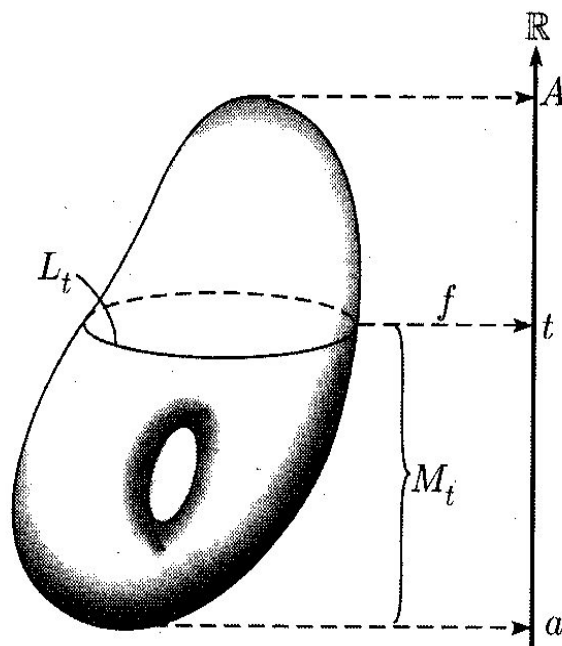


Einführung  
in die Grundlagen der  
— Morse-Theorie —

Sebastian Hage\*

18.10.2005



Einführungsvortrag im Seminar

*"Morse-Theorie und ihre Anwendung in der Differentialgeometrie"*

von Prof. Schick

WS 2005/06

---

\*email: sebhage@math.uni-goettingen.de

## Zusammenfassung

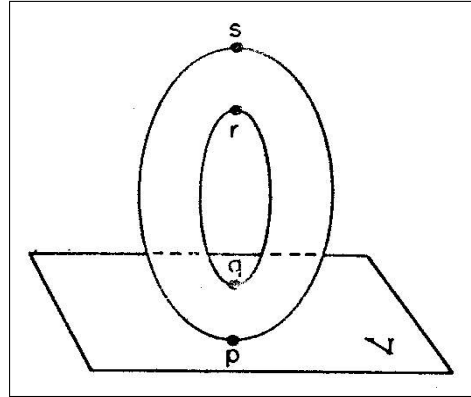
Die vorliegende Betrachtung hat den Anspruch, in die elementarsten Grundlagen der Morse-Theorie einzuführen; im Groben ist der gedankliche Aufbau [Mil68] nachempfunden. Nach einer möglicherweise motivierenden Darstellung der zu erarbeitenden Aussagen anhand eines repräsentativen Torus-Beispiels beginnt eine nicht zu knapp gehaltene Vorbereitungsphase, die altbekannte Begriffe wie kritische Punkte und Hesse-Form verallgemeinernd zum Gebrauch auf glatten Mannigfaltigkeiten liftet, um bei dynamischen Systemen und ihren erzeugenden Vektorfeldern zu enden. Schon folgt mit dem Morse-Lemma, das die lokale (überraschenderweise sehr einfache) Gestalt bestimmter Funktionen in der Nähe nicht-degenerierter kritischer Punkte beschreibt, der fundamentale Unterboden, auf dem die weitere Betrachtung erdet. Nach einer hilfssatzartigen Aussage – den Diffeomorphietyp bestimmter Teilmengen der betrachteten Mannigfaltigkeit in Abwesenheit kritischer Punkte behandelnd –, die weiterhin den Übergang vom Diffeomorphietyp zum Homotopietyp als unbedenklich erklärt, nimmt der Beweis des Hauptsatzes über den Homotopietypwandel in Anwesenheit nicht-degenerierter kritischer Punkte den verbleibenden Raum in Anspruch und besteht auf die erstaunliche Aussage, daß die Änderung des Homotopietyps durch Anheften von Zellen vor sich geht, deren Dimension durch die Funktion und den kritischen Punkt eindeutig bestimmt sind, womit der Vortrag sein frühzeitiges Ende beschließt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Hinführung (Torusstudien)</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Mannigfaltige Vorbereitungen</b>	<b>6</b>
2.1	Nicht-degenerierte kritische Punkte . . . . .	6
2.2	Die Hessesche Form $\mathcal{H}_f^p$ . . . . .	8
2.3	1-Parameter-Gruppen von Diffeomorphismen . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Morse-Theorie</b>	<b>13</b>
3.1	Das Morse-Lemma . . . . .	13
3.2	Erste Folgerungen . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Diffeomorphietyp, Homotopietyp &amp; kritische Werte</b>	<b>19</b>
4.1	Diffeomorphietyp und kritische Punkte . . . . .	19
4.2	Homotopietyp und nicht-degenerierte kritische Punkte . . . . .	22
	<b>Literatur</b>	<b>29</b>

## 1 Hinführung (Torusstudien)

Anhand eines einfachen Beispiels konkretisieren wir zu Beginn die nachfolgenden Grundsätze der Morse-Theorie. Im wohlvertrauten 3-dimensionalen Raum betrachten wir einen gewöhnlichen 2-Torus  $T^2$ , der tangential auf einer horizontalen Ebene  $E$  ruht.



**Abbildung 1: Torus und Höhenfunktion.** Torus  $T^2$  auf Ebene  $V = E$  mit offenbar ausgezeichneten Punkten  $p, q, r, s \in T^2$ .

Sei  $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Höhenfunktion, die jedem Punkt des Torus seine Höhe über der Ebene  $E$  zuweist. Die Teilmenge  $T_a^2$  sei für  $a \in \mathbb{R}$  gegeben durch

$$T_a^2 := f^{-1}(-\infty, a] = \{x \in T^2 \mid f(x) \leq a\} \subset T^2,$$

womit  $T_a^2$  gerade die Menge aller Toruspunkte ist, die sich in einer Höhe  $\leq a$  über der Ebene befinden. Durchwandert  $a$  aus dem Negativ-Unendlich kommend die reellen Zahlen, so durchläuft  $T_a^2$  genau fünf Homöomorphie-Typen:

- (H1) Falls  $a \in (-\infty, \underbrace{f(p)}_{=0})$  ist, so ist  $T_a^2 = \emptyset$ .
- (H2) Für  $a \in (f(p), f(q))$  ist  $T_a^2$  homöomorph zur 2-Zelle, also  $T_a^2 \approx D^2$ .
- (H3) Für  $a \in (f(q), f(r))$  ist  $T_a^2 \approx S^1 \times I$ , also vom Homöomorphie-Typ eines Zylinders.
- (H4) Ist  $a \in (f(r), f(s))$ , so ist  $T_a^2$  homöomorph zu einer berandeten, kompakten Mannigfaltigkeit des Geschlechtes 1 mit einem Kreis als Rand.
- (H5) Im Fall  $a \in (f(s), \infty)$  gilt  $T_a^2 = T^2$ .

Dies zeigt, daß sich gerade an den Punkten  $p, q, r, s \in T^2$  der Homöomorphie-Typ der berandeten Mannigfaltigkeit  $T_a^2$  ändert. Zur Beschreibung dieses Wandlungsprozesses von  $T_a^2$  betrachten wir nun den Homotopietyp von  $T_a^2$ .

- (H1) $\rightsquigarrow$ (H2) Fall (H2) entsteht aus Fall (H1) durch Anheften einer 0-Zelle: klebt man einen Punkt in die Leere, so liefert dies den einpunktigen Raum. Dieser ist aufgrund der Kontrahierbarkeit der 2-Zelle vom selben Homotopietyp wie  $D^2$ .
- (H2) $\rightsquigarrow$ (H3) Der Entwicklungsschritt von der 2-Zelle zum Zylinder wird durch Anheften einer 1-Zelle realisiert:  $D^2 \cup D^1 \simeq S^1 \times I$ .
- (H3) $\rightsquigarrow$ (H4) Den Homotopietyp einer kompakten,  $S^1$ -berandeten Mannigfaltigkeit vom Geschlecht 1 erhält man wieder durch Anheften einer 1-Zelle aus dem Zylinder.
- (H4) $\rightsquigarrow$ (H5) Der ganze Torus  $T^2$  entsteht nun durch Anheften einer 2-Zelle.

Die Punkte  $p, q, r, s \in T^2$ , an denen sich der Homotopietyp von  $T_a^2$  ändert, sind allesamt kritische Punkte der Funktion  $f$ . Wählt man lokale Koordinatensysteme  $(x^1, x^2)$  in der Nähe dieser Punkte, so verschwinden die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x^1}$  und  $\frac{\partial f}{\partial x^2}$  in diesen Punkten. Tatsächlich können wir den folgenden Satz beweisen:

**1.1 Satz** Sei  $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$  wie oben. Für  $* \in \{p, q, r, s\} \subset T^2$  gibt es in einer Umgebung  $U_*$  ein in  $*$  zentriertes lokales Koordinatensystem  $(x_*^1, x_*^2)$  derart, daß  $f$  auf  $U_*$  eine der folgenden Formen annimmt:

$$(i) \quad f = c_* + (x_*^1)^2 + (x_*^2)^2$$

$$(ii) \quad f = c_* - (x_*^1)^2 + (x_*^2)^2$$

$$(iii) \quad f = c_* - (x_*^1)^2 - (x_*^2)^2,$$

wobei  $c_*$  geeignete Konstanten sind. Darüberhinaus entspricht die Anzahl der Minuszeichen in der lokalen Darstellung von  $f$  gerade der Dimension der Zelle, die für  $a < f(*) < b$  angeheftet werden muß, um (modulo Homotopieäquivalenz) von  $T_a^2$  nach  $T_b^2$  zu gelangen.

