Proseminar über Homotopiegruppen: Übersicht der Vorträge

Allgemeine Hinweise:

- Die angegebenen Quellen behandeln manchmal mehr oder weniger als in der Beschreibung des Vortrags steht. Die Beschreibung hier gilt aber trotzdem – überspringen sie alles, was die Quellen sonst noch machen, und ergänzen sie selbst, was in den Quellen fehlt. (Ich helfe gerne dabei.)
- Wenn die Zeit nicht reicht, überspringen Sie einen Beweis oder skizzieren ihn nur.
- Wenn noch Zeit übrig bleibt, diskutieren Sie ein oder mehrere Beispiele.

1. **Topologische Grundlagen**
   - Definition: Stetige Abbildungen & Homöomorphismen
   - Definition: Zusammenhang und Wegzusammenhang
   - *Lemma:* Wenn $f\colon X \to Y$ stetig ist und X [weg-]zusammenhängend, dann ist auch $f(X)$ [weg-]zusammenhängend.
   - Definition: Quotiententopologie auf X/A
   - *Lemma:* Stetige Abbildungen $X/A \to Y$ entsprechen genau den stetigen Abbildungen $X \to Y$, die auf A konstant sind
   - Definition: Homotopie von Abbildungen, Homotopie-Äquivalenz von Räumen
   - *Quellen:* [Jähnich 16–22, 40f, 50, 54, 73–76], zu Wegzusammenhang auch [Laures-Szymik 41–46]

2. **Definition von Homotopiegruppen**
   - *Lemma:* Es gibt einen Homöomorphismus $[0,1]^n/\partial[0,1]^n \cong S^n$.
   - Definition von $\pi_n(X,x_0)$ als Homotopieklassen von Abbildungen $(S^n, e_0) \to (X, x_0)$ oder $\big([0,1]^n, \partial[0,1]^n\big) \to (X, x_0)$. (Das ist dasselbe, und wir brauchen beide Definitionen.)
   - Definition der Verknüpfung auf $\pi_n(X,x_0)$.
   - *Satz:* $\pi_n(X,x_0)$ ist eine Gruppe für $n \geq 1$ und kommutativ für $n \geq 2$.
   - Quellen: Für π_1: [tom Dieck 1f, 13f] oder [Ossa 71–74] oder [Hatcher 25–27]
Für π_n, $n \geq 2$: [tom Dieck 91–93] oder Hatcher [340–342]

3. **Mehr Eigenschaften von Homotopiegruppen**
   - $\pi_0(X,x_0)$ zählt die Wegzusammenhangs-Komponenten, ist aber keine Gruppe.
   - *Lemma:* Wenn X wegzusammenhängend ist, ist $\pi_n(X,x_0)$ unabhängig vom Basispunkt x_0.
   - *Lemma:* $\pi_n(X \times Y) = \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$
   - Jede stetige Abbildung $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ ergibt einen Homomorphismus $\pi_n(f)\colon \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(Y,y_0)$.
   - *Lemma:* $\pi_n(f \circ g) = \pi_n(f) \circ \pi_n(g)$, und $\pi_n(f^{-1}) = \pi_n(f)^{-1}$ falls f^{-1} existiert.
   - *Satz:* $X \simeq Y \implies \pi_n(X,x_0) \cong \pi_n(Y,y_0)$
Insbesondere: Für zusammenziehbare Räume wie $\mathbb{R}^n$ ist $\pi_n \cong \{e\}$ für alle n.
   - *Bemerkung, ohne Beweis:* Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch (Gegenbeispiel Warschauer Kreis), aber korrekt für CW-Komplexe (vgl. Hatcher S. 348.)
   - Quellen: [Ossa 74–76] oder [Hatcher 28, 34–37] behandeln das für π_1. Übertragen Sie es auf π_n!

4. **Überlagerungen und die Homotopie-Hochhebungs-Eigenschaft**
    - Definition von Überlagerung
    - Beispiele für Überlagerungen
    - Satz: Existenz & Eindeutigkeit der Hochhebung von Homotopien
    - Quellen: Empfehlung: [Ossa 94–99].
      Alternativ: [Jänich 156–167] oder [Laures-Szymik 153–163] oder [Hatcher 29–31, 60]

