

Seminar “De Rham Kohomologie und harmonische Differentialformen” - 3. Sitzung

Wilfried Keller*

3. Mai 2004

Das Mayer-Vietoris Argument

Einleitung

Die Mayer-Vietoris Sequenz kann zur Berechnung der de Rham Kohomologievektorräume sehr nützlich sein, wie in der letzten Stunde am Beispiel des Kreises verdeutlicht wurde. Kennt man für zwei offene Mengen und deren Schnitt die Kohomologie, so kann man auf die der Vereinigung schließen.

Zum Beweis der endlichen Dimension der Kohomologie von Mannigfaltigkeiten endlichen Typs, sowie für die Poincaré-Dualität für orientierbare Mannigfaltigkeiten endlichen Typs wird dieser Schluss nun induktiv genutzt. Diese Beweise sind Instanzen des sog. Mayer-Vietoris Argumentes. Den Induktionsbeginn liefern die Poincaré-Lemmata (ebenfalls aus der letzten Sitzung).

Existenz einer guten Überdeckung

Definition: Eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit heißt *gute Überdeckung*, wenn alle endlichen (nichtleeren) Schnitte $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ diffeomorph zum \mathbb{R}^n sind. Besitzt eine Mannigfaltigkeit eine endliche gute Überdeckung nennt man sie *von endlichen Typ*.

Bevor der angedeutete Existenzsatz bewiesen werden kann, noch einige Hilfsmittel aus der Differentialgeometrie.

Definition: Eine *Riemann-Metrik* $x\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf einer diffbaren Mannigfaltigkeit M ist an jedem Punkt $x \in M$ eine positiv definite, symmetrische Bilinearform (euklidisches Skalarprodukt) des Tangentialvektorraumes, wobei für zwei glatte Vektorfelder V, W die Abbildung $M \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x\langle V(x), W(x) \rangle$ glatt ist. M heißt dann *Riemann-Mannigfaltigkeit*.

Eine Riemann-Metrik induziert eine Metrik¹ auf M etwa durch

$$d(x, y) := \inf_{(\gamma|\gamma \text{ Weg von } x \text{ nach } y)} \left\{ L(\gamma) := \int \sqrt{\gamma(t)\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt \right\},$$

wie man leicht nachprüft.^a

*eMail: Keller@CreativeHQ.de

¹Diese Metrik ist nicht im Sinne der linearen Algebra zu verstehen, also kein Skalarprodukt, sondern macht M im Sinne der Topologie zu einem metrischen Raum.

Satz: *Jede Mannigfaltigkeit lässt sich mit einer Riemann-Metrik versehen.*

Beweis: Man nehme einen Atlas $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$: Da $h_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ ist, sind die Tangentialräume zu dem Bild eines Kartengebietes besonders einfach. Man betrachte dieses Bild etwa als Teilmenge des affinen Raumes \mathbb{R}^n ; so ist etwa das Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ auf jedem Tangentialraum eine Riemann-Metrik für \mathbb{R}^n , und damit die Einschränkung auf $h_\alpha(U_\alpha)$ dort eine Riemann-Metrik. Natürlich ist h_α auch eine glatte Abbildung zwischen (Unter-)Mannigfaltigkeiten, man kann also diese Metrik auf das Kartengebiet zurückziehen, etwa durch

$${}_x \langle v, w \rangle_\alpha := h_\alpha^* \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^n} := \langle (dh_\alpha(x))(v), (dh_\alpha(x))(w) \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

und erhält so zunächst auf jedem Kartengebiet eine Riemann-Metrik.

Sei nun ρ_α eine subordinierte Partition der Eins, so ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_x := \sum \rho_\alpha \cdot {}_x \langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ eine Riemann-Metrik, da mit jedem der Summanden auch die Summe bilinear, symmetrisch und (durch die nichtnegativen Koeffizienten $\rho_\alpha(x)$) positiv definit ist. Die Partition der Eins stellt sicher, dass das Zusammenstückeln eine glatt variierende Metrik ergibt. \square

Aus dieser Konstruktion ergibt sich, dass die Kartenabbildungen h_α *Isometrien* bezüglich der von der Riemann-Metrik ${}_x \langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ auf U_α induzierten Metrik $d(\cdot, \cdot)_\alpha$ sind²; lokale Aussagen übertragen sich also besonders gut vom Fall \mathbb{R}^n auf Mannigfaltigkeiten.