In der Tat, verhält es sich hier folgendermaßen: für geeignete (nach obigem Satz tatsächlich existente) Koordinatenumgebungen  $U_*$  von  $* \in \{p, q, r, s\}$  ist  $f$  von der lokalen Gestalt

$$f|_{U_p} = (x_p^1)^2 + (x_p^2)^2$$

$$f|_{U_{q,r}} = c_{q,r} - (x_{q,r}^1)^2 + (x_{q,r}^2)^2$$

$$f|_{U_s} = c_s - (x_s^1)^2 - (x_s^2)^2.$$

Es bewahrheitet sich, daß die Anzahl der Minuszeichen im jeweiligen Ausdruck für  $f$  der Dimension der Zelle entspricht, die angeheftet werden muß, um für  $a < f(*) < b$ ,  $* \in \{p, q, r, s\}$  von  $T_a^2$  zu  $T_b^2$  zu gelangen. Wie sich im Folgenden zeigt, ist dies kein Zufall, sondern läßt für beliebige glatte Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  auf Mannigfaltigkeiten eine grundlegende Verallgemeinerung zu.

## 2 Mannigfaltige Vorbereitungen

In diesem Abschnitt treffen wir zunächst einige Vorbereitungen, die zur Formulierung und zum späteren Beweis des geschilderten Tatbestandes dienlich sind. Ein Großteil dieser Vorbereitungen besteht in der Verallgemeinerung wohlbekannter Begriffe (wie z.B. kritischer Punkt oder Hessesche Form), um sie für die mannigfaltige Analysis brauchbar zu machen, sowie in der Beantwortung der dabei stets auftretenden Frage nach der Unabhängigkeit von lokalen Koordinaten (die für die hier zu betrachtenden Fälle stets mit guten Nachrichten einhergeht). Bei fortgeschrittener Vertrautheit mit Mannigfaltigkeiten und ihrer Analysis sei hier ausdrücklich zum Überspringen dieses Abschnitts ermutigt. Thematisch handelt es sich im Folgenden um die Charakterisierung der konkret im Abschnitt 1 dargestellten Klasse von Punkten, welche eine fundamentale Veränderung des Homotopietyps einer speziell betrachteten Menge bewirken. Im Anschluß (also in 2.3) wartet eine kurze Erinnerung zu dynamischen Systemen bzw. 1-Parameter-Gruppen von Mannigfaltigkeiten mit einer im weiteren Verlauf stark benötigten Hilfsaussage.

### 2.1 Nicht-degenerierte kritische Punkte

Sei von hier an  $M^n$  eine glatte  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung. Wir beginnen mit dem Begriff des kritischen Punktes von  $f$ .

**2.1 Definition (Kritische Punkte von  $f$ )** Ein Punkt  $p \in M$  heißt *kritischer Punkt* von  $f$ , falls die induzierte Abbildung  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$  der Tangentialräume die Nullabbildung ist. Wir bezeichnen die Menge aller kritischen Punkte von  $f$  mit  $C_f \subset M$ . Eine reelle Zahl  $c$  heißt *kritischer Wert* von  $f$ , falls es einen kritischen Punkt  $p \in M$  von  $f$  gibt mit  $f(p) = c$ .

Ist  $p \in M$  ein kritischer Punkt von  $f$ , so gilt bezüglich einer Karte  $(U_p, \varphi_p)$  und dem entsprechenden lokalen Koordinatensystem  $(x^1, \dots, x^n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0. \quad (1)$$

Es ist dann nämlich für einen Tangentialvektor  $v = (v_1, \dots, v_k) \in T_p M$  und einen Funktionskeim  $g$ , definiert auf einer Umgebung des kritischen Wertes  $f(p)$ ,

$$0 = T_p f(v)(g) = v(g \circ f) = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x^k} \Big|_p.$$

Für  $g = \text{id}$  liefert dies gerade (1).

Wir prüfen nun die Koordinatenunabhängigkeit der vorausgehenden Definition.

**2.2 Notiz** Die obige Definition ist unabhängig von der Wahl des lokalen Koordinatensystems  $(x^1, \dots, x^n)$ .

**Beweis.** Sind  $(x^1, \dots, x^n)$  und  $(y^1, \dots, y^n)$  zwei verschiedene lokale Koordinatensysteme um den Punkt  $p$ , der bezüglich  $(x^1, \dots, x^n)$  ein kritischer Punkt von  $f$  sei. Die Formel für den Koordinatenwechsel von  $(x^1, \dots, x^n)$  zu  $(y^1, \dots, y^n)$  lautet dann

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}(p). \quad (2)$$

Aufgrund von (1) ergibt sich, daß auch

$$\frac{\partial f}{\partial y^1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial y^n}(p) = 0$$

gilt, womit  $p$  auch bezüglich des lokalen Koordinatensystems  $(y^1, \dots, y^n)$  ein kritischer Punkt von  $f$  ist. Dasselbe ist der Fall, wenn man die Rollen dieser Koordinatensysteme vertauscht. Somit ist die Eigenschaft eines Punktes, kritisch zu sein, unabhängig von der Wahl des lokalen Koordinatensystems.  $\square$

Lediglich kritische Punkte zu betrachten reicht für unsere Zwecke jedoch nicht aus; wir müssen darüberhinaus fordern, daß diese nicht-degeneriert sind.

**2.3 Definition ((Nicht-)Degeneriertheit kritischer Punkte)** Sei  $p \in C_f$  ein kritischer Punkt von  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(U_p, \varphi_p)$  eine Karte um  $p$  mit entsprechendem lokalem Koordinatensystem  $(x^1, \dots, x^n)$ . Die *Hesse-Matrix*  $H_f(p)$  von  $f$  in  $p$  ist gegeben durch

$$H_f(p) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2}(p) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial^2 f}{(\partial x^n)^2}(p) \end{pmatrix} \in \text{Sym}^n(\mathbb{R}). \quad (3)$$

Der kritische Punkt  $p$  von  $f$  heißt *nicht-degeneriert*, falls  $H_f(p)$  nicht-singulär ist. Im singulären Fall  $\det(H_f(p)) = 0$  heißt  $p \in C_f$  *degeneriert*.

Beispiele (siehe u.a. [Mat02]) zeigen, daß degenerierte kritische Punkte nach Störung der Funktion verschwinden oder in Form eines Paares nicht-degenerierter kritischer Punkte wiederentdeckt werden können. Im Gegensatz dazu weisen nicht-degenerierte kritische Punkte ein gewisses Maß an Stabilität auf, die dazu führt, daß auch nach Störungen noch Existenz und Nicht-Degeneriertheit vorliegen können. Um die Koordinatenunabhängigkeit zu untersuchen, beobachten wir das Verhalten der Hesse-Matrix unter Koordinatentransformation.

**2.4 Lemma (Verhalten von  $H_f(p)$  unter Koordinatentransformation)** Seien  $(x^1, \dots, x^n)$  und  $(y^1, \dots, y^n)$  zwei lokale Koordinatensysteme eines nicht-degenerierten kritischen

Punktes  $p \in C_f$ , und seien  $H_f^{(x^i)}(p)$  und  $H_f^{(y^i)}(p)$  die Hesse-Matrizen von  $f$  in  $p$  bezüglich dieser Koordinatensysteme. Dann gilt

$$H_f^{(x^i)}(p) = (J_\theta(p))^t H_f^{(y^i)}(p) J_\theta(p), \quad (4)$$

wobei

$$J_\theta(p) = \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p) \right) \in \text{Mat}^n(\mathbb{R})$$

die in  $p$  ausgewertete Jakobi-Matrix der Koordinatentransformation

$$\theta : (x^1, \dots, x^n) \longrightarrow (y^1, \dots, y^n)$$

ist.

Dies führt geradewegs auf die gewünschte Invarianz.

**2.5 Korollar** *Nicht-Degeneriertheit eines kritischen Punktes  $p \in C_f$  ist unabhängig von der Wahl des lokalen Koordinatensystems in  $p$ .*

**Beweis.** Sind  $(x^1, \dots, x^n)$  und  $(y^1, \dots, y^n)$  zwei lokale Koordinatensysteme um den kritischen Punkt  $p$ , so gilt für die Hesse-Matrizen nach Lemma 2.4 die Beziehung (4)

$$H_f^{(x^i)}(p) = (J_\theta(p))^t H_f^{(y^i)}(p) J_\theta(p).$$

Dann ist

$$\det \left( H_f^{(x^i)}(p) \right) = \det \left( (J_\theta(p))^t \right) \det \left( H_f^{(y^i)}(p) \right) \det \left( J_\theta(p) \right).$$

Da die Jakobi-Matrix  $J_\theta(p)$  Koordinatentransformation in  $p$  nicht singular ist, gilt  $\det \left( H_f^{(x^i)}(p) \right) \neq 0$  genau dann, wenn  $\det \left( H_f^{(y^i)}(p) \right) \neq 0$  ist.  $\square$

## 2.2 Die Hessesche Form $\mathcal{H}_f^p$

Wir führen nun die Hessesche Form  $\mathcal{H}_f^p$  einer Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $p \in C_f$  ein, zeigen, daß wie erwartet  $\mathcal{H}_f^p \in \text{Sym}^2(T_p M)$  gilt und definieren ihren Index.

**2.6 Definition (Hessesche Form)** Sei  $p \in C_f$  kritischer Punkt von  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Unter der *Hesseschen Form*  $\mathcal{H}_f^p$  von  $f$  in  $p$  versteht man das Funktional

$$\mathcal{H}_f^p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \longmapsto \tilde{v}_p(\tilde{w}(f)), \quad (5)$$

wobei  $\tilde{v}$  und  $\tilde{w}$  Fortsetzungen von  $v$  und  $w$  zu Vektorfeldern sind, also  $\tilde{v}_p = v$  und  $\tilde{w}_p = w$ .

**2.7 Lemma**  $\mathcal{H}_f^p$  ist eine symmetrische Bilinearform auf  $T_p M$ .



**Beweis.** Es gilt für  $v, w \in T_p M$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_f^p(v, w) - \mathcal{H}_f^p(w, v) &= \tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) - \tilde{w}_p(\tilde{v}(f)) \\ &= [\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) \\ &= 0,\end{aligned}$$

da  $p$  kritischer Punkt von  $f$  ist. Also ist  $\mathcal{H}_f^p$  symmetrisch. Die Wohldefiniertheit von  $\mathcal{H}_f^p$  ergibt sich aus der Unabhängigkeit der Ausdrücke  $\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) = v(\tilde{w}(f))$  und  $\tilde{w}_p(\tilde{v}(f))$  von den Fortsetzungen  $\tilde{v}$  und  $\tilde{w}$ .  $\square$

**2.8 Notiz** Bezüglich der Standardbasis  $\mathcal{B}_{T_p M} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$  des Tangentialraumes  $T_p M$  für ein lokales Koordinatensystem  $(x^1, \dots, x^n)$  wird die Hessesche Form  $\mathcal{H}_f^p$  durch die Hesse-Matrix  $H_f(p)$  repräsentiert.

