1. Die freie Gruppe $F[\mathcal{A}]$

Definition:

- Eine Menge $\mathcal{A}$ heißt Alphabet.
- Eine formale Potenz der Form $a^k, a \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{Z}$ heißt Silbe.
- Ein Wort ist eine endliche Folge ${a_1}^{k_1} \cdots {a_n}^{k_n}$ von Silben.
- Die Folge mit Länge Null heißt leeres Wort oder 1.
- $W(\mathcal{A})$ ist die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\mathcal{A}$.
- Sei $W(\mathcal{A}) \times W(\mathcal{A}) \to W(\mathcal{A})$, $(x, y) \mapsto x \cdot y := xy$ das Hintereinanderschreiben von Worten (fomales Produkt). Diese Verknüpfung ist offenbar assoziativ und das leere Wort ist rechts- und linksneutral. Also ist $(W(\mathcal{A}), \cdot\,)$ eine Halbgruppe.
- Um $W(\mathcal{A})$ zu einer Gruppe zu machen, definiert man eine Relation $\sim$ auf $W(\mathcal{A}) \times W(\mathcal{A})$ durch folgende elementare Kürzungsregeln (dabei seien $U, V \in W(\mathcal{A})$, $a \in \mathcal{A}$, $p, q \in \mathbb{Z}$):

  Typ 1: $Ua^0V \sim UV$

  Typ 2: $Ua^pa^qV \sim Ua^{p+q}V$

  Setze nun $\sim$ zu einer Äquivalenzrelation fort. Zwei Worte sind also genau dann äquivalent, wenn das eine durch eine endliche Folge von Kürzungen/Erweiterungen in das andere tranformiert werden kann.
- $F[\mathcal{A}] := W(\mathcal{A})/\sim$ sei die Menge der Äquivalenzklassen, versehen mit der induzierten Multiplikation $[u] \cdot [v] := [u \cdot v]$.

Satz: $(F[\mathcal{A}], \cdot\,)$ *ist eine Gruppe. Diese Gruppe heißt freie Gruppe über* $\mathcal{A}$.

Beweis: Zur Wohldefiniertheit: Seien $u \sim \tilde{u}$ und $v \sim \tilde{v}$. Dann gibt es Folgen von elementaren Kürzungen/Erweiterungen, die u in $\tilde{u}$ bzw. v in $\tilde{v}$ überführen. Da diese Transformationen auch auf das Wort uv angewendet werden können, ist $uv \sim \tilde{u}\tilde{v}$.
Wegen $[1] \cdot [u] = [1 \cdot u] = [u]$ ist $[1]$ neutrales Element und die Multiplikation ist offenbar assoziativ. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
[{a_1}^{k_1} \cdots {a_n}^{k_n}] \cdot [{a_n}^{-k_n} \cdots {a_1}^{-k_1}] &= [{a_1}^{k_1} \cdots {a_n}^{k_n} {a_n}^{-k_n} \cdots {a_1}^{-k_1}] \\
&= [{a_1}^{k_1} \cdots {a_n}^{0} \cdots {a_1}^{-k_1}] \\
&= [{a_1}^{k_1} \cdots {a_{n-1}}^{k_{n-1}} {a_{n-1}}^{-k_{n-1}} \cdots {a_1}^{-k_1}] \\
&\ \vdots \\
&= [1]
\end{aligned}$$

und somit besitzt jedes Element aus $F[\mathcal{A}]$ ein Inverses. □

2. Freie Gruppen

Definition: Sei G eine Gruppe. Eine Teilmenge $E \subset G$ heißt Erzeuger, falls die von E erzeugte Untergruppe $\bigcap\{H < G \,|\, E \subset H\} = G$ ist.

Beispiel: $\{1\}$ erzeugt $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ erzeugt $\mathbb{Z}$, $[\mathcal{A}] := \{[a] \,|\, a \in \mathcal{A}\}$ erzeugt $F[\mathcal{A}]$.

Definition: Ein Erzeuger E von G heißt freie Basis, falls es für alle Gruppen H und Mengenabbildungen $\varphi : E \to H$ einen Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \to H$ mit $\Phi|_E = \varphi$ gibt.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i"'] & H \\ G \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Eine Gruppe heißt frei, wenn sie eine freie Basis besitzt.

