# Kurz-Skript zu „Funktionalanalysis I“

Thomas Schick*

Last compiled 26. Mai 2006; last edited 15.7. 2004or later

Hinweis: dieses Skript ist wurde nicht korrekturgelesen. Es gibt mit Sicherheit eine Menge Fehler. Einige davon konnten unter anderem Dank der Hinweise Andreas Sorges behoben werden. Für weitere Hinweise auf Fehler schreiben Sie bitte eine email an schick@uni-math.gwdg.de. Das Skript stellt nur eine Approximation an die Vorlesung dar: Nicht alle Sätze und Beweise werden notwendigerweise vorgeführt, andererseits mögen nicht alle behandelten Sätze und Beispiele hier notiert sein.

## Inhaltsverzeichnis



*email: thomas.schick@uni-math.gwdg.de

# 1 Grundlagen zur Topologie

**1.1 Bemerkung.** Wir werden uns der Einfachheit halber in dieser Vorlesung meist auf komplexe Vektorräume beschränken. Ein gut Teil der Theorie funktioniert auch für reelle Vektorräume, und insbesondere bei den Definitionen ist die Anpassung der Begriffe offensichtlich.

Bei der Spektraltheorie muss man in der Regel aufpassen, da nicht alle Resultate auch für reelle Vektorräume gelten. Ein Beispiel aus der linearen Algebra: jede komplexe Matrix hat (mindestens) einen komplexen Eigenwert, aber nicht jede reelle Matrix hat einen reellen Eigenwert.

**1.2 Bemerkung.** Wer sich nicht mehr erinnert, sollte die Begriffe Metrik, metrischer Raum, Cauchyfolge, Vollständigkeit in seinem Analysisskript oder in der einschlägigen Literatur nachschlagen.

Ebenso die Begriffe Topologie und Stetigkeit.

**1.3 Definition.** Liste von wichtigen Begriffen.

(1) Ein metrischer Raum ist eine Menge $X$ mit einer Funktion $d\colon X \times X \to [0, \infty)$, welche folgende Eigenschaften hat:

   (a) $d(x, y) = d(y, s)\ \forall x, y \in X$
   (b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
   (c) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)\ \forall x, y, z \in X$.

(2) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum $X$ konvergiert gegen $x \in X$ genau dann, wenn $d(x, x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

   Es gilt: jede Folge hat höchstens einen Grenzwert.

(3) Eine Folge $(x_n)$ in einem metrischen Raum $X$ heißt Cauchyfolge, falls $d(x_n, x_m) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$.

In jedem metrischen Raum gilt: jede konvergente Folge ist auch eine Cauchyfolge.

(4) Ein metrischer Raum $X$ heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Beispiel: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind beides metrische Räume mit $d(x, y) := |x - y|$. $\mathbb{R}$ ist vollständig, nicht aber $\mathbb{Q}$.

(5) Jede Teilmenge eines metrischen Raums wird selbst metrischer Raum, indem man die Metrik einschränkt. Jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums ist selbst wieder vollständig.

(6) Eine Funktion $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt stetig an $x$, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ so dass für alle $y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ gilt $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

(7) $f\colon X \to Y$ heißt isometrische Einbettung, falls $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Falls $f$ zusätzlich surjektiv, so heißt $f$ *Isometrie*.

(8) Eine Teilmenge eines metrischen Raums heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist. $U \subset X$ ist offen, wenn zu jedem $u \in U$ ein offener Ball $B_\epsilon(u) := \{x \in X \mid d(x, u) < \epsilon\}$ existiert, welcher noch ganz in $U$ liegt.

Der Abschluß einer Teilmenge $A \subset X$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, welche $A$ enthält —also der Schnitt aller abgeschlossenen Obermengen von $A$; beliebige Schnitte von abgeschlossenen Mengen sind wieder abgeschlossen.

$A$ heißt dicht in $X$, wenn der Abschluss von $A$ ganz $X$ ist.

(9) Ein Spezialfall eines metrischen Raums ist ein normierter Vektorraum $V$. Ist ein normierter Vektorraum vollständig, so heißt er Banachraum. Eine Norm ist eine Abbildung $|\cdot| : V \to \mathbb{R}$, so dass $|v + \lambda w| \le |v| + |\lambda| \cdot |w|$ $\forall v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Die Dreiecksungleichung kann man auch umdrehen: in jedem normierten Vektorraum $V$ gilt $||v| - |w|| \le |v - w|\ \forall v, w \in V$.

(10) Seien $V$ und $W$ normierte Vektorräume. $\mathcal{B}(V, W)$ bezeichnet den Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen von $V$ nach $W$. Für eine lineare Abbildung $A\colon V \to W$ definiert man die Operatornorm $\|A\| := \sup_{|v|=1} |Av|$. Es gilt $\|A\| < \infty$ genau dann, wenn $A \in \mathcal{B}(V, W)$, und dann gilt $|Av| \le \|A\|\,|v|$ für alle $v \in V$.

**1.4 Satz.** *Sei $X$ ein metrischer Raum. Dann gibt es einen metrischen Raum $\overline{X}$ und eine isometrische Einbettung $f\colon X \to \overline{X}$ so dass $f(X)$ eine dichte Teilmenge von $\overline{X}$ und $\overline{X}$ vollständig ist. Bis auf Isometrie ist $\overline{X}$ eindeutig. $\overline{X}$ heißt die Vervollständigung von $X$.*

*Beweis.* Eine mögliche Konstruktion habe ich im ersten Semester (in einer Zusatzvorlesung) bei der Konstruktion von $\mathbb{R}$ mit ausgehend von den rationalen Zahlen angedeutet: man definiert die Vervollständigung $\overline{X}$ als Menge von Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen aus $X$.

Eine alternative Konstruktion benutzt, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist. Sie geht folgendermaßen vonstatten:

(1) Für zwei Funktionen $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ definieren wir $d(f,g) := \sup_{x\in X} |f(x), g(x)|$. Beachte, dass $d(f,g) = \infty$ möglich ist. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, gibt es für jede Cauchyfolge $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ bezüglich dieses Abstands eine Grenzfunktion $f$.

(2) Zu $x \in X$ definiere nun die Funktion $d_x\colon X \to \mathbb{R}$ mit $d_x(y) = d(x,y)$. Es gilt
$$d(d_x, d_y) = d(x,y) \tag{1.5}$$
für alle $x, y \in X$ aus folgendem Grund: $d_x(x) = 0$ und $d_x(y) = d(x,y)$, also $d(d_x, d_y) \geq d(x,y)$, andererseits gilt $d_x(z) = d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, also $|d(x,y) - d(z,y)| \leq d(x,y)$. Wähle $x_0 \in X$. Setze $Y := \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid d(f, d_{x_0}) < \infty\}$. Dies wird mittels der Supremumsnorm ein vollständiger metrischer Raum. Wegen der Dreiecksungleichung und Gleichung (1.5) ist die Menge $Y$ unabhängig von der Wahl von $x_0$. Die Abbildung $i\colon X \to Y \mid x \mapsto d_x$ ist eine isometrische Einbettung.

(3) Definiere zu guter Letzt $\overline{X} := \overline{i(X)}$. Als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raums $Y$ ist sie vollständig.

□

**1.6 Satz.** *Die Vervollständigung eines normierten Vektorraums kann zu einem Banachraum gemacht werden. Dazu muss man nur die Norm fortsetzen:*

**1.7 Lemma.** *Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion, $\overline{X}$ die Vervollständigung von $X$. Dann gibt es eine eindeutige stetige Fortsetzung $\overline{f}\colon \overline{X} \to \mathbb{R}$.*

*Beweis.* Sei $x \in \overline{X}$. Da $X$ dicht in $\overline{X}$, können wir eine Folge $x_n \in X$ finden, so dass $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Wir müssen zeigen, dass $f(x_n)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ bildet, und dass der Grenzwert dieser Cauchyfolge nicht von der Wahl der Folge $x_n$ mit Grenzwert $x$ abhängt. Die zweite Aussage folgt aus der ersten: falls nämlich $y_n$ eine weitere Folge mit $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ ist, so kann man auch die Reißverschlussfolge $(z_n) := (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$ konstruieren, die ebenfalls gegen $x$ konvergiert. Ist auch $f(z_n)$ eine Cauchyfolge, so sind die Grenzwerte der Teilfolgen $f(x_n)$ und $f(y_n)$ identisch.

Sei $\epsilon > 0$. Da $f$ gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$ wennimmer $d(x_n, x_m) < \delta$. Da $(x_n)$ eine Cauchyfolge ist, gibt es $N$, so dass für alle $n, m > N$ gilt $d(x_n, x_m) < \delta$. □

*Um die Norm fortzusetzen, muss man nur noch beachten, dass sie wegen der Dreiecksungleichung gleichmäßig stetig ist: $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$. Wegen Stetigkeit ist die Metrik auf $\overline{X}$ von der eben fortgesetzten Norm erzeugt: falls $x, y \in \overline{X}$ Grenzwerte von $(x_n)$ und $(y_n)$ in $X$ sind, so*

$$d(x,y) = \mathrm{im}_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = |x - y|\,.$$

**1.8 Definition.** Ein *topologischer Vektorraum* ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum $V$ mit einer Topologie, so dass die Abbildungen

$$V \times V \to V; (v, w) \mapsto v + w; \quad \mathbb{C} \times V \to V; (\lambda, v) \mapsto \lambda v$$

alle stetig sind.

**1.9 Beispiel.** Jeder normierte Vektorraum ist im Sinn von Definition 1.8 ein topologischer Vektorraum.

**1.10 Definition.** Der *(topologische)* Dualraum eines topologischen Vektorraums $V$ ist der Vektorraum $V' := \{\phi\colon V \to \mathbb{C} \mid \phi \text{ linear und stetig}\}$.

# 2 Hilberträume

**2.1 Definition.** Ein Hilbertraum $H$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum $H$ mit einem positiven konjugiert symmetrischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ welches im ersten Eintrag konjugiert linear und im zweiten Eintrag linear ist, und so dass die induzierte Norm vollständig ist.

Also

(1) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (komplexe Konjugation)

(2) $\langle v, v \rangle \geq 0 \ \forall v \in H$, $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$.

(3) $\langle lambdav_1 + v_2, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle \ \forall v_1, v_2, w \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

(4) Die induzierte Norm $|v| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ ist vollständig.

Wenn nur die Vollständigkeit nicht erfüllt ist, spricht man von einem Skalarproduktraum oder Prähilbertraum.

**2.2 Beispiel.** (1) $\mathbb{C}^n$ mit Skalarprodukt $\langle (z_1, \cdots, z_n), (w_1, \cdots, w_n) \rangle = \sum \overline{z_i} w_i$ ist ein Hilbertraum. Die zugehörige Norm ist die euklidische Norm.

(2) $C_c(\mathbb{R})$, die Menge der komplexwertigen Funktionen mit kompaktem Träger, wird Prähilbertraum mit dem $L^2$-Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) \, dx.$$

Dieselbe Formel funktioniert auch für Funktionen auf anderen Mengen (z.B. $[a, b]$, $\mathbb{R}^n$), solange sicher gestellt ist, dass die Integrale existieren.

Auf $C_c(\mathbb{R})$ hat man die Normen $|f|_p := \left( \int_{\mathbb{R}} |f|^p \right)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$. Für $p = 2$ erhält man genau die zum $L^2$-Skalarprodukt gehörende Norm.

Sei $(\Omega, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $L^2(\Omega, d\mu)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_\Omega \overline{f(x)} g(x) \, d\mu(x)$.

**2.3 Definition.** Zwei Vektoren $u, v \in H$, $H$ ein Hilbertraum, heißen orthogonal (oder senkrecht) wenn $\langle v, w \rangle = 0$. Man schreibt $v \perp u$.

Sei $U \subset H$ ein Unterraum eines Hilbertraums. Das *orthogonale Komplement* von $u$ ist $U^\perp := \{v \in H \mid v \perp u \quad \forall u \in U\}$.

**2.4 Lemma.** *Es gilt der Satz von Pythagoras: falls $v \perp w$, so gilt $|v+w|^2 = |v|^2 + |w|^2$.*

**2.5 Satz.** *Sei $(e_1, \dots, e_n)$ ein Orthonormalsystem in $H$ (d.h. $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$). Sei $v \in H$. Dann können wir versuchen, $v$ bezüglich dieses Orthonormalsystems zu zerlegen:*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, v\rangle e_i + \Big(v - \sum \langle e_i, v\rangle e_i\Big).$$

*Es gilt dann*

$$|v|^2 = \sum |\langle e_i, v\rangle|^2 + \Big|v - \sum \langle e_i, v\rangle e_i\Big|^2.$$

*Insbesondere gilt die Bessel-Ungleichung*

$$|v|^2 \geq \sum |\langle e_i, v\rangle|^2.$$

*Beweis.* Die erste Gleichung ist trivial, außerdem gilt $(\sum \langle e_i, v\rangle e_i) \perp (v - \sum \langle e_i, v\rangle e_i)$. Indem man $(n+1)$-mal den Satz von Pythagoras anwendet, folgt die Normgleichung und damit auch sofort die Ungleichung. □

**2.6 Satz.** *In einem Skalarproduktraum $H$ gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung:*

$$|\langle v, w\rangle| \leq |v| \cdot |w|,$$

*wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn die beiden Vektoren linear abhängig sind.*

*Beweis.* Die Aussage gilt trivialerweise, wenn $w = 0$. Sonst sagt die Bessel-Ungleichung

$$|v|^2 \geq \left|\langle v, \frac{w}{|w|}\rangle\right|^2,$$

und die Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt durch Umstellen.

Alternativer Beweis: wenn o.B.d.A. $v \neq 0 \neq w$ zeigen wir $\frac{|\langle v,w\rangle|}{|v||w|} \leq 1$.Wegen der Linearität können wir annehmen, dass $|v| = |w| = 1$. Indem $v$ durch $zv$ für geeignetes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ersetzt wird, können wir annehmen, dass $\langle v, w\rangle \geq 0$.

Betrachte für $\lambda \in \mathbb{R}$ das Polynom $0 \leq \langle v+\lambda w, v+\lambda w\rangle = \langle v, v\rangle + 2\lambda(\langle v, w\rangle + \lambda^2\langle w, w\rangle = 1+2\lambda\langle v, w\rangle+\lambda^2$. Die Ungleichung ist nur dann richtig für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn $\langle v, w\rangle \leq 1$ (setze $\lambda = -\langle v, w\rangle$ ein), und wenn $\langle v, w\rangle = 1$, wird für $\lambda = -1$ die Null angenommen (dann also $v = w$). □

**2.7 Korollar.** *Das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H\times H \to \mathbb{C}$ ist für jeden Prähilbertraum $H$ stetig.*

*Beweis.* Beachte, dass auch $H \times H$ ein metrischer Raum ist —mit Metrik

$$d((v_1, w_1), (v_2, w_2)) := \sqrt{|v_1 - v_2|^2 + |w_1 - w_2|^2},$$

und

$$|\langle v_1, w_1\rangle - \langle v_2, w_2\rangle| \leq |\langle v_1 - v - 2, w_1\rangle| + |\langle v_2, w_1 - w_2\rangle| \leq |v_1 - v_2|\,|w_1| + |v_2|\,|w_1 - w_2|.$$

Es folgt, dass die Abbildung $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$ stetig und auf beliebigen Mengen der Form $B_R(0) \times B_R(0) \subset H \times H$ gleichmäßig stetig ist. □

**2.8 Satz.** *Auf der Vervollständigung eines Skalarproduktraums kann in eindeutiger Weise das Skalarprodukt stetig fortgesetzt werden, auf diese Weise wird die Vervollständigung ein Hilbertraum.*

*Beweis.* Hierzu verwenden wir wieder das Fortsetzungslemma 1.7. Wegen des Beweises von Korollar 2.7 läßt sich das Skalarprodukt auf den Abschluss der Mengen $B_R(0) \times B_R(0)$ (eindeutig) fortsetzt. Nimmt man die Vereinigung über alle $R \in \mathbb{R}$, so erhält man die Fortsetzung auf die gesamte Vervollständigung.

Dazu muss man noch beachten, dass jede konvergente Folge beschränkt ist, jeder Punkt in der Vervollständigung (als Grenzwert einer konvergenten Folge) für geeignetes $R > 0$ also schon im Abschluss von $B_R(0)$ liegt.

Stetigkeit zeigt, dass die erhaltene fortgesetzte Funktion wirklich ein Skalarprodukt ist, mit welchem die Fortsetzung ein Hilbertraum ist. $\square$

**2.9 Lemma.** *Sei $H$ ein Hilbertraum und $U$ ein abgeschlossener Unterraum von $H$. Dann gilt $H = U \oplus U^\perp$.*

*Beweis.* Man rechnet leicht nach, dass $U^\perp$ immer ein abgeschlossener Unterraum von $H$ ist, und $U \cap U^\perp = \{0\}$. Wähle nun $x \in H$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $x_0 \in U$, welches kleinstmöglichen Abstand zu $x$ hat.

Sei dazu $x_n$ eine Folge von Elementen in $U$ mit $|x_n - x| \xrightarrow{n\to\infty} d := \inf_{u\in U} |u - x|$. Wir zeigen, dass $x_n$ eine Cauchyfolge ist, deren Limes ist dann $x_0$. Nun gilt wegen des Parallelogrammgesetzes $2|u|^2 + 2|v|^2 = |u+v|^2 + |u-v|^2$

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m|^2 &= |(x_n - x) - (x_m - x)|^2 \\
&= 2|x_n - x|^2 + 2|x_m - x|^2 - |-2x + x_n + x_m|^2 \\
&= 2|x_n - x|^2 + 2|x_m - x|^2 - 4|x - (x_n + x_m)/2|^2 \\
&\le 2|x_n - x|^2 + 2|x_m - x|^2 - 4d^2 \xrightarrow{n,m\to\infty} 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0.
\end{aligned}$$

Da die Folge $(x_n)$ beliebig (mit der Eigenschaft $|x - x_n| \xrightarrow{d}$) gewählt werden konnte, zeigt man mit einem Reißverschlussfolgenargument, dass der Grenzwert $x_0$ eindeutig ist.

Schreibe nun $y := x - x_0$. Wir behaupten, dass $y \in U^\perp$. Denn für $u \in U$ (und $t \in \mathbb{R}$) gilt $d^2 \le |x - (x_0 + tu)|^2 = |y - tu|^2 = d^2 - 2t\Re(\langle y, u\rangle) + t^2|u|^2$. Das ist nur dann für alle $t \in \mathbb{R}$ möglich, wenn $\Re(\langle y, u\rangle) = 0$. Benutzt man $\sqrt{-1}t$ anstelle von $t$, sieht man, dass auch $\Im(\langle y, u\rangle) = 0$, also $y \perp u$. Da $u \in U$ beliebig, folgt $y \in U^\perp$. $\square$

**2.10 Bemerkung.** Die im Beweis des Lemmas behandelte Approximationseigenschaft ist natürlich von großer Bedeutung in der angewandten Mathematik, wo es oft der Fall sein wird, dass Daten aus einem sehr großen Möglichkeitsraum durch Daten aus einem endlich-dimensionalen Raum approximiert werden sollen.

Der folgende Satz wird Satz von Riesz genannt.

**2.11 Satz.** *Sei $H$ ein Hilbertraum. Dann liefert $v \mapsto \phi_v$ mit $\phi_v(w) := \langle v, w\rangle$ eine Bijektion $V \to V'$. Diese Abbildung ist komplex-konjugiert linear —also $\phi_{\lambda v} = \overline{\lambda}\phi_v$.*

*Beweis.* Jedes $\phi_v$ ist linear, und wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung $|\langle v,w\rangle| \le |v|\cdot|w|$ auch stetig mit Operatornorm $\le |v|$, da $\phi_v(v) = \langle v,v\rangle = |v|^2$, gilt sogar $\|\phi_v\| = |v|$. $v \mapsto \phi_v$ ist wegen der Sesquilinearität des Skalarprodukts komplex-konjugiert linear. Da die Abbildung die Norm erhält, ist sie injektiv.

Für die Surjektivität sei $0 \neq phi \in H^*$. Dann ist $\ker(\phi) \neq H$. Wähle $0 \neq x \in \ker(\phi)^\perp$, dies geht wegen der Zerlegung $H = \ker(\phi) \oplus \ker(\phi)^\perp$. Es gilt $\ker(\phi)^\perp \cong H/\ker(\phi) \cong \operatorname{im}(\phi) = \mathbb{C}$. Setze $x_\phi := \frac{\overline{\phi(x)}}{|x|^2}x$. Dann gilt:

(1) Falls $u \in \ker(\phi)$, so ist $T(u) = 0 = \langle x_\phi, u\rangle$.

(2) Falls $\lambda \in \mathbb{C}$ dann $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x) = \langle \overline{\phi(x)}\,|x|^{-2}\,x, \lambda x\rangle = \langle x_\phi, \alpha x\rangle$.

(3) Wegen Linearität stimmt $\phi$ auf dem von $\ker(\phi)$ und $x$, also da $\ker(\phi)^\perp = \mathbb{C}x$ auf ganz $H$ mit $\phi_{x_\phi}$ überein, somit $\phi = \phi_{x_\phi}$.

□

## 2.1 Orthogonalbasen

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass für endlich dimensionale Hilberträume Orthonormalbasen existieren und sehr nützlich sind. In beliebigen Hilberträume liefert Satz 2.5 einen ersten Ansatz für eine entsprechende Verallgemeinerung. Wir werden allerdings den Begriff der Basis abwandeln: da wir die Topologie verwenden können, macht es Sinn, nicht nur endliche, sondern auch unendliche (dann aber konvergente) Linearkombinationen zu betrachten.

**2.12 Definition.** Eine *Orthonormalbasis* eines Hilbertraums $H$ ist eine Menge $\{e_i\}_{i\in I}$ von Vektoren in $H$, indiziert durch eine Menge $i$, so dass

(1) $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ für alle $i,j \in I$ (es handelt sich also um ein Orthonormalsystem)

(2) Man kann $\{e_i\}$ nicht vergrößern, ohne die Bedingung „Orthonormalsystem" zu verletzen.

**2.13 Lemma.** *Die Vektoren in einem Orthonormalsystem sind immer linear unabhängig.*

**2.14 Satz.** *Ist $\{e_i\}_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis eines Hilbertraums $H$, dann gilt für jedes $y \in H$*

$$y = \sum_{i\in I}\langle e_i, y\rangle e_i, \qquad |y|^2 = \sum_{i\in I}|\langle e_i, y\rangle|^2 .$$

*Dies bedeutet insbesondere, dass die Reihe auf der rechten Seite konvergiert, falls unendlich viele der $\langle e_i, y\rangle \neq 0$. Außerdem können höchstens abzählbar viele der Terme von Null verschieden sein.*

*Seien umgekehrt $\lambda_i \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{i\in I}|\lambda_i|^2 < \infty$. Dann konvergiert $\sum_{i\in I}\lambda_i e_i$ in $H$.*

*Es gilt $\sum_{\lambda_i} e_i = \sum_{i\in I}\mu_i e_i$ genau dann wenn $\lambda_i = \mu_i$.*

*Beweis.* Die Besselsche Ungleichung zeigt, dass $\sum_{i\in I'} |\langle\rangle|e_i, y^2 \leq |y|^2$ für jede endliche Teilmenge $I' \subset I$. Insbesondere sind nur abzählbar viele der Terme von Null verschieden (diese irgendwie anordnend, können wir von einer gewöhnlichen Reihe indiziert durch $\mathbb{N}$ ausgehen).

Außerdem konvergiert die monoton wachsende beschränkte Reihe $\sum_{i\in I} |\langle e_i, y\rangle|^2$. Betrachte nur $\sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, y\rangle e_i$, oder allgemeiner $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$.

Mittels Dreiecksungleichung (und Pythagoras) zeigt man

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right|^2 \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,$$

also sind die Partialsummen eine Cauchyfolge, und die Reihe hat einen Grenzwert $y' \in H$.

Es ist noch zu zeigen, dass $y' = y$. Beachte, dass wir bisher noch nicht benutzt haben, dass $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis ist, das wird jetzt gebraucht.

Beachte zunächst, dass $\langle e_i, y - y'\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle e_i, y - \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k\rangle e_k\rangle = \langle e_i, y\rangle - \langle e_i, y\rangle = 0$.

Wegen der Vollständigkeit des Orthonormalsystems $\{e_i\}$ gilt $y - y' = 0$.