**Beweis.** Ist  $(x^1, \dots, x^n)$  ein lokales Koordinatensystem um  $p$  und  $v, w \in T_p M$  zwei Tangentialvektoren. Bezüglich der Basis  $\mathcal{B}_{T_p M} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$  sind diese von der Form  $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  und  $w = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ . Wähle  $\tilde{w} := \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , wobei  $w_i$  als konstante Funktion aufgefaßt wird. Dann ist

$$\mathcal{H}_f^p(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) = v \left( \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \sum_{i,j=1}^n v_i w_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p), \quad (6)$$

also repräsentiert  $H_f(p)$  die Hessesche Form  $\mathcal{H}_f^p$  bezüglich  $\mathcal{B}_{T_p M}$ .  $\square$

**Erinnerung. (Symmetrische Bilinearformen)** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und bezeichne  $\text{Sym}^2(V)$  den Vektorraum der symmetrischen Bilinearformen auf  $V$ . Sei  $\beta \in \text{Sym}^2(V)$ . Zwei Vektoren  $v, w \in V$  heißen orthogonal bezüglich  $\beta$ , falls  $\beta(v, w) = 0$  gilt. Es existiert eine Basis  $\mathcal{B}_V^\beta := \{v_i\}_{1, \dots, \dim(V)}$  von  $V$ , deren Elemente paarweise  $\beta$ -orthogonal sind, d.h.

$$\beta(v_i, v_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j.$$

Bezüglich dieser Basis ist die  $\beta$  repräsentierende Matrix

$$\Lambda_{\mathcal{B}_V}^\beta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{Mat}^n(\mathbb{R})$$

diagonal mit Einträgen

$$\lambda_i = \beta(v_i, v_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Die symmetrische Bilinearform  $\beta$  heißt nicht-degeneriert, falls  $\lambda_i \neq 0$  ist für alle  $i \in [n]$ . Der Index von  $\beta$  ist gegeben durch die Anzahl der negativen Diagonaleinträge von  $\Lambda_{\mathcal{B}_V}^\beta$ . Der Index ist somit die maximale Dimension eines Unterraums von  $V$ , auf dem  $\beta$  negativ definit ist.

**2.9 Definition (Index von  $\mathcal{H}_f^p$ )** Sei  $p \in C_f$  nicht-degeneriert und  $\mathcal{H}_f^p$  die Hessesche Form von  $f$  in  $p$ . Die natürliche Zahl

$$\text{ind}_f(p) := \text{card} \left\{ \lambda_i \mid \lambda_i = \mathcal{H}_f^p(e_i, e_i) < 0, e_i \in \mathcal{B}_{T_p M}^{\mathcal{H}_f^p}, i = 1, \dots, \dim(T_p M) \right\} \quad (7)$$

heißt der *Index* von  $\mathcal{H}_f^p$ . Man bezeichnet  $\text{ind}_f(p)$  auch einfach als Index von  $f$  bei  $p$ . Beobachte  $0 \leq \text{ind}_f(p) \leq \dim(T_p M) = \dim(M) = n$ .

**Bemerkung. (Zur Wohldefiniertheit von  $\text{ind}_f(p)$ )** Nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz hängt der Index  $\text{ind}_f(p)$  nicht von der Wahl der diagonalisierenden Basis  $\mathcal{B}_{T_p M}^{\mathcal{H}_f^p}$  ab, wird also durch die glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  und den nicht-degenerierten kritischen Punkt  $p$  eindeutig bestimmt und ist somit wohldefiniert.

**2.10 Definition (Nullraum von  $\mathcal{H}_f^p$ )** Der *Nullraum*  $N_0(\mathcal{H}_f^p)$  von  $\mathcal{H}_f^p$  ist gegeben durch

$$N_0(\mathcal{H}_f^p) := \left\{ v \in T_p M \mid \mathcal{H}_f^p(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in T_p M \right\} \subset T_p M. \quad (8)$$

Unter der *Nullität*  $\nu(\mathcal{H}_f^p)$  von  $\mathcal{H}_f^p$  versteht man die Dimension des Nullraumes:

$$\nu(\mathcal{H}_f^p) := \dim(N_0(\mathcal{H}_f^p)). \quad (9)$$

**2.11 Notiz** Ein Punkt  $p \in M$  ist genau dann ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von  $f$ , wenn  $\nu(\mathcal{H}_f^p) = 0$  ist.

## 2.3 1-Parameter-Gruppen von Diffeomorphismen

Nun erinnern wir an den Begriff der 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit  $M$ , welche auch als dynamisches System oder Fluß auf  $M$  bezeichnet wird. Ohne in die Tiefe zu gehen und den Begriff geeignet zu ergründen, verweisen wir beispielsweise auf [BJ73], wo u.a. Existenz- und Eindeutigkeitsatz zu finden sind.

**2.12 Definition (1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen)** Eine *1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen* (auch: *dynamisches System* oder *Fluß*) einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine glatte Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M,$$

so daß die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. Für alle  $t \in \mathbb{R}$  ist die Abbildung  $\varphi_t : M \rightarrow M$ , gegeben durch  $\varphi_t(q) := \varphi(t, q)$  ein Diffeomorphismus von  $M$  auf sich selbst.
2. Für alle  $(t, s) \in \mathbb{R}^2$  gilt  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ .

**2.13 Notiz** Eine glatte Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  ist genau dann eine 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen von  $M$ , wenn die Abbildung

$$\Phi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\text{Diffeo}(M), \circ), \quad t \longmapsto \varphi_t \quad (10)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Dabei bezeichnet  $\text{Diffeo}(M)$  die Menge aller Diffeomorphismen von  $M$  auf sich selbst.

**2.14 Definition (Erzeugendes Vektorfeld eines dynamischen Systems  $\varphi$ )** Für eine 1-Parameter-Gruppe  $\varphi$  und eine glatte Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  wird ein Vektorfeld  $X$  auf  $M$  gegeben durch

$$X_q(f) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ \varphi_h)(q) - f(q)}{h}. \quad (11)$$

Man sagt, das Vektorfeld  $X$  erzeuge die 1-Parameter-Gruppe  $\varphi$ .

Es folgt nun eine Hilfsaussage, die im weiteren Verlauf benötigt wird, um den Satz 4.2 über den Diffeomorphietyp zu beweisen: unter bestimmten Voraussetzungen erzeugt ein glattes Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  nämlich ein dynamisches System auf  $M$ .

**2.15 Lemma** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $K \subset M$  kompakt. Ist  $X$  ein glattes Vektorfeld auf  $M$ , das außerhalb von  $K$  verschwindet, so erzeugt  $X$  eine eindeutig bestimmte 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen von  $M$ .

**Beweis.** Sei  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  eine 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen, die durch das Vektorfeld  $X$  erzeugt wird. Für festes  $q \in M$  erhält man eine Kurve  $\varphi_q$  in  $M$ , gegeben durch

$$\varphi_q : \mathbb{R} \longrightarrow M, \quad t \longmapsto \varphi_t(q) = \varphi(t, q).$$

Es gilt nun für eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_q(t)}{dt}(f) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ \varphi_q)(t+h) - (f \circ \varphi_q)(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ \overbrace{\varphi_{t+h}}^{\varphi_h \circ \varphi_t})(q) - (f \circ \varphi_t)(q)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(p)) - f(p)}{h} \\ &= X_p(f) \end{aligned}$$

mit  $p := \varphi_t(q)$ .<sup>1</sup> Die Kurve  $\varphi_q$  genügt also der Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi_t(q)}{dt} = \frac{d\varphi_q(t)}{dt} = X_{\varphi_q(t)} = X_{\varphi_t(q)} \quad (13)$$

<sup>1</sup>Für eine glatte Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  in  $M$  und eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist der Geschwindigkeitsvektor  $\frac{d\gamma}{dt} \in T_{\gamma(t)}M$  gegeben durch

$$\frac{d\gamma}{dt}(f) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ \gamma)(t+h) - (f \circ \gamma)(t)}{h}. \quad (12)$$

mit Anfangsbedingung  $\varphi_0(q) = q$ . Nun ist bekannt, daß lokal eine eindeutige Lösung existiert, die zudem auf glatte Weise von der Anfangsbedingung abhängt. Also existiert für jeden Punkt  $q \in M$  eine Umgebung  $U_q$  und eine reelle Zahl  $\varepsilon_q > 0$  derart, daß die obige Differentialgleichung mit Anfangsbedingung  $\varphi_0(q) = q$  eine eindeutige glatte Lösung  $\varphi_t(q)$  für  $q \in U_q$  und  $|t| < \varepsilon_q$  besitzt. Die Familie  $\mathcal{U}_K := \{U_q\}_{q \in M}$  liefert eine offene Überdeckung der Teilmenge  $K \subset M$ , die aufgrund der Kompaktheit von  $K$  eine endliche Teilüberdeckung  $\{U_{q_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$  enthält. Setze

$$\varepsilon_0 := \min_{\lambda \in \Lambda} \{\varepsilon_{q_\lambda}\} \quad (14)$$

und

$$\varphi_t(q) = q \quad \text{für } q \notin K. \quad (15)$$

Dann besitzt die Differentialgleichung eine eindeutig bestimmte, glatte Lösung  $\varphi_t(q)$  für  $|t| < \varepsilon_0$  und für alle  $q \in M$ . Für  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  mit  $|s|, |t|, |t + s| < \varepsilon_0$  gilt  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ , was impliziert, daß jedes  $\varphi_t$  ein Diffeomorphismus von  $M$  auf sich selbst ist. Definiere nun  $\varphi_t$  für  $|t| \geq \varepsilon_0$  auf folgende Weise: jede reelle Zahl  $t \in \mathbb{R}$  besitzt eine eindeutige Darstellung der Form

$$t = k \frac{\varepsilon_0}{2} + r \quad (16)$$

mit geeignetem  $k \in \mathbb{Z}$  und einem Rest  $r \in \mathbb{R}$  mit  $|r| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ . Definiere damit

$$\varphi_t := \begin{cases} \left(\varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}}\right)^k \circ \varphi_r, & k \geq 0 \\ \left(\varphi_{-\frac{\varepsilon_0}{2}}\right)^{-k} \circ \varphi_r, & k < 0 \end{cases}. \quad (17)$$