Definition: Eine offene Menge U einer Riemann-Mannigfaltigkeit heiÙe nun *geodätisch konvex*³, wenn es zu je zwei Punkten eindeutig eine kürzeste Verbindung zwischen ihnen in U gibt.

Geodätisch konvexe Umgebungen zu jedem Punkt liefern nun die gewünschte Überdeckung, da sie folgende schöne Eigenschaften haben:

- Geodätisch konvexe (nichtleere) Mengen einer n -dimensionalen Mf. sind diffeomorph zum \mathbb{R}^n .
- Der nichtleere Schnitt geodätisch konvexer Mengen ist wieder geodätisch konvex, da alle (eindeutig bestimmten) Geodäten zwischen Punkten des Schnittes in jeder der betroffenen Mengen, somit natürlich auch in deren Schnitt liegen.

Satz: *Jede (unberandete) Mannigfaltigkeit M hat eine gute Überdeckung. Kompakte Mannigfaltigkeiten sind von endlichem Typ.*

Beweis: Zu zeigen ist nur noch, dass jeder Punkt eine geodätisch konvexe Umgebung besitzt. Da nun M lokal isometrisch zum \mathbb{R}^n ist, und geodätische Konvexität durch Isometrien erhalten wird, folgt die (lokale) Existenz aus der für den \mathbb{R}^n , indem man mittels lokaler Isometrie das (isometrische) Bild von offenen Kugeln (entsprechend geringen Radius' r) $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ in M betrachtet, da diese im \mathbb{R}^n (geodätisch) konvex sind. \square

² h_α ist eine Isometrie bezüglich der von \mathbb{R}^n induzierten Metrik, aber natürlich gilt dies auch, wenn man umgekehrt die Metrik des \mathbb{R}^n mittels des Homöomorphismus h_α durch die Metrik von M induzieren lässt. Für den \mathbb{R}^n mit Standardtopologie (und die erhält h_α) sind aber je zwei Metriken äquivalent; damit ist h_α auch bezüglich der auf U_α eingeschränkten Metrik von M eine Isometrie.

³Diese Definition mag nicht mit der üblichen übereinstimmen...

Finiter Typ und endlich-dimensionale Kohomologie

Nach dieser Vorarbeit hier die erste Anwendung des Mayer-Vietoris Argumentes:

Satz: *Jede Mannigfaltigkeit, die eine endliche gute Überdeckung besitzt, hat eine endlichdimensionale de Rham Kohomologie, d.h. $\dim H^*M < \infty$.*

Beweis: Die lange Mayer-Vietoris Sequenz

$$\dots \longrightarrow H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^k(U \cup V) \xrightarrow{r} H^kU \oplus H^kV \longrightarrow \dots$$

liefert sofort:

$$H^k(U \cup V) \underset{(r \text{ ist Hom.})}{\simeq} \ker r \oplus \operatorname{im} r \underset{(\text{Exakth.})}{\simeq} \operatorname{im} d^* \oplus \operatorname{im} r.$$

Da sowohl $\dim \operatorname{im} d^* \leq \dim H^{k-1}(U \cap V)$ als auch $\dim \operatorname{im} r \leq \dim(H^kU \oplus H^kV)$ gilt, hat man:

$$\dim(H^k(U \cup V)) \leq \dim(H^{k-1}(U \cap V)) + \dim(H^kU) + \dim(H^kV) \quad (1)$$

Nun zur Induktion, deren Anfang das Poincaré-Lemma liefert: Besteht die gute Überdeckung von M nur aus einer Menge, so ist M diffeomorph zum \mathbb{R}^n , und daher gilt⁴ $H^kM = \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, also insbesondere $\dim H^*M = 1 < \infty$.

Sei $\{U_0, \dots, U_p\}$ nun die gute Überdeckung von M , so ist die Kohomologie von $U = U_0$ sowie von $V = \cup_{i=1}^p U_i$ und auch $U \cap V$ endlichdimensional nach Induktionsvoraussetzung, da sie eine gute Überdeckung aus höchstens p offenen Mengen besitzen.⁵ Also sind in (1) die Summanden auf der rechten Seite endlich, und damit die Kohomologie von $U \cup V = M$ von endlicher Dimension.^b \square

Poincaré-Dualität

Fünfer-Lemma: *Sind in einem kommutativen⁶ Diagramm abelscher Gruppen,*

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi_1} & B & \xrightarrow{\varphi_2} & C & \xrightarrow{\varphi_3} & D & \xrightarrow{\varphi_4} & E & \longrightarrow \\ & \simeq \downarrow \alpha & & \simeq \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \simeq \downarrow \delta & & \simeq \downarrow \varepsilon & \\ \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\psi_1} & B' & \xrightarrow{\psi_2} & C' & \xrightarrow{\psi_3} & D' & \xrightarrow{\psi_4} & E' & \longrightarrow \end{array}$$

dessen Zeilen exakt sind, die Abbildungen α, β sowie δ und ε Isomorphismen, dann auch γ .

