

SEMINAR ÜBER KNOTENTHEORIE  
AM MATHEMATISCHEN INSTITUT (MI)  
DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN  
WINTERSEMESTER 2004/2005

---

Vortrag zum Thema  
*Das Jones-Polynom II*

---

Von: **Justus Ferdinand Lücke**  
justusluecke@web.de

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Kauffman Polynom</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Polynomiale (Flecht-) Invarianten</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Flecht-Polynome und klassische Knoteninvarianten</b>	<b>14</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Im ersten Teil des Vortrages wurde das Jones Polynom eingeführt und einige seiner Eigenschaften dargestellt. Im zweiten Teil des Vortrages über das Jones-Polynom möchte ich nun auf weitere, noch allgemeinere polynomiale Invarianten von Knoten eingehen und die Verbindung zwischen diesen und dem Jones-Polynom herstellen.

Am Ende meines Vortrags möchte dann noch auf die Tait'schen Vermutungen eingehen, die Matthias in seinem Vortrag schon angesprochen hatte.

Im letzten Vortrag wurde das Jones-Polynom anhand von Flecht-Relationen definiert. Dies ist jedoch in engeren Sinne kein Beweis, dass ein solches Polynom überhaupt existiert und wird diesem Meilenstein in der Knotentheorie nicht ganz gerecht. Im Hintergrund dieser Entdeckung stehen Gedanken über Operatoralgebren, bei dessen Untersuchung Vaughan Jones eher zufällig auf dieses Knotenpolynom stieß. Um die Gültigkeit dieses Polynoms etwas anschaulicher zu machen, werde ich als erstes das Kauffman-Klammer-Polynom einführen, welches sehr grundlegend konstruiert wird.

Der eigentliche Beweis des Jones-Polynoms, so wie Vaughan Jones ihn durchgeführt hat, stützt sich auf Algebren und ist sehr kompliziert. Ein einfacher Beweis ist immer noch ein offenes Problem der Knotentheorie.

## Kapitel 2

# Kauffman Polynom

Zuerst möchte ich, wie angekündigt, mich auf dem Weg polynomialen Invarianten nähern, wie es Louis Kauffman getan hat, und zwar von den Reidemeisterbewegungen  $\Omega_1, \Omega_2$  und  $\Omega_3$  aus. Wie wir im vorletzten Vortrag gelernt haben, gelten zwei Knotenprojektionen als äquivalent, wenn sie durch die Ausführung von endlich vielen Reidemeisterbewegungen auseinander hervorgehen. Kann man also eine Funktion definieren, die sich unter  $\Omega_1, \Omega_2$  und  $\Omega_3$  nicht verändert, so ist sie unabhängig von der jeweiligen Projektion eines Knotens und somit eine Invariante dieses Knotens.

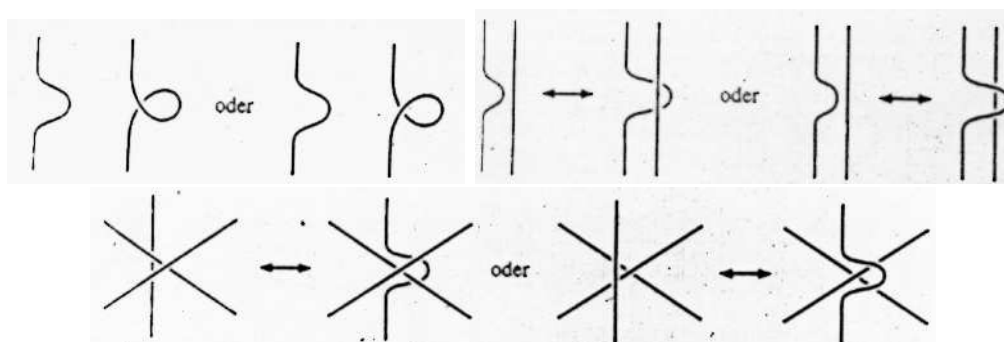


Abbildung 2.1: Diagramme der drei Reidemeisterbewegungen  $\Omega_1, \Omega_2$  und  $\Omega_3$

Dabei ging Kauffman nach einem von ihm definierten grundlegenden Prinzip vor, das ich nun angeben möchte:

**Definition 1** Man nenne  $\Omega_2, \Omega_2^{-1}, \Omega_3$  und  $\Omega_3^{-1}$  **reguläre Bewegungen**. Kann man ein reguläres Diagramm  $D'$  durch endlich viele reguläre Bewegungen angewendet auf ein reguläres Diagramm  $D$  erhalten, so nennt man  $D$  und  $D'$  **regulär äquivalent**

### Kauffman's Prinzip

Angenommen eine Funktion  $f$  in einer Unbekannten  $t$  sei invariant unter den regulären Bewegungen. Für ein passendes  $m$ , das von dem entsprechendem regulären Diagramm abhängt, ist  $t^m f$  eine Knoteninvariante (Verschlingungsinvariante)

Nach diesem Prinzip und der vorher angegebene Grundidee möchte ich zuerst das Kauffman-Klammer-Polynom und daraus das Kauffman-Polynom konstruieren. Dieses Kauffman-Polynom ist grundsätzlich dasselbe wie das Jones-Polynom, jedoch mit einigen speziellen Eigenschaften für spezielle Klassen von Knoten, wie z.B. alternierende Knoten.

Bei seiner Definition werde ich vorgehen wie ein Mathematiker, der eine Invariante von Verschlingungen finden will.

