = 1$, $u(\pi) = 0$ ist unlösbar, denn wir kennen die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung: es gilt immer $u(t) =$

$a\cos(t) + b\sin(t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ geeignet. $u(\pi) = 0$ impliziert, dass $a = 0$, aber dann ist $u(0) = b\sin(0) = 0$.

Ändert man die RAndbedingungen zu $u(0) = 1$, $u(\pi) = -1$, so ist jede Funktion $u_b(t) = \cos(t) + b\sin(t)$ mit $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

Dagegen hat die entsprechende Randwertaufgabe mit $u(0) = a$, $u(\pi/2) = b$ genau die Lösung $u(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$.

32.4 Satz. *Sei $x_1, \dots, x_n$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $x'(t) = A(t)x(t)$.*

Das Randwertproblem $x'(t) - A(t)x(t) = b(t)$, $R_a x = \rho_a$, $R_b x = \rho_b$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene System

$$x'(t) - A(t)x(t) = 0, \quad R_a x = 0,\, R_b x = 0$$

nur die triviale Lösung $x(t) = 0$ besitzt. Äquivalent dazu ist, dass die Vektoren $(R_1 x_1, \dots, R_n x_n), \dots, (R_1 x_n, \dots R_n x_n)$ linear unabhängig ist, die von ihnen gebildete Matrix also nicht-verschwindende Determinante hat.

Beweis. Sei $g(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, also $g'(t) = A(t)g(t) = b(t)$. Wir wissen, dass jede Lösung der inhomogenen Gleichung dann die Form $g(t) + \sum_k \lambda_k x_k(t)$ mit $\lambda_k \in \mathbb{R}$ hat.

Gesucht sind nun solche λ_k, dass zusätzlich $R_j(g(t_j) + \sum_k \lambda_k x_k(t_j)) = \rho_j$ für $j = 1, \dots, n$, also (wegen der Linearität von R_j)

$$\sum_k \lambda_k R_j x_k(t_j) = \rho_j - R_j g(t_j), \qquad j = 1, \dots, n.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die λ_k. Es hat genau dann eine eindeutige Lösung (für jede beliebige rechte Seite), wenn das entsprechende homogene Gleichungssystem $j \sum_k \lambda_k R_j x_k(t_j) = 0$ nur die triviale Lösung besitzt, oder äquivalent, wenn die angegebenen Vektoren linear unabhängig sind (also die zugehörige Determinante nicht Null ist). □

32.5 Beispiel. Löse $x''(t) - t^2 = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 0$. Ein Fundamentalsystem ist $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, eine spezielle Lösung erhält man mit $g(t) = -t^4/12$. Die zugehörigen "Testvektoren" sind also $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 0)$ und $(x_1(1), x_2(1)) = (1, 1)$. Diese sind linear unabhängig, man erhält also eine eindeutige Lösung $x(t) = g(t) + ax_1(t) + bx_2(t)$, wobei a, b das lineare Gleichungssystem

$$ax_1(0) + bx_2(0) = -g(0) = 0, \quad ax_1(1) + bx_2(1) = -g(1)$$

löst.

Wie vor, kann man auch bei den Anfangswertproblemen auf einfache Weise das Prolem "vereinfachen", hier nämlich in ein äquivalentes Problem mit $\rho_k = 0$ überführen.

32.6 Satz. *sei $x'(t) - A(t)x(t) = b(t)$, $R_k x = 0$ eindeutig lösbar.*

Sei $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{R}$, und $h\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $R_k h(t_k) = \rho_k$ (für übliche R_k, t_k, z.B. wenn die t_k alle verschieden sind, wird dies immer möglich sein).

Dann ist auch die Randwertaufgabe

$$y'(t) - A(t)y(t) = b(t) - h'(t) + A(t)h(t), \quad R_k y(t_k) = 0$$

eindeutig lösbar (mit Lösung $y(t)$). Die Funktion $w(t) := y(t) + h(t)$ erfüllt dann

$$w'(t) - A(t)w(t) = b(t), \quad R_k w(t_k) = \rho_k$$

ist also die eindeutige Lösung dieses eindeutigen Anfangswertproblems.

Wir betrachten nun speziell die Randwertaufgaben

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t) = g(t)$$

mit a_1, a_0, g stetig. Da $p(t) := \exp(\int_{t_0}^t a_1(\tau)\,d\tau)$ nirgends Null ist, ist obige Gleichung äquivalent zu

$$p(t)x''(t) + p'(t)x'(t) + p(t)a_0(t) = p(t)g(t),$$

also zu

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = f(t)$$

mit $q(t)$, $f(t)$ geeignet.