Für die Normen beachte $|y'| = \lim_{n\to\infty} |\sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum_{i\in I} |\lambda_i|^2$, insbesondere erhält man die richtige Gleichung wenn $\lambda_i = \langle e_i, y\rangle$. $\square$

Die Darstellung eines Hilbertraumelements als (unendliche) Linearkombination bezüglich einer Orthonormalbasis wird *Fourierdarstellung*, die Koeffizienten *Fourierkoeffizienten* genannt.

**2.15 Satz.** *Jeder Hilbertraum hat eine Orthogonalbasis.*

*Beweis.* Wir benutzen (natürlich, wie fast immer wenn Mengen beliebiger Kardinalität im Spiel sind) das Lemma von Zorn. Betrachte also die Menge $V$ aller Orthonormalsysteme in $H$. Auf dieser Menge können wir eine partielle Ordnung durch Inklusion definieren. Falls $H \neq \{0\}$, gibt es auch Orthonormalsysteme, also ist $V \neq \emptyset$.

Jede linear angeordnete Untermenge von $V$ hat eine obere Schranke, nämlich die Vereinigung aller in ihr enthaltener Orthonormalsysteme.

Nach Lemma von Zorn hat $V$ mindestens ein maximales Element, das ist per Definition eine Orthonormalbasis. Wir haben die Definition so gewählt, dass Existenz leicht zu zeigen ist, wichtig ist natürlich dann vor allem Satz 2.14. $\square$

**2.16 Satz.** *Wir klassifizieren jetzt die Hilberträume bis auf Isomorphie (von Hilberträumen):*

*Seien $H_1$ und $H_2$ zwei Hilberträume mit Orthonormalbasen $\{e_i \in H_1\}_{i\in I_1}$ und $\{f_j \in H_2\}_{j\in I_2}$.*

*Falls die Mengen $I$ und $J$ die gleiche Mächtigkeit haben, dann gibt es einen isometrischen Isomorphismus $\Phi\colon H_1 \to H_2$ (d.h. $\Phi$ ist linear, bijektiv und verträglich mit den Skalarprodukten).*

*Beweis.* Sei $\phi\colon I_1 \to I_2$ eine Bijektion. Definiere $\Phi\colon H_1 \to H_2$ durch $\Phi(\sum_{i\in I_1} \lambda_i e_i) := \sum_{i\in I_1} e_i f_{\phi(i)} = \sum_{j\in I_2} e_{\phi^{-1}(j)} f_j$.

Diese Abbildung ist wegen der Parseval Gleichung isometrisch. Die Umkehrung wird entsprechend definiert, also ist die Abbildung auch bijektiv.

Um die Klassifikation zu Ende zu führen, muss man noch zeigen, dass zwei Hilberträume *nicht* isometrisch sind, wenn sie Orthonormalbasen verschiedener Mächtigkeit haben, oder äquivalent, dass jede ONB auf einem festen Hilbertraum $H$ dieselbe Kardinalität hat. Man beachte, dass die Hilberträume mit endlicher ONB isomorph zu $\mathbb{C}^n$ sind, und damit für verschiedene $n$ nicht isomorph.

Für den allgemeinen Fall: falls $\{e_i\}_{i\in I}$ und $\{f_j\}_{j\in J}$ zwei unendliche ONBs eines Hilbertraums $H$ sind, so gibt es für jedes $i \in I$ eine abzählbare Teilmenge $J_i \subset J$ so dass $e_i = \sum_{j\in J_i} \langle f_j, e_i\rangle f_j$. Umgekehrt gibt es für jedes $j \in J$ mindestens ein $i$ so dass $\langle f_j, e_i\rangle \neq 0$.

Also gilt $\bigcup_{i\in I} J_i = J$. Da jedes der $J_i$ höchstens abzählbar ist, gilt $|J| \le |I|$: eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar, ebenso verändert sich die Kardinalität nicht, wenn man „mehr" abzählbare Mengen vereinigt. Aus Symmetriegründen gilt auch $|I| \le |J|$, also sind beide Mengen gleichmächtig.

□

**2.17 Definition.** Ein Hilbertraum mit einer endlichen oder abzählbaren ONB heißt *separabel*. Fast alle Hilbertäume, die einem begegnen, sind separabel.

**2.18 Bemerkung.** Ein metrischer Raum $X$ heißt separabel, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt. Für Hilberträume stimmen die beiden Separabilitätsbegriffe überein.

**2.19 Bemerkung.** Mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens kann man abzählbare Orthonormalsysteme *konstruieren*. Insbesondere hat man für separable Hilberträume einen konstruktiven Beweis für die Existenz einer Orthonormalbasis.

**2.20 Beispiel.** (1) Definiere $l^2(\mathbb{Z}) := \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \in \mathbb{C} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty\}$. Dies wird ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle (a_n), (b_n)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{a_n} b_n$. $l^2(\mathbb{Z})$ enthält $l^2(\mathbb{N})$ in offensichtlicher Weise als abgeschlossenen Unterraum.

Man hat in offensichtlicher Weise die Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, wobei $e_n$ die Folge ist, die nur an der $n$-ten Stelle den Eintrag 1, sonst überall Null, hat.

Dies ist der Prototyp eines separablen Hilbertraums.

Natürlich sind auch $l^2(\mathbb{Z})$ und $l^2(\mathbb{N})$ isomorph.

Wir betrachten trotzdem die verschiedenen Räume, weil z.B. lineare Abbildungen in den verschiedenen Bildern verschieden gut zu beschreiben sind.

Sei $T\colon l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ durch „Verschieben nach rechts" gegeben, also $T(a_n) = (b_n)$ mit $b_n = a_{n-1}$. Dies ist offenbar eine Isometrie. Durch Einschränken induziert $T$ auch eine Abbildung $T\colon l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$. Diese hat aber ganz andere Eigenschaften, insbesondere ist sie nicht surjektiv.

## 2.2 Fourierreihen

Hier soll nun ganz kurz ein weiteres Beispiel betrachtet werden:

Wir wollen jetzt $2\pi$-periodische Funktionen auf $\mathbb{R}$ untersuchen.Es sei z.B. $C_p(\mathbb{R})$ die Menge der $2\pi$-periodischen stetigen Funktionen. Es reicht natürlich aus, eine solche Funktion auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ zu kennen. Wir definieren das Skalarprodukt

$$\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt \qquad f, g \in C_p(\mathbb{R}).$$

Die Vervollständigung bezüglich dieses Skalarprodukts ist dann (per Definition) $L^2_p(\mathbb{R})$, isomorph zu $L^2([0, 2\pi])$.

Besonders wichtige periodische Funktionen sind $\exp(int) \in C^\infty_p(\mathbb{R})$ für $n \in \mathbb{Z}$, mit Real- und Imaginärteil gegeben durch $\cos(nt)$ bzw. $\sin(nt)$.

Man rechnet sofort nach, dass

$$\langle \exp(int), \exp(imt)\rangle = \int_0^{2\pi} \exp(-int+imt)\, dt = \begin{cases} \frac{1}{i(m-n)}(\exp(2\pi i(m-n)) - \exp(0)) = 0; & m \neq n \\ 2\pi; & m = n \end{cases}$$

so dass wir also nach Normieren ein Orthonormalsystem erhalten, mit $e_n(t) := \exp(int)/\sqrt{2\pi}$. Behauptung, die gleich diskutiert werden soll: es handelt sich sogar um eine Orthonormalbasis.

Gegeben eine periodische Funktion $f$, liegt es nun nahe, ihre sogenannte Fourierzerlegung

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle e_n, f\rangle \exp(int).$$

Die Idee hierbei (zurückgehend auf Fourier) ist, die „schwierige“ periodische Funktion $f$ durch die gut verstandenen Sinus- und Kosinusfunktionen auszudrücken.

Frage bleibt: für welche $f$ und in welchem Sinn konvergiert die Fourierreihe?

Diese Frage ist im allgemeinen (wenn $f$ z.B. eine beliebige periodische Funktion ist) für den Begriff der punktweisen Konvergenz nur sehr schwer zu beantworten.

Wir haben allerdings folgende Antwort: Da die $e_n$ eine Orthonormalbasis von $L^2_p(\mathbb{R})$ bilden, konvergiert die Fourierreihe für jede Funktion aus $L^2_p(\mathbb{R})$, insbesondere für jede stetige Funktion, im Sinne der $L^2$-Konvergenz. (Für eine ganze Reihe von Fragen ist dies adäquat).

Noch zu beweisen bleibt:

**2.21 Satz.** *$\{e_n\}$ bildet eine Orthonormalbasis von $L^2_p(\mathbb{R})$.*

*Beweis.* Da die $e_n$ ein Orthonormalsystem bilden, muss man nur noch zeigen, dass dieses System nicht vergrößert werden kann. Sei also $u \in L^2_p(\mathbb{R})$ orthogonal zu allen $e_n$. Wir müssen zeigen, dass $u = 0$.

Der Beweis soll aus Zeitgründen hier nicht geführt werden. Üblicherweise wird man so vorgehen, dass man zunächst von einer großen Klasse von Funktionen zeigt, dass sie im von den $\{e_n\}$ erzeugten Unterhilbertraum liegen (also im Abschluss des Vektorraum-Erzeugnisses).

„Genügend“ viele heißt dann, dass die Klasse von Funktionen bereits dicht in $L^2_p(\mathbb{R})$ liegt.

Als Klassen von Funktionen bieten sich z.B. an: $C^\infty_p(\mathbb{R})$ oder $C_p(\mathbb{R})$ oder der von den Treppenfunktionen erzeugte Vektorraum von Funktionen. □

# 3 Banachräume

**3.1 Beispiel.** (1) Sei $X$ metrischer Raum. $C_b(X) := \{f\colon X \xrightarrow{\text{stetig}} \mathbb{C} \mid |f|_\infty := \sup\{|f(x)|\}$ ist ein Banachraum.

(2) Das gleiche gilt für die Teilmenge $C_0(X) := \{f\colon X \xrightarrow{\text{stetig}} \mathbb{C} \mid |f| \xrightarrow{x\to\infty} 0\}$. Hierbei bedeutet $|f| \xrightarrow{x\to\infty} 0$, dass für jedes $\epsilon > 0$ eine Kompakte Teilmenge $K \subset X$ existiert, so dass $|f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in X \setminus K$.

   $C_0(X)$ ist der Abschluss von $C_c(X) := \{f \in C_b(X) \mid \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt}\}$.

(3) $l^\infty := C_b(\mathbb{N}) = \{(a_0, a_1, \dots) \mid \sup_n |a_n| < \infty\}$, $c_0 := C_0(\mathbb{N}) = \{(a_1, a_2, \dots) \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$.

## 3.1 Crashkurs durch $L^p$-Räume

Sei $\Omega$ eine Menge, $R(\Omega)$ ein Vektorraum von (komplexwertigen) Funktionen auf $\Omega$, auf welchem ein Integral $\int_\Omega\colon R(\Omega) \to \mathbb{C}$ definiert sei.

Folgende Eigenschaften sollen gelten:

(1) Das Integral ist linear.

(2) Das Integral ist positiv, also falls $f \in R(\Omega)$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$, dann auch $\int_\Omega f \geq 0$, und nur falls oben $\int f = 0$, so $f = 0$.

(3) $R(\Omega)$ ist abgeschlossen unter komplexer Konjugation und unter punktweiser Multiplikation.

Dann definiert $\langle f, g\rangle := \int_\Omega \overline{f(x)} g(x)$ ein „$L^2$"'-Skalarprodukt auf $R(\Omega)$.

Wir definieren den Hilbertraum $L^2(\Omega)$ (bezüglich des gegebenen Integralbegriffs) als Vervollständigung von $R(\Omega)$ bezüglich dieses Skalarprodukts.

Zusätzlich kann man die Positivität abschwächen: falls es Funktionen gibt, so dass $\int_\Omega |f|^2 = 0$, so muss man statt $R(\Omega)$ den Quotientenraum $R(\Omega)/N$ benutzen, wobei $N := \{f \in R(\Omega) \mid \int_\Omega |f|^2 = 0\}$. (Aufgabe: beweise mittels Positivität, dass $N$ ein Unterraum ist).

Beispiel: stetige Funktionen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}$ und ein elementares Integral wie das Riemann-Integral, dasselbe auf $\mathbb{R}^n$ oder geeigneten Teilräumen $A$.

Man erhält so recht einfach den Hilbertraum $L^2(A)$, nicht so schön ist, dass man es mit dieser Konstruktion nicht mit Funktionen, sondern mit Elementen der Vervollständigung zu tun hat.

Weitere Beispiele liefert die Maßtheorie: hier kann man für jeden Maßraum $(\Omega, \mu)$ auf recht einfache Weise einen Raum $R(\Omega)$ von elementar integrierbaren Funktionen zuordnen (z.B. Treppenfunktionen); wieder kann man abstrakt $L^2(\Omega, \mu)$ als Vervollständigung definieren.

(1) $R(\Omega)$ erfülle zusätzlich, dass $|f|^s \in R(X)$ falls $f \in R(X)$ und $1 \leq s < \infty$.

Dann kann man für $1 \leq p < \infty$ die $L^p$-Norm auf $R(X)$ als

$$|f|_p := \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p}; \qquad f \in R(\Omega)$$

definieren. Man zeigt, dass es sich um eine Norm handelt, durch Vervollständigen erhält man dann den Banachraum $L^p(\Omega)$.

Wir wollen hier die wichtigsten Eigenschaften der Räume $L^p(\Omega)$ zusammenfassen.

**3.2 Beispiel.** Denken sollte man insbesondere an $L^p(\mathbb{R})$, oder $L^p([a,b])$, oder $L^p(\mathbb{R}^n)$ oder $l^p(\mathbb{N})$, alle als Vervollständigung der Menge der stetigen Funktionen auf mit kompaktem Träger (auf $\mathbb{N}$ auch als abbrechende Folgen bekannt).

(1) Es gilt $|fg|_1 \leq |f|_p \, |g|_q$ für alle $f, g \in R(\Omega)$. Insbesondere erhält man eine durch Fortsetzung eine stetige bilineare Abbildung $L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \to L^1(\Omega)$.

(2) Es gilt tatsächlich $|f+g|_p \leq |f|_p + |g|_p$.

(3) $L^p(\Omega)$ ist vollständig.

**3.3 Bemerkung.** Die Sätze von Lebesgue über dominierte Konvergenz und von Fubini über Integration auf Produkträumen ergeben sich nicht so einfach für unsere nur durch Vervollständigung gewonnenen $L^1$-Räume. Für deren Beweis braucht man direkte Information über die Konstruktion des Integrals, statt nur einige wenige abstrakte Eigenschaften: die Maßtheorie ist eben doch nicht sinnlos.

Mit der Maßtheorie erhält man außer dem echte Räume von Funktionen, statt der abstrakten Vervollständigung. Nachteil: die Vollständigkeit der konstruierten Räume muss mühsam bewiesen werden (Satz von Riesz).

**3.4 Beispiel.** Spezielles Beispiel ist $l^p(\mathbb{N})$.

Hier gibt es aber eine besonders schöne konkrete Beschreibung: $l^p(\mathbb{N}) = \{(a_1, a_2, \dots) \mid a_i \in \mathbb{C}, (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p)^{1/p} < \infty\}$. Man muss natürlich dann beweisen, dass mit dieser Beschreibung genau eine Vervollständigung des Raums der abbrechenden Folgen ist.

## 3.2 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften von Banachräumen

**3.5 Definition.** Seien $X$ und $Y$ normierte Vektorräume. Setze $\mathcal{B}(X,Y) := \{T \colon X \to Y \mid T \text{ linear und stetig}\}$. Definiere für $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ die *Operatornorm*

$$\|T\| := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|Tx|}{|x|}.$$

Dies macht $\mathcal{B}(X,Y)$ zu einem normierten Vektorraum. Falls $Y$ ein Banachraum ist, dann auch $\mathcal{B}(X,Y)$.

Der Dualraum $X'$ ist ein spezielles Beispiel: $X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$. Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, ist $X'$ immer vollständig.

Falls $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$, so gilt $S \circ T \in \mathcal{B}(X,Z)$ und $\|S \circ T\| \leq \|(\| S) \cdot \|(\| T)$.

Falls insbesondere$Y = X$, so wird $\mathcal{B}(X,X) =: \mathcal{B}(X)$ sogar zu einer $\mathbb{C}$-Algebra, wobei das Produkt durch die Verknüpfung gegeben wird.

**3.6 Definition.** Eine lineare Abbildung $T\colon X \to Y$ zwischen zwei normierten Vektorräume heißt *Isomorphismus*, wenn Sie bijektiv ist und sowohl $T$ als auch $T^{-1}$ stetig sind. *Isometrische Isomorphismen* erhalten zusätzlich die Norm.

Zwei Normen $\|x\|_1$ und $\|x\|_2$ auf demselben Vektorraum $X$ heißen äquivalent, wenn $\mathrm{id}\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot_2\|)$ ein Isomorphismus ist. Dies ist äquivalent dazu, dass es $0 < C, C'$ gibt, so dass $< |x|_1 \le |x|_2 \le C' |x|_1$ für alle $x \in X$.

**3.7 Satz.** *Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.*

**3.8 Definition.** Sei $X$ normierter Vektorraum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann wird der Quotientenraum $X/U$ zu einem normierten Raum, indem man

$$|x + U| := \inf\{|x + u| \mid u \in U\}$$

definiert.

Falls $X$ ein Banachraum war, dann gilt dies auch für $X/U$.

## 3.3 Der Satz von Hahn-Banach

Wir haben festgestellt, dass der Dualraum eines Hilbertraums $H$ konjugiert linear isometrisch zu $H$ selbst ist. Für allgemeinere Räume könnte der Dualraum dagegen a priori nur sehr wenige Elemente (gar nur das Nullelement) enthalten. Dies geschieht nicht, und das wird hier bewiesen.

Leider kann man solche Funktionale in dieser Allgemeinheit nicht konstruieren. Der reine Existenzbeweis benutzt statt dessen das Lemma von Zorn.

**3.9 Satz.** *Sei $X$ ein* reeller *Vektorraum und $p\colon X \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, d.h. $p(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y)$.*

*Sei $Y \subset X$ ein Unterraum und $\phi\colon Y \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit $\phi(y) \le p(y)$ für alle $y \in Y$.*

*Dann gibt es eine lineare Abbildung $\Lambda\colon X \to \mathbb{R}$ welche $\lambda$ fortsetzt, und so dass ebenfalls $\Lambda \le p$.*

*Beweis.* Idee: wir setzen $\lambda$ auf immer größere Unterräume fort, und zeigen mit Lemma von Zorn, dass man damit den ganzen Raum $X$ erreichen kann.

Sei also $z \in X \setminus Y$ und $Y'$ der von $Y$ und $z$ erzeugte Unterraum. Wir berechnen zunächst für $u, v \in Y$, $a, b > 0$

$$\begin{aligned} a\phi(u) + b\phi(v) =& \phi(au + bv) = (a+b)\phi(\frac{a}{a+b}u + \frac{b}{a+b}v) \\ \le& (a+b)p(\frac{a}{a+b}(u - bz) + \frac{b}{a+b}(v + az)) \\ \le& ap(u - bz) + bp(v + az). \end{aligned}$$

Umgestellt heißt dies

$$\frac{1}{b}\left(-p(u - bz) + \phi(u)\right) \le \frac{1}{a}\left(p(v + az) - \phi(v)\right)$$

Wähle nun $r \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $a, b > 0$, $u, v \in Y$ gilt

$$\frac{1}{b}\left(-p(u - bz) + \phi(u)\right) \le r \le \frac{1}{a}\left(p(v + az) - \phi(v)\right), \tag{3.10}$$

z.B. als Supremum der linken Seite. Setze $\phi'(z) := r$ und setzte $\phi$ so linear zu $\phi'$ auf $Y'$ fort. Ungleichung (3.10) impliziert sofort, dass $\lambda'(x) \leq p(x)$ für alle $x \in Y'$.

Wir definieren nur auf der Menge aller $(\lambda, Y)$, $Y$ Unterraum von $X$ und $\lambda\colon Y \to \mathbb{R}$ linear mit $\lambda \leq p$ die partielle Ordnung $(\lambda, Y) \leq (\lambda', Y')$ falls $Y \subset Y'$ und $\lambda'|_Y = \lambda$. Jede linear geordnete Teilmenge $(\lambda_i, Y_i)$ hat eine obere Schranke, mit $Y := \bigcup_{i\in I} Y_i$ und $\lambda(x) := \lambda_i(x)$ für $x \in Y$, wobei $i$ so gewählt ist dass $x \in Y_i$.

Nach Lemma von Zorn gibt es mindestens ein maximales Element $(\Lambda, Y)$. Hierfür muss $Y = X$ sein, weil man sonst $\Lambda$ noch vergrößern könnte, im Widerspruch zur Maximalität. □

**3.11 Satz.** *Sei nun $X$ ein komplexer Vektorraum mit Unterraum $Y$, $\phi\colon Y \to \mathbb{C}$ linear und $p\colon X \to \mathbb{R}$ erfülle $p(ax + by) \leq |a|\,p(x) + |b|\,p(y)$ für alle $x, y \in X$, $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| + |b| = 1$. Es gelte $|\lambda| \leq p$. Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $\Lambda\colon X \to \mathbb{C}$ von $\lambda$ mit $|\Lambda| \leq p$.*

*Beweis.* Der Fall wird auf den reellen Fall zurückgespielt, mit der Beobachtung, dass $\Re(\lambda)$ ein reelles Funktional ist, man umgekehrt aus einem reellen Funktional $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ in eindeutiger Weise durch $\lambda(z) := \phi(z) - i\phi(iz)$ ein komplexes Funktional mit $\Re(\lambda) = \phi$ machen kann.

Hat man $\phi(x)$ mit $|phi(x)| \leq p(x)$ gefunden, so beweist man zu guter letzt $|\lambda(x)| \leq p(x)$, indem man $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ wählt so dass $|\lambda(x)| = z\lambda(x) = \lambda(zx) = \Re(\lambda(zx)) = \phi(zx) \leq p(zx) = p(x)$. □

**3.12 Korollar.** *Sei $X$ normierter Vektorraum und $Y$ ein Unterraum, $\lambda \in Y'$. Dann gibt eine Fortsetzung zu einem stetigen Funktional $\Lambda \in X'$ mit $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$.*

*Beweis.* Definiere $p\colon X \to \mathbb{R}$ durch $p(x) := \|\lambda\| \cdot |x|$ und wende die obigen Theoreme an. □

**3.13 Korollar.** *Sei $X$ normierter Vektorraum und $x \in X$. Dann gibt es $\Lambda \in X'$ mit $\|\Lambda\| = 1$ und $\Lambda(x) = |x|$.*

*Beweis.* Sei $Y$ der von $x$ erzeugte 1-dimensionale Unterraum von $X$ und das lineare Funktional $\lambda\colon Y \to \mathbb{C}$ durch $\lambda(x) := |x|$ festgelegt. Es folgt $\|\lambda\| = 1$. Wende nun Korollar 3.12 an. □

Man kann also jeden Vektor $x$ mit Hilfe eines geeigneten Elements von $X'$ vom Nullvektor unterscheiden. Es geht sogar noch etwas besser:

**3.14 Korollar.** *Sei $Z$ ein Unterraum eines normierten Vektorraums $X$ und $y \in X$ mit $d(y, Z) := \inf\{|y - z| \mid z \in Z\} = d$. Dann gibt es $\phi \in X'$ mit $\|\phi\| \leq 1$, $\phi(y) = d$ und $\phi|_Z = 0$.*

*Beweis.* Definiere zunächst $\lambda$ auf dem von $Z$ und $y$ erzeugten Unterraum. Mittels der Definition von $d$ und Dreiecksungleichung folgt, dass $\lambda$ stetig ist. Benutze dann Korollar 3.12. □

## 3.4 Bidualraum

Wir haben nun gesehen, dass es für jedem normierten Vektorraum $X$ sehr viele Element im Dualraum $X'$ gibt.

**3.15 Definition.** Nun ist $X'$ selbst ein Banachraum , hat also solcher also auch einen Dualraum. Dieser heißt *Bidualraum* $X''$.