Zuallererst soll die triviale Projektion des trivialen Knotens ebenfalls trivial sein, d.h. 1. Daraus folgt **Bedingung 1:**

$$\langle O \rangle = 1 \tag{2.1}$$

Desweiteren betrachten wir nun die einzelnen Kreuzungspunkte der Knotenprojektion. Ähnlich wie beim Jones-Polynom wollen wir diese auftrennen, jedoch auf eine andere Art und Weise: Jede Kreuzung einer **unorientier-**

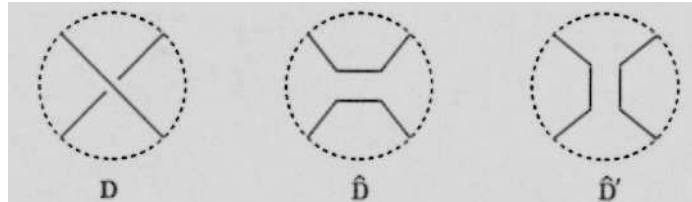


Abbildung 2.2: Flechtrelationen des Kauffman-Klammer-Polynoms

ten regulären Verschlingungsprojektion spalten wir einmal horizontal und einmal vertikal auf, so dass wir zwei ähnlich Knotenprojektionen, jedoch mit jeweils einer Kreuzung weniger erhalten. Die vorherige Kreuzung soll in diesem Fall eine Linearkombination der beiden Aufspaltungen sein, deren Koeffizienten wir vorläufig mit  $A$  und  $B$  bezeichnen. Daraus ergibt sich **Bedingung 2:**

$$\begin{cases} \langle \times \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + B \langle \smile \rangle \\ \langle \times \rangle = A \langle \smile \rangle + B \langle \rangle \langle \rangle \end{cases}$$

**Bemerkung 1** *Es ist wichtig, dass die Projektion unorientiert ist, da ansonsten bei einer der beiden Aufspaltungen Konflikte bei der Orientierung entstehen würden.*

Wenn man diese Regeln genau betrachtet, sind sie eigentlich identisch. Schaut man sich die untere Linearkombination an, indem man den Kopf um  $90^\circ$  nach rechts neigt, so stimmt sie mit der oberen überein. Daher werden sie auch als eine Bedingung angesehen.

So können wir die Projektionen immer weiter vereinfachen, bis wir am Ende des Flechtbaumdiagramms Projektionen ohne Kreuzungen erhalten, also Projektionen eines Unknotens oder der unzusammenhängenden Summe von mehreren Unknoten. Diese Projektionen am Ende des Baumes werden **Zustände** genannt.

Daher ergibt sich die Notwendigkeit einer Bedingung, wie die Polynome dieser Zusammensetzungen von Unknoten zu berechnen sind. Daher definiert man sich eine Bedingung, wie mit der Zusammensetzung einer Verschlingung mit einer trivialen Komponente umgegangen werden soll. Diese Zusammensetzung ist immer zerlegbar, da die Komponente nicht mit der Verschlingung verknotet ist. So definieren wir vorerst mit einer beliebigen Variable  $C$  die

**Bedingung 3:**

$$\langle L \cup O \rangle = C \langle L \rangle \tag{2.2}$$

Nun haben wir die Vorschriften unseres Polynoms festgeschrieben. Das Ziel war, eine Invariante von Verschlingungen zu finden. Dazu sollte das Polynom invariant unter allen Reidemeisterbewegungen sein.

Betrachte man zuerst die Reidemeisterbewegung vom Typ  $\Omega_2$ . Damit das Polynom invariant unter dieser ist muss gelten:

$$\langle \langle \rangle \rangle = \langle \rangle \langle \rangle$$

Dazu spalten wir die erste Knotenprojektion nach der oben definierten Bedingung 2 auf und erhalte so folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{X} \rangle &= A \langle \text{X} \rangle + B \langle \text{X} \rangle \\
 &= A (A \langle \text{X} \rangle + B \langle \text{X} \rangle) + B (A \langle \text{X} \rangle + B \langle \text{X} \rangle) \\
 &= A (A \langle \text{X} \rangle + BC \langle \text{X} \rangle) + B (A \langle \text{X} \rangle + B \langle \text{X} \rangle) \\
 &= (A^2 + ABC + B^2) \langle \text{X} \rangle + BA \langle \text{X} \rangle \stackrel{?}{=} \langle \text{X} \rangle
 \end{aligned}$$

Damit die geforderte Äquivalenz der Polynome der Kreuzungsprojektionen gilt, müssen folgende Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow \begin{array}{l} BA \\ B \end{array} = \begin{array}{l} 1 \\ A^{-1} \end{array} \\
 & \Rightarrow (A^2 + ABC + B^2) = (A^2 + C + A^{-2}) = 0 \\
 & \Rightarrow \begin{array}{l} C \end{array} = \begin{array}{l} -A^2 - A^{-2} \end{array}
 \end{aligned}$$

Bedingung 3:

$$\langle L \cup O \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle \tag{2.3}$$

Als nächstes soll untersucht werden, ob dies so definierte Polynom auch unter Reidemeisterbewegungen vom Typ III invariant ist. Dabei verwenden wir die Invarianz unter  $\Omega_2$  und es ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{X} \rangle &= A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{X} \rangle \\
 &= A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{X} \rangle = \langle \text{X} \rangle
 \end{aligned}$$

Bevor nun dieses Polynom auf Invarianz unter  $\Omega_1$ , was, wie sich zeigen wird, nicht gilt, untersucht wird, die endgültige Definition des Kauffman-Klammer-Polynoms:

**Satz 1** Sei  $D$  eine **unorientierte** reguläre Projektion eines Knotens oder einer Verschlingung  $K$ . Dann existiert ein eindeutiges, ganzzahliges Polynom  $\langle D \rangle$  in einer Unbekannten  $A$ , dass folgende 4 Bedingungen erfüllt:

- (1)  $\langle D \rangle$  ist invariant unter regulärer Äquivalenz
- (2) Ist  $D$  die triviale Projektion  $O$ , dann gilt:

$$\langle O \rangle = 1 \tag{2.4}$$

- (3) Sei  $D$  eine beliebige reguläre Projektion und  $O$  die triviale Projektion. Dann gilt für die unzusammenhängende Summe beider:

$$\langle D \cup O \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle \tag{2.5}$$