5. **Der Kreis, Teil 1 / Der Brouwer'sche Fixpunktsatz**
    - $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$
    - *Brouwer'scher Fixpunktsatz:* Jede stetige Abbildung $f\colon D^2 \to D^2$ hat einen Fixpunkt.
    - Quellen zu $\pi_1(S^1)$: Empfehlung: [Laures-Szymik 114–119]
      Alternativ: [tom Dieck 17–18] oder [Ossa 23–25, 74] oder Hatcher [29–30]
      (Die angegebenen Stellen enthalten auch Beweise für die Homotopie-Hochhebungs-Eigenschaft; diese wird aber schon in Vortrag 4 behandelt.)
    - Quellen zum BFPS: [tom Dieck 134–135] oder [Hatcher 31–32]

6. **Der Kreis, Teil 2 / Überlagerungen und höhere Homotopiegruppen**
    - *Satz:* Überlagerungen induzieren Isomorphismen in π_n für alle $n \geq 2$.
    - *Korollar:* $\pi_n(S^1) \cong \{e\}$ für alle $n \geq 2$.
    - Quellen: [TBD]

7. **Gruppenwirkungen und Deck-Transformationen**
    - Definition/Erklärung: Gruppenwirkungen (*group actions*)
    - *Lemma:* Wenn $Y \to X$ eine Überlagerung ist, dann wirkt $\pi_1(X)$ auf Y.
    - *Lemma:* Wenn $Y \to X$ eine Überlagerung ist, dann ist $\pi_1(Y) \leq \pi_1(X)$.
    - [Hatcher 68-76, enthält viele Beispiele]

8. **Die Klassifizierung von Überlagerungen durch π_1**
    - Definition & Beweis der Existenz der universellen Überlagerung $\widetilde{X}$
    - *Satz:* Jede Überlagerung $Y \to X$ ist isomorph zu $\widetilde{X}/\pi_1(Y) \to X$.
      Insbesondere gibt es genauso viele Überlagerungen von X (bis auf Isomorphie) wie Untergruppen von $\pi_1(X)$.
    - Quellen: [Ossa 100-103] (zu kurz) oder [Jänich 172–196] (zu lang) oder [Hatcher 63–68].

9. **Wie man neue Gruppen konstruiert**
    - Gruppenpräsentationen
    - Endlich erzeugte und endlich präsentierte Gruppen
    - Freies Produkt von Gruppen
    - Quotientengruppen
    - Quelle: TBD

10. **Der Satz von Seifert und van Kampen, Teil 1**
    - Satz, Beweis der Surjektivität
    - $\pi_1(S^n) \cong \{e\}$ für alle $n \geq 2$
    - $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_2$
    - Quelle: [Hatcher 43–44] oder [tom Dieck, 27–30] (sehr anspruchsvoll)
11. **Der Satz von Seifert und van Kampen, Teil 2**
    - Beweis der Injektivität
    - π_1 für Torus, Klein'sche Flasche, $\mathbb{RP}^2$
    - Quellen: [Hatcher 45–46] oder [tom Dieck, 27–30] (sehr anspruchsvoll)
12. **Relative Homotopiegruppen und die lange exakte Sequenz**
    - Definition von $\pi_i(X, A)$ (mit Würfeln und/oder Sphären)
    - Definition/Erklärung: Lange exakte Sequenzen
    - *Satz:* Die lange exakte Sequenz von relativen Homotopiegruppen
    - Quellen: [tom Dieck 93ff] oder [Hatcher 343–345]
13. **Die ersten n+1 Homotopiegruppen von S^n**
    - *Satz (ohne Beweis):* Ausschneidung (*excision*) für relative Homotopiegruppen
    - *Satz (mit Beweis):* $\pi_i(S^n) \cong \begin{cases} \{e\}, & i \leq n-1, \\ \mathbb{Z}, & i = n \end{cases}$
    - Quelle: [tom Dieck 106–111] oder [Hatcher, 360ff]
14. **Die Hopf-Faserung / $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$**
    - Definition: Faserungen
    - *Satz (ohne Beweis):* Lange exakte Sequenz für Faserungen
    - Die Hopf-Faserung $S^1 \hookrightarrow S^3 \twoheadrightarrow S^2$
    - *Satz (mit Beweis):* $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$
    - Quellen: [tom Dieck 96–99]

Quellen

Bücher auf Deutsch, die in der M.I.-Bibliothek zu finden sind:

Tammo tom Dieck, *Topologie.* de Gruyter, 2. Auflage

Klaus Jänich, *Topologie.* Springer, 8. Auflage.

G. Laures und M. Szymik, *Grundkurs Topologie.* Spektrum, 1. Auflage

Erich Ossa, *Topologie.* Vieweg, 1. Auflage

Buch auf Englisch, kostenlos im Internet erhältlich:

Allen Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge University Press
(`https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`)