Beweis: Für den Beweis führt man eine Diagrammjagd durch.

Injektivität von γ : Sei $c \in C$ mit $\gamma(c) = 0$.

$$\bullet \psi_3(\gamma(c)) = 0 \underset{(\text{Komm.})}{=} \delta(\varphi_3(c)) \underset{(\delta \text{ inj.})}{=} \varphi_3(c).$$

⁴ H^* ist invariant unter jedem Diffeomorphismus φ , da $\varphi^* \circ (\varphi^{-1})^* = id^*$.

⁵Für $U \cap V$ ist offensichtlich $\{U_1 \cap U_0, \dots, U_p \cap U_0\}$ eine solche Überdeckung.

⁶Wie man anhand des Beweises sieht, reicht in \mathbb{R} -Vektorräumen auch Kommutativität bis auf das Vorzeichen, da mit φ auch $-\varphi$ ein Isomorphismus ist.

- Also ist $c \in \ker \varphi_3 = \text{im } \varphi_2 \Rightarrow \exists b \in B : \varphi_2(b) = c$.
- $\gamma(c) = 0 = \gamma(\varphi_2(b)) \underset{\text{(Komm.)}}{=} \psi_2(\beta(b)) \Rightarrow b' := \beta(b) \in \ker \psi_2 = \text{im } \psi_1$.
- $\exists a' \in A' : \psi_1(a') = b'$ und da α surjektiv ist $\exists a \in A : \alpha(a) = a'$.
- $\beta(b) = b' = \psi_1(a') = \psi_1(\alpha(a)) \underset{\text{(Komm.)}}{=} \beta(\varphi_1(a)) \underset{(\beta \text{ inj.})}{\implies} \varphi_1(a) = b$.
- $c = \varphi_2(b) = \varphi_2(\varphi_1(a)) \underset{\text{(Exakth.)}}{=} 0$, also ist γ injektiv.

Surjektivität von γ : Sei $c' \in C'$.

- Sei $\psi_3(c') =: d' \Rightarrow \exists d \in D : \delta(d) = d'$, da δ surjektiv ist.
- $\psi_4(\psi_3(c')) \underset{\text{(Exakth.)}}{=} 0 = \psi_4(d') = \psi_4(\delta(d)) \underset{\text{(Komm.)}}{=} \epsilon(\varphi_4(d)) \underset{\text{(Inj. v. } \epsilon)}{=} \varphi_4(d)$.
- $d \in \ker \varphi_4 = \text{im } \varphi_3 \Rightarrow \exists c \in C : \varphi_3(c) = d$.
- Also $\psi_3(c') = d' = \delta(d) = \delta(\varphi_3(c)) \underset{\text{(Komm.)}}{=} \psi_3(\gamma(c))$.
- Und damit $\psi_3(c') - \psi_3(\gamma(c)) \underset{\text{(Hom.)}}{=} \psi_3(c' - \gamma(c)) = 0$.
- Damit ist $\tilde{c} = c' - \gamma(c) \in \ker \psi_3 = \text{im } \psi_2$.
- $\exists b' \in B' : \psi_2(b') = \tilde{c} \underset{(\beta \text{ surj.})}{\implies} \exists b \in B : \beta(b) = b'$.
- $c' - \gamma(c) = \psi_2(\beta(b)) \underset{\text{(Komm.)}}{=} \gamma(\varphi_2(b))$.
- $c' = \gamma(c) + \gamma(\varphi_2(b)) = \gamma(c + \varphi_2(b)) \implies c' \in \text{im } \gamma$.

□

Zusammenfügen der Mayer-Vietoris Sequenzen

Definition: Unter einer *nichtausgearteten Paarung* zweier endlichdimensionaler Vektorräume V und W versteht man eine Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\forall w \in W : \langle v, w \rangle = 0 \implies v = 0 \text{ und } \forall v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \implies w = 0.$$

Eine nichtausgeartete Paarung induziert eine injektive (und aus Symmetriegründen auch surjektive)⁷ lineare Abbildung $l' : V \rightarrow W' : v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ zwischen V dem Dualraum von W .