Damit ist  $\varphi_t$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert. Insbesondere ist  $\varphi_t$  wohldefiniert aufgrund der Eindeutigkeit der Darstellung  $t = k \frac{\varepsilon_0}{2} + r$ , glatt als Komposition glatter Funktionen, und für  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  mit  $t = k_t \frac{\varepsilon_0}{2} + r_t$  und  $s = k_s \frac{\varepsilon_0}{2} + r_s$  hat man

$$\begin{aligned} \varphi_{s+t} &= \varphi_{(k_t+k_s)\frac{\varepsilon_0}{2} + (r_t+r_s)} \\ &= \left(\varphi_{\pm\frac{\varepsilon_0}{2}}\right)^{\pm k_t \pm k_s} \circ \underbrace{\varphi_{r_t+r_s}}_{=\varphi_{r_t} \circ \varphi_{r_s}} \\ &= \left(\left(\varphi_{\pm\frac{\varepsilon_0}{2}}\right)^{\pm k_t} \circ \varphi_{r_t}\right) \circ \left(\left(\varphi_{\pm\frac{\varepsilon_0}{2}}\right)^{\pm k_s} \circ \varphi_{r_s}\right) \\ &= \varphi_t \circ \varphi_s, \end{aligned}$$

da zwei Diffeomorphismen  $\varphi_u$  und  $\varphi_v$  im Falle  $|u|, |v|, |u + v| < \varepsilon_0$  offensichtlich kommutieren.<sup>2</sup> Somit hat man mit der glatten Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  eine 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen von  $M$  konstruiert, die durch das Vektorfeld  $X$  erzeugt wird.  $\square$

<sup>2</sup>Man hat dann nämlich  $\varphi_u \circ \varphi_v = \varphi_{u+v} = \varphi_{v+u} = \varphi_v \circ \varphi_u$ .

### 3 Grundlagen der Morse-Theorie

Nachdem die nötige Vorarbeit nun weitestgehend abgeschlossen ist, legen wir mit dem sogenannten Morse-Lemma den Grundstein für die Morse-Theorie. Ausgehend von einem nicht-degenerierten kritischen Punkt  $p$  einer glatten Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  zeigt sich, daß  $f$  in einer gewissen in  $p$  zentrierten Koordinatenumgebung als diagonalisierte quadratische Form dargestellt werden kann, die wiederum durch den Index  $\text{ind}_f^p$  nachhaltig bestimmt wird. Dieses Resultat läßt dann zunächst einfache Folgerungen zu bezüglich Isoliertheit und Anzahl nicht-degenerierter kritischer Punkte und leistet später einen entscheidenden Beitrag zum Beweis des Hauptsatzes 4.3, der den Wandel des Homotopietyps einer gewissen Teilmenge von  $M$  beschreibt.

#### 3.1 Das Morse-Lemma

Wir beginnen mit der grundlegenden Definition einer Morse-Funktion auf einer glatten Mannigfaltigkeit.

**3.1 Definition (Morse-Funktion)** Eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Morse-Funktion*, falls jeder kritische Punkt von  $f$  nicht-degeneriert ist.

Für den Beweis des Morse-Lemmas 3.3 benötigen wir noch die folgende Hilfsaussage, die über die lokale Gestalt einer glatten, reellwertigen Abbildung auf einer konvexen Nullumgebung des  $\mathbb{R}^n$ , die den Ursprung fest läßt, Auskunft gibt.

**3.2 Lemma** Sei  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung auf einer konvexen Nullumgebung  $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$  mit  $f(0) = 0$ . Dann gibt es glatte Funktionen  $g_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , auf  $V$  mit  $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ , so daß

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n) \quad (18)$$

erfüllt ist.

**Beweis.** Es gilt wegen  $f(0) = 0$  und unter Verwendung der Kettenregel

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_i dt.$$

Setze nun für  $i \in [n]$

$$g_i(x_1, \dots, x_n) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt.$$

Erhalte damit  $n$  glatte Funktionen  $g_i$  auf  $V$  mit

$$g_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0),$$

welche die Identität

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

liefern. □

Es folgt nun das legendäre Morse-Lemma, welches das lokale Aussehen einer Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  in der Nähe eines nicht-degenerierten kritischen Punktes beschreibt. Überraschenderweise ist diese lokale Gestalt sehr einfach: aus der Nähe betrachtet tritt  $f$  als quadratische Standardform in Erscheinung.

**3.3 Lemma (Morse)** *Sei  $p$  ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $\lambda := \text{ind}_f(p)$ . Dann gibt es ein lokales Koordinatensystem  $(y^1, \dots, y^n)$  in einer Umgebung  $U$  von  $p$  mit  $y^i(p) = 0$  für alle  $i \in [n]$ , so daß  $f$  bezüglich dieser Koordinaten die Darstellung*

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2 \quad (19)$$

auf  $U$  besitzt.

**Beweis.** Zeige zunächst, daß im Falle der Existenz einer solchen lokalen Darstellung von  $f$  bezüglich einer Karte  $(U_p, \varphi_p)$  um den kritischen Punkt  $p$  die Zahl  $\lambda$  notwendigerweise gleich dem Index  $\text{ind}_f(p)$  von  $f$  bei  $p$  sein muß. Gilt nämlich für ein lokales Koordinatensystem  $(z^1, \dots, z^n)$  die Gleichung

$$f(q) = f(p) - (z^1(q))^2 - \dots - (z^\lambda(q))^2 + (z^{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (z^n(q))^2, \quad q \in U,$$

so erhält man für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^j}(p) = \begin{cases} -2 & , \text{ falls } i = j \leq \lambda \\ 2 & , \text{ falls } i = j > \lambda \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases},$$

was bedeutet, daß die Hessematrix  $H_f(p)$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}_{T_p M} = \left\{ \frac{\partial}{\partial z^i} \Big|_p \right\}_{i=1, \dots, n}$  von der Form

$$H_f(p) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & -2 & 0 \\ \vdots & & 0 & 2 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{diag}(\underbrace{-2, \dots, -2}_{\lambda\text{-mal}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{(n-\lambda)\text{-mal}}).$$

ist. Es gibt somit einen Unterraum  $W^- \subset T_p M$  mit  $\dim(W^-) = \lambda$ , auf dem die Hessesche Form  $\mathcal{H}_f^p$  negativ definit ist, und einen Unterraum  $W^+ \subset T_p M$  der Dimension

$\dim(W^+) = n - \lambda$ , auf dem  $\mathcal{H}_f^p$  positiv definit ist. Gäbe es einen Unterraum  $W^\circ$  mit  $\dim(W^\circ) > \lambda$ , auf dem  $\mathcal{H}_f^p$  negativ definit wäre, so wäre  $W^\circ \cap W^- \neq \emptyset$ , was aber unmöglich ist. Deshalb muß  $\lambda = \text{ind}_f(p)$  sein.

Wir wählen zuerst eine im kritischen Punkt  $p$  zentrierte Karte  $(U_p, \varphi_p)$ , d.h.  $p$  entspricht dem Ursprung im  $\mathbb{R}^n$  oder gleichbedeutend  $x^1(p) = \dots = x^n(p) = 0$ , wobei  $(x^1, \dots, x^n)$  das der Karte  $(U_p, \varphi_p)$  entsprechende lokale Koordinatensystem bezeichnet. Ferner können wir voraussetzen, daß  $f(p) = 0$  ist, indem wir  $f$  durch  $f - f(p)$  ersetzen. Wegen  $(f \circ \varphi_p^{-1})(0, \dots, 0) = f(p) = 0$  existiert nach Lemma 3.2 eine Familie  $\{g_i\}_{i=1, \dots, n}$  glatter Funktionen, definiert auf einer konvexen Nullumgebung  $V \subset \varphi_p(U_p) \subset \mathbb{R}^n$ , mit

$$g_i(0) = \frac{\partial(f \circ \varphi_p^{-1})}{\partial x_i}(0),$$

so daß die Gleichung

$$(f \circ \varphi_p^{-1})(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n) \quad (20)$$

für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in V$  erfüllt ist. Äquivalent ist die Identität

$$f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n x^i g_i(x^1, \dots, x^n) \quad (21)$$

auf  $\varphi_p^{-1}(V) \subset U_p$ . Da  $p$  kritischer Punkt von  $f$  ist, gilt

$$g_i(0) = \frac{\partial(f \circ \varphi_p^{-1})}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Auf die Funktionen  $g_i$  ist deshalb wieder das obige Lemma anwendbar, und man erhält eine Familie  $\{h_{ij}\}_{j=1, \dots, n}$  glatter, auf  $V$  definierter Funktionen  $h_{ij}$  mit  $h_{ij}(0) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0)$ , so daß

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

gilt. Damit erhält man für  $f$  die lokale Darstellung

$$(f \circ \varphi_p^{-1})(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in V. \quad (22)$$