Satz: *Eine Gruppe G ist frei $\Leftrightarrow$ $G \cong F[\mathcal{A}]$ für ein Alphabet $\mathcal{A}$.*

Beweis: "$\Leftarrow$": $[\mathcal{A}]$ ist eine freie Basis von $F[\mathcal{A}]$, denn für jede Abbildung $\varphi : [\mathcal{A}] \to H$ ist durch $\Phi([a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}]) := \varphi(a_1)^{k_1} \cdots \varphi(a_n)^{k_n}$ der gesuchte Fortsetzungshomomorphismus wohldefiniert (die Kürzungsregeln gelten nämlich auch in H).
"$\Rightarrow$": Seien E eine freie Basis von G, $\alpha : E \to F[E], e \mapsto [e]$ und $\beta : [E] \to G, [e] \mapsto e$. Dann lässt sich α zu einem Homomorphismus $\varphi : G \to F[E]$ und β zu einem Homomorphismus $\psi : F[E] \to G$ fortsetzen.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook, "i"'] & F[E] \\ G \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {[E]} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, hook, "i"'] & G \\ F[E] \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Wegen $\varphi|_E = \alpha$ und $\psi|_{[E]} = \beta$ gilt $\varphi \circ \psi|_{[E]} = \mathrm{id}$ und $\psi \circ \varphi|_E = \mathrm{id}$. Da E und $[E]$ Erzeuger sind, müssen nun $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ Identitäten sein. $\square$

Analog lässt sich beweisen, daß zwei freie Gruppen mit gleichmächtigen Basen isomorph sind. Es gilt aber auch, daß freie Gruppen mit Basen ungleicher Mächtigkeit nicht isomorph sind (Kapitel IV) und daher kann man definieren:

Definition: Der Rang einer freien Gruppe ist die Mächtigkeit einer (also jeder) freien Basis dieser Gruppe.

3. Reduzierte Worte

Das Problem, für zwei gegebene Worte $u, v \in W(\mathcal{A})$ zu entscheiden ob $u \sim v$ gilt, heißt Wortproblem. In $F[\mathcal{A}]$ gibt es dafür einen einfach Algorithmus.

Definition: Ein Wort heißt reduziert, wenn keine elementare Kürzung anwendbar ist (kein Exponent ist 0 und es stehen keine Silben mit dem selben Buchstaben nebeneinander). Da Kürzungen die (endliche) Wortlänge verkleinern, gibt es in jeder Äquivalenzklasse mindestens ein reduziertes Wort.

Definition: Die Standardkürzung eines Wortes $w \in W(\mathcal{A})$ ist die Folge $w = w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(m)} = w_*$, wobei $w^{(i+1)}$ durch eine elementare Kürzung an der ersten möglichen Stelle aus $w^{(i)}$ hervorgeht und w_* reduziert ist. Bei Worten der Form $Ua^k a^0 V$ ist zwar nicht eindeutig festgelegt, welche Kürzung anzuwenden ist aber die Folge ist trotzdem eindeutig.

Notiz: Ein Wort u ist reduziert $\Leftrightarrow u = u_*$.

Satz: *Für zwei Worte $u, v \in W(\mathcal{A})$ gilt $u \sim v \Leftrightarrow u_* = v_*$.*

Beweis:
"$\Leftarrow$": klar, da die Standardkürzung aus äquivalenten Worten besteht.
"$\Rightarrow$": Angenommen v geht aus u durch eine elementare Kürzung an der j-ten Silbe hervor:

> Typ 1: Die j-te Silbe von u hat also die Form a^0 für ein $a \in \mathcal{A}$. Da diese Silbe in u_* nicht auftreten kann, gibt es ein $i \in \mathbb{N}$, so daß $u^{(i)}$ das letzte Wort in der Standardkürzung ist, das diese Silbe enthält. Dann gibt es ein reduziertes Teilwort w, so daß $u^{(i)} = wa^0w'$ und $v^{(i)} = ww'$. Also gilt $u^{(i+1)} = v^{(i)}$ und somit $u_* = v_*$.
>
> Typ 2: Die $(j-1)$-te und j-te Silbe von u haben also die Form a^p bzw. a^q. Sei i der Index des letzen Wortes in der Standardkürzung, das diese beiden Silben enthält. Dann gibt es ein reduziertes Teilwort w, so daß $u^{(i)} = wa^pa^qw'$ und $v^{(i)} = wa^{p+q}w'$. Falls die lezte Silbe von w nicht die Form a^r hat, gilt $u^{(i+1)} = v^{(i)}$ und somit $u_* = v_*$.
> Andernfalls ist $w = xa^r$ mit einem reduzierten Wort x. Also $u^{(i)} = xa^ra^pa^qw'$ und $v^{(i)} = xa^ra^{p+q}w'$ und somit $u^{(i+2)} = xa^{r+p+q}w' = v^{(i+1)}$ und wieder $u_* = v_*$.