**3.16 Satz.** *Sei $X$ ein normierter Vektorraum. Dann definiert die Abbildung*

$$j \colon X \to X''; x \mapsto (\phi \mapsto \phi(x))$$

*eine isometrische Injektion von $X$ in seinen Bidualraum..*

*Beweis.* Es gilt $\|j(x)\| = \sup_{\phi \in X' \setminus \{0\}} \frac{|\phi(x)|}{\|\phi\|} \le \sup_\phi \frac{\|\phi\| \cdot |x|}{\|\phi\|} \le |x|$. Andererseits gibt es nach Hahn-Banach ein $\phi \in X'$ mit $|\phi(x)| = \|\phi\| \cdot |x|$, so dass $\|j(x)\| = |x|$. Also ist $j$ eine isometrische Injektion. □

**3.17 Definition.** Falls die kanonische isometrische Injektion $X \to X''$ ein Isomorphismus ist, dann heißt $X$ *reflexiv*.

**3.18 Beispiel.** Jeder Hilbertraum ist reflexiv. Dies folgt sofort aus dem Satz von Riesz über den konjugiert-linearen Isometrie $H \to H'$. Die Komposition der beiden konjugiert linearen Isometrien $H \to H' \to H''$ ist ein linearer isometrischer Isomorphismus.

## 3.5 Baire-Kategorietheorem und Folgerungen

**3.19 Lemma.** *Sei $X$ ein vollständiger metrischer Raum. Seien für $n \in \mathbb{N}$ $\overline{B(x_n, \epsilon_n)}$ a abgeschlossene Bälle mit*

*(1)* $\epsilon_n > 0$ *aber* $\epsilon_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

*(2)* $B(x_{n+1}, \epsilon_{n+1}) \subset B(x_n, \epsilon_n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

*Dann gibt es genau ein $x \in X$ mit $x \in B_{x_n}(\epsilon_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

*Beweis.* Die Folge $x_n$ ist eine Cauchyfolge, da für $N < n < k$ $d(x_n, x_k) < 2\epsilon_N$ — weil sowohl $B_{x_n}(\epsilon_n)$ also auch $B_{x_k}(\epsilon_k) \subset B_{x_N}(\epsilon_N)$, dann Dreiecksungleichung. Wieder wegen der Dreiecksungleichung hat der Limes $x$ die gewünschte Eigenschaft.

Eindeutigkeit folgt, da jeder andere Punkt $y$ positiven Abstand $r$ von $x$ hat, und damit nicht in $B_{\epsilon_n}(x_n)$ liegen kann, falls $\epsilon_n < r/4$ (da $x \in B_{\epsilon_n}(x_n)$). □

**3.20 Satz.** ***Satz von Baire***
*Sei $X$ vollständiger metrischer Raum. Falls $A_1, A_2, \cdots$ abgeschlossene Teilmengen von $X$ und falls $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ einen offenen Ball enthält, so muss schon eines der $A_n$ einen offenen Ball enthalten.*

**3.21 Beispiel.** Versuche, in $\mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen nirgends dichten Teilmengen (die also keinen offenen Ball enthalten) zu schreiben.

*Beweis des Satzes von Baire.* Für einen Widerspruchsbeweis nimm an, es gibt solch einen Ball $B_0 = B(x_0, \epsilon_0) \in \bigcup A_n$. Nach Widerspruchsannahme ist $B_0$ nicht ganz in der abgeschlossenen Menge $A_0$ enthalten. Also gibt es einen abgeschlossenen Ball $\overline{B_1} \subset B_0$, so dass $\overline{B_1} \cap A_0 = \emptyset$. Wir können den Radius von $B_1$ kleiner $\epsilon_0/2$ wählen.

$B_1$ ist nach Widerspruchsannahme nicht ganz in $A_1$ enthalten. Induktiv konstruieren wir so $B_0 \supset \overline{B_1} \supset \cdot$ mit $\overline{B_n} \cap A_n = \emptyset$. Wegen Lemma 3.19 gibt es einen Punkt $x \in \bigcap \overline{B_n}$, also $x \notin \bigcup A_n$. Andererseits natürlich auch $x \in B_0 \subset \bigcup A_n$. Dies ist ein Widerspruch. □

**3.22 Satz.** ***(Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit)*** *Sei $X$ ein Banachraum und $Y$ normierter Raum. Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X, Y)$. Für jedes $x \in X$ gebe es $C_x$ mit $|T(x)| \leq C_x$ für alle $T \in \mathcal{F}$.*

*Dann gibt es $C > 0$ so dass $\|T\| \leq C$ für alle $T \in \mathcal{F}$.*

*Beweis.* Setze $B_n := \{x \in X \mid |T(x)| \leq n \text{ für alle } T \in \mathcal{F}\}$. Dann gilt nach Voraussetzung $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Wegen der Stetigkeit der $T$ ist jedes $B_n$ abgeschlossen. Nach dem Satz von Baire enthält eines der $B_n$ einen offenen Ball $B_r(x_0)$. Dann gilt für jedes $x \in X \setminus \{0\}$ und $T \in \mathcal{F}$

$$|T(x)| = \frac{2\,|x|}{r}\left|T(\frac{rx}{2\,|x|})\right| \leq \frac{2\,|x|}{r}\left(\left|T(\frac{rx}{2\,|x|} - x_0)\right| + |T(x_0)|\right) \leq \frac{2\,|x|}{r}\,(n + |T(x_0)|)$$

□

**3.23 Satz.** ***(Satz von der offenen Abbildung)*** *Seien $X, Y$ Banachräume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ sei surjektiv. Dann ist $T(U) \subset Y$ offen für jede offene Teilmenge $U \subset X$.*

*Beweis.* Für jedes $x \in U$ muss man zeigen, dass $T(U)$ einen offenen Ball um $T(x)$ enthält. Dazu darf man $U$ auch Verkleinern, also reicht es, $U = B_x(\epsilon)$ zu betrachten. Da $B_x(\epsilon) = x + B_0(\epsilon)$ und wegen der Linearität von $T$ genauso $T(B_x(\epsilon)) = T(x) + T(B_0(\epsilon))$, und da Translate von offenen Mengen offen sind, genügt es, $U = B_0(\epsilon)$ zu betrachten. Wir müssen also zeigen, dass es $r > 0$ gibt mit $B_0(r) \subset T(B_0(\epsilon))$. Nun gilt aber (wieder wegen Linearität) $T(B_0(\epsilon)) = \epsilon T(B_0(1))$.Enthält also ein $T(B_0(r))$ einen offenen Ball um Null, so alle.

Noch besser: enthält ein $T(B_0(r))$ irgendeinen offenen Ball $B_{T(x_0)}(s)$, so enthält $T(B_0(2r))$ den Ball $B_0(s)$.

Es genügt also, zu zeigen, dass mindestens eines der $T(B_0(n))$ einen offenen Ball enthält. Nun ist $T$ surjektiv, also $Y = \overline{\bigcup T(B_0(n))}$. Damit enthält wegen des Satzes von Baire mindestens eines der $\overline{T(B_0(n))}$ eine offene Teilmenge. Wir müssen nur noch den Abschluss durch die Menge selbst ersetzen.

Genau wie oben können wir durch Skalieren und Translation annehmen, dass $B_\epsilon \subset \overline{T(B_0(1))}$. Es reicht also, zu zeigen dass $\overline{T(B_0(1))} \subset T(B_0(2))$.

Sei also $y \in \overline{T}(B_0(1))$. Wähle $x_1 \in B_0(1)$ mit $|T(x_1) - y| < \epsilon$, also $y - T(x_1) \in B_0(\epsilon/2) \subset \overline{T(B_0(1/2))}$. Wähle nun $x_2 \in B_0(1/2)$ mit $(y - Tx_1) - Tx_2 \in B_{\epsilon/4}$. Induktiv finde $x_{n+1} \in B_0(1/2^n)$ mit $(y - \sum_{i=1}^n Tx_i) - Tx_{n+1} \in B_0(2^{-n-1}\epsilon)$. Dann existiert $x = \sum_{n=1}^\infty x_n \in B_2$ und $y = \sum_{n=1}^\infty Tx_n = Tx \in T(B_2)$. □

**3.24 Korollar.** *Seien $X, Y$ Banachräume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ bijektiv. Dann ist die inverse Abbildung ebenfalls stetig.*

*Beweis.* Sei $S\colon Y \to X$ die Inverse von $T$. Es ist zu zeigen, dass für jedes $U \subset X$ offen auch $S^{-1}(U)$ offen ist. Da $S$ und $T$ invers zueinander sind, ist $S^{-1}(U) = T(U)$. □

**3.25 Definition.** Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Der *Graph* von $f$ dies die Teilmenge $\{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\} \subset X \times Y$.

**3.26 Satz.** *Seien $X, Y$ Banachräume und $T\colon X \to Y$ linear. Es gilt: $T$ ist stetig genau dann wenn der Graph $\Gamma(T)$ von $T$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$ ist.*

*Beweis.* Da $T$ linear, ist $\Gamma(T)$ ein Unterraum des Vektorraums $X \times Y = X \oplus Y$. Nach Voraussetzung ist $\Gamma(T)$ abgeschlossen. Da $X \oplus Y$ selbst ein Banachraum ist, ist auch $\Gamma(T)$ ein Banachraum (mit Norm $|(x, Tx)| = |x| + |Tx|$).

Betrachte nun die Abbildung $p_1\colon \Gamma(T) \to X; (x, Tx) \mapsto x$. Dies ist eine bijektive stetige lineare Abbildung, also ist auch die Umkehrung stetig. Also gilt $T = p_2 \circ p_1^{-1}$ ist stetig als Verkettung stetiger Abbildungen. □

**3.27 Korollar.** ***(Satz von Helliger-Toeplitz)***
*Sei $H$ ein Hilbertraum und $A\colon H \to H$ linear mit $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ für alle $x, y \in H$. Dann ist $A$ stetig.*

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

## 3.6 „Größe“ von Banachräumen

**3.28 Theorem.** *Jeder endlich dimensionale normierte Vektorraum ist isomorph zu $\mathbb{C}^n$, und die Norm ist äquivalent zur Standard-Norm; insbesondere ist jeder endlich dimensionale normierte Raum automatisch vollständig.*

*Beweis.* Dies ist ein Resultat aus Diff 2; es wird benutzt, dass der Einheitsball kompakt ist. □

**3.29 Satz.** *Ein normierter Vektorraum $X$ hat genau dann einen kompakten abgeschlossenen Einheitsball, wenn er endlich dimensional ist.*

*Beweis.* Falls $X$ endlich dimensional ist, wende Satz 3.28 an und dann den Satz von Heine-Borel ein $\mathbb{C}^n$.

Für die Umkehrung: Wir konstruieren eine Folge $(x_1, x_2, \dots)$ ohne konvergente Teilfolge. Wähle $x_1 \in X$ mit $|x_1|$ beliebig. Sei $U_1$ der von $\{x_1\}$ erzeugte Unterraum. Wähle nun mit folgendem Lemma $x_2$ mit $|x_2| = 1$ und $d(x_2, U_1) \geq 1/2$.

Sei $U_2$ der von $x_1$ und $x_2$ erzeugte Unterraum. Mit demselben Grund kann $x_3$ mit $|x_3| = 1$ und $d(x_3, U_2) \geq 1/2$ gefunden werden. Induktiv erhalten wir die gewünschte Folge $(x1, x_2, \dots)$. □

Wir benutzten folgendes Lemma (über den Platz, der in einem normierten Vektorraum vorhanden ist):

**3.30 Satz.** *Seien $X$ normierter Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in X$ mit $|v_i| \geq c > 0$. Falls $X$ nicht der von $v_1, \dots, v_n$ aufgespannte Raum $U$ ist, gibt es $x \in X$ mit $|x| \leq 1$ und $d(x, U) > 1/2$.*

*Beweis.* Wähle dazu zunächst $x \in X \setminus U$. Da $U$ endlich dimensional und somit abgeschlossen, ist $d := d(x, U) > 0$ (sonst läge $x$ in $\overline{U_1} = U_1$). Also ist $d < 2d$, also gibt es $u_1 \in U$ mit $|x - u_1| < 2d$. Setze $x_2 := (x - u_1)/|x - u_1|$. Dann gilt für $u \in U$

$$|x_2 - u| = \frac{1}{|x - u_1|} \, |x - u_1 - |x - u_1| \, u| \geq \frac{d}{2d} = \frac{1}{2},$$

da $u_1 - |x - u_1| \, u \in U_1$. □

# 4 Beschränkte Operatoren

Ab jetzt wird die Untersuchung von linearen Operatoren $T \colon X \to Y$ zwischen Banachräumen im Vordergrund stehen.

Erinnerung: falls $X$ und $Y$ normierte Räume sind, so ist $\mathcal{B}X, Y := \{f \colon X \to Y \mid f \text{ linear und stetig}\}$, mit der Operatornorm $\|f\| := \sup_{x=1} |f(x)|$.

Wichtig für uns wird oft sein, Gleichungen der Form $Tx = 0$ oder $Tx = x$ zu lösen (letztere ist als Fixpunktgleichung oft leichter zu behandeln).

**4.1 Definition.** Sei $X$ ein Banachraum und $T \in \mathcal{B}(X, X) =: \mathcal{B}(X)$. Die Menge

$$\sigma(T) := \{z \in \mathbb{C} \mid T - z \,\mathrm{id} \ \text{ nicht invertierbar}\}$$

heißt Spektrum von $T$. $R(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ heißt die *Resolventenmenge* von $T$.

$z \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert, falls $\ker(T - z) \neq \{0\}$. Jeder Eigenwert liegt also im Spektrum.

Falls $X$ unendlich dimensional ist, kann das Spektrum auch Werte enthalten, die keine Eigenwerte sind.

**4.2 Beispiel.** $T \colon l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N}); (x_1, \dots) \mapsto (0, x_1, \dots)$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Daher gilt $0 \in \sigma(T)$, obwohl 0 kein Eigenwert ist.

**4.3 Satz.** *Seien $X, Y$ Banachräume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ bijektiv. Es sei $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ mit $\|T - S\| < 1/\left\|T^{-1}\right\|$. Dann ist auch $T - S$ invertierbar, mit $\left\|(T - S)^{-1}\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| / (1 - \|T - S\| \cdot \left\|T^{-1}\right\|)$.*

*Also: wenn man einen invertierbaren Operator nur wenig (bezüglich der Norm) stört, erhält man immer noch einen invertierbaren Operator.*

*Beweis.* Der Beweis beruht auf einem der grundlegenden Tricks in der Analysis: der Neumann Reihe: Es gilt $S = T(1 - T^{-1}(T - S))$. Setze $S_2 := T^{-1}(T - S)$. Nach Voraussetzung gilt $\|S_2\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \cdot \|T - S\| < 1$. Es genügt natürlich, $1 - S_2$ zu invertieren. Hierfür beachte nun:

$$1 = (1 - S_2)(1 + S_2 + S_2^2 + \cdots),$$

und da $\|S_2\| < 1$, ist $(1 - S_2)^{-1} := \sum_{k=0}^{\infty} S_2^k$ konvergent.

Also $S^{-1} = (\sum_{k=0}^{\infty} S_2^k) T^{-1}$. Die Normabschätzung ergibt sich aus der absoluten Konvergenz der Reihe. □

**4.4 Korollar.** *Die Resolventenmenge $R(T)$ ist offen, also das Spektrum $\sigma(T)$ abgeschlossen.*

*Beweis.* $\lambda \in R(T) \iff (T - \lambda)$ invertierbar. Dann ist für kleine $\epsilon$ auch $T - \lambda - \epsilon$ invertierbar, da es sich um eine Norm-kleine Störung handelt. □

**4.5 Satz.** *Seien $X$ Banachraum und $T \in \mathcal{B}(X,X)$. Dann ist die* Resolventenabbildung

$$R\colon R(T) \to \mathcal{B}(Y,X); \lambda \mapsto (T-\lambda)^{-1}$$

*analytisch, d.h. wird lokal durch eine konvergente Potenzreihe (mit Koeffizienten in $\mathcal{B}(X)$) beschrieben. Insbesondere ist für jedes $\phi \in \mathcal{B}(X)'$ die Verknüpfung*

$$\phi \circ R\colon R(T) \to \mathbb{C}$$

*holomorph.*

*Beweis.* Sei $\lambda_0 \in R(T)$. Dann gilt wegen der Neumann Reihe aus dem Beweis von Satz 4.3 für $\lambda$ nahe $\lambda_0$

$$R(\lambda) = (T-\lambda_0-(\lambda-\lambda_0))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (R(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0))^k \cdot R(\lambda_0).$$

□

**4.6 Satz.** *Sei $T \in \mathcal{B}(X)$. Dann ist $\sigma(T)$ kompakte nicht-leere Teilmenge von $\overline{B_0(\|T\|)} \subset \mathbb{C}$.*

*Beweis.* Wir haben bereits gesehen, dass $\sigma(T)$ abgeschlossen ist. Falls $\lambda > \|T\|$, so ist nach Satz 4.3 $T-\lambda$ invertierbar, da $\lambda\,\mathrm{id}$ invertierbar ist. Also ist $\sigma(T) \subset \overline{B_0(\|T\|)}$, insbesondere beschränkt und somit kompakt.

Wäre $\sigma(T)$ leer, so wäre $R\colon R(T) \to \mathcal{B}(X)$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Abbildung. Wegen Stetigkeit wäre für $|\lambda| < 2\,\|T\|$ die Norm der $(T-\lambda)^{-1}$ beschränkt. Für $|\lambda| \geq 2\,\|T\|$ hat man die Abschätzung $\|T-\lambda\|^{-1} \leq \frac{\lambda^{-1}}{1-\|T\|\lambda^{-1}} \leq \frac{\lambda^{-1}}{1/2}$. Somit wäre $R$ global beschränkte holomorphe Funktion, und somit nach dem Satz von Liouville konstant. Dies ist nicht der Fall, man erhält einen Widerspruch.

Will man den Satz von Liouville nur auf komplexwertige Funktionen anwenden, so beachte man, dass für jedes $\phi \in \mathcal{B}(X)$ $\phi \circ R$ holomorph, und somit wegen Liouville konstant wäre. Wegen der Hahn-Banach Sätze stimmten dann aber auch alle $(T-\lambda)^{-1}$ überein. □

# 5 Kompakte Operatoren und Fredholmtheorie

## 5.1 Definition

**5.1 Definition.** Seien $X, Y$ Banachräume. $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ heißt *kompakt*, wenn $\overline{T(B_0(1))}$ kompakte Teilmenge von $Y$ ist.

Äquivalent dazu ist $T$ kompakt, falls für jede beschr"'ankte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ die Folge $T(x_n)$ eine konvergente Teilfolge hat.

**5.2 Bemerkung.** Wir wissen aus Diff, das je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Also ist in jedem endlich dimensionalen normierten Vektorraum jede abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt.

**5.3 Beispiel.** Falls $Y$ endlich dimensional, oder allgemeiner falls der Bildraum $T(X)$ endlich dimensional, so ist $T$ kompakt.

Dies folgt, da jede beschränkte abgeschlossene Menge eines endlich dimensionalen normierten Vektorraums kompakt ist.

**5.4 Satz.** *Ist $X$ unendlich dimensionaler normierter Vektorraum, so ist der Einheitsball nicht kompakt (Übungsaufgabe).*

*Beweis.* Wir konstruieren eine Folge ohne konvergente Teilfolge. Wähle $x_1 \in X$ mit $|x_1|$ beliebig. Sei $U_1$ der von $\{x_1\}$ erzeugte Unterraum. Da er endlich dimensional ist, ist er insbesondere vollständig und damit abgeschlossen.

Wähle nun $x_2$ mit $|x_2| = 1$ und $d(x_2, U_1) \geq 1/2$.

Wähle dazu zunächst $x \in X \setminus U_1$. Da $U_1$ abgeschlossen, ist $d := d(x, U_1) > 0$ (sonst läge $x$ in $\overline{U_1} = U_1$). Also ist $d < 2d$, also gibt es $u_1 \in U_1$ mit $|x - u_1| < 2d$. Setze $x_2 := (x - u_1)/\,|x - u_1|$. Dann gilt für $u \in U$

$$|x_2 - u| = \frac{1}{|x - u_1|}\,|x - u_1 - |x - u_1|\,u| \geq \frac{d}{2d} = \frac{1}{2},$$

da $u_1 - |x - u_1|\,u \in U_1$.

Sei $U_2$ der von $x_1$ und $x_2$ erzeugte Unterraum. Auch dieser ist vollständig und nicht ganz $X$, also kann mit demselben Verfahren $x_3$ mit $|x_3| = 1$ und $d(x_3, U_2) \geq 1/2$ gefunden werden. Induktiv erhalten wir die gewünschte Folge $(x1, x_2, \dots)$. □

Im Beweis wurde folgende elementare Tatsache benutzt:

**5.5 Satz.** *Sei $X$ ein metrischer Raum und $V \subset X$. Falls $V$ (mit der induzierten Metrik) vollständig ist, so ist $V$ insbesondere abgeschlossene Teilmenge.*

*Beweis.* Falls $(x_n) \subset V$ eine Folge mit Grenzwert $x \in X$, so ist $x_n$ insbesondere Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit liegt der Grenzwert schon in $V$. □

**5.6 Korollar.** *Falls $X$ unendlich dimensionaler Banachraum, so ist $\mathrm{id}_X$ nicht kompakt.*

**5.7 Beispiel.** Sei $k(x,y) \in C([0,1]\times[0,1])$. Dann ist $K\colon C([0,1]) \to C([0,1]); Kf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)$ kompakt. Dieselbe Konstruktion liefert auch kompakte Operatoren auf $L^p([0,1])$, auch kann das Intervall $[0,1]$ durch andere Mengen ersetzt werden.

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

## 5.2 Dualraum als Funktor

Sei $X$ Banachraum. Dann haben wir den Dualraum $X'$ eingeführt. Sei nun $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Wir definieren $T' \in \mathcal{B}(Y',X')$ durch $T'(\phi) := \phi \circ T$. Dann gilt $\|T'\| \leq \|T\|$, wegen der Hahn-Banach sogar $\|T'\| = \|T\|$.

Es gilt $(S \circ T)' = T' \circ S'$ und $\mathrm{id}' = \mathrm{id}$.

## 5.3 Eigenschaften kompakter Operatoren

**5.8 Satz.** ***(Satz von Schauder)***
*Falls $T$ kompakt ist, dann ist auch $T'$ kompakt.*

*Beweis.* Sei $\phi_n \in Y'$ mit $\|\phi_n\| \leq 1$. Wir müssen nun aus den $T'(\phi_n) = \phi_n \circ T \in X'$ eine konvergente Teilfolge auswählen.

Nach Voraussetzung erfüllt das Bild von $T$ eine gewisse Kompaktheitseigenschaft (genauer: $\overline{T(B_0(1))}$ ist kompakt), und die Einschränkungen der $\phi_n$ auf dieses Bild sind zu betrachten.

Um weiter zu schließen, benötigen wir einen weiteren grundlegenden Satz der (Funktional)analysis, den Satz von Arzela-Ascoli. □

**5.9 Satz.** ***(Satz von Arzela-Ascoli)***
*Sei $M$ ein kompakter metrischer Raum, $\mathcal{F} \subset C(M)$ eine Menge stetiger Funktionen (mit der Supremumsnorm, da $M$ kompakt ist jedes $f \in C(M)$ beschränkt). Es gelte*

*(1) es gibt $C > 0$ so dass $|f|_\infty < C \ \forall f \in \mathcal{F}$.*

*(2) $\mathcal{F}$ ist* gleichgradig stetig, *d.h. in der Definition von Stetigkeit sind die Wahlen unabhängig vom jeweiligen Element in $\mathcal{F}$ möglich, oder präziser $\forall \epsilon > \exists \delta > 0$ so dass $\forall f \in \mathcal{F}$ gilt: falls $d(x,y) < \delta$ dann $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

*Dann ist der Abschluss $\overline{\mathcal{F}}$ eine kompakte Teilmenge von $C(M)$ (d.h. jede Folge aus $\mathcal{F}$ hat eine in Supremumsnorm in $C(M)$ konvergente Teilfolge).*

*Fortsetzung des Beweises des Satzes von Schauder.* Ehe wir Arzela-Ascoli beweisen, verwenden wir ihn, um Schauder zu beweisen.

Wir betrachten die Menge $\mathcal{E}$ der Einschränkung der $\phi_n$ auf $K := \overline{T(B_0(1))}$, nach Voraussetzung eine kompakte Menge. Es gilt $|\phi_n(T(v))| \le \|\phi_n\| \, \|T\| \, |v| \le \|T\| \cdot |v|$, da $T(B_0(1))$ dicht in $K$ ist also $\mathcal{E}$ beschränkt. Dieselbe Abschätzung zeigt, dass $\mathcal{E}$ gleichgradig stetig ist.

Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir also annehmen, dass die Einschränkungen von $\phi_n$ auf $K$ bezüglich der Supremumsnorm konvergieren. Somit

$$\|T'(\phi_n) - T'(\phi_m)\| = \sup_{v \in B_0(1)} |\phi_n(Tv) - \phi_m(Tv)| = |\phi_n - \phi_m|_\infty \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Da $X'$ ein Banachraum, konvergiert also $(T'(\phi_n))$. □

*Beweis des Satzes von Arzela-Ascoli.* Da $M$ kompakter metrischer Raum, ist $M$ separabel; wir können ja für jedes $n > 0$ endlich viele Bälle vom Radius $1/n$ finden, welche $M$ überdecken. Die Vereinigung der Mittelpunkte aller dieser Bälle ist abzählbare dichte Teilmenge $\{x_n\}$. Sei $f_n \in \mathcal{S}$ eine Folge.

Wir konstruieren nun per Diagonalkonstruktion eine Teilfolge von $f_n$, die auf jedem der Punkte $x_k$ konvergiert.

Zunächst ist $f_n(x_1)$ eine beschränkte Teilfolge von $\mathbb{C}$ und hat daher eine konvergente Teilfolge $(f_{n_1}(x_1), f_{n_2}(x_1), \dots)$.

Genauso ist die Folge $(f_{n_1}(x_2), f_{n_2}(x_2), \dots)$ beschränkte Folge in $\mathbb{C}$, hat also ihrerseits eine konvergente Teilfolge $f_{n_{n_1}}(x_2, \dots)$.

Induktiv erhalten wir durch „Ausdünnen“ für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge von $(f_n)$, die auf der Menge $\{x_1, \dots, x_k\}$ konvergiert.

Diesen Prozess kann man so natürlich nicht bis ins unendliche fortsetzen. Wir definieren aber nun „diagonal“ eine weitere Teilfolge

$$(g_1 := f_{n_1}, g_2 := f_{n_{n_2}}, g_3 := f_{n_{n_{n_3}}}, \dots).$$

Für jedes $n$ ist dann bis auf endlich viele Glieder $(g_k(x_n))$ eine Teilfolge der oben konstruierten $n$-ten Teilfolge von $f_n(x_n)$, also konvergent.

Als nächstes benutzen wir die gleichgradige Stetigkeit, um zu zeigen, dass die Folge auch gleichmäßig konvergiert, bzw. dass wir eine Cauchyfolge (bzg. supnorm) konstruiert haben.

Wähle $\epsilon > 0$. Es gilt für $x \in M$

$$|g_k(x) - g_l(x)| \leq |g_k(x) - g_k(x_n)| + |g_k(x_n) - g_l(x_n)| + |g_l(x_n) - g_l(x)| \,.$$

Zunächst kann man wegen der gleichgradigen Stetigkeit, da $\{x_n\}$ dicht in $M$ und $M$ kompakt, eine endliche Menge $\{x_1, \dots, x_N\}$ unabhängig von $k$, $l$ und $x$ so wählen, dass der erste und dritte Summand für mindestens ein $n \in \{1, \dots, N\}$ kleiner als $\epsilon$ werden. Zuletzt wird der mittlere Term für jedes $n \leq N$ kleiner als $\epsilon$, falls $k, l$ genügend gross, da die Folgen $g_k(x_n)$ konvergieren.

Damit ist $(g_k)$ Cauchyfolge in $C(M)$. Da $C(M)$ vollständig, ist die Folge also auch konvergent. □

## 5.4 Weitere Eigenschaften kompakter Operatoren

**5.10 Satz.** *Seien $X$, $Y, Z, W$ Banachräume. $T_1, T_2, \dots \in \mathcal{B}(X,Y)$ kompakt, $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{B}(W,X)$, $B \in \mathcal{B}(Y,Z)$. Es sei $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ mit $\|T - T_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dann sind die folgenden Operatoren kompakt:*

$$\lambda T_1 + T_2, T_1 \circ A, B \circ T_2, T.$$

*Setze $K(X,Y) := \{T \in \mathcal{B}(X,Y) \mid T \text{ kompakt}\}$, $K(X) := K(X,X)$. Dann ist insbesondere $K(X)$ ein abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{B}(X)$.*

*Beweis.* Direktes Nachrechnen. Für $T$ seien $v_n \in X$ mit $|v_n| \leq 1$. Dann kann man wie im Beweis des Satzes von Arzela-Ascoli iterativ Teilfolgen von Teilfolgen bilden, so dass $(T_n(v_{\phi_n(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Eine Diagonalkonstruktion liefert eine Teilfolge $w_k$, so dass $(T_n(w_k))_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $n$ konvergiert.

Dann ist auch $T(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, also konvergent. □

## 5.5 Fredholmtheorie und kompakte Operatoren

**5.11 Satz.** *Sei $X$ ein Banachraum und $K \in \mathcal{B}(X)$ kompakt. Setze $T := \mathrm{id} - K$. Dann gilt*

*(1)* $\dim\ker(\mathrm{id} - K) < \infty$.

*(2)* $(\mathrm{id} - K)(X)$ *ist abgeschlossener Unterraum von $X$.*

*(3)* $\dim(X/((\mathrm{id} - K)(X))) < \infty$.

*Beweis.* Falls $x_n \in \ker(T)$ mit $|x_n| \leq 1$, gilt wegen $T(x_n) = 0$, $x_n = K(x_n)$, also hat die Folge eine konvergente Teilfolge ($K$ ist kompakt). Nach Satz 5.4 ist $\ker(T)$ endlich dimensional.

Da $\ker(T)$ abgeschlossen, wird $X/\ker(T)$ ein Banachraum und $T$ induziert eine stetige Abbildung $\overline{T}\colon X/\ker(T) \to \mathrm{im}(T) \subset X$. Wir zeigen, dass $\overline{T}$ ein Isomorphismus ist, dann ist auch $\mathrm{im}(T)$ vollständig. Dazu muss man nur zeigen, dass die Inverse $\overline{T}^{-1}$ stetig ist.

Wäre sie das nicht, gäbe es eine Folge $x_n \in X/\ker(T)$ mit $\left|\overline{T}x_n\right| = 1$ und $|x_n| \xrightarrow{\infty}$ oder, durch skalieren, eine Folge $[y_n] \in X/\ker(T)$ mit $\left|\overline{T}[y_n]\right| \xrightarrow{0}$ und

$|[y_n]| = 1$. Wir wählen Repräsentanten $y_n \in X$ so, dass $|y_n| \leq 2$, aber natürlich $T(y_n) \xrightarrow{0}$. Da $K$ kompakt, können wir annehmen, dass $Ky_n$ konvergiert. Daraus folgt, dass $y_n = Ty_n + Ky_n$ konvergiert ebenfalls, etwa gegen $y \in X$. Aus Stetigkeitsgründen ist einerseits $Ty = 0$, also $[y] = 0 \in X/\ker(T)$, andererseits $|[y]| = \lim |[y_n]| = 1$. Der Widerspruch zeigt, dass $\operatorname{im}(T)$ abgeschlossen ist.

Zum Schluss benutzen wir noch, dass $X/\operatorname{im}(T) =\cong \ker(T') = \ker(\operatorname{id} - K')$. Da $K'$ kompakt ist, ist $\dim(\ker(\operatorname{id} - K')) < \infty$, und der Beweis damit beendet. $\square$

Im Beweis wurde benutzt

**5.12 Satz.** *Sei $X$ ein Banachraum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist $X/U$ mit Norm $|x + U| = \inf_{v \in U} |x + v|$ ein Banachraum.*

*Beweis.* Falls $|x + U| = 0$ gilt $x \in \overline{U} = U$, also $x + U = 0 \in X/U$.

Um Vollständigkeit nachzuweisen, sei $x_n + U \in X/U$ so, dass $\sum |x_n + U| < \infty$. Wir müssen zeigen, dass $\sum (x_n + U)$ in $X/U$ konvergiert. Denn: wenn jede absolut konvergente Reihe konvergiert, dann ist ein normierter Vektorraum vollständig.

Wähle nun (durch Addition von Elementen aus $U$) $x_n$ so, dass $|x_n + U| \leq |x_n| + 2^{-n}$. Dann ist auch $\sum |x_n| < \infty$, und somit $\sum x_n = x$ konvergent in $X$. Dann gilt aber auch $x + U = \sum x_n + U$. $\square$

Außerdem wurde benutzt:

**5.13 Lemma.** *Falls $T \in \mathcal{B}(X)$ und $\operatorname{im}(T)$ abgeschlossen, so gilt $(X/\operatorname{im}(T))' \cong \ker(T')$.*

*Beweis.* Jedes $\phi \in \ker(T') \subset X'$ induziert nach dem Homomorphiesatz ein $\overline{\phi} \in (X/\operatorname{im}(T))'$, und wenn $\phi \neq 0$, so gibt es $x \in X$ mit $\phi(x) \neq 0$, dann auch $\overline{\phi}([x]) \neq 0$. Also ist die entsprechende Abbildung $\ker(T') \to (X/\operatorname{im}(T))'$ injektiv. Die Umkehrung ist dadurch gegeben, dass $\overline{\phi} \in (X/\operatorname{im}(T))'$ mit der Projektion $X \twoheadrightarrow X/\operatorname{im}(T)$ komponiert wird. $\square$

**5.14 Satz.** *Sei $X$ Banachraum. Die Abbildung $K(X) \to \mathbb{Z}; K \mapsto \operatorname{ind}(\operatorname{id} - K) := \dim(\ker(\operatorname{id} - K)) - \dim(X/\operatorname{im}(\operatorname{id} - K))$ ist stetig, also konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $K(X)$. Also $\operatorname{ind}(\operatorname{id} - K) = 0 = \operatorname{ind}(\operatorname{id})$ für jeden kompakten Operator $K$ (verwende den Pfad $t \mapsto tK$).*

*Beweis.* Sei $K$ kompakt, $T = \operatorname{id} - K$. Dann ist $\ker(T)$ endlich dimensional, außerdem ist $\operatorname{im}(T)$ abgeschlossen und $X/\operatorname{im}(T)$ hat endliche Dimension.

Es folgt, dass es abgeschlossene Unterräume $Y, E \subset X$ gibt, so dass $\ker(T) \oplus Y = X$ und $\operatorname{im}(T) \oplus E = X$. Weiter $E \cong X/\operatorname{im}(T)$, insbesondere $\dim(E) < \infty$.

Anstelle von $T$ betrachten wir nun $\tilde{T} \colon X = Y \oplus E \to X; (y, e) \mapsto T(y) + e$. Entsprechend definieren wir für beliebiges $S \in \mathcal{B}(X)$ den Operator $\tilde{S}$. Die Abbildung $\mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y \oplus E, X); S \mapsto \tilde{S}$ ist stetig.

Nach Konstruktion ist $\tilde{T}$ ein Isomorphismus. Daher ist auch für jedes $S$ in einer Norm-kleine Umgebung $U \subset \mathcal{B}(X)$ von $T$ der Operator $\tilde{S}$ invertierbar.

Weiter gilt für $S \in U$: die Komposition $\operatorname{pr} \colon \ker(S) \hookrightarrow X = Y \oplus \ker(T) \twoheadrightarrow \ker(T)$ ist injektiv, denn sei $S(y+v) = 0$ mit $y \in Y$ und $v \in \ker(T)$. $\operatorname{pr}(y+v) = 0$ heißt $v = 0$, aber dann $S(y) = 0 = \tilde{S}(y)$, aber $\tilde{S}$ ist bijektiv, also auch $y = 0$.

Wähle $F \subset \ker(T)$ so dass $\ker(T) = \operatorname{pr}(\ker(S)) \oplus F$.

Es gilt $\mathrm{im}(S) = S(X) = S(Y) + S(F) + S(\mathrm{pr}(\ker(S)))$. Per Definition ist $S(\mathrm{pr}(\ker(S))) \subset S(Y)$, also $\mathrm{im}(S) = S(Y) + S(F)$.

Daraus erhält man eine Projektion $E \cong (Y \oplus E)/Y \cong X/\tilde{S}(Y) = X/S(Y) \twoheadrightarrow X/(S(Y) + S(F)) = X/\mathrm{im}(S)$ mit Kern $(S(Y) + S(F))/S(Y)$.

Die offensichtliche Surjektion $S \twoheadrightarrow (S(Y) + S(F))/S(Y); v \mapsto S(v) + S(Y)$ ist auch injektiv, denn wenn $S(v) = S(y)$ für $v \in F$ und $y \in Y$, so $S(v - y) = 0$, also $v - y \in \ker(S)$ also $v \in \mathrm{pr}(\ker(S))$, und $F$ ist komplementär zu $\mathrm{pr}(\ker(S))$ gewählt.

Zusammenfassend haben wir $\dim(X/\mathrm{im}(S)) = \dim(E) - \dim(F) = \dim(X/\mathrm{im}(T)) - \dim(F)$, und $\dim(\ker(T)) = \dim(\ker(S)) + \dim(F)$, so dass $\mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(S)$. □

Wir haben die Existenz von Komplementären Räumen benutzt:

**5.15 Lemma.** *Sei $X$ ein Banachraum und $E \subset X$ ein endlich dimensionaler Unterraum. Dann gibt es einen abgeschlossenen Unterraum $Y \subset X$ komplementär zu $E$, also mit $E + Y = X$ und $E \cap Y = \{0\}$.*

*Ist umgekehrt $Y \subset X$ abgeschlossener Unterraum so dass $\dim(X/Y) < \infty$, so gibt es ein (endlich dimensionales) abgeschlossenes Komplement $E$ zu $Y$.*

*Beweis.* Wir beweisen zunächst die zweite, leichtere Aussage. Seien dazu $v_1, \cdots v_n$ Vektoren in $X$ so dass $v_1 + Y, \dots v_n + Y$ eine Basis von $X/Y$ bilden und sei $E$ der von $v_1, \dots, v_n$ erzeugte Unterraum. Ist $\sum \lambda_i v_i \in Y$, so $\sum \lambda_i v_i + Y = 0 \in X/Y$, also $E \cap Y = \{0\}$. Entsprechend sieht man $Y + E = X$.

Für den ersten Teil beachte dass $E$, da endlich dimensional und damit vollständig, auch abgeschlossen. Sei $\dim(E) = n$. Wähle eine Basis $e_1, \dots, e_n$ von $E$ und $\phi_1, \dots, \phi_n \in X'$ so dass $\phi_j(e_i) = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \dots, n$.. Diese $\phi_j$ erhält man mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach, indem man die Elemente der Dualbasis von $(e_1, \dots, e_n)$ stetig auf $X$ fortsetzt.

Definiere nun $Y := \{y \in X \mid \phi_j(y) = 0 \forall j = 1, \dots, n\}$. Dann ist $Y \cap E = \{0\}$, $Y$ als Schnitt von abgeschlossenen Unterräumen abgeschlossen.

Umgekehrt kann man jedes $x$ als $x = (x - \sum_j \phi_j(x) e_j) + \sum_j \phi_j(x) e_j$ schreiben, wobei der erste Summand in $Y$ und der zweite in $E$ liegt. □

Das wichtigste Korollar aus dem vorhergehenden ist die *Fredholm Alternative*:

**5.16 Korollar.** *Sei $T \in K(X)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda \neq 0$. Dann tritt genau einer der folgenden zwei Fälle ein:*

*(1) Die Gleichung $\lambda x = Kx$ hat nur die triviale Lösung. In diesem Fall ist die Gleichung $\lambda x - Kx = f$ für jedes $f \in X$ eindeutig lösbar.*

*(2) $\dim(\ker(\lambda - K)) = n > 0$ (mit $n \in \mathbb{N}$). In diesem Fall ist $\lambda x - Tx = y$ genau dann lösbar, wenn $\phi(y) = 0$ für alle $\phi \in \ker(\lambda - T')$.*

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 5.11 und Satz 5.14, wenn man berücksichtigt, dass $\lambda - K = \lambda(1 - K/\lambda)$.

Wir müssen nur noch das präzise Lösbarkeitskriterium (welches allerdings nicht sehr nützlich ist) beweisen. Falls $(\lambda - K)x = y$, so gilt für jedes $\phi \in X'$ mit $\phi \circ (\lambda - K) = 0$ (also $\phi \in \ker(\lambda - K')$) auch $\phi(y) = 0$.

Betrachte umgekehrt $\mathrm{im}(\lambda - K)$. Dies ist ein abgeschlossener Unterraum von $X$. Falls $y \notin \mathrm{im}(\lambda - K)$ existiert wegen Hahn-Banach ein $\phi \in X'$ mit $\phi|_{\mathrm{im}(\lambda - K)} = 0$, also $\phi \in \ker(\lambda - K')$, aber so das $\phi(y) \neq 0$. □

**5.17 Korollar.** *Sei $X$ Banachraum und $k \in K(X)$. Dann gilt für das Spektrum von $k$:*

*(1)* $0 \in \sigma(k)$ *falls* $\dim(X) = \infty$.

*(2) Falls $\lambda \in \sigma(k) \setminus \{0\}$, so ist $\lambda$ Eigenwert von $k$, und der zugehörige Eigenraum ist endlich dimensional.*

*(3) Die Menge $\sigma(k)$ ist entweder endlich oder abzählbar, und hat höchstens den Häufungspunkt* $0$.

*Beweis.* $0 \notin \sigma(K)$ heißt, dass $K$ ein Isomorphismus ist. Da $K$ kompakt geht dies mit Satz 5.4 nur wenn $\dim(X) < \infty$.

Die zweite Eigenschaft ist gerade die Fredholmalternative: entweder ist $\lambda - k$ invertierbar (benutze den Satz von der Inversen Abbildung, um aus Bijektivität die Stetigkeit der inversen zu folgern), oder hat einen Kern, also einen Eigenraum. Dieser ist aber immer endlich dimensional.

Wir zeigen, dass für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $M_\epsilon := \{\lambda \in \sigma(k) \mid |\lambda| \geq \epsilon\}$ endlich ist. Dies impliziert, dass das Spektrum abzählbar und höchstens den Häufungspunkt Null haben kann.

Wähle für jedes $\lambda \in M_\epsilon$ einen Eigenvektor $v_\lambda \in X$ mit $|v_\lambda| = 1$ und $k(v_\lambda) = \lambda v_\lambda$.

Sei $V$ der Abschluss des von den $v_\lambda$ erzeugten Unterraums von $X$. Die Einschränkung von $k$ auf $V$ ist ebenfalls kompakt, insbesondere ist die Menge $\{\lambda v_\lambda \lambda \in M_\epsilon\}$ präkompakt.

Da $|\lambda| \geq \epsilon > 0 \; \forall \lambda \in M_\epsilon$ folgt genau wie im Beweis, dass jeder Vektorraum mit kompakter Einheitskugel endlich dimensional ist, dass auch der von den $\lambda_v$ erzeugte Unterraum, also auch $V$, endlich dimensional ist.

Andererseits ist aus linearer Algebra bekannt, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer linear unabhängig sind. Es gibt also nur endlich viele verschiedene Eigenwerte in $M_\epsilon$. □

Für endlich dimensionale Vektorräume gibt es ja nicht nur die geometrischen, sondern auch die „algebraischen Eigenräume“, also die Kerne von $(K - \lambda)^n$. Dasselbe passiert bei kompakten Operatoren auch:

**5.18 Satz.** *Sei $k \in K(X)$ und $0 \neq \lambda \in \sigma(k)$. Dann gibt es abgeschlossene Unterräume $N(\lambda)$ und $R(\lambda)$ von $X$ mit $X = N(\lambda) \oplus R(\lambda)$, so dass $(\lambda - k)$ einen Isomorphismus von $R(\lambda)$ auf sich selbst definiert, während $N(\lambda) = \ker(\lambda - k)^n$ für genügend großes $n \in \mathbb{N}$, und insbesondere $N(\lambda)$ endlich dimensional.*

**5.19 Definition.** Seien $X, Y$ Banachräume. Ein *Fredholmoperator* $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ist ein Operator mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\dim(\ker(T)) < \infty$

(2) $\dim(Y/\operatorname{im}(T)) < \infty$

(3) $\operatorname{im}(T)$ abgeschlossen. Diese Eigenschaft folgt mit Hilfe des Satzes von der offenen Abbildung aus der zweiten.

Für solch einen Operator definiere $\operatorname{ind}(T) := \dim(\ker(T)) - \dim(X/\operatorname{im}(T))$.

Beispiele für Fredholmoperatoren sind Operatoren der Form $\operatorname{id} - K$, mit $K$ kompakt.

**5.20 Satz.** *Die Menge $F(X,Y)$ der Fredholmoperatoren ist eine offene Teilmenge von $\mathcal{B}(X,Y)$. Die Abbildung* $\mathrm{ind}\colon F(X,Y) \to \mathbb{Z}$ *ist stetig, also konstant auf den Zusammenhangskomponente von $F(X,Y)$.*

*Beweis.* Mit einigen Zusatzargumenten so ähnlich wie der Beweis, dass ind stetig auf der Teilmenge $1 + K(X)$ ist. □

## 5.6 Integralgleichungen

Wir kommen nun nochmal auf die Integraloperatoren und Integralgleichungen zurück.

**5.21 Satz.** *Sei $I = [0,1]$. Sei $k(x,y) \in C([0,1] \times [0,1])$. Dann definiert*

$$f \mapsto Kf;\ Kf(x) : - \int_I k(x,y) f(y)\, dy$$

*eine lineare Abbildung $K\colon C(I) \to C(I)$ mit $|(Kf)_q| \le |k|_p \cdot |f|_q \cdot$, d.h. $K$ setzt sich zu einer stetigen Abbildung $K\colon L^q(I) \to L^p(I)$ fort (wobei $1/p + 1/p = 1$, $1 \le p < \infty$).*

*Darüber hinaus ist die Zuordnung $C(I \times I) \to \mathcal{B}(L^q(I), L^p(I)); k \mapsto K$ linear und es gilt $\|K\|_{\mathcal{B}L^q(I),L^p(I)} \le |k|_p$, so dass sich diese Abbildung zu einer stetigen Abbildung*

$$L^p(I \times I) \to \mathcal{B}(L^q(I), L^p(I)); k \mapsto K$$

*fortsetzt.*

*Für jedes $k \in L^p(I \times I)$ ist der zugehörige Operator $K\colon L^q(I) \to L^p(I)$ kompakt.*

*Genauso ist für $k \in C(I \times I)$ der Operator $K\colon C(I) \to C(I)$ stetig bezüglich der Supremumsnorm, es gilt $|Kf|_\infty \le |k|_{infty} |f|_\infty$ und die Abbildung*

$$C(I \times I) \to \mathcal{B}(C(I)); k \mapsto K$$

*ist stetig und kompakt.*

**5.22 Bemerkung.** Derselbe Satz gilt, wenn $I$ durch andere Integrationsbereiche ersetzt wird. In unserem abstrakten Setting zu $L^p$-Räumen braucht man nur, dass $R(\Omega) = C_b(\Omega)$, und dass es auch ein Integral auf $C_b(\Omega \times \Omega)$ gibt, welches den Satz von Fubini erfüllt:

$$\int_{\Omega\times\Omega} f(x,y)\, dx\, dy = \int_\Omega \left( \int_\Omega f(x,y)\, dy \right) dx \qquad \forall f \in C_b(\Omega \times \Omega).$$

Für die Kompaktheit der Operatoren braucht man noch, dass die Funktionen der Form $f(x) \cdot g(y)$ dicht in $C(\Omega \times \Omega)$ sind.

*Beweis von Satz 5.21.* Wegen der Linerarität des Integrals sind alle Zuordnungen wie behauptet linear. Die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|K(f)|_p^p &= \int_I dx \left| \int_I k(x,y) f(y)\, dy \right|^p \le \int_I \left( \int_I |k(x,y) f(y)|\, dy \right)^p \\
&\le \int_I dx \left( \int |k(x,y)|^p\, dy \right) \left( \int_I |f(y)|^q\, dy \right)^{p/q} \\
&\le |f|_q^p\, |k|_p^p .
\end{aligned}$$

Der Fortsetzungssatz liefert die entsprechende Abbildung $L^p(I\times I)\to\mathcal{B}(L^q(I),L^p(I))$.

Sei nun speziell $k(x,y)=u(x)v(y)$ mit $u,v\in C(I)$. Dann gilt

$$Kf(x)=u(x)\int_I v(y)f(y),$$

das Bild von $K$ ist in diesem Fall also 1-dimensional, insbesondere kompakt. Das Bild der stetigen Fortsetzung ist im Abschluss des alten Bilds enthalten, also immer noch eindimensional.