Setze nun  $H_{ij} := \frac{h_{ij} + h_{ji}}{2}$  und erhalte wegen  $H_{ij} + H_{ji} = h_{ij} + h_{ji}$

$$(f \circ \varphi_p^{-1})(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j H_{ij}(x_1, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in V \quad (23)$$

oder

$$f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i,j=1}^n x^i x^j H_{ij}(x^1, \dots, x^n) \quad \text{auf } \varphi_p^{-1}(V) \subset U_p \subset M, \quad (24)$$

wobei die Funktionen  $H_{ij}$  nun symmetrisch in den Indizes sind:

$$H_{ij}(x_1, \dots, x_n) = H_{ji}(x_1, \dots, x_n), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von  $f$  in  $p$  sind gegeben durch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) = \frac{\partial^2 (f \circ \varphi_p^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(0) = 2H_{ij}(0), \quad (25)$$

also ist die symmetrische Matrix  $(H_{ij}(0))$  gleich  $\frac{1}{2}H_f(p)$  und wegen der Nicht-Degeneriertheit des kritischen Punktes  $p$  ist diese nicht-singulär. Nach einer geeigneten linearen Transformation des lokalen Koordinatensystems  $(x^1, \dots, x^n)$  kann von  $\frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2}(p) \neq 0$  ausgegangen werden. Dann ist auch  $H_{11}(0) \neq 0$ . Die Stetigkeit von  $H_{11}$  versichert, daß  $H_{11}$  in einer gewissen Nullumgebung keine Nullstellen besitzt. Wir führen ein neues Koordinatensystem  $(y^1, x^2, \dots, x^n)$  ein durch

$$y^1(x^1, \dots, x^n) := \sqrt{|H_{11}|} \left( x^1 + \sum_{i=2}^n x^i \frac{H_{1i}}{H_{11}} \right). \quad (26)$$

Diese Koordinatentransformation ist im Ursprung nicht-singulär, denn bezeichnet  $\theta$  die Koordinatentransformation  $\theta : (x^1, x^2, \dots, x^n) \rightarrow (y^1, x^2, \dots, x^n)$ , so ist die Jakobi-Matrix  $J_\theta(p)$  gegeben durch

$$J_\theta(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \Big|_p & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \Big|_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial x^1} \Big|_p & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x^n} \Big|_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{|H_{11}(0)|} & \sqrt{|H_{11}(0)|} \frac{H_{12}(0)}{H_{11}(0)} & \cdots & \sqrt{|H_{11}(0)|} \frac{H_{1n}(0)}{H_{11}(0)} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ & \vdots & & 0 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (27)$$



also keineswegs singular, womit  $(y^1, x^2, \dots, x^n)$  tatsächlich ein lokales Koordinatensystem um  $p$  ist. Für das Quadrat von  $y^1$  berechnet man

$$\begin{aligned} (y^1)^2 &= |H_{11}| \left( x^1 + \sum_{i=2}^n x^i \frac{H_{1i}}{H_{11}} \right)^2 \\ &= \begin{cases} H_{11} (x^1)^2 + 2 \sum_{i=2}^n x^1 x^i H_{1i} + \frac{(\sum_{i=2}^n x^i H_{1i})^2}{H_{11}} & , H_{11} > 0 \\ -H_{11} (x^1)^2 - 2 \sum_{i=2}^n x^1 x^i H_{1i} - \frac{(\sum_{i=2}^n x^i H_{1i})^2}{H_{11}} & , H_{11} < 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

und Vergleich mit der Darstellung von  $f$  liefert

$$f = \begin{cases} (y^1)^2 + \sum_{i,j=2}^n x^i x^j H_{ij} - \frac{(\sum_{i=2}^n x^i H_{1i})^2}{H_{11}} & , H_{11} > 0 \\ -(y^1)^2 + \sum_{i,j=2}^n x^i x^j H_{ij} - \frac{(\sum_{i=2}^n x^i H_{1i})^2}{H_{11}} & , H_{11} < 0 \end{cases}. \quad (28)$$

Nun kann erneut ein neues Koordinatensystem  $(\tilde{y}^1, x^2, \dots, x^n)$  eingeführt werden, so daß

$$f = \pm (\tilde{y}^1)^2 + \sum_{i,j=2}^n x^i x^j H_{ij} \quad (29)$$

gilt. Es ist unmittelbar einsichtig, daß dieses Koordinatensystem in  $p$  zentriert ist. Betrachte dies als Induktionsanfang und führe den Induktionsschritt wie folgt durch: Nehme an, daß es ein lokales Koordinatensystem  $(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^{k-1}, x^k, \dots, x^n)$  in einer Nullumgebung  $U_{k-1}$  gibt, so daß  $f$  auf  $U_{k-1}$  von der Form

$$f = \pm (\tilde{y}^1)^2 \pm \dots \pm (\tilde{y}^{k-1})^2 + \sum_{i,j \geq k} x^i x^j H_{ij}(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^{k-1}, x^k, \dots, x^n) \quad (30)$$

ist. Nach einem geeigneten linearen Wechsel der letzten  $n - k + 1$  Koordinaten kann von  $H_{kk}(0) \neq 0$  ausgegangen werden.  $H_{kk}$  ist dann eine glatte, nullstellenfreie Funktion auf einer eventuell kleineren Nullumgebung  $U_k \subset U_{k-1}$ . Führe nun ein neues Koordinatensystem  $(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^{k-1}, y^k, x^{k+1}, \dots, x^n)$  ein durch die Definition

$$y^k(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^{k-1}, x^k, \dots, x^n) := \sqrt{|H_{kk}|} \left( x^k + \sum_{i>k} x^i \frac{H_{ik}}{H_{kk}} \right), \quad (31)$$

wobei  $H_{ik} = H_{ik}(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^{k-1}, x^k, \dots, x^n)$  für  $i \in \{k, \dots, n\}$  ist. Dies liefert für  $f$  (nach erneuter Transformation) den Ausdruck

$$f = \sum_{i \leq k} \pm (\tilde{y}^i)^2 + \sum_{i,j > k} x^i x^j H_{ij}(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^{k-1}, \tilde{y}^k, x^{k+1}, \dots, x^n), \quad (32)$$

was den Induktionsschritt beendet und den Beweis abschließt.  $\square$

### 3.2 Erste Folgerungen

Wir ziehen (ohne weitere Überlegung) zwei unmittelbare Folgerungen aus dem Morse-Lemma und erhalten so die Isoliertheit kritischer, nicht-degenerierter Punkte sowie ihre endliche Anzahl im kompakten Fall.

#### 3.4 Korollar *Nicht-degenerierte kritische Punkte von $f$ sind isoliert in $C_f$ .*

**Beweis.** Ist  $p \in C_f$  nicht-degeneriert, so ist  $f$  nach dem Morse-Lemma 3.3 lokal in einer Umgebung  $U_p$  von der Form

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2.$$

Wegen

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}(q) = \frac{\partial (f \circ \varphi_p^{-1})}{\partial x_i}(\varphi_p(q)) = \begin{cases} -2x_i(\varphi_p(q)) & , i \leq \lambda \\ 2x_i(\varphi_p(q)) & , i > \lambda \end{cases} = \begin{cases} -2y^i(q) & , i \leq \lambda \\ 2y^i(q) & , i > \lambda \end{cases}$$

für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $q \in U_p$  hat  $f$  wegen  $\varphi_p(p) = 0$  in  $U_p$  lediglich  $p$  als kritischen Punkt. Damit ist  $U_p \cap C_f \setminus \{p\} = \emptyset$  und  $p$  somit isoliert.  $\square$

Das Morse-Lemma impliziert somit, daß es eine Koordinatenumgebung  $U \subset M$  von  $p$  gibt (die als offene Teilmenge der glatten Mannigfaltigkeit  $M$  selbst glatte Mannigfaltigkeit ist), so daß die glatte Einschränkung  $f|_U : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Morse-Funktion auf  $U$  ist. Insbesondere ist dann  $\text{card} \{C_{f|_U}\} = 1$ . Für degenerierte kritische Punkte gibt es keinen Grund, isoliert zu sein. Wir ziehen eine weitere Folgerung für Morse-Funktionen auf kompakten Mannigfaltigkeiten.

#### 3.5 Korollar *Ist die Mannigfaltigkeit $M$ kompakt und $f$ eine Morse-Funktion auf $M$ , so ist die Menge $C_f$ der kritischen Punkte von $f$ endlich.*

**Beweis.** Angenommen, es gäbe eine Morse-Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M^n$  mit unendlichen vielen kritischen Punkten  $p_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Faßt man die kritischen Punkte von  $f$  als Folge  $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$  in  $M$  auf, so liefert die Kompaktheit von  $M$  eine konvergente Teilfolge  $(p_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Bezeichne  $p \in M$  den Grenzwert  $p := \lim_{k \rightarrow \infty} p_{m_k}$ . Sei  $(x^1, \dots, x^n)$  ein lokales Koordinatensystem um  $p$  bezüglich einer Karte  $(U_p, \varphi_p)$ . Die Konvergenz der Teilfolge  $(p_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $p$  erlaubt die Annahme (eventuell durch Auswahl weiterer Teilfolgen), daß

$$(p_{m_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset U_p$$

ist. Die Glattheit von  $f$  impliziert

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p_{m_k}) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p), \quad i = 1, \dots, n,$$

was auch  $p$  als kritischen Punkt von  $f$  charakterisiert. Da  $f$  eine Morse-Funktion ist, sind alle kritischen Punkte von  $f$  nicht-degeneriert und somit nach Korollar 3.4 isoliert. Aber die Folge  $(p_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$  kritischer Punkte konvergiert gegen den kritischen Punkt  $p$ , der somit nicht isoliert sein kann und einen Widerspruch herbeiführt.  $\square$

## 4 Diffeomorphietyp, Homotopietyp & kritische Werte

Wir setzen nun den Diffeomorphietyp und Homotopietyp von gewissen Teilmengen der glatten Mannigfaltigkeit  $M$  mit den kritischen Punkten einer Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  in Verbindung. Wir präzisieren dies eingangs mit folgender Definition:

**4.1 Definition** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$ . Setze für  $a \in \mathbb{R}$

$$M_f^a := f^{-1}(-\infty, a] = \{p \in M \mid f(p) \leq a\} \subset M; \quad (33)$$

für  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  mit  $a < b$  definiere entsprechend

$$M_f^{[a,b]} := f^{-1}[a, b] = \{p \in M \mid a \leq f(p) \leq b\} \subset M. \quad (34)$$

Falls es unmißverständlich ist, um welche Funktion  $f$  es sich handelt, schreibe  $M_f^a = M^a$  und entsprechend  $M_f^{[a,b]} = M^{[a,b]}$ .

