

Kauffman Polynom

Definition 1 Man nenne $\Omega_2, \Omega_2^{-1}, \Omega_3$ und Ω_3^{-1} **reguläre Bewegungen**. Kann man ein reguläres Diagramm D' durch endlich viele reguläre Bewegungen angewendet auf ein reguläres Diagramm D erhalten, so nennt man D und D' **regulär äquivalent**

Kauffman's Prinzip

Angenommen eine Funktion f in einer Unbekannten t sei invariant unter den regulären Bewegungen. Für ein passendes m , das von dem entsprechendem regulären Diagramm abhängt, ist $t^m f$ eine Knoteninvariante (Verschlingungsinvariante)

Das Kauffman-Klammer-Polynom:

Satz 1 Sei D eine **unorientierte** reguläre Projektion eines Knotens oder einer Verschlingung K . Dann existiert ein eindeutiges, ganzzahliges Polynom $\langle D \rangle$ in einer Unbekannten A , dass folgende 4 Bedingungen erfüllt:

- (1) $\langle D \rangle$ ist invariant unter regulärer Äquivalenz
 (2) Ist D die triviale Projektion O , dann gilt:

$$\langle O \rangle = 1 \quad (1)$$

- (3) Sei D eine beliebige reguläre Projektion und O die triviale Projektion. Dann gilt für die unzusammenhängende Summe beider:

$$\langle D \cup O \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle \quad (2)$$

- (4) Seien D, \hat{D} und \hat{D}' die eben gezeigten Flechtdiagramme (1). Dann gilt folgende Gleichung:

$$\langle D \rangle = A \langle \hat{D} \rangle + A^{-1} \langle \hat{D}' \rangle \quad (3)$$

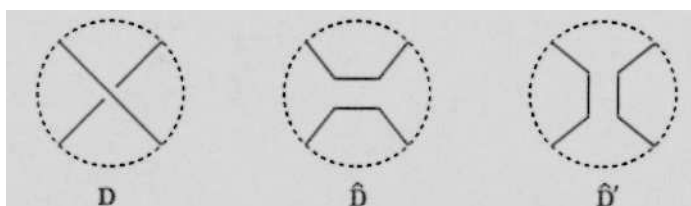


Abbildung 1: Flechtdiagramme des Kauffman-Klammer-Polynoms

Definition 2 Sei D eine reguläre Knotenprojektion. Dann ist die Tait-Zahl oder Verdrillungszahl $w(D)$ definiert als die Differenz der Anzahl von Kreuzungen mit positivem Vorzeichen $c_+(D)$ und negativem Vorzeichen $c_-(D)$, d.h. $w(D) = c_+(D) - c_-(D)$

Das Kauffman-Polynom:

Satz 2 Sei D eine orientierte reguläre Projektion eines orientierten Knotens K . Falls $\langle D \rangle$ das Kauffman-Klammer-Polynom der „unorientierten“ Projektion D und $w(D)$ die Tait Zahl (Verdrillungszahl) von D ist, dann ist

$$\hat{P}_D(A) = (-A^{-3})^{w(D)} \langle D \rangle \quad (4)$$

eine Invariante des orientierten Knotens K , geschrieben als $\hat{P}_K(A)$.

Das Kauffman-Polynom steht in folgender Beziehung zum Jones-Polynom:

$$(-t^{\frac{3}{4}})^{w(D)} * \langle D \rangle \circ (t^{-\frac{1}{4}}) = \hat{P}_K(t^{-\frac{1}{4}}) = V_K(t) \quad (5)$$

Polynomiale (Flecht-) Invarianten

Das Jones-Polynom:

Definition 3 Sei K ein orientierter Knoten (oder Verschlingung) und D eine reguläre Projektion von K . Dann wird das Jones-Polynom $V_K(t)$ eindeutig durch die beiden folgenden Axiome bestimmt:

Axiom 1: Ist K der triviale Knoten, dann sei $V_K(t) = 1$.

Axiom 2: Seien D_+, D_- und D_0 Flechtdiagramme, dann gilt die folgende Flechtrelation

$$\frac{1}{t}V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})V_{D_0}(t) \quad (6)$$

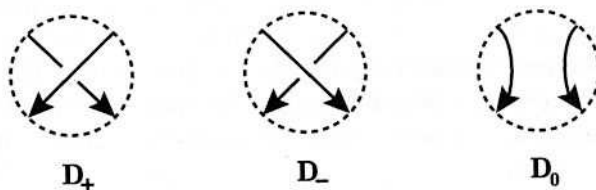


Abbildung 2: Flechtdiagramme

Das Alexander-Polynom:

Wurde 1928 von J.W. Alexander entdeckt und war die erste bekannte Polynomiale Invariante von Knoten. Es ist ein symmetrisches Knotenpolynom, dass aus sogenannten „Seifert-Matrizen“ von Knoten gewonnen wird.