Wenn $k(x,y)$ im Unterraum enthalten ist, der von Funktionen der Form $u(x)v(y)$ aufgespannt wird, ist der zugehörige Operator $K$ immer noch kompakt, da die kompakten Operatoren einen Vektorraum bilden.

Beachte nun, dass die Inklusion $C(I\times I)\to L^p(I\times I)$ nicht nur dichtes Bild hat (per Definition), sondern sogar zu $\mathcal{B}(C(I\times I),L^p(I\times I))$ ist, dazu berechne nur, dass für $f\in C(I\times I)$

$$|f|_p=\left(\int_{I\times I}|f(x,y)|^p\right)^{1/p}\le\left(\int_{I\times I}|f|_\infty^p\right)^{1/p}=|f|_\infty\operatorname{vol}(I\times I)^{1/p}.$$

Außerdem ist bekannt, dass die Funktionen der Form $f(x)g(y)$ (mit $f,g\in C(I)$) einen dichten Unterraum von $C(I\times I)$ erzeugen.

Da die kompakten Operatoren einen abgeschlossenen Unterraum bilden, ist also jeder Integraloperator wie oben kompakt.

Entsprechende Argumente gelten auch, wenn man $C(I\times I)\to\mathcal{B}(C(I))$ betrachtet. Hier ist die Abschätzung noch einfacher:

$$|Kf(x)|=\left|\int_I k(x,y)f(y)\,dy\right|\le\int_I|k(x,y)|\cdot|f(y)|\;dy\le|k|_\infty\cdot|f|_\infty\operatorname{vol}(I).$$

□

**5.23 Bemerkung.** Integraloperatoren tauchen in Anwendungen recht häufig auf; man kann zumindest viele Probleme (z.B. Differentialgleichungen) in Integralgleichungen umwandeln. Nicht immer verhalten sich die Integralkerne $k(x,y)$ so gut wie in Satz 5.21, man wird oft $k(x,y)$ mit gewissen Singularitäten betrachten. Es gibt Erweiterungen des obigen Satzes auf $k(x,y)$ mit „kontrollierten“ Singulariäten.

**5.24 Korollar.** *Auf die Integraloperatoren aus Satz 5.21 ist die Fredholmalternative anwendbar. Insbesondere: ist $k(x,y)$ stetig, so hat für $\lambda\neq 0$ die Gleichung*

$$\lambda f-Kf=g$$

*für jedes $g$ genau eine Lösung, falls die homogene Gleichung $Kf=\lambda f$ nur die triviale Lösung hat.*

# 6 Der Spektralsatz für beschränkte Operatoren

Sei $H$ ein Hilbertraum und $A\in\mathcal{B}(H)$. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, für möglichst viele Funktionen $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ den Operator $f(A)$ zu definieren (und zwar so, dass man „wie zu erwarten“ mit den Operatoren $f(A)$ rechnen kann).

Dabei werden gleichzeitig die Struktur des Operators $A$ verstehen.

Vorsicht: dies werden wir allerdings nicht für beliebige Operatoren schaffen, sondern uns auf spezielle Klassen beschränken müssen.

**6.1 Definition.** Sie $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, $H_1$, $H_2$ Hilberträume. $A^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ heißt adjungiert zu $A$, falls $\langle w, Av\rangle = \langle A^*w, v\rangle$ für alle $v \in H_1$, $w \in H_2$.

(1) $A \in \mathcal{B}(H)$ heißt *selbstadjungiert*, falls $A = A^*$.

(2) $A \in \mathcal{B}H$ heißt *normal*, falls $AA^* = A^*A$.

(3) $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ heißt *unitär*, falls $UU^* = 1 = U^*U$.

**6.2 Lemma.** *Zu jedem $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ gibt es genau ein adjungiertes $A^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$.*

*Es gilt $\|A^*\| = \|A\|$ und $(A^*)^* = A$.*

*Beweis.* Hierzu benutzen wir den Satz von Riesz: fixiere $y \in H_2$. zu der Abbildung $\phi\colon x \mapsto \langle y, Ax\rangle$ gibt es genau einen Vektor $x' \in H_1$, so dass $\phi(x) = \langle x', x\rangle$, setze $A^y := x'$, es gilt $|x'| = \|\phi\| \leq |y| \cdot \|A\|$, also $\|A^*\| \leq \|A\|$, und $A^*$ ist eindeutig bestimmt.

Da $A$ die Gleichung von $(A^*)^*$ erfüllt, gilt also $A = (A^*)^*$, insbesondere $\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\| \leq \|A\|$. □

**6.3 Definition.** Ein selbstadjungierter Operator $A \in \mathcal{B}(H)$ heißt *nicht-negativ* ($A \geq 0$), falls $\langle Av, v\rangle \geq 0$ für alle $v \in H$.

**6.4 Lemma.** *Für alle $A \in \mathcal{B}(H)$ gilt $A^*A \geq 0$.*

*Beweis.* Nachrechnen. □

**6.5 Lemma.** *Falls $H$ komplexer Hilbertraum, $A \in \mathcal{B}(H)$ mit $\langle Av, v\rangle \geq 0$ für alle $v \in H$, dann ist $A$ automatisch selbstadjungiert.*

*Beweis.* Übungsaufgabe □

**6.6 Lemma.** *Falls $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert, dann ist $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

## 6.1 Stetiger Funktionalkalkül

Wir werden unseren Spektralsatz zunächst so formulieren, dass wir $f(A)$ für stetige Funktionen $f$ definieren. Dies wird *stetiger Funktionalkalkül* genannt.

**6.7 Satz.** *Sei $A \in \mathcal{B}(H)$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum $H$. Dann gibt es genau eine Abbildung $C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(H)$; $f \mapsto f(A)$ welche folgende Eigenschaften hat:*

*(1)* $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$, $(\lambda f)(A) = \lambda \cdot f(A)$, $(fg)(A) = f(A) \circ g(A)$, $c_1(A) = \mathrm{id}_H$, *wobei* $c_1(x) = 1$ *für jedes* $x \in \sigma(A)$,

*(2)* $\overline{f}(A) = (f(A))^*$.

*(3) Es gibt $C > 0$ so dass $\|f(A)\| \leq C \sup_{x\in\sigma(A)} |f(x)|$ für alle $f \in C(\sigma(A))$..*

*(4)* $\mathrm{id}_{\sigma(A)}(A) = A$, *wobei* $\mathrm{id}_{\sigma(A)}(x) = x$ *für alle* $x \in \sigma(A)$.

*Außerdem hat diese Abbildung folgende Eigenschaften:*

*(5)* *Falls* $Av = \lambda v$, *dann gilt* $f(A)v = f(\lambda)v$.

*(6)* $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

*(7)* *Falls* $f \geq 0$, *dann auch* $f(A) \geq 0$.

*(8)* $\|f(A)\| = \sup_{x\in\sigma(A)} |f(x)|$ *für alle* $f \in C(\sigma(A))$.

*(9)* *Falls* $B \in \mathcal{B}(H)$ *mit* $A$ *kommutiert, also* $AB = BA$, *dann gilt für alle* $f \in C(\sigma(A))$, *dass* $Bf(A) = f(A)B$.

Ein Teil des Beweises ist recht einfach. Wegen der Linearität und Multiplikativität hat $f(A)$ die übliche Bedeutung, wenn $f \in \mathbb{C}[x]$ ein *Polynom* ist. Da $A$ selbsadjungiert ist, gilt für Polynome auch $\overline{f}(A) = (f(A))^*$.

## 6.2 Satz von Weierstrass über Approximation durch Polynome

Um von den Polynomen auf weitere stetige Funktionen schließen zu können, brauchen wir den *Approximationssatz von Weierstrass*:

**6.8 Satz.** *Sei* $K \subset \mathbb{R}$ *kompakt. Dann ist die Menge der Polynomfunktionen* $\mathbb{C}[x]$ *(also der Einschränkungen von Polynomen mit komplexen Koeffizienten auf* $K$*) dicht in* $C(K;\mathbb{C})$ *mit Supremumsnorm.*

*Beweis.* Beachte:

(1) es gibt $R > 0$ so dass $K \subset [-R, R]$.

(2) Da $K \subset [-R, R]$ abgeschlossen, kann man jede stetige Funktion auf $K$ zu einer stetigen Funktion auf $[-R, R]$ fortsetzen, z.B. in dem man in den Definitionslücken einfach linear verbindet. In Formeln ist

$$F(x) := f(\sup\{p \in K \mid p < x\})+(x-\sup\{p \in K \mid p < x\})(f(\inf\{p \in K \mid p > x\})-f(\sup\{p \in K \mid p$$

eine stetige Fortsetzung von $f \in C(K)$.

(3) Es genügt also, dass $\mathbb{C}[x]$ dicht in $C[-R, R]$, dann ist $\mathbb{C}[x]$ erst recht dicht in $C(K)$.

(4) Technische Vereinfachung: wir werden zu jedem $f \in C[-2R, 2R]$ und $\epsilon > 0$ ein $p \in \mathbb{C}[x]$ finden, so dass $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ für alle $x \in [-R, R]$. Da man ja auch jede stetige Funktion auf $[-R, R]$ zu einer stetigen Funktion auf $[-2R, 2R]$ fortsetzen kann, folgt daraus, dass $\mathbb{C}[x]$ dicht in $C[-R, R]$ liegt.

Zum Beweis verwenden wir nun wieder geeignete Integraloperatoren.

Falls für $f \in C([-2R, 2R])$ die Funktion $Ff$ durch $Tf(x) = \int_{-2R}^{2R} p(x - y)f(y)\,dy$ definiert ist, und falls $p$ ein Polynom, so ist auch $Tf$ ein Polynom.

Unser Ziel ist jetzt, durch geeignete Wahl von $p$ zu erreichen, dass $Tf - f$ kleine Supremumsnorm hat.

Wir benutzen folgendes Hilfslemma über gleichmäßige Approximation bei Faltung mit geeignet an der Null konzentrierten Funktionen.

**6.9 Lemma.** *Falls $p_n(x)\colon [-3R, 3R] \to [0, \infty)$ stetig mit folgenden Eigenschaften:*

*(1)* $\int_{-3R}^{3R} p_n(x) = 1$

*(2)* $\forall \epsilon, \delta > 0$ *existiert* $n \in \mathbb{N}$ *so dass* $|p_k(x)| < \epsilon$ *für alle* $|x| > \delta$ *und alle* $k \geq n$.

*Dann gilt* $\sup_{x \in [-R,R]} |(f - T_n f)(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

*Beweis.* Zu vorgegebenen $\epsilon > 0$, da $\left| \int_{-2R}^{2R} p_n(x-y)\, dy - 1 \right| < \epsilon$ für $n$ genügend groß, gilt

$$\left| \int_{-2R}^{2R} p_n(x-y) f(x)\, dy - f(x) \right| < \epsilon \left| f(x) \right|.$$

Da $[-2R, 2R]$ kompakt und $f$ stetig, gibt es $C > 0$ so dass $|f(x) - f(y)| < C$ für alle $x, y \in [-2R, 2R]$. Also

$$\begin{aligned} |T_n f(x) - f(x)| &\leq \int_{-2R}^{2R} p_n(x-y) \left| f(y) - f(x) \right| \, dy + \epsilon C \\ &= \int_{|x-y|>\delta} p_n(x-y) \left| f(y) - f(x) \right| \, dy + \int_{|x-y|<\delta} p_n(x-y) \left| f(y) - f(x) \right| \, dy. \end{aligned}$$

Ausserdem gibt es, da $f$ sogar gleichmäßig stetig, zu vorgegebenen $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ wenn $|x - y| < \delta$. Für dieses $\delta > 0$ somit

$$\int_{|x-y|<\delta} p_n(x-y) \left| f(y) - f(x) \right| \, dy \leq \int_{|x-y|<\delta} p_n(x-y) \epsilon \, dy \leq \epsilon.$$

Nach Voraussetzung kann man dann noch $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n > N$ gilt $|p_k(x-y)| < \epsilon/4RC$ für $|x - y| > \delta$. Somit

$$\int_{|x-y|>\delta} p_n(x-y) \left| f(x) - f(y) \right| \, dy \leq \epsilon.$$

$\square$

Zum Beweis des Satzes von Weierstrass muss man jetzt also nur noch *Polynome* $p_n$ finden, welche die Voraussetzungen unseres Hilfslemmas erfüllen. Als Spezialfall betrachte zunächst $3R = 1$.

Dann hat $p_n(x) = c_n(1-x)^{2n}$ die gewünschten Eigenschaften, wenn man $c_n := 1/\int_{-1}^{1}(1-x)^{2n}\, dx$ setzt.

Klar ist, dass $p_n \geq 0$, und $\int_{-1}^{1} p_n = 1$. Da $c_n = n + 1/2$ und $p_n$ auf $[0,1]$ monoton fallend, gilt für $1 \geq |x| \geq \delta > 0$, dass $p_n(x) \leq (n+1)(1-\delta)^{2n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Für beliebige $R > 0$ benutze $\frac{1}{R} p_n(x/R)$. $\square$

## 6.3 Spektrum und Norm

*Fortsetzung des Beweises von Satz 6.7.* Wir haben bereits gesehen, dass für Polynome $f, g$ die Aussagen (1), (2), (4) gelten.

Wir wollen als nächstes zeigen, dass für Polynome (3) gilt. Hierzu werden wir benötigen, dass $A$ selbstadjungiert ist (was bisher noch nicht relevant war). Da die Polynome nach Satz von Weierstrass dicht in allen Funktionen liegen, folgt dann, dass es genau eine stetige Fortsetzung der Zuordnung $f \mapsto f(A)$ auf ganz $C(\sigma(A))$ gibt.

Stetigkeit aller relevanten Operationen impliziert dann gleichzeitig, dass weiterhin auch (1) und (2) für alle $f \in C(\sigma(A))$ gilt. □

Wir müssen also die Norm von $p(A)$ für ein Polynom $p$ bestimmen. Dies wollen wir mit Hilfe des Spektrum durchführen.

**6.10 Lemma.** *Sei $p \in \mathbb{C}[x]$. Dann gilt*

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

*Beweis.* Hierzu zerlegen wir mit dem Hauptsatz der Algebra für $\mu \in \mathbb{C}$ das Polynom $p(x) - \mu$ in Linearfaktoren: $p(x) - \mu = \prod(x - \mu_i)$. Wir müssen untersuchen, für welche $\mu$ der Ausdruck

$$p(A) - \mu = \prod(A - \mu_i)$$

nicht invertierbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn mindestens eines der $A - \mu_i$ nicht invertierbar ist. Also $\mu \in \sigma(p(A))$ genau dann, wenn mindestens eine der Wurzeln $\mu_i$ von $p(x) - \mu$ in $\sigma(A)$ liegt.

Die $\mu_i$ sind aber genau die komplexen Zahlen, so dass $p(\mu_i) = \mu$. Also gilt tatsächlich $p(\sigma(A)) = \sigma(p(A))$. □

Dies ist deshalb nützlich, weil für beschränkte Operatoren auf einem Hilbertraum die folgende *fundamentale Norm-Gleichung* gilt.

**6.11 Satz.** *Sei $H$ Hilbertraum und $A \in \mathcal{B}(H)$. Dann gilt*

$$\|A\|^2 = \|A^*A\|.$$

**6.12 Bemerkung.** Diese Gleichung ist so wichtig, dass eine ganze eigene Klasse von Algebren, die $C^*$-Algebren, auf dieser Eigenschaft aufgebaut sind. Fundamentales Beispiel für $C^*$-Algebren ist $\mathcal{B}(H)$ für einen Hilbertraum $H$.

*Beweis von Satz 6.11.* Weil die Norm submultiplikativ ist, gilt

$$\|T^*T\| \le \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2.$$

Andererseits gilt

$$\|T\|^2 = \sup_{|x|=1} \|Tx\|^2 = \sup_{|x|=1} \langle Tx, Tx\rangle = \sup_{|x|=1} \langle T^*Tx, x\rangle \le \|T^*T\|$$

□

Um dies richtig nutzen zu können, brauchen wir noch einen zweiten fundamentalen Satz. Dieser verbindet das Spektrum mit der Norm.

**6.13 Satz.** *[Formel für den Spektralradius]*
*Sei $X$ Banachraum und $B \in \mathcal{B}(X)$. Dann gilt*

$$r(B) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(B)\} = \lim_{n\to\infty} \|B^n\|^{1/n}.$$

*Hierbei heißt $r(b)$ der* Spektralradius *von $B$. Ein Teil der Aussage ist, dass der Limes auf der rechten Seite tatsächlich existiert.*

**6.14 Korollar.** *Ist $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum, so gilt $\|A\| = r(A)$.*

*Beweis.* Hier gilt ja $\left\|A^2\right\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$, also induktiv $\left\|A^{2^n}\right\| = \|A\|^{2^n}$, somit $\lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k} = \lim_{n\to\infty} \left\|A^{2^n}\right\|^{2^{-n}} = \|A\|$. □

*Beweis von Satz 6.13.* Wenn $|z| > r(A)$ existiert (nach Definition) $(A-z)^{-1}$. Noch besser: für $|1/z| > \|A\|$ gilt ja

$$(A - 1/z)^{-1} = (-(1 - Az)/z)^{-1} = -z\sum_{k=0}^{\infty} A^n z^n.$$

Aus der Funktionentheorie weiß man nun aber, dass diese Reihe auf dem größten Kreis, auf dem die dargestellte Funktion holomorph ist, konvergiert, hier also für alle $z$ so dass $|1/z| > \rho(A)$ (nach Definition von $\rho(A)$). (Ohne banachraumwertige Funktionentheorie würde man dies folgern, nachdem man ein beliebiges $\phi \in \mathcal{B}(X)'$ angewendet hat). Andererseits wissen wir, dass die Reihe überall wo sie konvergiert die Inverse von $(A - 1/z)$ darstellt. Wegen der Definition von $\rho(A)$ kann sie also auf keinem größeren Kreis konvergieren, also ist der Konvergenzradius $1/\rho(A)$. Wende nun den (banachraumwertigen) Satz von Hadamard über den Konvergenzradius von Potenzreihen an. Man erhält

$$\rho(A) = \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Wir werden gleich sehen, dass $\rho(A) \le \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$, und man erhält das gewünschte Ergebnis.

Alternativ, ohne vektorwertige Funktionentheorie gilt für jedes $\phi \in \mathcal{B}(X)'$ und $|1/z| > \rho(A)$, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\phi(A^n)z^n| < \infty$.

Wende nun für festes $z$ den Satz 3.22 über gleichmäßige Beschr"'anktheit auf die Elemente aus $\mathcal{B}(\mathcal{B}(X)', \mathbb{C})$ an, die durch Einsetzen der $A^n/z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) in $\phi$ gegeben sind —wir benutzen hier also die isometrische Einbettung von $\mathcal{B}(X)$ in $\mathcal{B}(X)''$. Es folgt, dass es $C_z$ gibt mit $\|A^n/z^n\| \le C_z$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also $\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \le 1/|z|$. Da dies für alle $z$ mit $|1/z| > \rho(A)$ gilt, folgt $\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \le \rho(A)$.

Andererseits gilt wegen Lemma 6.10, dass $\rho(A^n) = \rho(A)^n$, und wir wissen bereits dass $\rho(A^n) \le \|A^n\|$. Somit $\rho(A) \le \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$, und es folgt Konvergenz und Gleichheit

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

□

## 6.4 Stetiger Funktionalkalkül II

*Fortsetzung des Beweises von Satz 6.7.* Sei also $p \in \mathbb{C}[x]$. Wir wollen als nächstes die Normgleichung (8) für $p(A)$ zeigen. Beachte dazu

$$\begin{aligned}\|p(A)\|^2 &= \|p(A)(p(A))^*\| = \|p \cdot \overline{p}(A)\| \\ &= \rho(p \cdot \overline{p}(A)) = \sup\{\left|p(\lambda)\overline{p(\lambda)}\right| \mid \lambda \in \sigma(A)\} = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |p(\lambda)|^2 .\end{aligned}$$

Da nach Satz von Weierstrass die Polynome dicht in $C(\sigma(A))$ liegen, existiert genau eine stetige Fortsetzung $C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(H); f \mapsto f(A)$.

Übergang zu Grenzwerten und Stetigkeit der relevanten Operationen zeigt, dass die Eigenschaften (1), (2), (8), (9) und (4) für beliebige stetige Funktionen $f$ gelten.

Falls $Av = \lambda v$, folgt $p(A)v = p(\lambda)v$ für jedes $p \in \mathbb{C}[x]$, und Stetigkeit impliziert (6) für jedes $f \in C(\sigma(A))$.

Für die Positivität in (7) beachte, dass $f \geq 0$ impliziert, dass $f = \sqrt{f}^2$, und auch $\sqrt{f} \in C(\sigma(A))$. Somit $f(A) = \sqrt{f}(A)^2 = \sqrt{f}(A) \cdot (\sqrt{f}(A))^* \geq 0$, unter Benutzung von Lemma 6.4.

Zu guter Letzt, falls $\lambda \notin f(\sigma(A))$, dann ist $g := (f - \lambda)^{-1}$ eine auf $\sigma(A)$ definierte stetige Funktion. Somit wegen Multiplikativität $g(A)(f(A) - \lambda) = 1 = (f(A) - \lambda)g(A)$, also $\lambda \notin \sigma(f(A))$.

Falls umgekehrt $\mu \in \sigma(A)$ mit $f(\mu) = \lambda$, wähle approximative Eigenvektoren für $\mu$, also $v_n \in H$ mit $|v_n| = 1$ und $(A - \mu)v_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Sei $p_k \in \mathbb{C}[x]$ eine Folge von Polynomen, welche in $C(\sigma(A))$ gegen $f$ konvergiert. Dann gilt $(f(A) - \lambda)v_n = (f(A) - f(\mu))v_n = (f(A) - p_k(A))v_n + (p_k(A) - p_k(\mu))v_n + (p_k - f)(\mu)v_n$.

Sei $\epsilon > 0$ Da $|v_n| = 1$ können durch geeignete Wahl von $k$ der erste und dritte Summand unabhängig von $n$ in Norm kleiner als $\epsilon$ gemacht werden. Für dieses $k$ gilt nun $p_k(A) - p_k(\mu) = q_k(A, \mu)(A - \mu)$ für ein geeignetes Polynom $q_k$ (wende die binomische Formel auf alle Monome von $p_k$ an). Für dieses feste $k$ ist also für alle genügend großen $n$ $|(p_k(A) - p_k(\mu))v_n| \leq \|q_k(A, \mu)\| \, |(A - \mu)v_n| < \epsilon$.

Somit kann $(f(A) - \lambda)v_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ aber $|v_n| = 1$, so dass $f(A) - \lambda$ keine beschränkte Inverse haben kann, also $\lambda \in \sigma(A)$. □

## 6.5 Spektralsatz im Fall von Eigenwerten

Sei $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert und $\lambda \in \sigma(A)$ ein isolierter Punkt, also $(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$ für genügend kleines $\epsilon > 0$.

Dies ist z.B. automatisch dann der Fall, wenn $\dim(H) < \infty$, denn dann besteht $\sigma(A)$ genau aus den endlich vielen Eigenwerten von $A$.

Dies ist auch automatisch der Fall wenn $A$ kompakt und $\lambda \neq 0$, aus unserer Kenntnis des Spektrums von kompakten Operatoren.

In diesem Fall ist $\chi_{\{\lambda\}}$, die charakteristische Funktion der Menge $\{\lambda\}$, eine stetige Funktion auf $\sigma(A)$. (Es handelt sich natürlich nicht um eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$, aber bei der Definition von Stetigkeit geht der Definitionsbereich ja entscheidend mit ein.)

Somit ist $P := \chi_{\{\lambda\}}(A)$ definiert. Funktionalkalkül impliziert dass $P^2 = P = P^*$ (da $\chi$ die entsprechenden Eigenschaften hat), $P \colon H \to H$ ist also die orthogonale Projektion auf $\mathrm{im}(P)$.

Außerdem gilt $x\chi_{\{\lambda\}}(x) = \lambda\chi_{\{\lambda\}}(x)$ für alle $x \in \sigma(A)$, also $APv = \lambda Pv$, d.h. $\mathrm{im}(P)$ besteht aus Eigenvektoren von $A$ zum Eigenwert $\lambda$.

Ist umgekehrt $Av = \lambda v$, so $Pv = \chi_{\{\lambda\}}(\lambda)v = v$, also ist $\mathrm{im}(P)$ genau der Eigenraum von $A$ zum Eigenwert $\lambda$.