**Bemerkung.** Falls  $a \in \mathbb{R}$  kein kritischer Wert von  $f$  ist, so ist  $M^a$  nach dem Satz über implizite Funktionen eine glatte, berandete Mannigfaltigkeit und der Rand  $f^{-1}(a) \subset M$  eine glatte Untermannigfaltigkeit von  $M$ .

Im kompakten Fall nimmt die Funktion  $f$  ein Minimum  $\check{m}$  und ein Maximum  $\hat{m}$  an. Da es keinen Punkt  $p \in M$  gibt mit  $f(p) < \check{m}$  gibt, gilt  $M^a = \emptyset$  für  $a < \check{m}$ . Ebenso gilt für alle  $p \in M$  die Ungleichung  $f(p) \leq \hat{m}$ , so daß stets  $M^a = M$  ist für  $a \geq \hat{m}$ . Also wächst  $M^a$ , während der Parameter  $a$  die reellen Zahlen durchläuft, von der leeren Menge bis zur gesamten Mannigfaltigkeit. Die grundlegende Idee der Morse-Theorie ist es nun, dieses Wachstum zu verfolgen und den Wandlungsprozess von  $M^a$  zu verstehen.

Man kann sich  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit genügend Phantasie als eine Höhenfunktion vorstellen, während man  $M$  mitleidig im Wasser versinken sieht. Der Parameter  $a$  gibt dann den Wasserstand an und  $M^a$  ist der derjenige Teil, der schon unter der Wasseroberfläche versunken ist. Während der Wasserstand steigt, ändert sich die Unterwasserform  $M^a$  von  $M$ . Morse-Theorie sitzt auf Grund und studiert die Änderung der Unterwasserform  $M^a$ .

Über den Zusammenhang von Diffeomorphietyp der Mannigfaltigkeit  $M^a$  und den kritischen Punkten von  $f$  gibt Abschnitt 4.1 Auskunft (insbesondere darüber, wann der Diffeomorphietyp sich nicht ändert.) Die Qualität der Änderung wird anhand des Homotopietyps in Abschnitt 4.2 untersucht.

### 4.1 Diffeomorphietyp und kritische Punkte

Betrachtet man diese Änderung modulo Diffeomorphie, d.h. lediglich die Änderung des Diffeomorphietyps von  $M^a$ , so stellt sich heraus, daß dieser von  $M^a$  zu  $M^b$  unverändert bleibt, solange nur  $M^{[a,b]}$  kompakt ist und keine kritischen Punkte von  $f$  enthält. Die Situation ist dann sogar noch besser: weiterhin ist  $M^a$  ein Deformationsretrakt von  $M^b$ , und die Inklusion stellt sich als Homotopieäquivalenz heraus.

**4.2 Satz** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Sei  $a < b$  und die Menge  $M^{[a,b]}$  kompakt. Ferner enthalte  $M^{[a,b]}$  keine kritischen Punkte von  $f$ , d.h.  $M^{[a,b]} \cap C_f = \emptyset$ . Dann ist  $M^a$  diffeomorph zu  $M^b$ . Darüberhinaus ist  $M^a$  sogar ein Deformationsretrakt von  $M^b$ , so daß die Inklusion  $i_{a,b} : M^a \hookrightarrow M^b$  eine Homotopieäquivalenz ist.

**Beweis.** Zu Beginn wählen wir eine Riemannsche Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $M$ . Das Gradientenvektorfeld<sup>3</sup>  $\text{grad}_f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}$  verschwindet gerade in den kritischen Punkten von  $f$ , denn ist  $p \in C_f$ , so gilt

$$(\text{grad}_f)_p = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)}_{=0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = 0 \quad (36)$$

Für eine Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  mit Geschwindigkeitsvektor  $\frac{d\gamma}{dt} \in T_{\gamma(t)}M$  hat man aufgrund von (12) und (35)

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \text{grad}_f \right\rangle. \quad (37)$$

Sei nun  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung, gegeben durch

$$\rho(q) := \begin{cases} \frac{1}{\langle (\text{grad}_f)_q, (\text{grad}_f)_q \rangle}, & q \in M^{[a,b]} \\ 0, & q \in M \setminus K \end{cases}, \quad (38)$$

wobei  $K \supset M^{[a,b]}$  eine kompakte Umgebung von  $M^{[a,b]}$  ist. Da nach Voraussetzung  $M^{[a,b]} \cap C_f = \emptyset$  ist, ist  $\rho$  auf  $M^{[a,b]}$  wohldefiniert. Eine solche glatte Funktion auf  $M$  existiert und ist mithilfe der Partition der Eins konstruierbar. Definiere nun ein glattes Vektorfeld  $X$  auf  $M$  durch die Vorschrift

$$X_q := \rho(q) (\text{grad}_f)_q. \quad (39)$$

Da dieses Vektorfeld außerhalb der kompakten Menge  $K \subset M$  verschwindet, erzeugt es nach Lemma 2.15 eine 1-Parameter-Gruppe

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

<sup>3</sup>Das Gradientenvektorfeld  $\text{grad}_f$  ist gegeben durch die Identität

$$\langle X, \text{grad}_f \rangle = X(f) \quad (35)$$

für ein beliebiges Vektorfeld  $X$  auf  $M$ . In lokalen Koordinaten  $(x^1, \dots, x^n)$  hat es die Form

$$\text{grad}_f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

bezüglich der Standardbasis der Tangentialräume.

von Diffeomorphismen. Betrachte für festes  $q \in M$  die Abbildung

$$\varphi_q^f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto (f \circ \varphi_t)(q). \quad (40)$$

Für  $\varphi_t(q) \in M^{[a,b]}$  gilt dann wegen (37) und (39)

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_q^f(t)}{dt} &= \frac{d(f \circ \varphi_t)(q)}{dt} \\ &= \left\langle \frac{d\varphi_t(q)}{dt}, (\text{grad}_f)_{\varphi_t(q)} \right\rangle \\ &= \left\langle X_{\varphi_t(q)}, (\text{grad}_f)_{\varphi_t(q)} \right\rangle \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß die Abbildung  $\varphi_q^f : t \mapsto (f \circ \varphi_t)(q)$  für alle  $q \in M$  und  $\varphi_q^f(t) \in [a, b]$  bzw.  $\varphi_t(q) \in M^{[a,b]}$  linear mit Ableitung 1 ist. Wegen  $\varphi_0(q) = q$  gilt  $\varphi_q^f(0) = f(q)$ , womit  $\varphi_q^f$  von der Form

$$\varphi_q^f(t) = f(q) + t, \quad \varphi_t(q) \in M^{[a,b]}. \quad (41)$$

Wir betrachten den Diffeomorphismus

$$\varphi_{b-a} : M \xrightarrow{\approx} M$$

sowie die Einschränkung

$$(f \circ \varphi_{b-a})|_{M^a} : M^a \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Es gilt für  $x \in M^a$

$$(f \circ \varphi_{b-a})(x) = f(x) + b - a \leq a + b - a = b,$$

womit  $\varphi_{b-a}(x) \in f^{-1}(-\infty, b] = M^b$  gilt. Also bildet  $\varphi_{b-a}$  die Menge  $M^a$  diffeomorph auf  $M^b$  ab:

$$\varphi_{b-a}|_{M^a} : M^a \xrightarrow{\approx} M^b. \quad (42)$$

Damit ist die erste Aussage bewiesen. Für den Rest betrachte die Abbildung

$$r : [0, 1] \times M^b \longrightarrow M^b, \quad (t, y) \longmapsto r_t(y) := \begin{cases} y, & \text{falls } y \in M^a \\ \varphi_{t(a-f(y))}(y), & \text{falls } y \in M^{[a,b]} \end{cases}. \quad (43)$$

Dann ist  $r_0 = \text{id}_{M^b}$  und für  $t = 1$  hat man

$$r_1(y) = \begin{cases} y, & \text{für } y \in M^a \\ \varphi_{a-f(y)}(y), & \text{für } y \in M^{[a,b]} \end{cases}. \quad (44)$$

Wir haben also  $r_1|_{M^a} = \text{id}_{M^a}$  und wegen

$$(f \circ \varphi_{a-f(y)})(y) = f(y) + a - f(y) = a \quad \text{für alle } y \in M^{[a,b]}$$

gilt

$$\varphi_{a-f(y)}(y) \in M^a \quad \text{für } y \in M^{[a,b]},$$

also

$$r_1(M^b) = M^a,$$

womit  $r_1$  eine Retraktion von  $M^b$  auf  $M^a$  ist. Da diese Retraktion via  $r$  homotop zur Identität auf  $M^b$  ist, stellt sich  $M^a$  somit als Deformationsretrakt von  $M^b$  heraus. Zudem ist

$$r_1 \circ i_{a,b} = \text{id}_{M^a}, \quad (45)$$

wobei  $i_{a,b}$  die Inklusion  $M^a \hookrightarrow M^b$  bezeichnet, und

$$i_{a,b} \circ r_1 \simeq \text{id}_{M^b} \quad (46)$$

vermöge der rückwärts-laufenden Homotopie  $\bar{r}$ , womit die Inklusion  $i_{a,b}$  eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversen  $r_1$  ist, was die zweite Aussage belegt und den Beweis vervollständigt.  $\square$

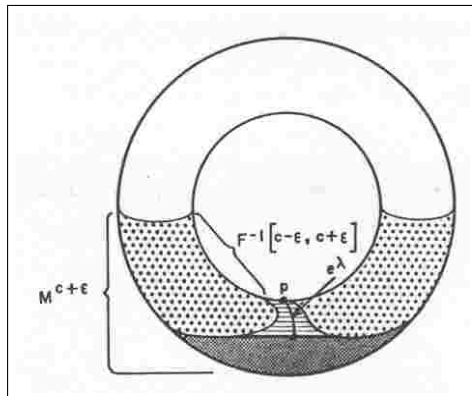
Wir sehen hier, daß unter gewissen Voraussetzungen die Teilmengen  $M^a$  und  $M^b$  sowohl diffeomorph als auch homotopieäquivalent sind. Dies rechtfertigt den Übergang vom Diffeomorphietyp zum Homotopietyp ohne für diese Betrachtung relevanten Informationsverlust.