Allgemeiner sei nun $u = u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(k)} = v$ eine Folge von elementaren Kürzungen und Erweiterungen, die u in v transformiert. Dann gilt $u_*^{(j)} = u_*^{(j+1)}$, also auch $u_* = u_*^{(0)} = u_*^{(k)} = v_*$. □

Folgerung: Jede Äquivalenzklasse von Worten enthält genau ein reduziertes Wort und jede Folge elementarer Kürzungen führt zum selben reduzierten Wort u_*.

Folgerung: Das Wortproblem lässt sich mit folgendem Algorithmus lösen: Zu zwei Worten u, v berechne u_* und v_*. Es gilt $u \sim v \Leftrightarrow u_* = v_*$.

4. Das freie Produkt

Bei der Definition der freien Gruppe wurde aus zu $\mathbb{Z}$ isomorphen Gruppen (den Silben) eine neue Gruppe konstruiert. Dieser Vorgang lässt sich auch für beliebige Familien von Gruppen durchführen und liefert dann die kategorielle Summe dieser Gruppen.

Definition: Wenn man in der Definition von $F[\mathcal{A}]$ anstelle der Silben eine beliebige Familie $\{G_i \mid i \in I\}$ von Gruppen zulässt und folgende Kürzungsregeln definiert (U, V Worte über den G_i):

Typ 1: $Ue_iV \sim UV$ für alle neutralen Elemente $e_i \in G_i$

Typ 2: $UabV \sim UcV$ für $a, b \in G_i$ mit $a \cdot b = c \in G_i$

erhält man das freie Produkt $\coprod G_i$. Das freie Produkt endlich vieler Gruppen $G_1, \ldots, G_n$ schreibt man auch als $G_1 * G_2 * \cdots * G_n$.

Notiz: Es gilt $F[\mathcal{A}] \cong \coprod_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}$.

Definition: Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\{X_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Objekten in $\mathcal{C}$. Ein Objekt X mit einer Familie von Morphismen $\{\iota_i : X_i \to X \mid i \in I\}$ (den Inklusionen) heißt Summe oder Koprodukt der X_i, wenn es zu jedem Objekt Y und jeder Familie von Morphismen $\{\varphi_i : X_i \to Y \mid i \in I\}$ einen Morphismus $\varphi : X \to Y$ gibt, so daß für alle $i \in I$ gilt: $\varphi \circ \iota_i = \varphi_i$.

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, hook, "\iota_i"'] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Satz: *Das freie Produkt ist die Summe in der Kategorie der Gruppen.*

Beweis: Sei also $\{G_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Gruppen, $G = \coprod G_i$, H eine weitere Gruppe, $\iota_i : G_i \to G, x \mapsto [x]$ und $\{\varphi_i : G_i \to H \mid i \in I\}$ eine Familie von Morphismen. Dann ist $\varphi : G \to H, [x_1 \cdots x_n] \mapsto \varphi_{i(x_1)}(x_1) \cdots \varphi_{i(x_n)}(x_n)$ der gesuchte Morphismus. Dabei soll $i(x)$ den Index der Gruppe liefern, aus der x stammt. φ ist wohldefiniert, da die φ_i Homomorphismen sind und für $g \in G_i$ gilt $\varphi \circ \iota_i(g) = \varphi[g] = \varphi_{i(g)}(g) = \varphi_i(g)$. $\square$

5. Amalgamierte Untergruppen und Pushouts

Definition: Seien G_0, G_1, G_2 Gruppen, $\iota_i : G_0 \to G_i$ Inklusionen (die Bilder von G_0 sind also isomorphe Untergruppen in G_1 und G_2). Analog zum freien Produkt sei nun die Menge aller Worte über G_1 und G_2 mit folgenden Kürzungsregeln versehen:

Typ 1: $Ue_iV \sim UV$ für die neutralen Elemente $e_i \in G_i$

Typ 2: $UabV \sim UcV$ für $a, b \in G_i$ mit $a \cdot b = c \in G_i$

Typ 3: $U\,\iota_1(g)\,V \sim U\,\iota_2(g)\,V$ für alle $g \in G_0$.

Wenn man nun wieder analog zur Konstruktion der freien Gruppe verfährt, erhält man das freie Produkt $G_1 *_{G_0} G_2$ mit amalgamierter Untergruppe G_0.

Notiz: Bei trivialem $G_0 = \{1\}$ gilt offenbar $G_1 *_{\{1\}} G_2 = G_1 * G_2$.