Falls $\dim(H) < \infty$ und $\sigma(A) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k\}$, wobei die $\lambda_i$ die verschiedenen Eigenwerte von $A$ sind, setze $\chi_i := \chi_{\{\lambda_i\}}$ und $P_i := \chi_i(A)$.

Dann kann man jedes $f \in C(\sigma(A))$ schreiben als $f = \sum \alpha_i \chi_i$ mit geeigneten $\alpha_i \in \mathbb{C}$, und $f(A) = \sum \alpha_i P_i$. D.h. $f(A)$ ist einfach dadurch gegeben, dass die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_i$ mit $\alpha_i$ multipliziert werden.

Falls $\dim(H) = \infty$, kann man natürlich nicht erwarten, dass das Spektrum diskret ist. Im Gegenteil, $\sigma(A) = [-\|A\|, \|A\|]$ kommt ebenfalls oft vor.

Trotzdem würde man gerne die Eigenräume oder einen Ersatz für sie mit Hilfe des Funktionalkalküls untersuchen.

Problem ist, dass nun Funktionen wie $\chi_{\{\lambda\}}$ nicht mehr stetig auf $\sigma(A)$ sind. Der Ausweg daraus ist, den Funktionalkalkül auf weitere, auch unstetige, Funktionen zu verallgemeinern.

## 6.6 Messbarer Funktionalkalkül

Zunächst muss man sich einigen, auf welchen Funktionenraum die Verallgemeinerung erfolgen soll. Wir legen uns folgendermaßen fest:

**6.15 Definition.** $B(\mathbb{R})$ sei der Raum der Borel-messbaren und beschränkten ($\mathbb{C}$-fertigen) Funktionen auf $\mathbb{R}$. Dieser Vektorraum werde mit der Supremumsnorm versehen.

**Achtung:** Es handelt sich nicht um $L^\infty(\mathbb{R})$; die Werte auch auf jeder Nullmenge spielen eine Rolle.

Für all diejenigen, die messbare Funktionen nicht kennen, und für den gleich zu beweisenden Satz geben wir noch folgende äquivalente Charakterisierung an:

**6.16 Lemma.** *$B(\mathbb{R})$ ist die kleinste Menge von beschränkten Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so dass folgendes gilt:*

*(1) jede stetige beschränkte Funktion gehört zu $B(\mathbb{R})$.*

*(2) Falls $f_n \in B(\mathbb{R})$ und $C > 0$ so dass $|f|_\infty \le C$, und falls $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ($f$ ist also punktweiser Limes der $f_n$), dann gilt $f \in B(\mathbb{R})$.*

*Es gilt dann: $B(\mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm ist ein Banachraum.*

*Beweis.* Da wir uns nicht zu sehr mit den Feinheiten messbarer Mengen plagen wollen, wird der erste Satz als Definition genommen, für einen Beweis vergleiche Lemma VII.1.5 in Werner: Funktionalanalysis.

Da die Menge aller beschränkten Funktionen die beschriebene Eigenschaft hat, gibt es auch den „kleinsten" Raum von Funktionen mit der oben beschriebenen Form: es ist einfach der Schnitt über alle Teilräume $U$ welche die stetigen Funktionen enthalten, und welche abgeschlossenen unter dem beschriebenen Limesprozess sind.

Hierbei handelt es sich um einen Banachraum: falls nämlich $f_n \in B(\mathbb{R})$ eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm bildet, so gibt es $C > 0$ mit

$|f_n|_\infty \le C$ für alle $n$. Außerdem sind dann alle $f_n(t)$ Cauchyfolgen, die Folge $f_n$ konvergiert also Punktweise. Nach der Definition gehört dann auch der Limes zu $B(\mathbb{R})$. $\square$

**6.17 Bemerkung.** Entsprechende Definitionen macht man für jeden kompakten metrischen Raum $M$, erhält so $B(M$.

**6.18 Definition.** $X \subset \mathbb{R}$ ist *Borel-messbar* genau dann, wenn die charakteristische Funktion $\chi_X$ mit $\chi_X(t) = \begin{cases} 1; & t \in X \\ 0; & t \notin X \end{cases}$ zu $B(\mathbb{R})$ gehört.

Nun kann man folgenden Satz beweisen, der den stetigen Funktionalkalkül entsprechend erweitert, und der Ziel dieses Abschnitts ist:

**6.19 Satz.** *Sei $A \in \mathcal{B}(H)$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum $H$. Sei $B(\mathbb{R})$ die Menge der (Borel)-messbaren beschr"ankten komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Auf dieser Menge benutzen wir die gewöhnlich Supremumsnorm (es werden also* nicht *Nullmengen ignoriert). Dann gibt es genau eine Abbildung $B(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(H)$; $f \mapsto f(A)$ welche folgende Eigenschaften hat:*

*(1) $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$, $(\lambda f)(A) = \lambda \cdot f(A)$, $(fg)(A) = f(A) \circ g(A)$, $c_1(A) = \mathrm{id}_H$, wobei $c_1(x) = 1$ für jedes $x \in \sigma(A)$,*

*(2) $\overline{f}(A) = (f(A))^*$.*

*(3) Es gibt $C > 0$ so dass $\|f(A)\| \le C \sup_{x\in\sigma(A)} |f(x)|$ für alle $f \in B(\mathbb{R})$)..*

*(4) $\mathrm{id}_{\sigma(A)}(A) = A$, wobei $\mathrm{id}_{\sigma(A)}(x) = x$ für alle $x \in \sigma(A)$.*

*(5) Falls $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und es $C > 0$ gibt, so dass $|f_n|_\infty \le C$ für alle $n$, dann gilt*

$$f_n(A)v \xrightarrow{n\to\infty} f(A)v \qquad \forall v \in H.$$

*Außerdem hat diese Abbildung folgende Eigenschaften:*

*(6) Falls $Av = \lambda v$, dann gilt $f(A)v = f(\lambda)v$.*

*(7) Falls $f \ge 0$, dann auch $f(A) \ge 0$.*

*(8) $\|f(A)\| \le \sup_{x\in\sigma(A)} |f(x)|$ für alle $f \in B(\mathbb{R})$.*

*(9) Falls $B \in \mathcal{B}(H)$ mit $A$ kommutiert, also $AB = BA$, dann gilt für alle $f \in B(\mathbb{R})$, dass $Bf(A) = f(A)B$.*

Zu diesem Satz gibt es eine Reihe leicht verschiedener Lösungsansätze. Wie im stetigen Funktionalkalkül stellen sich zwei Aufgaben: Einerseits Konstruktion der Operatoren $f(A)$ für $f \in B(\mathbb{R})$, und andererseits Beweis der Eigenschaften.

Es soll eine wichtige Konsequenz aufgezeigt werden:

**6.20 Korollar.** *Sei $X \subset \mathbb{R}$ messbar. Dann ist die charakteristische Funktion $\chi_X$ ein Element von $B(\mathbb{R})$. $\chi_X(A)$ ist ein Ersatz für die Projektion auf die Summe der Eigenräume zu Eigenwerten in $X$*

*Es gilt. Die Abbildung $X \mapsto \chi_X(A)$ ist eine Abbildung, die jeder messbaren Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine orthogonale Projektion*

Zum Beweis des Spektralsatzes benötigen wir eine Konsequenz des Riesz-schen Darstellungssatzes aus der Maßtheorie:

**6.21 Proposition.** *Sei $X$ kompakter metrischer Raum (in unserem Fall $X \subset \mathbb{R}$) und $(\phi\colon C(X) \to \mathbb{C}) \in C(X)'$. Dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung $(\overline{\phi}\colon B(X) \to \mathbb{C}) \in B(X)'$.*

*Die Abbildung $C(X)' \to B(X)'$; $\phi \mapsto \overline{\phi}$ ist linear und Normerhaltend, also $\|\overline{\phi}\| = \|\phi\|$.*

*Dabei gilt sogar: falls $f_n \in B(X)$ mit $|f_n|_\infty < C$ und falls $f$ der punktweise Grenzwert der $f_n$ ist, so gilt $\overline{\phi}(f_n) \xrightarrow{n\to\infty} \overline{\phi}(f)$.*

*Beweis.* Hierzu wird tatsächlich eine ganze Menge Maßtheorie benötigt: der Satz von Riesz sagt, dass die Abbildung $\phi$ gegeben ist durch

$$\phi(f) = \int_X f(x)\, d\mu_\phi,$$

wobei $\mu_\phi$ eindeutig durch $\phi$ festgelegtes Borelmaß auf $X$ ist. Zusatzkomplikation: dieses Maß ist im allgemeinen *komplexwertig*, d.h. für jedes Borel-messbare Teilmenge $A \subset X$ ist $\mu_\phi(A) \in \mathbb{C}$.

$\mu_\phi$ hat *endliche Variation*, d.h. es gibt $\|\mu_\phi\| < \infty$, so dass $\sum |\mu_\phi(E_i)| \le C$ für jede endliche disjunkte Zerlegung $X = E_1 \cup \cdots \cup E_n$ in messbare Mengen, und im Satz von Riesz gilt $\|\phi\| = \|\mu_\phi\|$.

Wie dem auch sei, man kann mit diesen Maßen genauso integrieren wie üblich, und insbesondere gilt

$$\overline{\phi}(f) := \int_X f\, d\mu_\phi$$

für jedes $f \in B(X)$, mit $\left|\overline{\phi}(f)\right| \le |f|_\infty \cdot \|\mu_\phi\|$. Insbesondere $\left\|\overline{\phi}\right\| = \|\mu_\phi\| = \|\phi\|$.

Der letzte Satz ist dann eine direkte Folge des Satzes von Lebesgue über dominierte Konvergenz. □

Wir beweisen den messbaren Funktionalkalkül jetzt in mehreren Schritten:

**6.22 Lemma.** *Sei $X \subset \mathbb{C}$ kompakt. Sei $\alpha\colon C(X) \to \mathcal{B}(H)$ stetig, linear, und erfülle $\alpha(\overline{f}) = \alpha(f)^*$ für alle $f \in C(X)$ (dann heißt $\alpha$ ein $*$-Homomorphismus).*

*Dann gibt es eindeutige stetige Fortsetzung $\overline{\alpha}\colon B(X) \to \mathcal{B}(H)$, welche ebenfalls $*$-Homomorphismus ist. Es gilt $\|\overline{\alpha}\| = \|\alpha\|$.*

*Beweis.* Fixiere $v, w \in H$. Dann ist die Abbildung $\alpha_{v,w}\colon C(X) \to \mathbb{C}; f \mapsto \langle v, \alpha(f)w\rangle$ linear und erfüllt

$$|\alpha_{v,w}(f)| \le |v|\,|w|\,\|\alpha\|\,\|f\|_\infty\,. \tag{6.23}$$

Damit gibt es wegen Proposition 6.21 stetige Fortsetzung $\overline{\alpha_{v,w}}\colon B(H) \to \mathbb{C}$.

Die Abbildung $(v,w) \mapsto \alpha_{v,w}$ ist konjugiert linear in $v$ und linear in $w$, also ist auch $(v,w) \mapsto \overline{\alpha_{v,w}}$ konjugiert linear in $v$ und linear in $w$; hier wird ausgenutzt, dass der „Fortsetzungsoperator" aus Proposition 6.21 linear ist. Insbesondere ist, wenn man ein festes $f \in B(X)$ einsetzt, die Abbildung $H \times H \to \mathbb{C}; (v,w) \mapsto \overline{\alpha_{v,w}}(f)$ konjugiert linear in $v$ und linear in $w$.

Wegen der Abschätzung (6.23) ist diese Abbildung außerdem linear. Für festes $w$ hat man also eine stetige lineare Abbildung $H \to \mathbb{C}; v \mapsto \overline{\alpha_{v,w}}(f)$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es dann $x_{f,w} \in H$, so dass $\overline{\alpha_{v,w}}(f) = \langle v, x_{f,w}\rangle$, und mit $|x_{f,w}| \leq \|\alpha\| \, |f|_\infty \, |w|$.

Definiere $\overline{\alpha}(f)(w) := x_{f,w}$. Man sieht ähnlich wie eben, dass die Abbildung $w \mapsto \overline{\alpha}(f)(w)$ linear in $w$ ist, somit hat man eine lineare Abbildung $\overline{\alpha}(f)$ mit $\|\overline{\alpha}\| \leq \|\alpha\| \cdot |f|_\infty$ definiert. Falls $f \in C(X)$, gilt nach Konstruktion $\overline{\alpha}(f) = \alpha(f)$.

Da $\overline{\alpha_{v,w}}\colon B(H) \to \mathbb{C}$ linear ist, ergibt sich, dass $\overline{\alpha}\colon B(H) \to \mathcal{B}(H)$ ebenfalls linear ist, und obige Abschätzung sagt $\|\overline{\alpha}\| = \|\alpha\|$.

Die Eindeutigkeitsaussage aus Proposition 6.21 impliziert und aus dem Rieszschen Darstellungssatz impliziert, dass $\overline{\alpha}$ eindeutig ist.

Betrachtet man nun $\beta\colon C(X) \to \mathcal{B}(H); f \mapsto \alpha(\overline{f})^*$, so folgt da $\beta = \alpha$ auch $\overline{\beta} = \overline{\alpha}$. Andererseits ist auch $f \mapsto \overline{\alpha}(\overline{f})^*$ eine Fortsetzung von $\beta$, wegen der Eindeutigkeit also $\overline{\alpha}(f) = \overline{\alpha}(\overline{f})^*$. □

*Beweis von Satz 6.19.* Wende Lemma 6.22 auf die Abbildung $C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(H); f \mapsto f(A)$ an. Damit erhält man die eindeutige Fortsetzung $B(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(H); f \mapsto f(A)$.

Der Satz über dominierte Konvergenz, in Form der zweiten Aussage von Proposition 6.21 liefert für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ welche gleichmäßig beschränkt ist und welche Punktweise gegen $f$ konvergiert:

$$\langle v, f_n(A)w\rangle = \overline{\phi}_{v,w}(f_n) \xrightarrow{n\to\infty} \overline{\phi}_{v,w}(f) = \langle v, f(A)w\rangle.$$

Daraus kann man schon folgern, dass $f_n(A)v \xrightarrow{f} (A)v$. Es gilt nämlich

$$\langle f_n(A)v, f_n(A)v\rangle = \langle v, f_n(A)^* f_n(A)v\rangle = \langle v, |f_n|^2\,(A)v\rangle \xrightarrow{v,|f|^2(A)v} = |f(A)v|\,.$$

Setze nun $y_n = f_n(A)v$ und $y = f(A)v$. Dann gilt

$$\langle y_n - y, y_n - y\rangle = |y_n|^2 - \langle y_n, y\rangle - \langle y, y_n\rangle + |y|^2 \xrightarrow{n\to\infty} |y|^2 - \langle y, y\rangle - \langle y, y\rangle + |y|^2 = 0.$$

Die verbleibenden Eigenschaften des Satzes ergeben sich nun durch Limesbildung. Eindeutigkeit folgt, da $B(H)$ der „Abschluss“ der stetigen Funktionen unter punktweisem (gleichmäßig beschränktem) Limes ist. Genauer: sei $\mathcal{V}$ die Menge der Unterräume von $B(H)$, auf denen die Fortsetzung mit den gewünschten Eigenschaften eindeutig ist. Hierauf gibt es eine Anordnung durch Inklusion. Jede linear geordnete Kette hat eine obere Schranke (nämlich ihre Vereinigung). Sei also nach Lemma von Zorn $V \in \mathcal{V}$ ein maximaler solcher Unterraum. Wäre $V \neq B(H)$, so gäbe es $f_n \in V$ mit $\sup_n |f_n|_\infty < \infty$ und mit punktweisem Limes $f \notin V$: da $B(H)$ der kleinste Funktionenraum, der abgeschlossen unter diesen punktweisen Limiten ist. Dann wäre aber nach der Formel für den Punktweisen Limes auch $f(A)$ eindeutig festgelegt, somit die Fortsetzung eindeutig auf $V + < f >$. Dies Widerspräche der Maximalität, also gilt $V = B(H)$.

□

Der Spektralsatz hat eine äquivalente Umformulierung, die sagt, dass man jeden selbstadjungierten Operator eigentlich als Multiplikationsoperator auffassen kann.

**6.24 Satz.** *Sei $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert, $H$ separabler Hibertraum.*

*Dann existiert ein Maßraum $(\Omega, \mu)$, eine beschränkte messbare Funktion $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und ein unit"arer Operator $U\colon L^2(\Omega,\mu) \to H$, so dass*

$$(U^{-1}g(A)U)\phi = g \circ F \cdot \phi \qquad \forall \phi \in L^2(\Omega,\mu).$$

*Tatsächlich kann $\Omega$ als disjunkte Vereinigung von Kopien von $\mathbb{R}$ gewählt werden, und $F$ auf jeder dieser Kopien als die Identität.*

*Beweis.* Für den Beweis ziehe man die Lehrbuchliteratur heran. □

**6.25 Bemerkung.** Die Wahl einer Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_n)$ eines endlich dimensionalen Hilbertraums $H$ kann man auch als Isomorphismus $U \colon \mathbb{C}^n \to H$ auffassen, welcher das Skalarprodukt erhält (also endlich dimensional ist), indem man $U(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum \lambda_i e_i$ setzt.

Diese Version des Spektralsatzes aus Satz 6.24 sagt folgendes: in einem verallgemeinerten Sinn ist der unitäre Operator $U$ eine Basis, er stellt einen isometrischen Isomorphismus zwischen $H$ und einem Standard-Hilbertraum $L^2(\Omega, \mu)$ dar.

Man muss dann die Werte $\phi(x)$ der Funktion $\phi \in L^2(\Omega)$ als die „Koeffizienten“ bezüglich der Darstellung auffassen (das darf man natürlich nicht zu erst nehmen, denn dann müssten die charakteristischen Funktion $\chi_{\{x\}}$ ja eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega)$ darstellen, was sie in der Regel nicht tun).

Nichtdestotrotz: in dieser Darstellung wird der Operator $A$ dann zum „Diagonaloperator“, indem er nämlich den Koeffizienten $\phi(x)$ mit der Zahl $G(x)$ multipliziert (und mit der Zusatzbemerkung, dass $\Omega$ aus vielen Kopien von $\mathbb{R}$ besteht, ist sogar $G(x) = x$).

Es ist dann auch klar, wie in dieser Darstellung eine Funktion $f(A)$ von $A$ aussehen müssen: statt mit $G(x)$ zu multiplizieren, muss man mit $f(G(x))$ multipliziert werden; dies verallgemeinert in kanonischer Weise, wie sich der Operator $A^n$ darstellt.

Man sieht natürlich hauch, dass im allgemeinen keine Diagonaldarstellung durch Eigenräume möglich ist, das kanonische Beispiel ist vielleicht der Operator $A \colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1]); Af(x) = xf(x)$.

Trotzdem kann man von „Spektralbereichen“ sprechen: zum Interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ gehört der Unterraum $\chi_{[a,b]}(A)(L^2([0,1]))$ (Bildraum des Spektralprojektors $\chi_{[a,b]}(A)$). Hierbei handelt es sich um $\{f \in L^2[0,1] \mid f(x) = 0 \text{ falls } x \notin [a, b]\}$.

# 7 Unbeschränkte Operatoren

**7.1 Beispiel.** Sei $H = L^2(\mathbb{R})$, und $D := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} x^2 \left|f(x)\right|^2 \, dx < \infty\}$.

Definiere $T \colon D \to L^2(\mathbb{R})$ durch $Tf(x) = xf(x)$.

Dies ist eine lineare, aber (bezüglich der $L^2$-Norm) nicht stetige Abbildung, da $\left|T\chi_{[n,n+1]}\right|_{L^2} \geq n$, aber $\left|\chi_{[n,n+1]}\right|_{L^2} = 1$.

Falls $D_2 := C_c^\infty(\mathbb{R})$, so ist $T_2 \colon C_c^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}); f \mapsto f'$ bezüglich der $L^2$-Norm unbeschränkt.

Bis auf Konstanten handelt es sich bei $T$ und $T_2$ um den Orts- und den Impulsoperator aus der Quantenphysik.

Der Erfolg mit den selbstadjungierten Operatoren auf Hilberträumen bringt uns nun dazu, diese Operatoren doch als Operatoren auf $L^2$ aufzufassen, aber als unbeschränkte, die auch nicht auf ganz $L^2$ definiert sind.

**7.2 Definition.** Ein *dicht definierter Operator* (oft auch *unbeschränkter Operator* oder einfach *Operator* genannt) auf einem Hilbertraum $H$ ist eine lineare Abbildung $T \colon D \to H$, wobei $D \subset H$ ein dichter Unterraum, der sogenannte *Definitionsbereich.*

Zu einem Operator gehört also sowohl der Definitionsbereich, als auch die lineare Abbildung; wenn der Definitionsbereich geändert ist, erhält man einen anderen Operator.

$T_2\colon D_2 \to H$ heißt *Erweiterung* von $T\colon D \to H$, falls $D \subset D_2$ und $T_2|_D = D$. Man schreibt auch $T \subset T_2$.

**7.3 Beispiel.** Der Ableitungsoperator kann zu einem unbeschränkten Operator mit Definitionsbereich $C_c^1$ erweitert werden.

**7.4 Definition.** Ein unbeschränkter Operator $T\colon D \to H$ auf einem Hilbertraum $H$ heißt *abgeschlossen*, wenn sein Graph

$$G(T) := \{(x, Tx) \in H \times H \mid x \in D\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $H \times H$ ist.

$T\colon D \to H$ heißt *abschließbar*, falls der $\overline{G(T)}$ der Graph eines Operators ist. Dieser wird dann Abschluss $\overline{T}\colon D(\overline{T}) \to H$ von $T$ genannt.

**7.5 Bemerkung.** Falls $T\colon H \to H$ linear, so ist wegen des Satzes vom abgeschlossenen Graphen $T$ genau dann abgeschlossen, wenn $T$ beschränkt ist.

**7.6 Bemerkung.** Das Problem mit dem Abschluss ist zunächst, dass $\overline{G(T)}$ nicht Graph eines Operators sein muss, es kann ja passieren, dass $(x, v)$ und $(x, w)$ beide in $\overline{G(T)}$ liegen, aber $v \neq w$. Falls das nicht der Fall ist, so setzt man $D(\overline{T}) := \{x \in H \mid \exists v \in H : (x, v) \in \overline{G(T)}\}$ und für $(x, v) \in \overline{G(T)}$ setzt man $\overline{T}(x) := v$.

**7.7 Definition.** Sei $T\colon D \to H$ dicht definiert. Dann definiert man den Adjungierten $T^*\colon D(T^*) \to H$ durch $D(T^*) := \{v \in H \mid \exists w \in H : (Tx, v) = (x, w) \forall x \in D\}$ und durch $T^*v := w$ für dieses $w$.

Da $D \subset H$ dicht, ist $T^*v$ eindeutig definiert, falls $v \in D(T^*)$.

**7.8 Bemerkung.** Es gilt $T \subset T_2 \implies T_2^* \subset T^*$. Beachte, dass nicht immer $T^*$ dicht definiert ist.

Sei z.B. $D := l^1(\mathbb{N}) \subset l^2(\mathbb{N})$ und $T\colon D \to l^2(\mathbb{N})$ definiert durch $Tf = (\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n))v$ für ein $v \in l^2(\mathbb{N})$. Dann gilt, dass $D(T^*) \perp v$, falls $v \neq 0$ also sicher $D(T^*)$ nicht dicht in $H$. (Beweis: Übungsaufgabe.)

**7.9 Lemma.** *Der Graph von $T^*$ ist immer abgeschlossen.*

*Beweis.* Es gilt $(v, w) \in G(T^*)$ genau dann, wenn $\langle Tx, v\rangle - \langle x, w\rangle = 0$ für alle $x \in D$. Also $G(T^*)$ ist genau das orthogonale Komplement in $H \oplus H$ (mit der Summe der Skalarprodukte) der Menge $\{(x, -Tx) \in H \times H \mid x \in D\}$. Aber das orthogonale Komplement einer beliebigen Menge ist abgeschlossen. □

**7.10 Definition.** Sei $T\colon D \to H$ abgeschlossener dicht definierter Operator. Dann definieren wir das Spektrum $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (T - \lambda)\colon D \to H$ nicht bijektiv mit beschränkter Inverser$\}$.