## 4.2 Homotopietyp und nicht-degenerierte kritische Punkte

Nachdem im vorangehenden Abschnitt geklärt werden konnte, wo ein Wechsel des Diffeomorphietyps stattfindet, wird nun untersucht, inwiefern sich  $M^a$  bei Übertreten eines kritischen Punktes ändert. Die Anwendung des Morse-Lemmas 3.3 setzt allerdings Nicht-Degeneriertheit der kritischen Punkte voraus. Wir vollziehen hier den zuvor abgesicherten und rechtmäßigen Übergang vom Diffeomorphietyp zum Homotopietyp und ergründen das Geschehen bei Überschreiten nicht-degenerierter kritischer Punkte. Es zeigt sich auch hier der maßgebliche Einfluß des Index auf die Änderung des Homotopietyps: die Änderung besteht nämlich im Anheften einer  $\text{ind}_f(p)$ -dimensionalen Zelle.

**4.3 Satz** *Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt, und sei  $p \in C_f$  nicht-degeneriert mit Index  $\text{ind}_f(p) = \lambda$ . Ferner gebe es eine Zahl  $\varepsilon > 0$  derart, daß  $M^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]}$  kompakt ist und keine kritischen Punkte außer  $p$  enthält, d.h.  $M^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]} \cap (C_f \setminus \{p\}) = \emptyset$  erfüllt. Dann hat die Menge  $M^{f(p)+\varepsilon}$  für alle genügend kleinen  $\varepsilon$  denselben Homotopietyp wie  $M^{f(p)-\varepsilon} \cup D^\lambda$ .*

**Beweis.** Die Beweisidee ist von folgender Art: Ausgehend von der den obigen Voraussetzungen genügenden Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , konstruieren wir eine Funktion  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F < f$  in einer Umgebung des nicht-degenerierten kritischen Punktes  $p$  und  $F = f$  außerhalb dieser Umgebung. Dann setzt sich  $M_F^{f(p)-\varepsilon}$  aus  $M_f^{f(p)-\varepsilon}$  sowie einem Bereich  $H$  um  $p$  zusammen.



**Abbildung 2:** Veranschaulichung der Situation am Beispiel der Höhenfunktion  $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Die dunkel-schattierte Region stellt  $M_f^{f(p)-\epsilon}$  dar,  $M_F^{[f(p)-\epsilon, f(p)+\epsilon]}$  ist gepunktet und  $H$  gestreift.

Für eine geeignete Zelle  $e^\lambda$  zeigt sich, daß  $M_f^{f(p)-\epsilon} \cup e^\lambda$  ein Deformationsretrakt von  $M_f^{f(p)-\epsilon} \cup H$  ist. Unter Verwendung von Satz 4.2, angewandt auf die neue Funktion  $F$  und  $M_F^{[f(p)-\epsilon, f(p)+\epsilon]}$ , stellt sich  $M_f^{f(p)-\epsilon} \cup H$  als Deformationsretrakt von  $M_f^{f(p)+\epsilon}$  heraus, womit der Beweis sich zufrieden gibt.

Finde zunächst gemäß Lemma 3.3 ein lokales Koordinatensystem  $(u^1, \dots, u^n)$  in einer Umgebung  $U$  von  $p$ , so daß  $f$  auf  $U$  die quadratische Standardform

$$f = f(p) - (u^1)^2 - \dots - (u^\lambda)^2 + (u^{\lambda+1})^2 + \dots + (u^n)^2 \quad (47)$$

annimmt. Weiterhin ist dieses Koordinatensystem zentriert in  $p$ , also

$$u^1(p) = \dots = u^n(p) = 0. \quad (48)$$

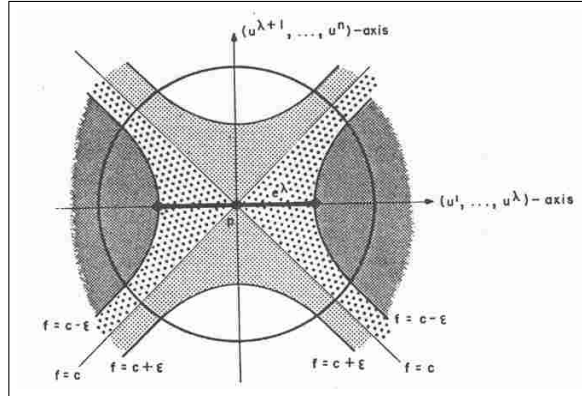
Wähle nun  $\varepsilon > 0$  klein genug, so daß die nachstehenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (I)  $M^{[f(p)-\epsilon, f(p)+\epsilon]}$  ist kompakt, und es gilt  $M^{[f(p)-\epsilon, f(p)+\epsilon]} \cap (C_f \setminus \{p\}) = \emptyset$ ;
- (II) Das Bild von  $U$  unter der diffeomorphen Einbettung  $(u^1, \dots, u^n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  enthält den abgeschlossenen Ball  $\overline{B}_{\sqrt{2\varepsilon}} := \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 2\varepsilon\}$ .

Definiere  $e^\lambda$  durch

$$e^\lambda := \left\{ u \in U \mid \sum_{i=1}^{\lambda} (u^i)^2 \leq \varepsilon \wedge u^{\lambda+1} = \dots = u^n = 0 \right\}. \quad (49)$$

Den bisherigen Stand der Dinge skizziert knapp Abbildung 3.



**Abbildung 3:** Zur Beweissituation nach Anwendung des Morse-Lemmas 3.3 und der Wahl eines geeigneten  $\varepsilon > 0$ . Die Koordinatenachsen stellen die Hyperebenen  $u^1 = \dots = u^\lambda = 0$  und  $u^{\lambda+1} = \dots = u^n = 0$  dar; der Kreis veranschaulicht den Rand  $\partial \overline{B}_{\sqrt{2\varepsilon}}$ ; die Hyperbeln repräsentieren die Hyperflächen  $f^{-1}(f(p) \pm \varepsilon)$ . Die Region  $M_f^{f(p)-\varepsilon}$  ist dunkel-schattiert,  $M_f^{[f(p), f(p)+\varepsilon]}$  ist dicht-gepunktet,  $M_f^{f(p)+\varepsilon}$  nur leicht-gepunktet.

Wir konstruieren nun im folgenden die Funktion  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Dazu sei

$$\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine glatte Funktion, welche den folgenden drei Bedingungen genügt:

$$\begin{aligned} \mu(0) &> \varepsilon \\ \mu(r) &= 0 \quad \text{für } r \geq 2\varepsilon \\ -1 < \mu'(r) &\leq 0 \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{50}$$

Damit setze

$$F := \begin{cases} f & , \text{ auf } M \setminus U \\ f - \mu \left( (u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2 + 2(u^{\lambda+1})^2 + \dots + 2(u^n)^2 \right) & , \text{ auf } U \end{cases} \tag{51}$$

Dies liefert aufgrund von (50) eine glatte, wohldefinierte Abbildung auf  $M$ . Wegen (II) haben wir weiterhin die Ungleichung

$$F \leq f \quad \text{auf } U. \tag{52}$$

Definiere zwei Funktionen

$$\xi, \eta : U \longrightarrow [0, \infty)$$

durch

$$\begin{aligned} \xi &= (u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2 \\ \eta &= (u^{\lambda+1})^2 + \dots + (u^n)^2. \end{aligned}$$



Dann sind  $f$  und  $F$  als Funktionen von  $\xi$  und  $\eta$  auf  $U$  gegeben durch

$$f = f(p) - \xi + \eta \quad (53)$$

und

$$F = f(p) - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta). \quad (54)$$

Nach diesen Vorbereitungen erfolgt nun der eigentliche Teil des Beweises in fünf wesentlichen Schritten.

(A)  $Es gilt mit  $M_F^{f(p)+\varepsilon} = M_f^{f(p)+\varepsilon}$ .$

Außerhalb des Ellipsoids  $\xi + 2\eta \leq 2\varepsilon$  haben wir  $F = f$ . Innerhalb des Ellipsoids gilt

$$F \leq f = f(p) - \xi + \eta \leq f(p) + \frac{1}{2}\xi + \eta \leq f(p) + \varepsilon. \quad (55)$$

Das bedeutet aber  $F^{-1}(-\infty, f(p) + \varepsilon] = f^{-1}(-\infty, f(p) + \varepsilon] = M^{f(p)+\varepsilon}$ .  $\diamond$

(B)  $Die Funktionen  $F$  und  $f$  haben dieselben kritischen Punkte, d.h.  $C_F = C_f$ .$

Es gilt mit (50)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi} &= -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1. \end{aligned}$$

Man hat

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta,$$

wobei  $d\xi$  und  $d\eta$  nur im Ursprung gleichzeitig verschwinden. Damit besitzt  $F$  in  $U$  lediglich den Ursprung  $p$  als kritischen Punkt.  $\diamond$

(C)  $M_F^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]}$  ist kompakt und  $M_F^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]} \cap C_F = \emptyset$ .

Wegen (A) und der Ungleichung  $F \leq f$  gilt

$$F^{-1}[f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon] \subset f^{-1}[f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon],$$

also

$$M_F^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]} \subset M_f^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]}. \quad (56)$$

Die Kompaktheit von  $M_f^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]}$  impliziert dann die Kompaktheit von  $M_F^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]}$ . Wegen  $M_f^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]} \cap (C_f \setminus \{p\}) = \emptyset$  enthält  $M_F^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]}$  höchstens  $p$  als kritischen Punkt von  $F$ . Aufgrund von

$$F(p) = f(p) - \underbrace{\xi(p)}_{=0} + \underbrace{\eta(p)}_{=0} - \mu\left(\underbrace{\xi(p) + 2\eta(p)}_{=0}\right) = f(p) - \mu(0) < f(p) - \varepsilon \quad (57)$$

ist  $p \notin M_F^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]}$ , womit  $M_F^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]}$  letztlich keine kritischen Punkte von  $F$  enthält, also  $M_F^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]} \cap C_F = \emptyset$ .  $\diamond$

(D)  $M_F^{f(p)-\varepsilon}$  ist ein Deformationsretrakt von  $M_f^{f(p)+\varepsilon}$ .