- (4) Seien  $D, \hat{D}$  und  $\hat{D}'$  die eben gezeigten Flechtdiagramme (2.2). Dann gilt folgende Gleichung:

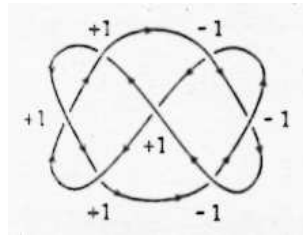
$$\langle D \rangle = A \langle \hat{D} \rangle + A^{-1} \langle \hat{D}' \rangle \tag{2.6}$$

Dieses Polynom heißt das *Kauffman-Klammer-Polynom* einer regulären Knotenprojektion. Man beachte hierbei besonders die Bedingung (2.4). Hierbei wird nicht wie bei der Definition des Jones-Polynoms vom trivialen Knoten sondern nur von der trivialen Projektion gesprochen. So zeigt sich, dass das Kauffman-Klammer Polynom eines Diagramms  $D = (D_{Dr})$  des trivialen Knotens mit einer Drehung  $\langle D \rangle = -A^{-3}$  ist. Daraus folgt, dass das



Kauffman-Klammer-Polynom zwar invariant unter den regulären Bewegungen ist, jedoch nicht unter der ersten Reidemeisterbewegung  $\Omega_1$ . Eine Berechnung dieser ergibt den selben Wert wie bei dem gedrehten Unknoten. Um das Kauffman-Klammer-Polynom nun invariant zu  $\Omega_1$  zu machen verwenden wir oben definiertes Kauffman's-Prinzip:

**Definition 2** Sei  $D$  eine reguläre Knotenprojektion. Dann ist die Tait-Zahl oder Verdrillungszahl  $w(D)$  definiert als die Differenz der Anzahl von Kreuzungen mit positivem Vorzeichen  $c_+(D)$  und negativem Vorzeichen  $c_-(D)$ , d.h.  $w(D) = c_+(D) - c_-(D)$



**Satz 2** Sei  $D$  eine orientierte reguläre Projektion eines orientierten Knotens  $K$ . Falls  $\langle D \rangle$  das Kauffman-Klammer-Polynom der „unorientierten“ Projektion  $D$  und  $w(D)$  die Tait Zahl (Verdrillungszahl) von  $D$  ist, dann ist

$$\hat{P}_D(A) = (-A^{-3})^{w(D)} \langle D \rangle \tag{2.7}$$

eine Invariante des orientierten Knotens  $K$ , geschrieben als  $\hat{P}_K(A)$ .

Beweis:

Sei  $D'$  eine reguläre Projektion eines Knotens  $K$ , dass durch die Anwendung einer einzelnen Reidemeisterbewegung vom Typ  $\Omega_1, \Omega_2$  oder  $\Omega_3$  bzw. ihrem Inversen aus einem Diagramm  $D$  hervorgeht. So bleibt zu zeigen, dass

$$\hat{P}_D(A) = \hat{P}_{D'}(A)$$

Betrachtet man zuerst nur  $\Omega_2$  und  $\Omega_3$ , so sind  $D$  und  $D'$  regulär äquivalent und somit gilt wegen Satz 1, dass

$$\langle D \rangle = \langle D' \rangle$$

Desweiteren gilt bei regulärer Äquivalenz  $w(D) = w(D')$ , was ich nicht vorrechnen möchte, was aber direkt aus der Anwendung von  $\Omega_2, \Omega_3$  auf Stränge verschiedener Orientierung folgt. Somit gilt:

$$\hat{P}_D(A) = \hat{P}_{D'}(A)$$

für diesen Fall. So bleibt nur noch der Fall von  $\Omega_1, \Omega_1^{-1}$  zu untersuchen. Noch einmal zur Erinnerung, eine solche Bewegung hat die Form:

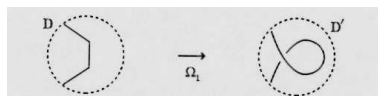


Abbildung 2.3: Reidemeisterbewegung vom Typ 1

Um die Auswirkung einer solchen Bewegung auf  $\langle D \rangle$ , also  $\langle D' \rangle$  zu berechnen, verwenden wir folgendes Flechtbaumdiagramm:

Damit ergibt sich:

$$\langle D' \rangle = A \langle D \rangle + A^{-1} \langle D \rangle (- (A^2 + A^{-2})) = -A^{-3} \langle D \rangle$$

Betrachtet man  $w(D')$ , so ergibt sich, dass  $w(D') = w(D) - 1$  da, egal wie man die Orientierung wählt, die neue Kreuzung das Zeichen  $-1$  erhält. So ergibt sich trivialerweise:

$$\hat{P}_{D'}(A) = (-A^{-3})^{w(D')} \langle D' \rangle = (-A^{-3})^{w(D)-1} - A^{-3} \langle D \rangle = (-A^{-3})^{w(D)} \langle D \rangle = \hat{P}_D(A)$$