Eine Seifert Matrix M eines Knotens K ist eine $[m \times m]$ -Matrix mit $m = 2g(F) + \mu(K) - 1$ wobei $g(f)$ das Geschlecht der Seifert-Fläche F des Knotens K und $\mu(K)$ die Anzahl der Komponenten der Verschlingung K (ist K ein Knoten, so ist $\mu(K) = 1$) bezeichnet. Diese Matrix enthält nur Einträge $\in -1, 0, 1$.

Das Alexander Polynom $\Delta_K(t)$ berechnet sich nun als eine spezielle Form der Determinanten der symmetrischen Matrix $(M + M^T)$ und zwar:

$$\Delta_K(t) = t^{-\frac{k}{2}} \det(M - tM^T)$$

Wobei k den Rang der Seifert Matrix von K bezeichnet.

Das Alexander-Polynom hat die Form:

$$\Delta_K(t) = a_{-n}t^{-n} + a_{-(n-1)}t^{-(n-1)} + \dots + a_{n-1}t^{n-1} + a_n t^n \text{ mit } a_{-n} = a_n, a_{-(n-1)} = a_{-(n-1)}, \dots, a_{-1} = a_1$$

Das Alexander-Conway-Polynom:

Definition 4 Seien K_+, K_- und K_0 definiert wie für das Jones-Polynom. So gilt:

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z \nabla_{K_0}(z) \quad (7)$$

HOMFLY-Polynom: Knotenpolynom mit 2 Unbekannten:

Definition 5 Sei K ein orientierter Knoten (oder Verschlingung) und D eine reguläre Projektion von K . Dann definieren die folgenden zwei Axiome ein invariantes Polynom $P_K(v, z)$ von K in zwei Unbekannten:

Axiom 1: Ist K der triviale Knoten O (Unknoten), so ist $P_O(v, z) = 1$

Axiom 2: In Bezug auf die Flechtdiagramme D_+, D_- und D_0 , gilt folgende Gleichung:

$$\frac{1}{v}P_{D_+}(v, z) - vP_{D_-}(v, z) = zP_{D_0}(v, z) \quad (8)$$

Nun drei Sätze, die bei der Berechnung des HOMFLY-Polynoms von zusammengesetzten Knoten sehr hilfreich sein können:

Definition 6 Sei $L_1 \# L_2$ eine beliebige **Zusammensetzung** (oder **zusammenhängende Summe**) zweier Verschlingungen.

Definition 7 Sei $L_1 \amalg L_2$ eine beliebige **unzusammenhängende Summe** zweier Verschlingungen.

Satz 3 Sei $K = L \amalg O$ die **unzusammenhängende Summe** einer Verschlingung L und des Unknoten O . Dann gilt:

$$P(K) = P(L \amalg O) = \left(\frac{1}{v} - v\right) \frac{1}{z} P(L) \quad (9)$$

Satz 4 Sei $K = L_1 \amalg L_2$ eine **zusammengesetzte Verschlingung/Knoten**. Dann gilt:

$$P(L_1 \amalg L_2) = \left(\frac{1}{v} - v\right) \frac{1}{z} P(L_1) P(L_2) \quad (10)$$

Satz 5 Sei $K = L_1 \# L_2$ eine **zusammengesetzte Verschlingung/Knoten**. Dann gilt:

$$P(K) = P(L_1 \# L_2) = P(L_1) P(L_2) \quad (11)$$

Da man das HOMFLY-Polynom auf dem Weg fand, ein möglichst allgemeines Knoten-Polynom zu definieren, besteht offensichtlich ein Zusammenhang zwischen dem HOMFLY- sowie dem Alexander- und Jones-Polynom, und zwar:

Behauptung 1 Sei K ein orientierter Knoten (oder Verschlingung). Dann gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad V_K(t) &= P_K\left(t, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \\ (2) \quad \Delta_K(t) &= P_K\left(1, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

Leider stellt das Homfly-Polynom, auch wenn es mehr Knoten unterscheiden kann als das Jones-Polynom, immer noch keine vollständige Knoteninvariante dar.

So haben folgende „Mutanten“ zwar das gleiche Homfly-Polynom, sind jedoch voneinander verschieden, was man auf anderem Wege, z.B. durch das bestimmen des hyperbolischen Volumens eines Knotens zeigen kann.

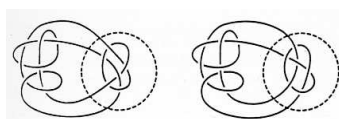


Abbildung 3: Verschiedene Knoten mit demselben Homfly-Polynom

Ein weiteres Beispiel dafür, dass es sich beim Homfly auch um keine vollständige Knoteninvariante, d.h. dass es sich nicht um eine bidirektionale Beziehung handelt, folgt direkt aus der Gleichung: $P(L_1 \# L_2) = P(L_1) P(L_2)$. Das Polynom eines zusammengesetzten Knotens ist gleich dem Produkt der Polynome, aus denen er zusammengesetzt wurde, **egal wie sie zusammengesetzt wurden!**

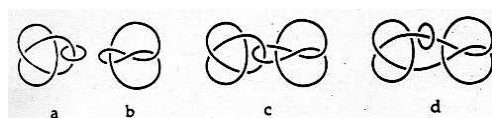


Abbildung 4: Verschiedene Verknüpfungen mit demselben Homfly-Polynom

Flecht-Polynome und klassische Knoteninvarianten

Definition 8 Ein reduziertes alternierendes Diagramm ist ein reguläres alternierendes Diagramm eines Knotens, in dem die Anzahl der Kreuzungen nicht reduziert werden kann.