Mithilfe des Integrals und des Dachproduktes wird im folgenden ein Isomorphismus zwischen $H^k M$ und dem Dualraum von $H_c^{n-k} M$ konstruiert, d.h. zuerst eine Paarung zwischen diesen Kohomologien. Das Dachprodukt ist bilinear und das Integral linear, bleibt zu versichern, dass sowohl das Dachprodukt als auch die Integration mit der Kohomologie verträglich sind.

⁷Da es eine injektive Abbildung in die andere Richtung gibt ($W \rightarrow V' : w \mapsto \langle \cdot, w \rangle$) und $V \simeq V'$ sowie $W \simeq W'$ (endlichdimensional), ist diese Abb. ein Isomorphismus.

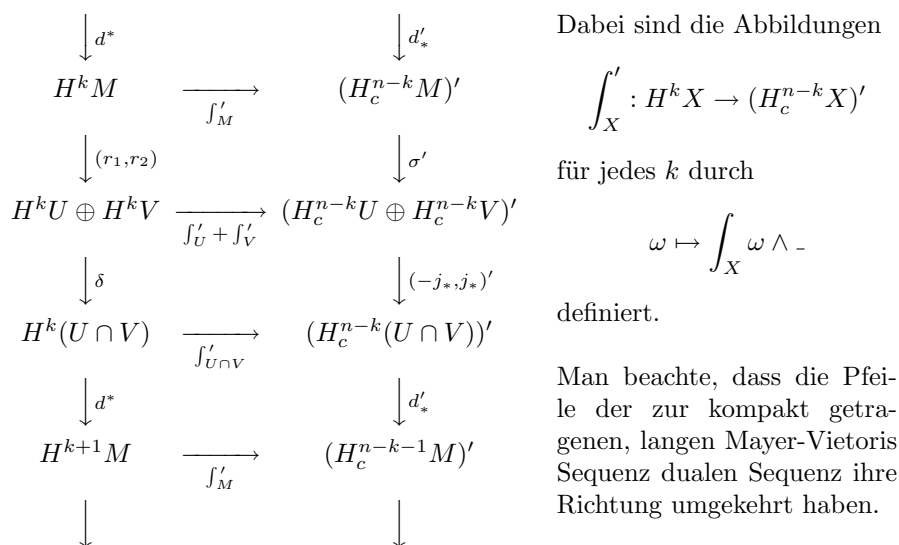
Da $d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\tau$ gilt, ist das Dachprodukt zweier geschlossener Formen wieder geschlossen. Andererseits ist nach dem Satz von Stokes $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$, also das Integral exakter n -Formen $d\omega$ (auf unberandeten Mannigfaltigkeiten) stets 0, somit ist das Integral eine lineare Abbildung auf dem Quotientenraum $H_c^n M$.

Die Integration ist aber nur für n -Formen mit kompakten Träger definiert, was den Weg für die weitere Konstruktion der gesuchten Paarung vorgibt. Werden zwei Formen "verdacht", so addieren sich ihre Grade, d.h. um eine n -Form zu erhalten, muss man eine k - mit einer $n - k$ -Form kombinieren. Soll dabei auch noch ein kompakter Träger (wegen der Integration) herauskommen, so reicht es, wenn eine der beiden Formen einen kompakten Träger besitzt, da $\text{Tr}(\omega \wedge \tau) \subset \text{Tr}(\omega) \cap \text{Tr}(\tau)$.

Nach dem bisher gesagten definieren die Abbildungen

$$\int_M^\wedge : H^k M \times H_c^{n-k} M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\omega, \tau) \mapsto \int_M \omega \wedge \tau$$

Paarungen für jedes k ; dass diese Bilinearformen nicht ausgeartet sind, wird nun mittels eines Mayer-Vietoris-Argumentes gezeigt. Betrachte dazu folgendes Diagramm:



Poincaré-Dualität für orientierbare Mannigfaltigkeiten

Satz: Sei M eine Mannigfaltigkeit endlichen Typs, so gilt :

$$H^k M \simeq (H_c^{n-q} M)' \quad \text{und} \quad (H^k M)' \simeq H_c^{n-q} M.$$

Beweis: Zum Beweis zeigt man zunächst die Kommutativität eines jeden Quadrates (bzw. die Kommutativität bis aufs Vorzeichen im untersten Diagramm).