Da  $M_F^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]}$  nach (C) kompakt ist und keine kritischen Punkte von  $F$  enthält ist Satz 4.2 anwendbar, und es folgt mit (A), daß  $M_F^{f(p)-\varepsilon}$  ein Deformationsretrakt von  $M_F^{f(p)+\varepsilon} = M_f^{f(p)+\varepsilon}$  ist.  $\diamond$

**Notation & Bemerkung.** Bezeichne im Folgenden  $M_F^{f(p)-\varepsilon}$  mit  $M_f^{f(p)-\varepsilon} \cup H$ , wobei der Henkel  $H$  gegeben ist durch

$$H = \overline{M_f^{f(p)-\varepsilon} \setminus M_F^{f(p)-\varepsilon}}. \quad (58)$$

Die Region  $M_f^{f(p)-\varepsilon} \cup H$  wird dann als  $M_f^{f(p)-\varepsilon}$  mit angeheftetem Henkel  $H$  beschrieben. Nach Satz 4.2 gilt  $M_f^{f(p)-\varepsilon} \cup H \approx M_f^{f(p)+\varepsilon}$ . Für  $q \in e^\lambda$  gilt  $\xi(q) \leq \varepsilon$  und  $\eta(q) = 0$ . Wegen  $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$  und (57) gilt

$$F(q) \leq F(p) < f(p) - \varepsilon,$$

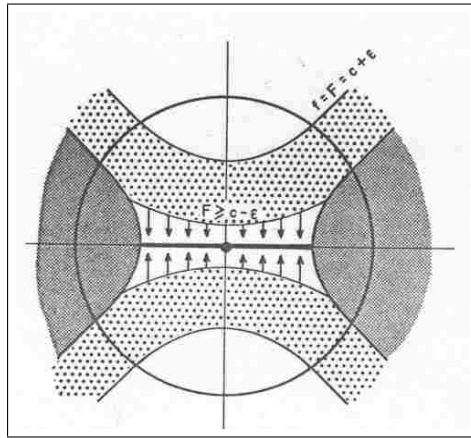
aber man hat nach (53)

$$f(q) = f(p) - \underbrace{\xi(q)}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\eta(q)}_{=0} \geq f(p) - \varepsilon,$$

was gerade  $q \in \overline{M_f^{f(p)-\varepsilon} \setminus M_F^{f(p)-\varepsilon}}$  bedeutet. Somit liegt die Zelle im Henkel:

$$e^\lambda \subset H. \quad (59)$$

Bevor wir den letzten Schritt des Beweises antreten, betrachten wir anhand Abbildung 4 die gegenwärtige Lage.



**Abbildung 4:** Zum Beweisfortschritt nach vier Hilfsaussagen.  $M_f^{f(p)-\varepsilon}$  ist weiterhin dunkel-schattiert und  $M_F^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]}$  zeigt sich gepunktet. Der Henkel  $H$  ist durch vertikale Pfeile markiert, und die Zelle  $e^\lambda$  wird als schwarzer horizontaler Strich durch den Ursprung angedeutet. Schön sieht man hier die soeben festgestellte Inklusion (59).

(E)  $M_f^{f(p)-\varepsilon} \cup e^\lambda$  ist ein Deformationsretrakt von  $M_f^{f(p)-\varepsilon} \cup H$ .

Wir definieren eine Deformationsretraktion

$$r_t : M_f^{f(p)-\varepsilon} \cup e^\lambda \longrightarrow M_f^{f(p)-\varepsilon} \cup H \quad (60)$$

durch

$$r_t(q) := q \quad \text{für } q \notin U \quad (61)$$

außerhalb von  $U$ . Innerhalb von  $U$  ist es notwendig, drei Fälle zu unterscheiden.

**I. FALL** Im Bereich  $\xi \leq \varepsilon$  sei  $r_t$  gegeben durch

$$r_t(u^1, \dots, u^n) := (u^1, \dots, u^\lambda, tu^{\lambda+1}, \dots, tu^n). \quad (62)$$

Dann ist  $r_1$  die Identität und  $r_0$  bildet  $M_f^{f(p)-\varepsilon} \cup e^\lambda$  in die  $\lambda$ -Zelle  $e^\lambda$  ab. Weiterhin gilt wegen  $\frac{\partial F}{\partial \eta} > 0$  die Inklusion  $r_t(M_f^{f(p)-\varepsilon}) \subset M_F^{f(p)-\varepsilon}$ .

**II. FALL** Im Bereich  $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$  sei  $r_t$  durch die Koordinatentransformation

$$r_t(u^1, \dots, u^n) := (u^1, \dots, u^\lambda, s_t u^{\lambda+1}, \dots, s_t u^n) \quad (63)$$

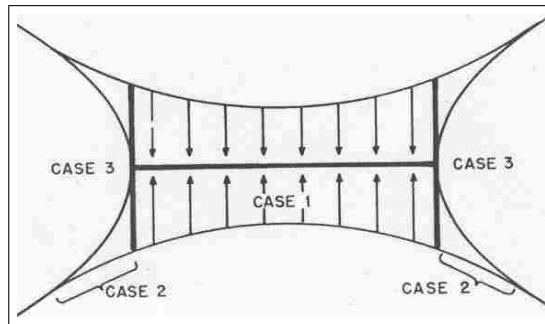
mit

$$s_t := t + (1-t) \sqrt{\frac{\xi - \varepsilon}{\eta}} \in [0, 1]. \quad (64)$$

Damit ist  $r_1$  wieder die Identität und  $r_0(M_F^{f(p)-\varepsilon}) \subset f^{-1}(f(p) - \varepsilon)$ . Für  $\xi = \varepsilon$  stimmt die Definition mit der obigen (62) überein.

**III. FALL** Im Bereich  $\eta + \varepsilon \leq \xi$ , also in  $M_f^{f(p)-\varepsilon}$  sei  $r_t$  durch die Identität gegeben; dies entspricht für  $\xi = \eta + \varepsilon$  gerade der Definition im II. Fall.

Zur Veranschaulichung bietet sich Diagramm 5 an.

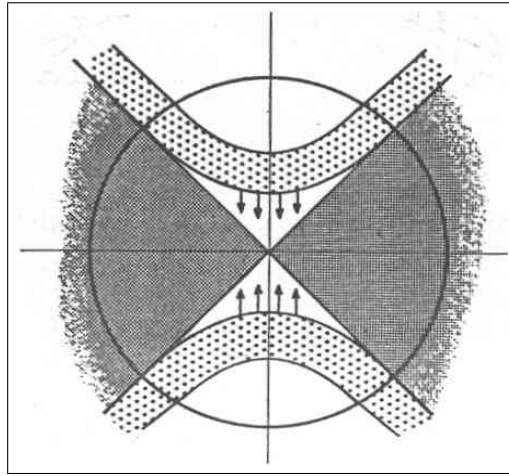


**Abbildung 5:** Zur Definition der Deformationsretraktion (60).

Damit ist gezeigt, daß  $M_f^{f(p)-\varepsilon} \cup e^\lambda$  ein Deformationsretrakt von  $M_F^{f(p)-\varepsilon} = M_f^{f(p)-\varepsilon} \cup H$  ist.

Da nach (D)  $M_F^{f(p)-\varepsilon}$  ein Deformationsretrakt von  $M_f^{f(p)+\varepsilon}$  ist, ist  $M_f^{f(p)-\varepsilon} \cup e^\lambda$  schließlich ein Deformationsretrakt von  $M_f^{f(p)-\varepsilon} \cup H$ , was den Beweis vervollständigt.  $\square$

**Bemerkung.** Durch Modifikation des vorangehenden Beweises läßt sich zeigen, daß  $M_f^{f(p)}$  ein Deformationsretrakt von  $M_f^{f(p)+\varepsilon}$  ist. Es ist nämlich  $M_f^{f(p)}$  ein Deformationsretrakt von  $M_F^{f(p)}$  und diese Menge wiederum von  $M_f^{f(p)+\varepsilon}$ .



**Abbildung 6:**  $M_f^{f(p)}$  ist ein Deformationsretrakt von  $M_F^{f(p)}$  ist ein Deformationsretrakt von  $M_f^{f(p)+\varepsilon}$ .

Mit Satz 4.3 ergibt sich, daß  $M_f^{f(p)-\varepsilon} \cup e^\lambda$  ein Deformationsretrakt von  $M_f^{f(p)}$  ist.

Kurz vor Schluß notieren wir die unvermeidliche, aber notwendige Verallgemeinerung dieser Tatsache.

**4.4 Satz** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt und  $c \in \mathbb{R}$  ein kritischer Wert von  $f$ . Weiterhin seien  $p_1, \dots, p_k \in f^{-1}(c)$  nicht-degenerierte kritische Punkte von  $f$  mit Indizes  $\text{ind}_f(p_i) = \lambda_i$  für  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Es gebe  $\varepsilon > 0$ , so daß  $M^{[c-\varepsilon, c+\varepsilon]}$  kompakt ist und keine kritischen Punkte außer  $p_1, \dots, p_k$  enthält, d.h.  $M^{[f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon]} \cap (C_f \setminus \{p_1, \dots, p_k\}) = \emptyset$  erfüllt. Dann hat die Menge  $M^{c+\varepsilon}$  für alle genügend kleinen  $\varepsilon$  denselben Homotopietyp wie  $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_k}$ .

## Literatur

- [BG88] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*. Springer-Verlag, 1988.
- [BJ73] Theodor Bröcker and Klaus Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer-Verlag, 1973.
- [Mat02] Yukio Matsumoto. *An Introduction To Morse Theory*, volume 208 of *IWANAMI Series In Modern Mathematics*. American Mathematical Society, 2002.
- [Mil68] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1968.