□

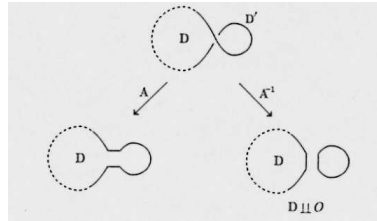


Abbildung 2.4: Flechtbaum-Diagramm einer Reidemeisterbewegung vom Typ 1

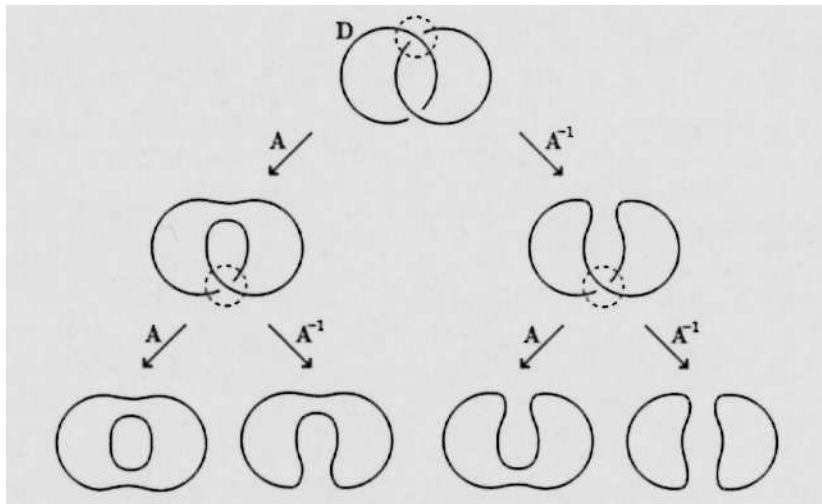


Abbildung 2.5: Flechtbaum-Diagramm der Hopf-Verschlingung

Als Übung und anschauliches Beispiel möchte ich sie nun bitten, das Kauffman-Polynom der einfachen Hopf-Verschlingung bestimmen:

Es gilt  $w(D) = 2$  und somit folgt:

$$\begin{aligned}
 P_D(A) &= A^2(-A^2 + A^{-2}) + 1 + 1 + A^{-2}(-A^2 + A^{-2}) = -A^4 - A^{-4} \\
 w(D) = 2 \Rightarrow \hat{P}_D(A) &= (-A^{-3})^2(-A^4 - A^{-4}) = -A^{-2} - A^{-10} \\
 \hat{P}_K(t^{-\frac{1}{4}}) &= -t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}} = V_D(t)
 \end{aligned}$$

Das Kauffman-Polynom steht in folgender Beziehung zum Jones-Polynom:

$$(-t^{\frac{3}{4}})^{w(D)} * \langle D \rangle \circ (t^{-\frac{1}{4}}) = \hat{P}_K(t^{-\frac{1}{4}}) = V_K(t) \tag{2.8}$$

So zeigt sich wiederum, dass sowohl das Kauffman-Polynom als auch das Kauffman-Klammer-Polynom Erweiterungen des Jones-Polynoms sind. Wir sollten jedoch nicht vergessen, dass es damit auch keine vollständigen Knoteninvarianten sind, da es viele unterschiedliche Knoten gibt, die das selbe Kauffman- und Kauffman-Klammer-Polynom haben.



# Kapitel 3

## Polynomiale (Flecht-) Invarianten

### 3.1 Wiederholung Jones-Polynom

Zur Wiederholung hier noch einmal die Definition des Jones-Polynom:

**Definition 3** Sei  $K$  ein orientierter Knoten (oder Verschlingung) und  $D$  eine reguläre Projektion von  $K$ . Dann wird das Jones-Polynom  $V_K(t)$  eindeutig durch die beiden folgenden Axiome bestimmt:

**Axiom 1:** Ist  $K$  der triviale Knoten, dann sei  $V_K(t) = 1$ .

**Axiom 2:** Seien  $D_+, D_-$  und  $D_0$  Flechtdiagramme, dann gilt die folgende Flechtrelation

$$\frac{1}{t}V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{D_0}(t) \tag{3.1}$$

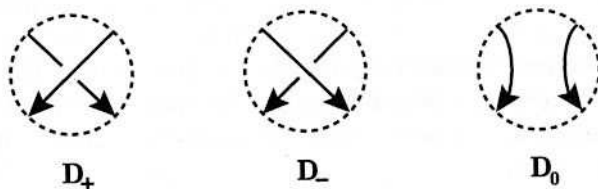


Abbildung 3.1: Flechtdiagramme

### 3.2 Alexander-Polynom

Wurde 1928 von J.W. Alexander entdeckt und war die erste bekannte Polynomiale Invariante von Knoten. Es ist ein symmetrisches Knotenpolynom, dass aus sogenannten „Seifert-Matrizen“ von Knoten gewonnen wird. Die Abhandlung über Seifert-Matrizen könnte ohne Probleme einen weiteren Vortrag füllen. Daher möchte ich hier nur eine Kurze Definition geben:

Eine Seifert Matrix  $M$  eines Knotens  $K$  ist eine  $[m \times m]$ -Matrix mit  $m = 2g(F) + \mu(K) - 1$  wobei  $g(f)$  das Geschlecht der Seifert-Fläche  $F$  des Knotens  $K$  und  $\mu(K)$  die Anzahl der Komponenten der Verschlingung  $K$  (ist  $K$  ein Knoten, so ist  $\mu(K) = 1$ ) bezeichnet. Diese Matrix enthält nur Einträge  $\in \{-1, 0, 1\}$ .

Das Alexander Polynom  $\Delta_K(t)$  berechnet sich nun als eine spezielle Form der Determinanten der symmetrischen Matrix  $(M + M^T)$  und zwar:

$$\Delta_K(t) = t^{-\frac{k}{2}} \det(M - tM^T)$$

Wobei  $k$  den Rang der Seifert Matrix von  $K$  bezeichnet.

Das Alexander-Polynom hat die Form:

$$\Delta_K(t) = a_{-n}t^{-n} + a_{-(n-1)}t^{-(n-1)} + \dots + a_{n-1}t^{n-1} + a_n t^n \text{ mit } a_{-n} = a_n, a_{-(n-1)} = a_{-(n-1)}, \dots, a_{-1} = a_1$$

Im Jahre 1969 entdeckte J.H. Conway eine einfache Methode das Alexander Polynom zu berechnen und zwar durch des Aufschneiden von Kreuzungen einer regulären Knotenprojektion eines Knotens, so wie wir es auch bei der Definition des Jones-Polynoms getan haben.