Satz 6 Sei D ein reduziertes, alternierendes Diagramm eines alternierenden Knotens K . Falls K kein Prim-Knoten ist, so existiert ein Kreis C in der Ebene, so dass D diesen Kreis in genau 2 Punkten schneidet. Der Kreis C unterteilt D in zwei nicht triviale $(1,1)$ -“Gewirre“.

Beispiel:

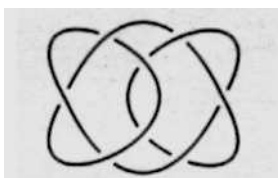


Abbildung 5: Ist dieser Knoten Prim?

Beim weiteren Beweis der Tait'schen Vermutungen spielt das Grad des Jones-Polynoms eines Knotens K eine wichtige Rolle. Dazu führen wir folgende Definitionen ein:

Definition 9 (1) $\maxdeg V_K(t)$ ist der größte, $\mindeg V_K(t)$ der kleinste Exponent des Jones-Polynoms
 (2) $c_+(D)$ sei die Anzahl der positiven, $c_-(D)$ die Anzahl der negativen Kreuzungspunkte von D .
 (3) $\sigma(K)$ sei die Signatur eines Knotens.

Für den Grad des Jones-Polynoms gilt nun folgender Satz, dessen Beweis einen Großteil des Beweises der Tait'schen Vermutungen ausmacht.

Satz 7 Für ein beliebiges Diagramm D eines Knotens K gelten folgende Ungleichungen:

$$\mindeg V_K(t) \geq -c_-(D) - \frac{1}{2}\sigma(K) \quad (12)$$

$$\maxdeg V_K(t) \leq c_+(D) - \frac{1}{2}\sigma(K) \quad (13)$$

Für $\text{span} V_K(t) = \maxdeg V_K(t) - \mindeg V_K(t)$ gilt:

$$\text{span} V_K(t) \leq c_+(D) + c_-(D) = c(D) \quad (14)$$

Ist K ein alternierender Knoten und D ein reguläres, reduziertes, alternierendes Diagramm von K , dann wird aus den obigen Ungleichungen Gleichungen und somit gilt:

$$\text{span} V_K(t) = c_+(D) + c_-(D) = c(D) \quad (15)$$

$$\maxdeg V_K(t) + \mindeg V_K(t) = c_+(D) - c_-(D) - \sigma(K) = w(D) - \sigma(K) \quad (16)$$

Tait's erste Vermutung

Satz 8 Ein reduziertes alternierendes Diagramm ist das minimale Diagramm seines alternierenden Knotens. Außerdem kann das minimale Diagramm eines alternierenden Prim-Knotens nur ein alternierendes Diagramm sein. Andersherum, ein nicht alternierendes Diagramm kann niemals das minimale Diagramm eines alternierenden Prim-Knotens sein.

Tait's zweite Vermutung

Satz 9 Seien D_1 und D_2 zwei reduzierte alternierende Projektionen eines alternierenden Knotens K , dann gilt $w(D_1) = w(D_2)$.

Aus diesem Satz können wir eine sehr schöne Anwendung folgern:

Satz 10 Ein alternierender Knoten, dessen minimale Nummer von Kreuzungen ungerade ist, kann nie amphichiral sein.

Definition 10 Man lege einen Kreis um ein $(2,2)$ -Gewirr, so dass dieser Kreis in genau 4 Punkten geschnitten wird. Man Bezeichne diese Punkte mit a, b, c, d und fixiere sie. Dreht man das Gewirr nun um 180° nach vorn oder hinten, so bezeichnet man diese Bewegung als „Flype“

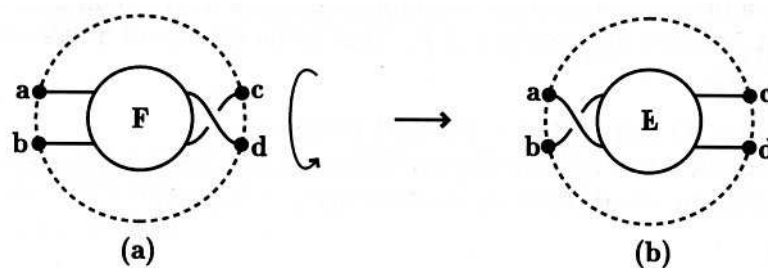


Abbildung 6: Flype oder Conway-Flype

Tait's dritte Vermutung

Seien D_1 und D_2 zwei reduzierte alternierende Diagramme eines alternierenden Knotens K . Dann können wir D_1 in D_2 überführen durch die Ausführung von endlich vielen „Flypes“