1.) Sei $\omega \in H^k M$, $\tau_1 \in H_c^{n-k} U$, $\tau_2 \in H_c^{n-k} V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left((\sigma' \circ \int'_M) (\omega) \right) (\tau_1, \tau_2) &= \sigma' \left(\int'_M (\omega) \right) (\tau_1, \tau_2) \\
&= \sigma' \left(\int_M \omega \wedge - \right) (\tau_1, \tau_2) \\
&= \left(\left(\int_M \omega \wedge - \right) \circ \sigma \right) (\tau_1, \tau_2) \\
&= \int_M \omega \wedge (\tau_1 + \tau_2) \\
&= \int_M \omega \wedge \tau_1 + \int_M \omega \wedge \tau_2
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
\left(\left(\left(\int'_U + \int'_V \right) \circ (r_1, r_2) \right) (\omega) \right) (\tau_1, \tau_2) &= \left(\left(\int'_U + \int'_V \right) (r_1 \omega, r_2 \omega) \right) (\tau_1, \tau_2) \\
&= \left(\int_U r_1 \omega \wedge - + \int_V r_2 \omega \wedge - \right) (\tau_1, \tau_2) \\
&= \int_U r_1 \omega \wedge \tau_1 + \int_V r_2 \omega \wedge \tau_2.
\end{aligned}$$

Da $\text{Tr } \tau_1 \subset U \implies \text{Tr } \omega \wedge \tau_1 \subset U$ und $r_1 \omega = i_1^* \omega$ die per Inklusion $i_1 : U \hookrightarrow M$ auf U zurückgezogene Form, ist $r_1 \omega \wedge \tau_1 = \omega \wedge \tau_1$ und es ist egal, ob man über U oder M integriert (völlig Analoges gilt für den zweiten Summanden, bzw. $r_2 \omega \wedge \tau_2$), also sind diese Integrale gleich.

2.) Sei $(\omega_1, \omega_2) \in H^k U \oplus H^k V$, $\tau \in H_c^{n-k}(U \cap V)$, so gilt

$$\begin{aligned}
\left((-j_*, j_*)' \left(\left(\int'_U + \int'_V \right) (\omega_1, \omega_2) \right) \right) (\tau) &= \int_U \omega_1 \wedge -j_* \tau + \int_V \omega_2 \wedge j_* \tau \\
&= - \int_U \omega_1 \wedge \tau + \int_V \omega_2 \wedge \tau
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\left(\left(\int'_{U \cap V} \circ \delta \right) (\omega_1, \omega_2) \right) (\tau) &= \int_{U \cap V} \delta(\omega_1, \omega_2) \wedge \tau \\
&= \int_{U \cap V} \omega_2 \wedge \tau - \int_{U \cap V} \omega_1 \wedge \tau.
\end{aligned}$$

Analog zu oben gilt $\text{Tr}(\omega_1 \wedge \tau) \subset \text{Tr } \tau \subset U \cap V$, also kommutiert das mittlere Quadrat.

3.) Sei $\omega \in H^k(U \cap V)$, $\tau \in H_c^{n-k-1} M$. Dann ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
\left((d'_* \circ \int'_{U \cap V}) (\omega) \right) (\tau) &= \left(\left(\int_{U \cap V} \omega \wedge - \right) \circ d_* \right) (\tau) \\
&= \int_{U \cap V} \omega \wedge d_* \tau.
\end{aligned}$$

und über den anderen Weg

$$\begin{aligned}
\left(\left(\int'_M \circ d^* \right) (\omega) \right) (\tau) &= \int_M (d^* \omega) \wedge \tau \\
(\text{Tr } \omega \subset U \cap V) &= \int_{U \cap V} (d^* \omega) \wedge \tau.
\end{aligned}$$

Jetzt muss man sich die Konstruktion der Operatoren d^* und d_* ins Gedächtnis rufen, denn es galt: $d^*\omega|_{U \cap V} = -d(\rho_V \omega)$ und $d_*\tau = d(\rho_V \tau)|_{U \cap V}$, wobei ρ_U, ρ_V eine zu U und V subordinierte Partition der Eins war. ^c
Wegen $d\tau = 0 = d\omega$ gilt weiterhin $d(\rho_V \tau) = (d\rho_V) \wedge \tau$ und $d(\rho_V \omega) = (d\rho_V) \wedge \omega$, sodass sich insgesamt ergibt:

$$\int_{U \cap V} \omega \wedge d_*\tau = \int_{U \cap V} \omega \wedge (d\rho_V) \wedge \tau = (-1)^{\deg \omega} \int_{U \cap V} (d\rho_V) \wedge \omega \wedge \tau,$$

was das Diagramm als (bis auf das Vorzeichen)⁸ kommutativ erweist.