Seien  $K_+, K_-$  und  $K_0$  definiert wie für das Jones-Polynom. So gilt:

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z \nabla_{K_0}(z) \tag{3.2}$$

Wie zu erwarten besteht eine Beziehung zwischen dem Alexander- und dem Alexander-Conway-Polynom und zwar:

$$\Delta_K(t) = \nabla_K(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})$$

### 3.3 HOMFLY-Polynom: Knotenpolynom mit 2 Unbekannten

Vergleicht man nun (3.1) und (3.2)(Definition des Jones-Polynoms und des Alexander-Conway Polynomauf der Folie)

$$\begin{aligned} \nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) &= z \nabla_{K_0}(z) \\ \frac{1}{t}V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) &= (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})V_{D_0}(t) \end{aligned}$$

so erkennt man, dass sich die Koeffizienten nicht unbedingt auf  $t$  und  $\frac{1}{t}$  beschränken müssen. Es müsste möglich sein, eine beliebige Funktion von  $t$  zu verwenden. So könnte man in einem Polynom das Alexander- und das Jones-Polynom verbinden.

Dieses Polynom würde dann mehr „Information“ über einen Knoten enthalten als beide Polynome für sich und so mehr Knoten unterscheiden können.

Auf diesem Wege erhielt man das sogenannte HOMFLY-Polynom, benannt nach den Anfangsbuchstaben der Namen der Personen, die es alle ungefähr zur gleichen Zeit entdeckten, wobei sie in völlig verschiedenen Arbeitsgruppen forschten: Hoste, Ocneanu, Millet, Freyd, Lickorish und Yetter.

**Definition 4** Sei  $K$  ein orientierter Knoten (oder Verschlingung) und  $D$  eine reguläre Projektion von  $K$ . Dann definieren die folgenden zwei Axiome ein invariantes Polynom  $P_K(v, z)$  von  $K$  in zwei Unbekannten:

**Axiom 1:** Ist  $K$  der triviale Knoten  $O$  (Unknoten), so ist  $P_O(v, z) = 1$

**Axiom 2:** In Bezug auf die Flechtdiagramme  $D_+, D_-$  und  $D_0$ , gilt folgende Gleichung:

$$\frac{1}{v}P_{D_+}(v, z) - vP_{D_-}(v, z) = zP_{D_0}(v, z) \tag{3.3}$$

Wie leicht zu erkennen, ähnelt diese Beziehung sehr denen des Alexander- und des Jones-Polynoms. Ähnlich wie Matthias im letzten Vortrag gezeigt hat gelten die Sätze über das Homfly-Polynom von zusammenhängenden und unzusammenhängenden Summen von Knoten.

Man geht dabei sehr ähnlich vor wie beim Beweis für das Jones-Polynom, indem man in die Projektion eines Knotens durch eine Reidemeisterbewegung vom Typ  $\Omega_1$  ein zusätzliche Schlinge einfügt und diese dann als  $D_-$  bzw.  $D_+$  ansieht.

Nun drei Sätze, die bei der Berechnung des HOMFLY-Polynoms von zusammengesetzten Knoten sehr hilfreich sein können:

**Definition 5** Sei  $L_1 \# L_2$  eine beliebige **Zusammensetzung** (oder **zusammenhängende Summe**) zweier Verschlingungen.

**Definition 6** Sei  $L_1 \amalg L_2$  eine beliebige **unzusammenhängende Summe** zweier Verschlingungen.

**Satz 3** Sei  $K = L \amalg O$  die unzusammenhängende Summe einer Verschlingung  $L$  und des Unknoten  $O$ . Dann gilt:

$$P(K) = P(L \amalg O) = \left(\frac{1}{v} - v\right) \frac{1}{z} P(L) \tag{3.4}$$

Beweis:

Ähnlich wie in Abbildung 3.2 „ziehen“ wir eine Schlaufe aus der Verschlingung  $L$  und „verdrillen“ sie einmal linksherum und einmal rechtsherum. So ergeben sich zwei Projektionen des selben Knotens, jedoch einmal mit einer zusätzlichen „+1“-Kreuzung und einmal mit einer zusätzlichen „-1“-Kreuzung.

$$\Rightarrow P_L(v, z) = P_{D_+}(v, z) = P_{D_-}(v, z)$$

Trennen wir diese Kreuzung nun komplett auf, so ergibt sich:

$$\Rightarrow P_K(v, z) := P_{L \amalg O}(v, z) = P_{D_0}(v, z)$$

Nun gilt nach der Definition des Homfly-Polynoms:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} P_{D_+}(v, z) - v P_{D_-}(v, z) &= z P_{D_0}(v, z) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{v} P_L(v, z) - v P_L(v, z) &= z P_{L \amalg O}(v, z) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{z} \left(\frac{1}{v} - v\right) P_L(v, z) &= P_{L \amalg O}(v, z) \end{aligned}$$

□

**Satz 4** Sei  $K = L_1 \amalg L_2$  eine zusammengesetzte Verschlingung/Knoten. Dann gilt:

$$P(L_1 \amalg L_2) = \left(\frac{1}{v} - v\right) \frac{1}{z} P(L_1) P(L_2) \tag{3.5}$$

Beweis:

Ähnlich zu dem Beweis, der für das Jones-Polynom geführt wurde. Wird ausgelassen, da er recht rechenintensiv ist und keine weitere Erkenntnisse für das Verständnis bringt.

