Funktionalanalysis
Übungen für Woche 6

Abgabe: Di, 25. Mai 2004. Es sollen mindestens drei der ersten vier Aufgaben abgegeben werden.

1. Sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$. Zeige, dass es keine Norm geben kann, so dass $\mathbb{R}[x]$ ein Banachraum wird.

   Tipp: Verwende den Baireschen Kategoriesatz und die Tatsache, dass $\mathbb{R}[x]$ eine abzählbare Basis hat.

2. Konstruiere einen Hilbertraum H und einen Operator $A \in \mathcal{B}(H)$k, so dass $\sigma(A) = \{0\}$, aber so dass $||A|| = 1$.

3. Sie H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{B}(H)$. A sei selbstadjungiert, d.h. $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle\ \forall v, w \in H$.

   Zeige, dass alle Eigenwerte von A in $\mathbb{R}$ enthalten ist. Zeige, dass die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal aufeinander stehen.

   Freiwillige Zusatzaufgabe (schwer): zeige, dass $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

4. Sei $T\colon C[0,1] \to C[0,1]$ gegeben durch $Tf(x) := \int_0^x f(y)\,dy$. Bestimme die Norm und das Spektrum von T.

   Tipp: Die Berechnung der Resolvente läuft auf die Lösung von linearen Differentialgleichungen hinaus, zur Lösung verwende Variation der Konstanten.

5. Berechne die Eigenwerte und das Spektrum von $T\colon l^\infty(\mathbb{N}) \to l^\infty(\mathbb{N}); (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$.

   Entsprechend für denselben Operator von $l^1(\mathbb{N})$ nach $l^1(\mathbb{N})$.

   Und wie sieht es mit dem Rechtsshift $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$ aus?