Da wir voraussetzen, dass $T$ *abgeschlossener* Operator ist, ist im Fall, dass $T\colon D \to H$ bijektiv ist, die Inverse $T^{-1}\colon H \to D$ beschränkt (der Graph von $T^{-1}$ sieht genauso wie der von $T$ aus, nur gespiegelt, bleibt also geschlossen. Da jetzt der Definitionsbereich der ganze Hilbertraum $H$ ist, kann man den Satz vom geschlossenen Graphen anwenden. Dies ist genau der Grund, warum wir das Spektrum hier nur für abgeschlossene Operatoren definieren.)

**7.11 Theorem.** *Wie bei beschränkten Operatoren gilt auch bei abgeschlossenen dicht definierten Operatoren $T\colon D \to H$:*

*Die Menge $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ ist offen, die Abbildung*

$$\mathbb{C} \setminus \sigma(A) \to \mathcal{B}(H);\ \lambda \mapsto (T-\lambda)^{-1}$$

*ist stetig, sogar lokal in durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar (also holomorph).*

*Außerdem gilt $(T-\lambda)^{-1}(T-\mu)^{-1} = (T-\mu)^{-1}(T-\lambda)^{-1}$, da $(\mu-\lambda)(T-\mu)^{-1}(T-\lambda)^{-1} = (T-\lambda)^{-1} - (T-\mu)^{-1}$.*

*Beweis.* Der Beweis ist identisch dem Fall, in dem $T$ beschränkt ist. □

**7.12 Beispiel.** Es ist im allgemeinen gar nicht so einfach, nachzuprüfen, dass ein Operator tatsächlich abgeschlossen ist.

Hier sollen ein paar Definitionsbereiche für $\frac{d}{i\,dx}$ (auf Teilmengen von $L^2[0,1]$) angegeben werden, die den jeweiligen Operator abgeschlossen machen. Die Definitionsbereiche $C^\infty([0,1])$ oder $C^1([0,1])$ erfüllen dies nicht.

Am einfachsten erinnere man sich, dass mittels Fouriertransformation $U\colon L^2[0,1] \xrightarrow{\cong} l^2(\mathbb{Z})$ mit der Orthonormalbasis $e_n(t) = \exp(2\pi int)$. Da gilt, dass $\frac{d}{i\,dt}e_n(t) = 2\pi ne_n(t)$, kann man $\frac{d}{i\,dx}$ also vernünftig definieren auf $D := \{f \in L^2[0,1] \mid f = \sum \lambda_n e_n, \sum n^2 |\lambda_n|^2 < \infty\}$, indem man einfach $\frac{d}{i\,dx} \sum \lambda_n e_n := \sum 2\pi n\lambda_n e_n$ setzt.

Dies ist auf jeden Fall für alle „trrigonometrischen Polynome" $\sum_{k=-N}^{N} \lambda_n e_n$ die übliche Definition, und durch partielle Integration sieht man, dass dies auch für alle periodischen Funktionen $f \in C_p^1(\mathbb{R})$ (mit Periode 1) gilt.

Es zeigt sich, dass alle Funktionen in $D$ stetig und periodisch sind.

Sei nun $D_\alpha := \{\exp(i\alpha t)f(t) \mid f \in D\}$. Diese Funktionen sind nicht mehr periodisch, sondern erfüllen $f(1) = \exp(i\alpha)f(0)$. Man definiert natürlich $\frac{d}{i\,dt}\exp(i\alpha t)f(t) = (\alpha f(t) + \frac{d}{i\,dt}f(t))\exp(i\alpha t)$

$\frac{d}{i\,dx}\colon D_\alpha \to L^2([0,1])$ ist ein abgeschlossener Operator für jedes $\alpha \in [0,1]$.

Man sieht hier, dass man sich die Auswahl des Definitionsbereichs als Wahl von Randbedingungen für den Operator vorstellen kann., und dass dies natürlich in der Regel nicht eindeutig (auch mit Zusatzvoraussetzungen wie „abgeschlossen") geleistet werden kann.

Die Eigenschaften (z.B. das Spektrum) können vom Definitionsbereich abhängen. Hier sieht man z.B. , dass im dem Definitionsbereich $D_\alpha$ die Funktionen $f_{2\pi n+\alpha} := \exp((2\pi+\alpha)it)$ enthalten sind, mit $d/i\,dt f_{2\pi n+\alpha} = (2\pi n+\alpha)f_{2\pi n+\alpha}$. Tatsächlich besteht das Spektrum jeweils genau aus diesen Werten —- hängt aber insbesondere von $\alpha$ ab.

**7.13 Definition.** Ein dicht definierter Operator $T\colon D \to H$ heißt *selbstadjungiert*, falls $T^* = T$.

Beachte, dass hier Gleichheit auch der Definitionsbereiche gefordert ist!

$T\colon D \to H$ heißt *symmetrisch*, falls $T \subset T^*$, also $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$ für alle $v, w \in D$.

Ein symmetrischer Operator heißt *essentiell selbstadjungiert*, falls er abschließbar ist, und falls sein Abschluss selbstadjungiert ist.

**7.14 Lemma.** *Sei $T\colon D \to H$ essentiell selbstadjungiert. Dann gibt es genau einen selbstadjungierten Abschluss von $T$.*

*Beweis.* Sei $S$ ein selbstadjungierter Abschluss von $T$. Es gilt $\overline{T} \subset S = S^* \subset \overline{T}^* = \overline{T}$, und die Gleichheit folgt. □

**7.15 Satz.** *Sei $T\colon D \to H$ symmetrisch und dicht definiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

*(1) $T$ ist selbstadjungiert*

*(2) $T$ ist abgeschlossen und* $\ker(T^* + i) = \ker(T^* - i) = \{0\}$.

*(3)* $\operatorname{im}(T + i) = \operatorname{im}(T - i) = H$

*Damit ergibt sich auch, dass folgendes äquivalent ist:*

*(1) $T$ ist wesentlich selbstadjungiert*

*(2)* $\ker(T_i^*) = \ker(T^* - i) = \{0\}$

*(3)* $\operatorname{im}(T + i)$ *und* $\operatorname{im}(T - i)$ *sind dicht in $H$.*

*Beweis.* Falls $T = T^*$, so ist $T$ nach Lemma 7.9 abgeschlossen. Falls $T^*v = Tv = iv$, so $-i\langle v, v\rangle = \langle Tv, v\rangle = \langle v, T^*v\rangle = i\langle v, v\rangle = 0$, also $\ker(T^* - i) = \{0\}$ (genauso für $T^* + i$).

Ist unter der zweiten Voraussetzung $v \perp \operatorname{im}(T - i)$, so gilt $(Tx, v) = (x, iv)$ für alle $x \in D$, also nach Definition $v \in D(T^*)$ und $T^*v - iv = 0$, also ist $v = 0$ und $\operatorname{im}(T-i)$ dicht in $H$. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\operatorname{im}(T)$ abgeschlossen ist.

Wegen der konjugierten Symmetrie des Skalarprodukts und da $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$ gilt

$$|(T - i)v|^2 = |Tx|^2 + |v|^2 .$$

Falls also $(T - i)v_n$ konvergiert (gegen irgend ein $w \in H$), dann sind $(Tv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen, also auch konvergent. Da $T$ abgeschlossen (dies ist ein Teil der Bedingung von selbstadjungiert), ist dann der Limes $v$ in $D(T)$ und $Tv = \lim Tv_n$, also $w = \lim(T - i)v_n = Tv - iv = (T - i)v$. Also ist $\operatorname{im}(T - i)$ abgeschlossen. Entsprechend für $T + i$.

Sie zuletzt $\operatorname{im}(T - i) = \operatorname{im}(T + i) = H$. Sei $v \in D(T^*)$. Dann ist $(T^* - i)v \in H$, also gibt es $w \in D(T)$ mit $(T^* - i)v = (T - i)w$. Da $T$ symmetrisch, ist $D(T) \subset D(T^*)$, also $v - w \in D(T^*)$ und $(T^* - i)(v - w) = 0$. Aber da auch $\operatorname{im}(T + i) = H$, ist $\ker(T^* - i) = \operatorname{im}(T + i)^\perp = \{0\}$, also $v = w \in D(T)$. Damit $T \subset T^*$, und die beiden Operatoren stimmen überein.

Die Aussagen über essentielle Selbstadjungiertheit folgt, indem man jeweils von $T$ zum Abschluss übergeht. Man braucht allerdings noch, dass $\overline{T} = (T^*)^*$. Gilt dies, so folgt (mit Lemma 7.9) $T^* = \overline{T^*} = ((T^*)^*)^* = (\overline{T})^*$.

Um $\overline{T} = (T^*)^*$ zu beweisen, beachte, dass $G(\overline{T}) = \overline{G(T)} = (G(T)^\perp)^\perp$, und dass (bis auf eine Reflexion), auch $G(T^*)$ durch $G(T)^\perp$ gegeben ist. □

**7.16 Beispiel.** Sei $(M, \mu)$ ein Maßraum und $H = L^2(M, \mu)$ (also z.B. $H = L^2(\mathbb{R})$ mit der üblichen Definition mittels Lebesguemaß). Sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ messbar (z.B. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig).

Definiere $D := \{\phi \in L^2 \mid f \cdot \phi \in L^2\}$, und $A\colon D \to H$ durch $\phi \mapsto f \cdot \phi$.

Dann ist $A$ selbstadjungiert.

*Beweis.* Falls $\phi, \psi \in D$, so $\langle A\phi, \psi\rangle = \int \overline{f\phi} \cdot g = \int \overline{\phi}` \cdot f\psi = \langle \phi, A\psi\rangle$, da $f$ reellwertig. Also ist $A$ symmetrisch.

Ausserdem ist für $u \in L^2$ $u/(f+i) \in L^2$, da $1/(f+i)$ beschränkte Funktion ist: $|1/(f+i)| \leq 1$ (wieder weil $f$ reellwertig).

Da $(A+i)(u/(f+i)) = (f+i)u/(f+i) = u$, also ist $A+i$ surjektiv. □

**7.17 Beispiel.** $H = L^2[0,1]$ (aufgefasst als periodische Funktionen), mit Orthonormalbasis $f_n(t) = \exp(2\pi int)$.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann liefert auch $f_n^\lambda(t) := f_n(t)e^{i\lambda}$ eine ONB von $L^2[0,1]$.

Definiere $D_\lambda := \{f \in L^2 \mid f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^\lambda f_n^\lambda, \sum |na_n|^2 < \infty\}$. Und definiere $T\colon D_\lambda \to H$ durch $Df = i\partial f/\partial t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} - \sum na_n f_n^\lambda + i\lambda f$.

Es gilt: $f \in D_\lambda \implies f$ stetig und $f(1) = e^{i\lambda}f(0)$.

# 8 Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren

Im folgenden wollen wir als Anwendung des Spektralsatzes für *beschränkte* Operatoren eine Zerlegung eines beliebigen Operators in „Betrag“ und „Phase“ angeben:

**8.1 Satz.** *Sei $T \in \mathcal{B}(H)$. Dann gibt es einen eindeutigen positiven Operator $A$ und eine partielle Isometrie $U$ so dass $T = AU$, wobei* $\ker(U) = \ker(T)$, *und* $U\colon \ker(U)^\perp \to \operatorname{im}(U)$ *ist Isometrie.*

*Falls $T$ invertierbar, ist $A$ und $U$ invertierbar (insbesondere ist $U$ dann unitär).*

*Beweis.* Definiere mittels Spektralsatz $A := \sqrt{TT^*}$. Dies geht, da $T^*T$ positiv ist, das Spektrum also in $[0, \|T\|^2)$ enthalten ist, und $\sqrt{}$ ist stetige beschränkte Funktion auf dieser Menge.

Falls $T$ invertierbar, ist auch $TT^*$ invertierbar, also auch $\sqrt{TT^*}$. Setze dann einfach $U := A^{-1}T$. Dann gilt $U^*U = T^*A^{-1}AT = T^*(TT^*)^{-1}T = 1$, also ist $U$ tatsächlich unitär. Umgekehrt, falls $U$ unitär, $A$ positiv mit $T = AU$, so $TT^* = AUU^*A^* = A^2$, also muss $A = \sqrt{TT^*}$ gelten, und dann ergibt sich auch $U$.

Allgemein gilt $|T^*v|^2 = \left|\sqrt{TT^*}v\right|^2$, wir können also auf $\operatorname{im}(T^*)$ eine Isometrie $U\colon T^*v \mapsto \sqrt{TT^*}v$ definieren, welche sich zu Isometrie auf $\overline{\operatorname{im}(T^*)} = \ker(T)^\perp$ fortsetzt. Wenn $T^*v = T^*x$, so $T^*(v-x) = 0$, also $TT^*(v-x) = 0$, also $\sqrt{TT^*}(v-x) = 0$, also ist die Abbildung wohldefiniert.

Klar ist: für $w = T^*v$ gilt $\sqrt{TT^*}Uw = \sqrt{TT^*}\sqrt{TT^*}v = TT^*v = Tw$. Definiere $U$ auf ganz $H$, indem es auf $\ker(T)$ als Nullabbildung definiert wird. Dann gilt $T = AU$ □

## 8.1 Operatorhalbgruppen

**8.2 Satz.** *Sei $A\colon D \to H$ selbstadjungiert und dicht definiert. Setze $U(t) :=$ $\exp(itA)$ für $t \in \mathbb{R}$ Zeige:*

*(1) $U(t)$ unitär, $U(s+t) = U(s)U(t)$, $U(0) = \mathrm{id}_H$, $U(t)^* = U(-t)$.*

*(2) Für alle $v \in H$, $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{t\to t_o} U(t)v = U(t_0)v$.*

*(3) Für alle $v \in D$ gilt* $\lim_{t\to 0}(U(t)v - v)/t = iAv$.

*(4) Falls* $\lim_{t\to 0}(U(t)v - v)/t$ *existiert, so gilt* $v \in D$.

*Beweis.* Dies ist eine direkte Folgerung aus dem Spektralsatz. □

**8.3 Satz.** *Auch die Umkehrung dieses Satzes gilt: falls eine sogenannte „start stetige unitäre Operatorhalbgruppe“ $U(t)$ gegeben ist, welche die Eigenschaften (1) und (2) erfüllt, dann gibt es genau einen selbstadjungierten dicht definierten Operator $A \colon D \to H$, so dass $U(t) = \exp(itA)$.*

*Beweis.* Es gilt $D := \{v \in H \mid \lim_{t\to 0}(U(t)v - v)/t \text{ existiert}\}$. Auf dieser Menge ist dann $D$ gegeben durch $iDv = \mathrm{im}_{t\to 0}(U(t)v - v)/t$.

Es bleibt natürlich noch zu zeigen, dass $A$ selbstadjungiert und dicht definiert ist, und dass tatsächlich $U(t) = \exp(itA)$. □

# 9 Distributionen

Distributionen wurden dazu eingeführt, ein paar Probleme zu lösen, die sich dadurch ergeben, dass es sehr vernünftige Funktionen gibt, die man nicht beliebig oft ableiten kann. Eine mögliche Lösung, die man von der Entwicklung des Zahlsystems her kennt: Man vergrößere die Menge (in diesem Fall z.B. die Menge aller stetigen Funktionen) zur Menge der *Distributionen* (auch „verallgemeinerte Funktionen“ genannt), so dass man in der neuen Menge tun darf, was in der alten nicht notwendig erlaubt war.

Folgende Eigenschaften sollten dabei erfüllt sein:

(1) Jede stetige Funktion (mit kompaktem Träger) sollte eine Distribution sein.

(2) Jede Distribution sollte beliebig oft ableitbar sein (auf $\mathbb{R}^n$: mit beliebigen partiellen Ableitungen), all diese Ableitungen sollten wieder Distributionen sein.

(3) Dabei sollten möglichst viele Rechenregeln aus Analysis weiter gelten.

(4) Für differenzierbare Funktionen sollte die Ableitung im neuen Sinn gleich der üblichen Ableitung sein.

Der Ansatz, wie bei den Zahlsystemen einfach neue „verallgemeinerte Funktionen“ hinzuzunehmen, ist zwar a priori möglich (und so wurde in der Anfangzeit durchaus vorgegangen), wird aber schnell sehr unübersichtlich. Wir wollen daher Funktionen „uminterpretieren“, indem wir sie in eine größere Menge einbetten, und dann aus dieser größeren Menge die verallgemeinerten Funktionen ausw"ahlen.

Die entscheidende Beobachtung ist folgende: falls $f \in C(\mathbb{R}^n)$, so erhält man eine lineare Abbildung

$$\Psi_f \colon C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C};\ \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx. \tag{9.1}$$

Falls $\Psi_f = \Psi_g$, so folgt $f = g$.

Man kann also statt der Funktionen $f$ oder $g$ die linearen Abbildungen $\Psi_f$ und $\Psi_g$ betrachten. Man kann dann andere solche linearen Abbildungen als verallgemeinerte Funktionen definieren.

Aus technischen Gründen wollen wir als Raum der Funktionen, auf denen die lineare Abbildung definiert ist, zunächst nicht $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, den Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger, sondern einen anderen Raum von „Testfunktionen“ betrachten.

**9.2 Definition.** Die Menge $S(\mathbb{R}^n)$ der *schnell fallenden Funktionen* ist definiert als

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid x^\alpha D^\beta f \text{ beschränkt } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$$

Hierbei ist $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ und $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, sowie $D^\beta f = (-i)^{\beta_1} \frac{\partial^{\beta_1}}{x_1^{\beta_1}} \cdots (-i)^{\beta_n} \frac{\partial^{\beta_n}}{x_n^{\beta_n}} f$.

Definiere $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

**9.3 Definition.** Auf $S(\mathbb{R})$ definieren wir eine Metrik indem zunächst hilfsweise

$$p_k(u) := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup\{(1 + |x|)^k \, |D^\alpha u(x)| \, ; \, x \in \mathbb{R}^n\}$$

und dann

$$d(u, v) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_i(u - v)}{1 + p_k(u - v)}$$

für $u, v \in S(\mathbb{R}^n)$.

**9.4 Lemma.** *Alle $p_k$ aus Definition 9.3 sind Halbnormen, erfüllen also*

$$p_k(u + v) \leq p_k(u) + p_k(v), \qquad p_k(\lambda v) = |\lambda| \, p_k(v), \; \forall u, v \in S(\mathbb{R}^n), \; \lambda \in \mathbb{C}.$$

*Außerdem ist $d(u, v)$ wirklich eine Metrik, und $S(\mathbb{R}^n)$ ist vollständig bezüglich dieser Metrik.*

*Beweis.* Dass die $p_k$ Halbnormen sind, rechnet man sofort nach (tatsächlich handelt es sich sogar um Normen). Aus dieser Tatsache folgt dann, dass $d$ eine Metrik ist. Vollständigkeit folgt wie die Vollständigkeit des Raum der stetigen und beschränkten Funktionen. □

**9.5 Definition.** Der Raum $S'(\mathbb{R}^n)$ der *temperierte Distribution* ist der Dualraum des metrischen Raums $S(\mathbb{R}^n)$, also die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $\Psi \colon S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. Offensichtlich handelt es sich hier um einen Vektorraum.

Wir definieren für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ die partiellen Ableitungen

$$D^\alpha \colon S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n); \Psi \mapsto D^\alpha \Psi$$

durch $D^\alpha \Psi(\phi) := (-1)^{|\alpha|} \Psi(D^\alpha \phi)$. Für eine Funktion $u \in S(\mathbb{R}^n)$ definiere $u\Psi$ durch $u\Psi(\phi) := \Psi(u\phi)$.

Dies sind lineare Abbildungen.

Wir müssen natürlich noch zeigen, dass $D\alpha\Psi$ und $u\Psi$ wirklich stetig sind. Außerdem muss erklärt werden, inwiefern gewöhnliche Funktionen als Distributionen aufgefasst werden können (vergleiche (9.1)).

**9.6 Definition.** Für $p \in [1, \infty]$ erhalten wir eine Inklusion $L^p(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n);\ f \mapsto \Psi_f$ durch

$$\Psi_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(x)\, dx; \qquad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Auch hier muss man nachprüfen, dass $\Psi_f$ stetig ist (und dass das Integral konvergiert).

Wir benötigen ein paar Lemmas über den Raum $S(\mathbb{R}^n)$.

**9.7 Lemma.** *Eine lineare Abbildung $\Psi\colon S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ ist stetig genau dann, wenn es eine Halbnorm $p_k$ und $C > 0$ gibt, so dass*

$$|\Psi(\phi)| \le C \cdot p_k(\phi) \qquad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

*Eine lineare Abbildung $T\colon S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist stetig (genau dann), wenn für jede Halbnorm $p_k$ eine andere Halbnorm $p_l$ und $C > 0$ existiert, so dass*

$$p_k(T(\phi)) \le C p_l(\phi)\ \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

*Beweis.* Nach Konstruktion ist $d(u, v) = d(u - v, 0)$. Da die Halbnormen $p_k$ die Metrik $d$ definieren, ergibt sich die erste und die zweite Bedingung genau wie bei den entsprechenden Sätzen für Normierte Räume. □

**9.8 Bemerkung.** Wir könnten die Aussagen aus Lemma 9.7 auch als Definition für die Stetigkeit der entsprechenden Abbildungen benutzen. Es folgt jedenfalls sofort: falls $\Psi$ stetig und $T$ stetig, so auch die Verknüpfung $\Psi \circ T$.

**9.9 Lemma.** *Falls $u \in S(\mathbb{R}^n)$, so gilt für jedes Polynom $p(x)$ und jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ auch $p(x) D^\alpha u \in S(\mathbb{R}^n)$, außerdem $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \bigcap_{p \in [1,\infty]} L^p$ und für jedes $p \in [1, \infty]$ existiert $C_{p,n}$ so dass $|u|_{L^p} \le C_{p,n} p_n(u)$.*

*Genauer gilt sogar, dass die Abbildungen $u \mapsto D^\alpha u$ und $u \mapsto p(x)u(x)$; $S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ stetig sind.*

*Falls $v \in S(\mathbb{R}^n)$, so definiert $u \mapsto vu$ eine weitere stetige Abbildung $S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$.*

*Beweis.* Klar ist $p(x) D^\alpha u$ glatt. Außerdem gilt $x^\gamma D^\beta(p(x) D^\alpha u)$ ist (mittels häufiger Anwendung der Produktregel) eine endliche Summe von Termen der Gestalt $c x_1^\gamma D_2^\gamma u$ mit konstanten $c$. Nach voraussetzung ist jeder dieser Summanden beschränkt (da $u \in S(\mathbb{R}^n)$), also auch $p(x) D^\alpha u \in S(\mathbb{R}^n)$.

Wir haben eben schon beobachtet, dass $u$ beschr"ankt. Da $u$ glatt, folgt $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Weiterhin gilt $u = (1 + |x|^2)^n u \cdot (1 + |x|^2)^{-n}$. Dabei ist, wie gerade gesehen, $(1 + |x|^2)^n u$ beschränkt. Andererseits ist bekannt, dass $(1 + |x|^2)^{-n} \in \bigcap_{p \in [1,\infty]} L^p(\mathbb{R}^n)$ (die Integral berechnet man durch Transformation auf Polarkoordinaten, es konvergiert für jedes $p \ge 1$ und jeden Exponenten $> n/2$). Also ist auch das Produkt $u$ aus beschränkter und integrierbarer Funktion integrierbar.