**Satz 5** Sei  $K = L_1 \# L_2$  eine zusammengesetzte Verschlingung/Knoten. Dann gilt:

$$P(K) = P(L_1 \# L_2) = P(L_1) P(L_2) \tag{3.6}$$

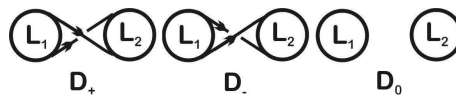


Abbildung 3.2: Ausgangsflechtbaumdiagramme von  $L_1 \# L_2$

Beweis:

Wie in Abbildung 3.2 „kippen“ wir die Projektion von  $L_2$  einmal nach vorne und einmal nach hinten. So erhalten wir  $D_+$  und  $D_-$ , was aber immer noch Projektionen von  $L_1 \# L_2$  sind.  $D_0$  ist damit die unzusammenhängende Summe der Knoten,  $L_1 \cup L_2$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{v} P_{D_+}(v, z) - v P_{D_-}(v, z) &= z P_{D_0}(v, z) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{v} P_{L_1 \# L_2}(v, z) - v P_{L_1 \# L_2}(v, z) &= z P_{L_1 \amalg L_2}(v, z) \end{aligned}$$

Nach dem vorhergehenden Satz gilt:

$$\begin{aligned} P(L_1 \amalg L_2) &= \left(\frac{1}{v} - v\right) \frac{1}{z} P(L_1) P(L_2) \\ \Rightarrow \frac{1}{v} P_{L_1 \# L_2}(v, z) - v P_{L_1 \# L_2}(v, z) &= z P_{L_1 \amalg L_2}(v, z) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{v} - v\right) P_{L_1 \# L_2}(v, z) &= z \left(\frac{1}{v} - v\right) \frac{1}{z} P(L_1) P(L_2) \\ \Leftrightarrow P_{L_1 \# L_2}(v, z) &= P(L_1) P(L_2) \end{aligned}$$

□

Da man das HOMFLY-Polynom auf dem Weg fand, ein möglichst allgemeines Knoten-Polynom zu definieren, besteht offensichtlich ein Zusammenhang zwischen dem HOMFLY- sowie dem Alexander- und Jones-Polynom, und zwar:

**Behauptung 1** Sei  $K$  ein orientierter Knoten (oder Verschlingung). Dann gilt:

$$(1) \quad V_K(t) = P_K(t, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})$$

$$(2) \quad \Delta_K(t) = P_K(1, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})$$

Diese Beziehung ist trivial einzusehen.

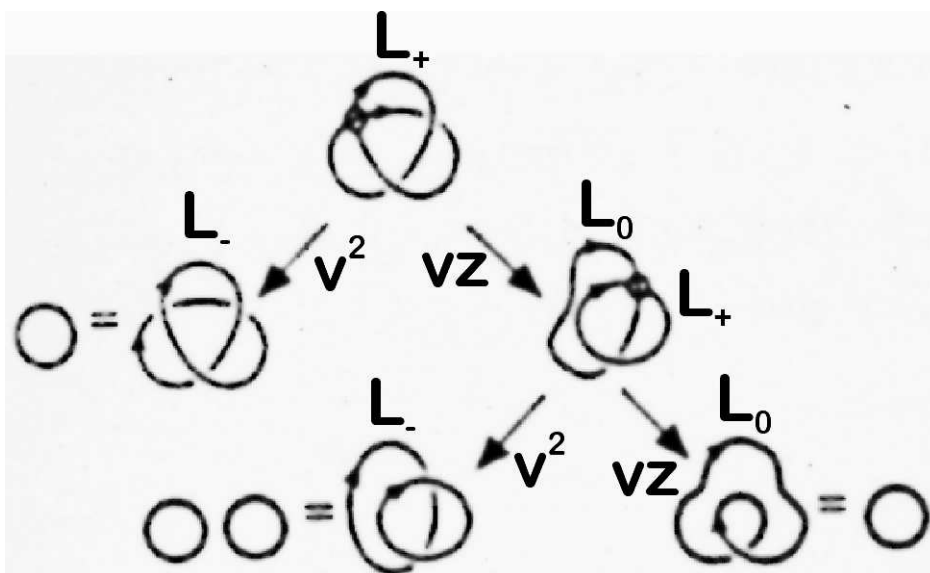


Abbildung 3.3: Flecht-Baum-Diagramm des Kleeblattknotens

**Beispiel 1** Man zeige, anhand eines Flecht-Baum-Diagramms, dass das HOMFLY-Polynom des Kleeblatt-Knotens  $P_K(v, z) = 2v^2 - v^4 + v^2z^2$  ist.

Beweis:

$$\begin{aligned} P_K(v, z) &= P_{L_+} \\ &= v^2 P_{L_-} + vz P_{L_0} \\ &= v^2 P_O + vz(v^2 P_{L_-} + vz P_{L_0}) \\ &= v^2 + vz(v^2 P_{O \cup O} + vz P_O) \\ &= v^2 + vz(v^2(\frac{1}{v} - v)\frac{1}{z} P_O + vz P_O) \\ &= v^2 + vzv^2\frac{1}{z}(\frac{1}{v} - v) + vzvz \\ &= 2v^2 - v^4 + v^2z^2 \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 2** Das Jones-Polynom des Kleeblatt-Knotens ist  $V_K(t) = t + t^3 - t^4$

Leider stellt das Homfly-Polynom, auch wenn es mehr Knoten unterscheiden kann als das Jones-Polynom, immer noch keine vollständige Knoteninvariante dar.

So haben folgende „Mutanten“ zwar das gleiche Homfly-Polynom, sind jedoch voneinander verschieden, was man auf anderem Wege, z.B. durch das bestimmen des hyperbolischen Volumens eines Knotens zeigen kann.

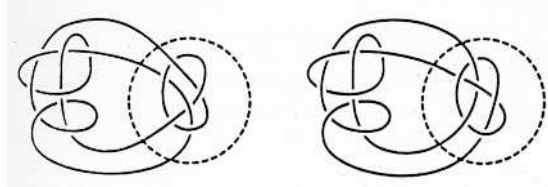


Abbildung 3.4: Verschiedene Knoten mit demselben Homfly-Polynom

Ein weiteres Beispiel dafür, dass es sich beim Homfly auch um keine vollständige Knoteninvariante, d.h. dass es sich nicht um eine Bidirektionale Beziehung handelt, folgt direkt aus der Gleichung:  $P(L_1 \# L_2) = P(L_1)P(L_2)$ . Das Polynom eines zusammengesetzten Knotens ist gleich dem Produkt der Polynom, aus denen er zusammengesetzt wurde, **egal wie sie zusammengesetzt wurden!**

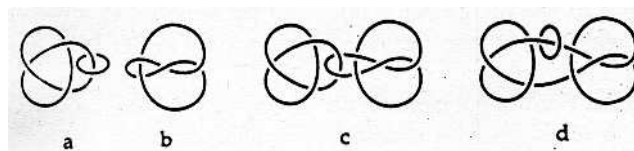


Abbildung 3.5: Verschiedene Verknüpfungen mit demselben Homfly-Polynom

Egal wie wir die Flecht-Polynome konstruieren, wird es immer einen Knoten geben, der nicht anhand seines Polynoms abgeleitet werden kann. Daher ist es unmöglich ein Flecht-Polynom zu finden, das eine vollständige Knoteninvariante darstellt.