32.7 Definition. Sind $p, q, f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, p sogar stetig diffbar und positiv, und $R_1 u = \alpha_1 u(1) + \alpha_2 u'(a)$, $R_2 u = \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b)$, so nennt man das Randwertproblem

$$Lx(t) := (p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = f(t), \quad R_1 x = 0, R_2 x = 0$$

eine *Sturmsche Randwertaufgabe*.

32.8 Beispiel. Wir haben bereits gesehen, wie wir vorgegebene Randwertprobleme (linear der Ordnung zwei für reelwertige Funktionen) auf diese Form bringen können. Von besonderer Relevanz ist noch, beliebige rechte Seiten f zuzulassen. Dies sind in der Praxis in der Regel äußere Bedingungen, die man im Problem auferlegt.

Betrachtet man z.B. die Temperaturverteilung im Stab, so erhielten wir für eine konstante Umgebungstemperatur T_a die rechte Seite $-\alpha^2 T_a$; ist die Aussentemperatur nicht konstant, so muss T_a durch die Funktion erstetzt werden, welche die Aussentemperatur beschreibt. Ähnlich ist es in anderen Problemen oft f, welches variiert werden muss. Wir wollen nun eine Methode bestimmen, mit der die zugehörigen Lösungen der Randwertaufgaben effizient in Termen von f bestimmt werden können.

Wir machen dazu generell folgende Voraussetzung: Das homogene Sturmsche Randwertproblem besitze eine eindeutige Lösung.

Sei v_1, v_2 ein Fundamentalsystem von $Lx = 0$ mit $R_1 v_1 = 0$, $R_2 v_2 = 0$. Dazu wählen wir zunächst ein beliebiges Fundamentalsystem (u_1, u_2) und setzen $v_1 := (R_1 u_2)u_1 - (R_1 u_1)u_2$, $v_2 := (R_2 u_u)u_1 - (R_2 u_1)u_2$. Wir definieren die *Greensche Funktion*

$$G(t,\tau) := \begin{cases} \frac{v_1(t)v_2(\tau)}{p(a)W(a)}, & a \le t \le \tau \le b \\ \frac{v_1(\tau)v_2(t)}{p(a)W(a)}, & a \le \tau \le t \le b. \end{cases}$$

Wobei $W(t) = v_1(t)v_2'(t) - v_1'(t)v_2(t)$ die Wronski-Determinante ist. Beachte, dass auf der Diagonalen die beiden Definitionen übereinstimmen, $G(t,\tau)$ ist also eine stetige Funktion. Eingeschränkt auf die beiden Definitionsteildreiecke ist die

Funktion natürlich auch zweimal differenzierbar. Für die partiellen Ableitungen nach t ergibt sich im Limes gegen die Diagonale

$$\frac{d}{dt}G(t+0,t) = \frac{v_1'(t)v_2(t)}{p(a)W(a)}, \quad \frac{d}{dt}G(t-0,t) = \frac{v_1(t)v_2'(t)}{p(a)W(a)},$$

die Differenz erfüllt also die *Sprungrelation* $1/p(x)$, wenn man die folgende Beobachtung benutzt:

Für die Wronski-Determinante und die Differenzialgleichung $Lu = 0$ in der Sturmschen Form $Lu = (pu')' + qu$ erhält man folgende Variante der Lagransche-Identität.

32.9 Lemma. $(p(t)W(t))' = 0$, *also* $p(x)W(x) = p(a)W(a)$ *für alle* $x \in [a, b]$.

Beweis. Man muss einfach mit Produktregel die Ableitung ausrechnen:

$$\begin{aligned}(pv_1v_2' - pv_2v_1')' &= v_1(pv_2')' + v_1'(pv_2') - v_2(pv_1')' - v_2'(pv_1') \\ &= -v_1qv_2 + v_1qv_2 = 0\end{aligned}$$

□

32.10 Satz. *Unter den gemachten Voraussetzungen hat das halbinhomogene AWP* $Lx = f$, $R_1x = 0$, $R_2x = 0$ *die eindeutige Lösung*

$$x(t) := \int_a^b G(t, \tau)f(\tau)\,d\tau, \quad a \le t \le b.$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass die Randwertaufgabe eine eindeutige Lösung besitzt. Wir müssen also nur überprüfen, dass $x(t)$ die Randwertaufgabe löst. Nun ist sicher

$$x(t) = \int_a^t G(t, \tau)f(\tau)\,d\tau + \int_\tau^b G(t, \tau)f(\tau)\,d\tau,$$

somit

$$\frac{d}{dt}x(t) = G(t,t)f(t) + \int_a^t G_t(t, \tau)f(\tau)\,d\tau - G(t,t)f(t) + \int_t^b G_t(t, \tau)f(\tau)\,d\tau = \int_a^b G_t(t, \tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Entsprechend erhält man für die zweite Ableitung