Unser Beweis von oben liefert mit Lemma 9.7, dass alle angegebenen Abbildungen $S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ stetig sind. Z.B. für einen Ableitungsoperator $D^\alpha$ von Ordnung $|\alpha| = d$:

$$\begin{aligned}(1 + |x|)^k D^\beta(D^\alpha u) &= (1 + |x|)^k D^{\alpha+\beta} u \\ &\le (1 + |x|)^{k+d} D^{\alpha+\beta} u \quad \forall u \in S(\mathbb{R}^n),\end{aligned}$$

somit

$$p_k(u) \leq p_{k+d}(u) \quad \forall u \in S(\mathbb{R}^n).$$

□

**9.10 Korollar.** *Falls* $\Psi \in S'(\mathbb{R}^n)$*, so ist auch* $D^\alpha \Psi$ *definiert durch* $(D^\alpha)\Psi(U) := (-1)^{|\alpha|}\Psi(D^\alpha u)$ *und* $s\Psi$ *für* $s \in S(\mathbb{R}^n)$*, sowie für jedes Polynom* $p(x)$ $p\Psi$ *mit* $(p\Psi)(u) := \Psi(pu)$ *(u jeweils aus* $S(\mathbb{R}^n)$*) ein Element aus* $S'(\mathbb{R}^n)$*, da es sich einfach um eine Komposition stetiger Abbildungen handelt.*

*Klar ist, dass die Abbildungen* $\Psi \mapsto D^\alpha\Psi, \ldots,$ *lineare Abbildungen* $S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ *sind, wobei die übliche Vektorraumstruktur auf dem Dualraum* $S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{Hom}(S(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$ *benutzt wird.*

**9.11 Korollar.** *Falls* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *für ein* $p \in [1, \infty]$*, z.B. falls* $f$ *stetig und beschränkt (also* $f \in L^\infty$*), so definiert*

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)\,dx; \quad S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$$

*eine stetige lineare Abbildung und folglich ein Element* $\Psi_f \in S'(\mathbb{R}^n)$*, da für jedes* $u \in S(\mathbb{R}^n)$ *gilt* $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ $(1/p + 1/q = 1)$ *und* $|u|_{L^q} \leq C_{n,q}p_n(u)$*somit*

$$\left|\int fu\right| \leq |f|_{L^p} \cdot |u|_{L^q} \leq C_{n,q}p_n(u).$$

**9.12 Lemma.** *Falls* $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *und sowohl* $f$ *als auch* $f'$ *beschränkt sind, so gilt* $D_j\Psi_f = \Psi_{D_jf}$*, wobei* $D_j = -i\partial/\partial x_j$*.*

*Beweis.* Nach Definition für $u \in S(\mathbb{R}^n)$

$$D_j\Psi_f(u) = \Psi_f(D_ju) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)D_ju(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} D_jf(x)u(x) = (D_j\Psi_f)(u).$$

Hierbei benutzen wir Fubini und partielle Integration, wobei das Integral zunächst auf $x_j \in [-R, R]$ eingeschränkt wird, und dann der Limes $R \to \infty$ gebildet wird. In diesem Limes konvergieren die Randterme gegen 0, da $f$ beschränkt und $u(x)(1 + |x|)$ beschränkt, also $u(x) \overset{0}{\to}$ falls $|x| \to \infty$. □

**9.13 Beispiel.** Nicht nur jede $L^p$-Funktion definiert ein Element aus $S'(\mathbb{R})$, sondern auch jedes endliche Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$. Insbesondere definiert man $\delta \in S'(\mathbb{R}^n)$ durch $\delta(u) := u(0)$ Somit ist die $\delta$-„Funktion“ also verallgemeinerte Funktion definiert —entsprechend definiert man für $y \in \mathbb{R}^n$ $\delta_y$ durch $\delta_y(u) = u(y)$.

Betrachte andererseits die *Heaviside*-Funktion $H$ mit $H(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $H(x) = 0$ für $x < 0$. Dann ist $H \in L^\infty(\mathbb{R})$, also insbesondere eine temperierte Distribution. Es gilt $\frac{d}{dx}H = \delta$, da

$$\frac{d}{dx}H(u) = H(-\frac{d}{dx}u) = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\frac{d}{dx}u = -\int_0^\infty \frac{d}{dx}u = u(0) = \delta(u).$$

Für die Delta-Distribution (auf $\mathbb{R}$) gilt $\frac{d}{dx}\delta(u) = -u'(0)$.

**9.14 Definition.** Sei $\Psi \in S'(\mathbb{R}^n)$. Der *Träger* von $\Psi$ ($\mathrm{supp}(\Psi)$) ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\Psi(u) = 0$ für alle $u \in S(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp}(u) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$.

**9.15 Lemma.** *Falls $\Psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\Psi)$ kompakt, so kann $\Psi$ eindeutig zu einer stetigen lineare Abbildung $\Psi\colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ ausgedehnt werden (also auf alle $C^\infty$-Funktionen ohne Wachstumsbedingung).*

*Dazu wählt man $\psi\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ glatt und mit kompaktem Träger, so dass $\psi(x) = 1$ für alle $x \in \operatorname{supp}(\Psi)$, und setzt*

$$\Psi(f) := \Psi(\psi f) \qquad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

*Hierbei ist $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ selbst ein vollständiger metrischer Raum, mit Halbnormen $\tilde{p}_k(f) := \sum_{|\alpha|\le k} sup\{|D^\alpha f(x)| \mid |x| \le k\}$.*

*Definiere $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ als den Dualraum von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Jede temperierte Distribution mit kompaktem Träger liegt also in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.*

*Umgekehrt wird durch Einschränken jedes $\Psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ zu einem Element von $S'(\mathbb{R}^n)$, und falls gilt $\Psi(u) \le C\tilde{p}_k(u)$ für $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, so folgt $\operatorname{supp}(\Psi) \subset \overline{B_k}(0)$.*

**9.16 Satz.** *Sei $\Psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\Psi) \subset \{0\}$. Dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ und $c_\alpha \in \mathbb{C}$, so dass*

$$\Psi = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha D^\alpha \delta.$$

Dies werden wir etwas später beweisen. Eines der wichtigsten Hilfsmittel beim Arbeiten mit Funktionen, Distributionen, Lösen von Differentialgleichungen etc. ist die Fouriertransformation. Daher schauen wir uns diese als nächstes an.

## 9.1 Fouriertransformation

Die Fouriertransformierte einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist definiert als

$$\hat{f}(\xi) :=)2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx,$$

für alle Funktionen $f$, für welche dieses Integral Sinn macht, insbesondere für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (da $|\exp(i\langle x,\xi\rangle)| = 1\ \forall x,\xi \in \mathbb{R}^n$). In diesem Fall ist $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Falls $f \in S(\mathbb{R}^n)$, sieht man leicht durch partielle Integration (die Randterme verschwinden jeweils, da $f$ so schnell fällt), dass

$$\xi^\alpha D^\beta(\hat{f})(\xi) = (-1)^{|\beta|} \widehat{D^\alpha x^\beta} f(\xi)$$

Daraus folgt dann wiederum, dass $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$ falls $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und dass $F\colon S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n); f \mapsto \hat{f}$ stetig ist.

Definiere die *inverse Fouriertransformierte*

$$F^*(f)(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x,\xi\rangle}\, dx.$$

Dann gilt für $u, v \in S(\mathbb{R}^n)$, indem man einfach Fubini anwendet

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} v &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} v(\xi)\, dx\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} u\hat{v} \\ \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{u}} v &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{u} F^* v. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Definiere also für $\Psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformierte Distribution $\hat{\Psi}$ durch $\hat{\Psi}(u) := \Psi(\hat{u})$. Wegen Gleichung (9.17) stimmt dies für Funktionen mit der alten Definition der Fouriertransformierten überein: $\hat{\Psi_f} = \Psi_{\hat{f}}$.

Definiere entsprechend $F^*\Psi(u) := \Psi(F^*u)$.

**9.18 Satz.** *Es gilt die* Fourierinversionsformel*:*

$$F^*(\hat{f}) = f = \widehat{F^*f} \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n).$$

*Außerdem gilt* $\left|\hat{f}\right|_{L^2} = |f|_{L^2} = |F^*f|_{L^2}$ *für alle* $f \in S(\mathbb{R}^n)$*.*

*Beweis.* Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ wähle Hilfsfunktion $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ Dann gilt für $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\lambda^n\hat{\phi}(\lambda x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} g(x)\lambda^n\phi(y)\exp(-i\lambda\langle x,y\rangle)\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} g(x)\phi(y/\lambda)\exp(-i\langle x,y\rangle)\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y)\phi(u/\lambda)
\end{aligned}$$

oder äquivalent

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\frac{x}{\lambda})\hat{\phi}(x)\,dx = \int \phi(\frac{y}{\lambda})\hat{g}(y)\,dy.$$

Für $\lambda \to \infty$ gilt $g(x/\lambda) \xrightarrow{g} (0)$ und $\phi(y/\lambda) \xrightarrow{\phi} (0)$. Da $\phi, g \in S(\mathbb{R}^n)$, sind $\phi, g$ beschränkt, daher $\phi(y/\lambda)$ universell beschränkt (unabhängig von $y$ und $\lambda$) und $\hat{\phi}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Man kann also Integral und Grenzwert vertauschen (dominierte Konvergenz) und erhält

$$g(0)\int\hat{\phi} = \phi(0)\int\hat{g}.$$

Wähle nun $\phi(x) =$
$exp(-|x|^2/2) = \prod\exp(-x_i^2/2)$. Es gilt $(2\pi)^{-n/2}\int\exp(-|x|^2/2) = 1$, wegen Fubini und einer Rechnung aus Diff 1. Außerdem ist $\hat{\phi}(\xi) = \exp(-|\xi|^2/2)$.

Wegen Fubini reicht es, dies für $n = 1$ zu zeigen, da $\hat{\phi}(\xi) = \int\prod\exp(-x_i^2/2)\exp(-ix_i\xi_i)\,dx_1\cdots dx_n$.

Nun erfüllt $\phi$ die Differentialgleichung $\phi'(x) + x\phi(x) = 0$, mit $\phi(0) = 1$. Damit mit den Regeln für die Fouriertransformation $\xi\hat{\phi}(\xi) + \hat{\phi}' = 0$, $\hat{\phi}(0) = (2\pi)^{-1/2}\int\phi(x) = 1$. Die Voraussetzungen für Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen (Lipschitz-Bedingung) werden von $f'(x) + xf(x) = 0$ erfüllt, also ist die Lösung eindeutig, also gilt $\hat{\phi}(\xi) = \exp(-|\xi|^2/2)$.

Es folgt, dass $g(0) = \int\hat{g}(\xi)\,d\xi$. Also $g(x_0) = g(x_0+0) = \int\int g(x_0 + x)\exp(-i\langle x,\xi\rangle)\,dx\,d\xi = \int g(x)\exp(-i\langle x - x_0,\xi\rangle) = \int\hat{g}(\xi)\exp(i\langle x_0,\xi\rangle)\,d\xi = F^*\hat{f}(x_0)$. Genauso die Umkehrung.

Also sind $F^*$ und die Fouriertransformation invers zueinander.

Zuletzt gilt

$$\langle u,v\rangle = \langle F^*\hat{u},v\rangle = \langle\hat{u},\hat{v}\rangle$$

und

$$\langle u,v\rangle = \langle\widehat{F^*u},v\rangle = \langle F^*u,F^*v\rangle.$$

□

Die letzte Gleichung ist die Plancherel Formel. Sie erlaubt insbesondere, die Fouriertransformation und ihre Inverse zu unit"'aren Operatoren $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ auszudehnen. Beachte, dass diese Ausdehnung nicht direkt durch das übliche Integral für die Fouriertransformation definiert ist. Letztere ist nicht für jede $L^2$-Funktion konvergent.

**9.19 Satz.** *Für jedes $\Psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ gilt $F^*\hat{\Psi} = \Psi = \widehat{F^*\Psi}$.*

*Beweis.* $F^*\hat{\Psi}(u) = \hat{\Psi}(F^*u) - \Psi(\widehat{F^*u}) = \Psi(u)\ \forall u \in S(\mathbb{R}^n)$ etc. □

**9.20 Beispiel.** Für die Delta-Distribution gilt sofort $\hat{\delta}(u) = \delta(\hat{u}) = \int (2\pi)^{-n/2} u(x)\, dx$. Also $\hat{\delta} = \Psi_f$, wobei $f(x) = (2\pi)^{-n/2}$.

Wegen der Inversionsformel folgt $\hat{1} = (2\pi)^{n/2}\delta$, wobei 1 die konstante Funktion mit Wert 1 bezeichnet.

**9.21 Satz.** *Falls $\Psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger, so ist ist die Fouriertransformierte eine glatte Funktion (die sich sogar zu einer holomorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzt).*

*Beweis.* Es gilt einfach $\hat{\Psi}(\xi) = w(\xi) := (2\pi)^{-n/2}\Psi(\exp(-i\langle x, \xi\rangle))$. Da $\Psi$ kompakten Träger hat, kann man auch die nicht kompakt getragene Funktion $x \mapsto \exp(-i\langle x, \xi\rangle)$ einsetzen (sogar für jedes $\xi \in \mathbb{C}$), und was herauskommt, ist beliebig oft (sogar komplex) ableitbar.

Falls $u \in S(\mathbb{R}^n)$, so $\hat{u}(x) = (2\pi)^{-n} \int u(\xi) \exp(-i\langle x, \xi\rangle)\, d\xi$, somit wegen der Stetigkeit von $\Psi$ (die erlaubt, $\Psi$ und Integral zu vertauschen)

$$\hat{\Psi}(u) = \Psi(\hat{u}) = (2\pi)^{-n/2} \int u(\xi)\Psi(\exp(-i\langle x, \xi\rangle))\, d\xi.$$

Also tatsächlich $\hat{\Psi} = \Psi_w$. □

Wir beweisen nun: $\operatorname{supp}(\Psi) \subset \{0\}$, so $\Psi = \sum_{|\alpha \le k|} c_\alpha D^\alpha \delta$.

*Beweis.* Wähle $k$, so dass $\Psi(u) \le C p_k(u)$ für jedes $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann setzt sich $\Psi$ stetig fort auf die Menge aller $C^k$-Funktionen $f$, so dass $p_k(f) < \infty$.

$\Psi$ ist Null auf der Menge aller Funktionen mit Träger äußerhalb von 0. Es folgt, dass $\Psi$ alle $C^k$-Funktionen $f$ mit $p_k(f) < \infty$ und $D^\alpha f(0) = 0$ für alle $|\alpha| \le k$ auf Null abbildet (da diese bezüglich der $p_k$-Norm Grenzwerte von Funktionen mit Träger außerhalb von Null sind).

Eine beliebige $C^k$-Funktion $f$ mit $p_k(f) < \infty$ kann nun geschrieben werden als $f = f_1 + f_2$, wobei $f_1 = (\sum_{|\alpha| \le k} D^\alpha u(0) x^\alpha/\alpha!)\chi(x)$, $\chi(x)$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger, aber mit Wert 1 in einer Umgebung von 0 (dies ist eine „abgeschnittene Taylorentwicklung von $u$“, per def ist $\alpha! = \prod \alpha_i!$). Dann folgt wegen Taylorregel $D^\alpha f_2(0) = 0$ für $|\alpha| \le k$.

Es ergibt sich nun $\Psi(u) = \sum_{|\alpha| \le k} (\Psi(\chi(x)x^\alpha)/\alpha!) D^\alpha u(0)$, man hat also die gewünschte Gestalt. □

**9.22 Satz.** *Sei $\Psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit $\Delta\Psi = 0$, wobei $\Delta = -\sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$. Dann ist $\Psi$ ein Polynom in $(x_1, \dots, x_n)$.*

*Beweis.* Fouriertransformation liefert $-|\xi|^2\, \hat{u} = 0$, insbesondere $\operatorname{supp}(\hat{u}) \subset \{0\}$.

Man wende nun die Klassifikation der Distributionen mit Träger in $\{0\}$ an, Fourierrücktransformiere, und das Resultat ergibt sich. □

**9.23 Korollar.** *Jede beschränkte $C^2$-Funktion $f$ mit $\Delta f = 0$ ist konstant.*

*Beweis.* Es handelt sich um ein beschränktes Polynom, solche sind konstant. □

## 9.2 Differentialgleichungen und Fundamentallösungen

Wir werden im folgenden des öfteren Funktionen als Distributionen auffassen, ohne dies in der Notation gesondert zu bemerken.

**9.24 Definition.** Sei $d = \sum_{|\alpha| \le d} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^n$. Dazu gehört das Polynom $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \le d} a_\alpha \xi^\alpha$. Eine (temperierte) *Fundametallösung* von $d$ ist eine Distribution $G \in S'(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$d(G) = \delta.$$

**9.25 Beispiel.** Wenn temperierte Fundamentallösungen existieren, kann man sie im Prinzip recht einfach ausrechnen: Es gilt ja $d(G) = \delta$ genau dann, wenn $\widehat{d(G)} = \hat{\delta}$, also

$$P(\xi)\widehat{G} = (2\pi)^{-n/2} \iff \widehat{G} = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{P(\xi)}.$$

Indem man zurücktransformiert, folgt also

$$G = F^*(\frac{1}{2\pi^{n/2} P(\xi)}).$$

Das geht natürlich nur, wenn die Funktion auf der rechten Seite eine temperierte Distribution darstellt.

Besonders interessant ist z.B. der Laplaceoperator $\Delta = -\sum_{j=1}^n \partial^2/\partial x_j^2 = \sum_{j=1}^n D_j^2$, mit zugehörigem Polynom $P(\xi) = |\xi|^2$.

Die Fundamentallösung von $\Delta$ ist also die Fourierrücktransformierte von $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\xi|^2}$.

Eine mühsame Rechnung zeigt, dass dies für $n \ge 3$ durch die Funktion $G(x) = c_n |x|^{2-n}$ gegeben ist (wobei $c_n = -(n-2)\operatorname{vol}(S^{n-1})$).

Es ist elementar zu berechnen, dass $\Delta G(x) = 0$ für $x \ne 0$. Für $n = 2$ gilt entsprechend mit $G(x) = 2\pi \log(|x|)$: $\Delta(G) = \delta$.

Fundamentallösungen heißen Fundamentallösungen, weil man aus ihnen alle anderen Lösungen gewinnen kann. Dazu brauchen wir noch die Faltung (Konvolution).

**9.26 Definition.** Seien $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann definiert man die Faltung $f * g$ durch

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\, dy.$$

Es gilt wieder $f * g \in S(\mathbb{R}^n)$. Für festes $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ist die Abbildung

$$g \mapsto f * g;\ S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$$

stetig und linear.

Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $\Psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ definiert man $f^{\#}(x) = f(-x)$ und

$$f * \Psi(\phi) := \Psi(f^{\#} * \phi).$$

**9.27 Satz.** *Die Aussagen aus Definition 9.26 sind wahr. Falls $\Psi = \Psi_g$ für eine Funktion $g$, so $f * \Psi_g = \Psi_{f*g}$.*

*Für jedes $f \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt $f * \delta = f$.*

*Es gilt $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}$, wobei auf der rechten Seite das punktweise Produkt benutzt wird.*

*Falls $d$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten wie oben ist, dann gilt*

$$d(f * \Psi) = (df) * \Psi = f * (d\Psi) \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n), \Psi \in S'(\mathbb{R}^n).$$

*Beweis.* Hier sind natürlich eine große Zahl von Integralen abzuschätzen und zu berechnen. Wir wollen das nur exemplarisch durchführen.

Beachte zuerst, dass immer wenn $g$ beschränkt und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann

$$|f * g(x)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \{|g(t)| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \, dt = |g|_\infty \cdot |f|_{L^1} .$$

Insbesondere falls $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, existiert das Integral für des $x \in \mathbb{R}^n$. Noch besser, der Satz übe dominierte Konvergenz impliziert, dass $f * g$ stetig ist, und dass man Ableitungen von $f * g$ unter das Integral ziehen kann.

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}}^n f(y) g(x-y) \, dy = \int_{\mathbb{R}}^n f(x-t) g(t) \, dt = g * f(x),$$

indem man die Transformation $\phi(t) = x - y$ benutzt. Es gilt

$$D^\alpha f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(D^\alpha g)(x-y) \, dy = f * (D^\alpha g)(x),$$

und wegen der Symmetrie dann auch $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \exp(-i\langle x, \xi\rangle) \, dy \, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \exp(-i\langle x-y, \xi\rangle) \exp(-i\langle y, \xi\rangle) \, dy \, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(t) \exp(-i\langle t, \xi\rangle) \exp(\langle y, \xi\rangle) \, dy \, dt \\
&= (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

Hierbei benutze man im vorletzten Schritt die Transformation $(y, t) = (y, x - y)$ mit Funktionaldeterminante 1, sowie den Satz von Fubini gleich mehrfach. Beachte dass das letzte Integral sicherlich existiert, nach Fubini daher auch alle anderen Integrale in der Gleichungskette.

Da das Produkt zweier Funktionen aus $S(\mathbb{R}^n)$ wieder in $S(\mathbb{R}^n)$ liegt, und da wir wissen, dass Fouriertransformation auf diesem Raum eine Bijektion ist, folgt, dass $f * g$ selbst auch zu $S(\mathbb{R}^n)$ gehört.

Außerdem ist Fouriertransformation und inverse Fouriertransformation eine stetige Abbildung von $S(\mathbb{R}^n)$ nach $S(\mathbb{R}^n)$, so dass man für festes $f \in S(\mathbb{R}^n)$

folgende Zerlegung von $g \mapsto f * g$ in stetige Abbildungen (jeweils von $S(\mathbb{R}^n)$ nach $S(\mathbb{R}^n)$ hat:

$$g \mapsto \hat{g} \mapsto \hat{f} \cdot \hat{g} = (2\pi)^{-n/2}\widehat{f * g} \mapsto f * g.$$

Es gilt für $f, \phi \in S(\mathbb{R}^n)$ und $\Psi = \Psi_g \in S'(\mathbb{R}^n)$ für geeignete $g$ (z.B. $g \in S(\mathbb{R}^n)$)

$$(f*\Psi_g)(\phi) = \Psi_g(f^{\#}*\phi) = \int_{\mathbb{R}}^{n} g(x)f(-(x-y))\phi(y)\,dy\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g*f(y)\phi(y) = \Psi_{g*f}(\phi),$$

wobei $f^{\#}(x) = f(-x)$ definiert war. □

**9.28 Korollar.** *Falls $d$ Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und $G$ Fundamentallösung von $d$, so gilt also*

$$d(f * G) = f * dG = f * \delta = f.$$

*Damit kann man also die inhomogene Gleichung $du = f$ für jedes vorgegebenes $f \in S(\mathbb{R}^n)$ lösen, wenn man die Fundamentallösung $G$ kennt; man setzt einfach $u := f * G$.*

# 10 Beschränkte Operatoren II

## 10.1 Integraloperatoren II

Wir wollen noch etwas allgemeine Theorie betrachten. Sei $k(x,y) \in L^2(I \times I)$. Außerdem soll gelten, dass $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$. Dies impliziert, dass der zugehörige Operator $K$ selbstadjungiert ist, also$\langle Kf, g\rangle = \langle f, Kg\rangle\ \forall f, g \in L^2(I)$.

## 10.2 Weitere Topologien auf $\mathcal{B}(X,Y)$

Es kommt nun häufig vor, dass man nicht nur einen Operator, sondern eine ganze Menge von ihnen betrachtet, z.B. wenn ein Operator durch einfachere approximiert werden soll.

Dazu wollen wir nun noch weitere Topologien auf der Menge $\mathcal{B}(X,Y)$ als nur die Norm-Topologie einführen.

**10.1 Definition.** (1) Eine Folge $f_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ *konvergiert in Norm* gegen $f$, falls $\|f_n - f\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Die zugehörige Topologie ist die Normtopologie, mit der $\mathcal{B}(X,Y)$ ein normierter Vektorraum wird, sogar ein Banachraum, falls $Y$ ein Banachraum ist.

(2) Eine Folge $f_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ *konvergiert stark* gegen $f$, falls für jedes $x \in X$ $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$. Die zugehörige Topologie ist die starke Topologie auf $\mathcal{B}(X,Y)$. Eine Menge $U \subset \mathcal{B}(X,Y)$ ist offen in der starken Topologie, genau dann wenn für jedes $f \in U$ ein $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n$ existieren, so dass $\{g \in \mathcal{B}X,Y \mid |f(x_i) - g(x_i)| < r,\ i = 1, \dots, n\} \subset U$. Es gibt im allgemeinen keine Metrik, die zu dieser Topologie gehört.

(3) Eine Folge $f_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ konvergiert *schwach* gegen $f$, falls für jedes $x \in X$ und $\phi \in Y'$ gilt, dass $\phi(f_n(x)) \xrightarrow{n\to\infty} \phi(f(x))$. Die zugehörige Topologie ist die schwache Topologie, sie ist analog zur starken Topologie definiert, unter Verwendung endlich vieler $x_i$ und $\phi_j$.

**10.2 Beispiel.** Betrachte $l^2(\mathbb{N})$.

(1) Sei $T_n(z_1, z_2, \dots) := \frac{1}{n}(z_1, \dots)$. Dann konvergiert $T_n$ in Norm gegen 0.

(2) Definiere $S_n(z_1, \dots) := (0, \dots, 0, z_{n+1}, \dots)$. Dann konvergiert $S_n$ stark gegen Null, aber nicht in Norm.

(3) Sei $W_n(z_1, \dots) := (0, \dots, 0, z_1, \dots)$. Dann konvergiert $W_n$ schwach gegen Null, aber nicht stark oder gar in Norm.