## Kapitel 4

# Flecht-Polynome und klassische Knoteninvarianten

Ein Gebiet von besonderem Interesse innerhalb der Knotentheorie ist die Gruppe der alternierenden Knoten. Auch wenn sie von der Definition her sehr einfach erscheinen, wie Matthias im letzten Vortrag schon gezeigt hat, so gelten sie doch bis heute als nicht trivial. Es wurden verschiedene Behauptungen über sie aufgestellt und bewiesen. Drei Behauptungen, welche sich als sehr hartnäckig erwiesen, waren die drei sogenannten „**Tait'schen Vermutungen**“, welche von Tait im 19. Jahrhundert aufgestellt wurden. Ausgehend von diesen Vermutungen entwickelte sich die moderne Knotentheorie. Es dauerte bis ins späte 20. Jhd, bis zur Entdeckung der Flecht-Polynome wie dem Jones-Polynom, um diese zu beweisen. Wie ich zeigen werde, spielt das Jones-Polynom eine entscheidende Rolle beim Beweis dieser Vermutungen. Zuvor eine kurze Definition:

**Definition 7** Ein reduziertes alternierendes Diagramm ist ein reguläres alternierendes Diagramm eines Knotens, in dem die Anzahl der Kreuzungen nicht reduziert werden kann.

Eine schöne Eigenschaft eines regulären alternierenden reduzierten Diagramms zeigt sich bei der Bestimmung, ob ein Knoten Prim (d.h. nicht aus anderen Knoten zusammengesetzt) ist oder nicht:

**Satz 6** Sei  $D$  ein reduziertes, alternierendes Diagramm eines alternierenden Knotens  $K$ . Falls  $K$  kein Prim-Knoten ist, so existiert ein Kreis  $C$  in der Ebene, so dass  $D$  diesen Kreis in genau 2 Punkten schneidet. Der Kreis  $C$  unterteilt  $D$  in zwei nicht triviale  $(1,1)$ -„Gewirre“.

Beispiel:

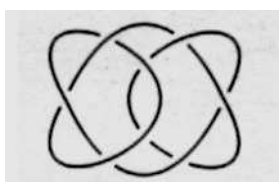


Abbildung 4.1: Ist dieser Knoten alternierend?

Beim weiteren Beweis der Vermutungen spielt das Grad des Jones-Polynoms eines Knotens  $K$  eine wichtige Rolle. Dazu führen wir folgende Definitionen ein:

**Definition 8** (1)  $\max \deg V_K(t)$  ist der größte,  $\min \deg V_K(t)$  der kleinste Exponent des Jones-Polynoms  
(2)  $c_+(D)$  sei die Anzahl der positiven,  $c_-(D)$  die Anzahl der negativen Kreuzungspunkte von  $D$ .  
(3)  $\sigma(K)$  sei die Signatur eines Knotens.

Die Signatur eines Knotens ist ähnlich wie die Verschlingungszahl eines Knotens eine Zahl die einem Knoten zugeordnet werden kann. Es handelt sich dabei jedoch um eine **Invariante von Knoten**, da sie direkt aus

der Seifert-Matrix eines Knotens folgt. Diese ist auch die Grundlage des Alexander-Polynoms. Daraus folgt, dass die Signatur eines Knotens direkt von seinem Alexander-Polynom abhängt. Da ich die Konstruktion dieses aus Zeitgründen weggelassen, werde ich dies für die Signatur auch tun. Für den Grad des Jones-Polynoms gilt nun folgender Satz, dessen Beweis den Hauptteil des Beweises der Tait'schen Vermutungen ausmacht, jedoch daher auch so umfangreich ist, dass wir ihn an dieser Stelle nicht durchführen können. Daher werde ich ihn nur angeben und später anwenden:

**Satz 7** Für ein beliebiges Diagramm  $D$  eines Knotens  $K$  gelten folgende Ungleichungen:

$$\min \deg V_K(t) \geq -c_-(D) - \frac{1}{2}\sigma(K) \tag{4.1}$$

$$\max \deg V_K(t) \leq c_+(D) - \frac{1}{2}\sigma(K) \tag{4.2}$$

Für  $\text{span} V_K(t) = \max \deg V_K(t) - \min \deg V_K(t)$  gilt:

$$\text{span} V_K(t) \leq c_+(D) + c_-(D) = c(D) \tag{4.3}$$

Ist  $K$  ein alternierender Knoten und  $D$  ein reguläres, reduziertes, alternierendes Diagramm von  $K$ , dann wird aus den obigen Ungleichungen Gleichungen und somit gilt:

$$\text{span} V_K(t) = c_+(D) + c_-(D) = c(D) \tag{4.4}$$

$$\max \deg V_K(t) + \min \deg V_K(t) = c_+(D) - c_-(D) - \sigma(K) = w(D) - \sigma(K) \tag{4.5}$$

Diesen Satz werde ich nun anwenden bei dem Beweis von Tait's erster und zweiter Vermutung.