Jetzt wird per Induktion über $\text{card}\{U_\alpha\}$ folgende Behauptung gezeigt:

Die Integralabbildungen \int'_M sind sämtlich (d.h. $\forall k$) Isomorphismen.

Falls die Mannigfaltigkeit M eine gute Überdeckung aus einer Menge besitzt, ist sie diffeomorph zu \mathbb{R}^n . Also ist nach den Poincaré-Lemmata nur die Abbildung $\int'_M : H^0 M \rightarrow (H_c^n M)'$ interessant. Weil die Räume eindimensional sind, ist nur zu zeigen, dass diese Abbildung nicht die Nullabbildung ist. Betrachte dazu $\omega = 1 \in H^0 M$ und eine Buckelfunktion ϕ mit kompaktem Träger und nicht verschwindendem Integral. So ist $\int_M \omega \wedge (\phi \cdot dx_1 \dots dx_n) = \int_M \phi dx_1 \dots dx_n \neq 0$.

Induktionsschritt: Sei nun M eine Mannigfaltigkeit, die eine gute Überdeckung aus $p + 1$ Mengen U_0, \dots, U_p besitzt. Sei $U = U_0$ und $V = \cup_{i=1}^p U_i$. Diese Mengen und $U \cap V$ besitzen gute Überdeckungen aus höchstens p offenen Mengen. Nach Induktionsvoraussetzung sind damit alle Abbildungen \int'_U, \int'_V und $\int'_{U \cap V}$ Isomorphismen - und also nach dem Fünferlemma auch alle Abbildungen \int'_M . \square

Bemerkung für den nicht endlichen Typ

Auch für orientierbare Mannigfaltigkeiten, die keine endliche gute Überdeckung besitzen, gilt $H^k M \simeq (H_c^{n-k} M)'$. Allerdings gilt $H_c^k M \simeq (H^{n-k} M)'$ im allgemeinen nicht.

Betrachte dazu die disjunkte Vereinigung $M = \coprod_{i=1}^\infty M_i$ von Mannigfaltigkeiten M_i finiten Typs, so bestimmt sich deren Kohomologie zu $H^k M = \prod_{i=1}^\infty H^k M_i$.⁹ Gibt man auf jeder Mannigfaltigkeit M_i eine Form mit kompaktem Träger vor, hat die resultierende Form auf M genau dann kompakten Träger, wenn nur endlich viele der Formen auf M_i ungleich Null sind. Daher ist $H_c^k M = \bigoplus_{i=1}^\infty H_c^k M_i$ und somit $(H_c^k M)' = \prod_{i=1}^\infty (H_c^k M_i)'$. Der Dualraum von $H^k M$ ist aber nicht isomorph zur direkten Summe der Dualräume der $H^k M_i$. ^d

Korollar: *Für zusammenhängende, orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeiten gilt $H_c^n(M) \simeq \mathbb{R}$. Ist M kompakt, so auch $H^n(M) \simeq \mathbb{R}$.*

Beweis: Die 0-Zykel aus $H^0(M)$ sind (auf jeder Zusammenhangskomponente) konstante Funktionen, d.h. Funktionen $M \rightarrow \mathbb{R}$ mit genau einem Funktionswert. Nun ergibt die Poincaré-Dualität $\mathbb{R} \simeq H^0(M) \simeq (H_c^n(M))' \simeq H_c^n(M)$. \square

⁸In diesem Fall könnte man sogar ein kommutatives Diagramm erhalten, indem man für jedes k die Abbildungen \int'_X durch $\int_X^- := (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)} \int'_X$ ersetzt.

⁹Jede Form auf M lässt sich als Produkt von Formen auf den M_i darstellen und das Produkt von Zykeln (Rändern) ist ein Zykel (Rand).

