Funktionalanalysis
Übungen für Woche 6

Abgabe: Di, 1. Juni 2004. Es sollen mindestens drei der letztenvier Aufgaben abgegeben werden.

1. Sei X ein normierter Vektorraum und $A \subset X$ abgeschlossener Unterraum.
   (a) Zeige, dass X/A normierter Vektorraum mit Norm $|x + A| := \inf_{v \in A} |x + v|$ ist.
   (b) Zeige, dass jede absolut konvergente Reihe in X/A konvergiert ist, falls das gleiche für X gilt. (Als Folgerung erhält man, dass X/A vollständig, falls X vollständig ist).

2. (a) Sei H (komplexer) Hilbertraum und $\omega\colon H \times H \to \mathbb{C}$ stetige hermitsche Form, d.h. ω ist stetige Abbildung, $\omega(x, \lambda y + z) = \lambda\omega(x, y) + \omega(x, z)$ und $\omega(x, y) = \overline{\omega(y, x)}$ für alle $x, y, z \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
   Zeige, dass es dann eindeutiges $A \in \mathcal{B}(H)$ gibt, welches selbstadjungiert ist und so dass $\omega(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ für alle $x, y \in H$.
   (b) Sei $H = L^2([0, 1])$ und $\omega(f, g) := \int_0^{1/2} \overline{f(2t)} g(2t)\, dt$.
   Zeige, dass ω stetige hermitesche Form und finde den zugehörigen selbstadjugierten Operator A. Ist ω ein Skalarprodukt?

3. Sei $M = [0, 1]$, $X = C(M)$ mit Supremumsnorm. Zeige, dass für $h(x) = x$ der zugehörige Multiplikationsoperator $M_h\colon X \to X; f \mapsto hf$ beschränkter Operator ist. Was sind die Eigenwerte und das Spektrum von M_h. Ist M_h kompakt?

   Beantworte die Fragen allgemeiner für beliebige metrische Räume M und beliebiges $h \in C(M)$.

4. Seien X, Y Banachräume und $A \in \mathcal{B}(X, Y)$, $B \in \mathcal{B}(Y, X)$. Zeige, dass $\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\}$.

   Tipp: Falls $1 - AB$ invertierbar, betrachte z.B. $1 + B(1 - AB)^{-1}A$.

   Finde ein Beispiel, wo $0 \in \sigma(AB)$, aber $0 \notin \sigma(BA)$.

5. Sei H Hilbertraum und $U \subset H$ abgeschlossener Unterraum. Sei P die orthogonale Projektion auf U. Zeige, dass $P = P^2$ und dass P selbstadjungiert. Zeige umgekehrt, dass jeder Operator mit diesen Eigenschaften ein orthogonaler Projektor (auf $im(P)$ ist. Falls Q orthogonale Projektion auf einen zweiten abgeschlossenen Unterraum V mit $PQ = QP$, zeige, dass $1 - P$, PQ, $P + Q - PQ$, $P + Q - 2PQ$ orthogonale Projektoren sind. Was sind ihre Bilder?