Das freie Produkt mit amalgamierter Untergruppe ist nun gerade die Gruppe, die im Satz von Seifert-van Kampen als Fundamentalgruppe des gesamten Raumes auftritt:

Satz: *Sei $G = G_1 *_{G_0} G_2$ und $\kappa_i : G_i \to G,\ g \mapsto [g]$. Dann ist*

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, hook, "\iota_1"] \arrow[d, hook, "\iota_2"'] & G_1 \arrow[d, "\kappa_1"] \\
G_2 \arrow[r, "\kappa_2"'] & G
\end{tikzcd}$$

ein Pushout.

Beweis: Die Kommutativität des Diagramms folgt direkt aus der Typ 3-Kürzungsregel: Für $g \in G_0$ gilt $\kappa_1(\iota_1(g)) = [\iota_1(g)] = [\iota_2(g)] = \kappa_2(\iota_2(g))$.
Seien also H eine Gruppe und $\varphi_i : G_i \to H, i \in \{1, 2\}$ zwei Homomorphismen mit $\varphi_1 \circ \iota_1 = \varphi_2 \circ \iota_2$.

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, hook, "\iota_1"] \arrow[d, hook, "\iota_2"'] & G_1 \arrow[d, "\kappa_1"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "\kappa_2"'] \arrow[drr, bend right, "\varphi_2"'] & G \arrow[dr, "\varphi"] & \\
 & & H
\end{tikzcd}$$

Der gesuchte Homomorphismus $\varphi : G_1 *_{G_0} G_2 \to H$ sei definiert durch $\varphi([x_1 \cdots x_n]) = \varphi_{i(x_1)}(x_1) \cdots \varphi_{i(x_n)}(x_n)$, wobei $i(x)$ wieder den Index der Gruppe liefert, aus der x stammt. Wegen $\varphi_1 \circ \iota_1 = \varphi_2 \circ \iota_2$ ist diese Definition verträglich mit der Typ 3-Kürzung und φ wohldefiniert. Außerdem gilt für $g_i \in G_i$: $\varphi(\kappa_i(g_i)) = \varphi([g_i]) = \varphi_i(g_i)$, also kommutiert das erweiterte Diagramm.
Zur Eindeutigkeit von φ: Sei $\varphi' : G_1 *_{G_0} G_2 \to H$ ein weiterer Homomorphismus mit den gesuchten Eigenschaften. Dann müssen φ und φ' wegen $\varphi_i = \varphi' \circ \kappa_i = \varphi \circ \kappa_i$ auf den Bildern der G_i unter κ_i übereinstimmen. Da diese Bilder (die Klassen der Worte der Länge 1) ein Erzeuger sind und φ' ein Homomorphismus ist, gilt $\varphi' = \varphi$. $\square$

6. Beispiel

Sei $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge paarweise verschiedener Punkte und $X = \mathbb{R}^2 \setminus P$.

Behauptung: $\pi_1(X) \cong \coprod_{\{1,\dots,n\}} \mathbb{Z}$

Beweis: per Induktion: Für $n = 0$ und $n = 1$ ist die Aussage klar, da $\mathbb{R}^2$ zusammenziehbar und $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{Punkt}\}$ homotopieäquivalent zu S^1 ist.
Seien nun oBdA $p_i = (i-1, 0)$ und $X_1 = \{(x_1, x_2) \in X \mid x_1 > 1/4\}, X_2 = \{(x_1, x_2) \in X \mid x_1 < 3/4\}$. Dann ist $X_3 = X_1 \cap X_2 = \{(x_1, x_2) \in X \mid 1/4 < x_1 < 3/4\}$. Dann gilt $\pi_1(X_1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(X_2) \cong \coprod_{\{1,\dots,n-1\}} \mathbb{Z}$ (beides nach Voraussetzung) und $\pi_1(X_3) \cong \{1\}$ (da zusammenziehbar). Seifert-van Kampen besagt nun, daß

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X_3) \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, hook, "i_2"'] & \pi_1(X_2) \arrow[d, "j_1"] \\
\pi_1(X_2) \arrow[r, "j_2"'] & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

ein Pushout ist. Also ist

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(X_1) *_{\pi_1(X_3)} \pi_1(X_2) \cong \mathbb{Z} * (\coprod_{\{1,\dots,n-1\}} \mathbb{Z}) \cong \coprod_{\{1,\dots,n\}} \mathbb{Z}$$

$\square$

In diesem Fall besteht das Alphabet gerade aus den Homotopieklassen von Wegen, die eines der Löcher genau einmal umlaufen. Die Kürzungsregeln besagen hier einfach, daß man anstatt das k-te Loch erst n_1 und dann n_2 mal zu umlaufen auch gleich $n_1 + n_2$ mal umlaufen kann und daß man Wege, die kein Loch umlaufen weglassen kann.