Anmerkungen

^a Das Infimum wird gerade über die Länge L der Wege gebildet. Wenn also $\gamma : [0; 1] \rightarrow M$ ein Weg von x nach y ist, so ist $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(1 - t)$ der Rückweg gleicher Länge, was die Symmetrie liefert. Da sich zwei Wege (wieder durch umparametrisieren) zusammensetzen lassen - was auch für bis auf endlich viele Punkte diffbare Wege richtig bleibt - gilt die Dreiecksungleichung. Die positive Definitheit folgt aus der des Skalarproduktes und daraus, dass $\forall t \in [0; 1] : \gamma'(t) = 0$ nur für den konstanten Weg zutrifft. Wie sich zeigt ist dieses Infimum ein Minimum, es gibt also einen (zumindest im lokalen Fall eindeutigen) kürzesten Weg zwischen zwei Punkten.

^b Man kann schon an diesem Beispiel die allgemeine Struktur von Mayer-Vietoris Argumenten erkennen. Zunächst muss man mithilfe der langen Mayer-Vietoris Sequenz ein Konditional (K) der folgenden Art etablieren: *Wenn eine Aussage auf die Kohomologien von U , V und $U \cap V$ zutrifft, so auch auf die Kohomologie von $U \cup V$.* Dieses liefert den Schluss einer Induktion, für die man nur noch einen passenden Anfang braucht - da in den hier diskutierten Fällen die Induktion über die Kardinalität einer guten Überdeckung läuft, erledigen die Poincaré-Lemmata diesen Anfang. Die gute Überdeckung von $U \cup V$ enthält (zumindest) eine Menge mehr als die der Untermannigfaltigkeiten U , V und $U \cap V$, und so ist gerade (K) der nötige Schluss.

^c Für d^* sei an dieser Stelle auf das Handout von Sebastian Hage, S. 34 unten, verwiesen, für d_* will ich das aber nochmals anhand der Sequenzen der Kettenkomplexe verdeutlichen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longleftarrow & \Omega_c^{k+1} M & \xleftarrow{\sigma} & \Omega_c^{k+1} U \oplus \Omega_c^{k+1} V & \xleftarrow{(-j_*, j_*)} & \Omega_c^{k+1}(U \cap V) \longleftarrow 0 \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 & \longleftarrow & \Omega_c^k M & \xleftarrow{\sigma} & \Omega_c^k U \oplus \Omega_c^k V & \xleftarrow{(-j_*, j_*)} & \Omega_c^k(U \cap V) \longleftarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow
 \end{array}$$

Für $\tau \in H_c^k M$ wird das Bild unter $d_* : H_c^k M \rightarrow H_c^{k+1}(U \cap V)$ aus dem Urbild unter der Summe σ (d.h dem eindeutigen Urbild unter $(-j_*, j_*)$ von dessen Ableitung) bestimmt, was nach dem Schlagenlemma eine wohldefinierte Abbildung ergibt. Da τ kompakten Träger hat, liefert $(\rho_U \tau, \rho_V \tau) \in \Omega_c^k U \oplus \Omega_c^k V$ das gewünschte Ergebnis¹⁰, wodurch man folgendes erhält: $d_* \tau = d(-\rho_U \tau)|_{U \cap V} = d(\rho_V \tau)|_{U \cap V}$.

^d Analog Fußnote 9 kann man zur Bestimmung des Dualraumes einer unendlichen direkten Summe auf jedem Summanden-Vektorraum eine lineare Abbildung vorgeben und die aus diesen Komponenten bestehende Abbildung im Produkt der Dualräume ist wohldefiniert - in der direkten Summe sind ja stets nur endliche Linearkombinationen. Für ein Produkt von Vektorräumen gilt dies im unendlichen Fall nicht mehr. Wählt man etwa aus jedem der Faktoren des Vektorraum-Produkts einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor ν_i aus, so sieht man anhand des so gewonnenen Vektors ν aus dem Produkt, dass die Abbildung

$$\nu'(v) := \begin{cases} \lambda & \text{für } v = \lambda \cdot \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht als (endliche!) Linearkombination von Abbildungen auf den Komponenten dargestellt werden, also nicht in der direkten Summe der Dualräume enthalten sein kann.

¹⁰Im Falle d^* musste eine Form $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$, die nicht notwendigerweise einen kompakten Träger hat, zu einer Form auf je U und V fortgesetzt werden; damit diese Fortsetzung mit 0 möglich war, musste man $\rho_U \omega$ auf V und nicht auf U fortsetzen.