**Tait's erste Vermutung**

**Satz 8** Ein reduziertes alternierendes Diagramm ist das minimale Diagramm seines alternierenden Knotens. Außerdem kann das minimale Diagramm eines alternierenden Prim-Knotens nur ein alternierendes Diagramm sein. Andersherum, ein nicht alternierendes Diagramm kann niemals das minimale Diagramm eines alternierenden Prim-Knotens sein.

Beweis:

Halten wir uns an reduzierte, alternierende Knotenprojektionen. Dann gelten die Gleichungen(4.4) und (4.5) immer und die Anzahl von Kreuzungen von  $D$ ,  $c(D) = c_+(D) + c_-(D)$  bleibt fest.

⇒  $\text{span} V_K(t)$  ist eine Invariante des Knotens  $K$ , die unabhängig vom Diagramm  $D$  ist.

⇒  $c(D)$  ist in diesem Fall ebenfalls eine Invariante des Knotens  $K$

Desweiteren folgt aus Gleichung (4.3), dass die Anzahl der Kreuzungspunkte von  $D$  nicht kleiner werden kann als der  $\text{span}$  von  $V_K(t)$ .

⇒  $D$  muss ein minimales Diagramm von  $K$  sein.

□

Nun kann (4.4) nie für eine nicht alternierende Projektion eines alternierenden Prim-Knotens gelten. Daher kann so einen nicht alternierende Projektion nie eine minimale Projektion sein.

Nun betrachten wir noch einmal die Tait-Zahl  $w(D)$ . Sie für sich genommen ist keine Knoteninvariante, wie wir wissen. Betrachten wir aber nun  $w(D)$  für eine reduzierte alternierende Projektion  $D$  eines Knotens  $K$ , so wird  $w(D)$  zu einer Knoteninvariante.

**Tait's zweite Vermutung**

**Satz 9** Seien  $D_1$  und  $D_2$  zwei reduzierte alternierende Projektionen eines alternierenden Knotens  $K$ , dann gilt  $w(D_1) = w(D_2)$ .

Beweis:

Betrachten wir (4.5), d.h.  $\max \deg V_K(t) + \min \deg V_K(t) = w(D) - \sigma(K)$ . Diese gilt, da wir uns auf reduzierte alternierende Projektionen beschränken. Nun sind Seifert-Matrizen und das Jones-Polynom Invarianten von Knoten.

⇒  $\max \deg V_K(t), \min \deg V_K(t)$  und  $\sigma(K)$  sind Invarianten des Knotens  $K$  unabhängig von  $D$ .

⇒  $w(D) = \max \deg V_K(t) + \min \deg V_K(t) + \sigma(K)$  ist eine Knoteninvariante.

□

Aus diesem Satz können wir eine sehr schöne Anwendung folgern:

Sei  $D$  ein reduziertes alternierendes Diagramm eines alternierenden Knotens  $K$ . Dann können wir sehr leicht  $D^*$  erzeugen, die reduzierte alternierende Projektion des Spiegelbildes  $K^*$  von  $K$ , in dem wir an jedem Kreuzungspunkt die Über- in Unterkreuzungen umändern und umgekehrt. Durch dieses Umändern verändert sich das Zeichen an jeder Kreuzung in sein Gegenteil, d.h.  $-1$  in  $+1$  und umgekehrt.

$$\Rightarrow w(D^*) = -w(D)$$

Ist  $K$  amphichiral, dann gilt da  $K \cong K^*$ :  $D \cong D^*$ . Daher muss gelten  $w(D) = w(D^*) = -w(D)$  gelten.

$$\Rightarrow w(D) = 0$$

$\Rightarrow |c(D)| = 2 * n$ , d.h. die Anzahl der Kreuzungen von  $D$  ist gerade

Daraus ergibt sich folgender Satz:

**Satz 10** Ein alternierender Knoten, dessen minimale Nummer von Kreuzungen ungerade ist, kann nie amphichiral sein.

Für beliebige, nicht alternierende Knoten wurde nicht bewiesen, ob dieser Satz gilt. Bisher wurde jedoch noch kein amphichiraler, nicht alternierender Knoten gefunden, dessen minimale Anzahl an Kreuzungen gerade ist.

Bevor ich nun zu Taits dritter Vermutung komme, muss ich eine kurze Definition angeben:

**Definition 9** Man lege einen Kreis um ein  $(2,2)$ -Gewirr, so dass dieser Kreis in genau 4 Punkten geschnitten wird. Man bezeichne diese Punkte mit  $a, b, c, d$  und fixiere sie. Dreht man das Gewirr nun um  $180^\circ$  nach vorn oder hinten, so bezeichnet man diese Bewegung als „Flype“

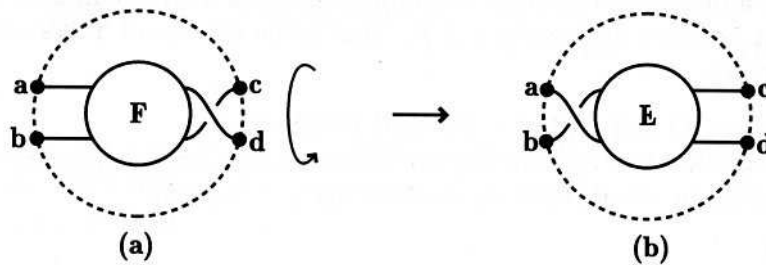


Abbildung 4.2: Flype oder Conway-Flype

**Tait's dritte Vermutung**

Seien  $D_1$  und  $D_2$  zwei reduzierte alternierende Diagramme eines alternierenden Knotens  $K$ . Dann können wir  $D_1$  in  $D_2$  überführen durch die Ausführung von endlich vielen „Flypes“

Diese Vermutung wurde erst kürzlich bewiesen, genauer im Jahre 1993. Wer sich für einen Beweis dieser Vermutung interessiert, den muss ich hier auf „W.Menasco und M.Thistlethwaite: The classification of alternating links, in Ann. of Mathematics 138 (1993), S.113-171“ verweisen.