$$x''(t) = G_t(t+0,t)f(t) + \int_a^t G_{tt}(t, \tau)f(\tau)\,d\tau - G_t(t-0,t)f(t) + \int_t^b G_{tt}(t, \tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Beachte, dass sich wegen der Unstetigkeit von $G_t(t, \tau)$ die Randterme nun nicht wegheben. Stattdessen muss man die Sprungrelation anwenden, und erhält so

$$x''(t) = f(t)/p(t) + \int_a^b G_{tt}(t, \tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Nun ist

$$Lu = pu'' + p'u' + qu = f(t) + \int_a^b p(t)G_{tt}(t, \tau) + p'(t)G_t(t, \tau) + q(t)G(t, \tau)f(\tau)\,d\tau = f(t),$$

da $LG(t, \tau) = 0$ für $t \ne \tau$.

Weiter ist

$$R_1x(a) = \int_a^b R_1G(a, \tau)f(\tau)\,d\tau = \int_a^b \frac{R_1v_1(a)v_2(\tau)}{p(a)W(a)}f(\tau)\,d\tau = 0,$$

und entsprechende $R_2x(b) = 0$. □

33 Ausblick

Die Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen (dynamischer Systeme/autonomer Systeme) ist mit unserer Einstiegsvorlesung natürlich noch lange nicht abgeschlossen. Im folgenden sollen ein paar wichtige weiterführende Themengebiete aufgezählt und kurz erläutert werden.

(1) Eigenwertprobleme bei Randwertaufgaben; Entwicklung von Greenfunktion und allgemeinenen Funktionen in Eigenfunktionen.

(2) Stabilitätstheorie: Zykel, Stabilität von Zykeln (auch hier wieder mit geeigneten Linearisierungen)

(3) Existenz von Fixpunkten (oder Zykeln), insbesondere aus rein topologischen Gründen

(4) hamiltonsche/symplektische Systeme: spezielle Typen von Differenzialgleichungen, die sich in der Physik (klassische Mechanik) ergeben, haben spezielle Eigenschaften (z.B.: Fluss erhält das Volumen)

(5) nichtlineare Dynamik; Chaostheorie: Abhängigkeit von Parametern

(6) Singularitätentheorie: wie entwickeln sich die Lösungen einer gewöhnlichen DGl am Ende des Definitionsintervalls (z.B.: Painleve-Problem: gibt es Singularitäten für Newtonsche Mechanik, die nicht durch Kollissionen entstehen?

(7) Integrable Systeme: Lösungen durch Angabe von n Funktionen, die Lösungskurven verlaufen auf Niveau-Mengen (auch in unendlich vielen Dimensionen): Eigenschaften untersuchen, Beispiele finden (relevant auch für partielle Differenzialgleichungen)

(8) Diskrete dynamische Systeme: wie verhalten sich Abbildungen nach vielen Interationen?

(9) partielle Differenzialgleichungen

34 Aufgaben

(1) Löse folgende Anfangswertproblem:

   (a) $x(t)x'(t) + t = 0$; $x(t_0) = 0$
   (b) $x(t)x'(t) = 3t$; $x(0) = x_0$
   (c) $x'(t) + 2tx(t) = 0$; $x(t_0) = 1$.

Literatur

[1] Herbert Amann. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1983.

[2] V. I. Arnol′d. *Geometrische Methoden in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1987.

[3] V.I. Arnold. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Spinger, 1983.

[4] Lothar Collatz. *Differentialgleichungen*, volume 1 of *Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik [Guides to Applied Mathematics and Mechanics].* B. G. Teubner, Stuttgart, 1990.

[5] J. Elstrodt. Skript dgl. Skript Elstrodt (Münster) (pdf).

[6] K. Habermann. Skript dgl. Skript Habermann (Göttingen) (ps).

[7] Harro Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, 1991.

[8] Hans Knapp. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, volume 3 of *Schriftenreihe für Mathematik [Mathematics Series].* Rudolf Trauner, Linz, 1982.

[9] H.W. Knobloch and F. Kappel. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Teubner, 1974.

[10] Bernd Martens. *Differentialgleichungen und dynamische Systeme in den Sozialwissenschaften.* Profil Verlag, Munich, 1984.

[11] F. Natterer. Skript dgl. Skript Natterer (Münster) (ps).

[12] C. Schütt. Skript dgl. Skript Schütt (pdf).

[13] W. W. Stepanow. *Lehrbuch der Differentialgleichungen.* Hochschulbücher für Mathematik [University Books for Mathematics], 20. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1982.

[14] Wolfgang Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[15] Helmut Werner and Herbert Arndt. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Hochschultext. [University Textbooks]. Springer-Verlag, Berlin, 1986.