Seminar: „Knotentheorie“, 8. Sitzung:

Berechnungen der Fundamentalgruppe

Philipp Landgraf

6. Dezember 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Retrakte und Deformationen

1.1 Retrakte

Definition 1.1. Ein **Retrakt** von einem topologischen Raum X auf einen Unterraum Y ist eine stetige Abbildung $\rho : X \to Y$ mit $\rho(y) = y$ für alle $y \in Y$. Ein Raum Y heißt **Retrakt von** X, wenn es einen Retrakt $\rho : X \to Y$ gibt.

Beispiel 1.2. Sei $Q := I \times I \subset \mathbb{R}^2$ das Einheits-Quadrat. Bezeichne $K := I \times \{0\}$ die Kante mit $y = 0$. Dann wird durch $\rho(x, y) = (x, 0)$ ein Retrakt von Q auf K definiert.

Schränkt man diese Funktion auf den Rand $\dot{Q} = \{(x, y)|xy(x-1)(y-1) = 0\}$ ein, so erhält man einen Retrakt vom Rand auf eine Kante.

Außerdem ist der Punkt $(0, 0)$ ein Retrakt des Quadrates, des Randes sowie der Kante durch die Funktion $\rho(x, y) = (0, 0)$.

Mit der konstanten Abbildung $\rho : X \to p$ folgt also die

Notiz 1.3. *Jeder Punkt ist ein Retrakt des ihn enthaltenden Raumes.*

Lemma 1.4. *Sei X wegzusammenhängend und $\rho : X \to Y$ ein Retrakt. Dann ist für jeden Basispunkt $x \in X$ der induzierte Homomorphismus*

$$\rho_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \rho(x))$$

surjektiv.

Beweis. O.B.d.A reicht es, die Behauptung für einen Basispunkt $p \in Y$ zu zeigen, da X wegzusammenhängend ist.

Sei $i : Y \to X$ die Inklusion, dann betrachtet man

$$\pi(Y, p) \xrightarrow{i_*} \pi(X, p) \xrightarrow{\rho_*} \pi(Y, p).$$

Weil ρ Retrakt ist, ist die Komposition ρi die Identität, also ist auch $(\rho i)_* = \rho_* i_*$ die Identität. Dann aber muss ρ_* surjektiv sein. □

Notiz 1.5. *Es gibt keinen Retrakt von D^2 nach S^1.*

Beweis. Die Fundamentalgruppe von D^2 ist trivial, da es eine konvexer Raum ist, und $\pi(S^1) = \mathbb{Z}$. Es kann keine surjektive Abbildung von einer Gruppe mit einem Element auf eine Gruppe unendlicher Ordnung geben. □

1.2 Deformationen

Definition 1.6. Eine **Deformation** eines topologischen Raumes ist eine Homotopie $h : X \times [0, 1] \to X$, so dass $h_0 = \mathrm{id}_X$. Eine **Deformation eines Raumes X in (oder auf)** einen Teilraum $Y \subset X$ ist eine Deformation mit $h_1(X) \subset Y$ (oder $h_1(X) = Y$).

Ein Raum X heißt deformierbar in, bzw. auf einen Teilraum Y, wenn eine entsprechende Deformation existiert.

Beispiel 1.7. Sei die Scheibe in Polarkoordinaten definiert durch

$$D = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Dann ist

$$h_s(r, \theta) = (r(1 - s), \theta) \text{ für } \begin{cases} 0 \leq r, s \leq 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

eine Deformation der Scheibe auf ihren Mittelpunkt.

Ähnlich kann dann im $\mathbb{R}^3$ der Volltorus auf einen Kreis deformiert werden.

Beispiel 1.8. Bezeichne p den Mittelpunkt der Scheibe D. Dann kann $D - p$ deformiert werden auf $\dot{D}$ durch

$$h_s(r, \theta) = (r(1 - s) + s, \theta) \text{ für } \begin{cases} 0 < r \leq 1 \\ 0 \leq s \leq 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

Beispiel 1.9. Es gibt eine Deformation der Scheibe auf ihren Rand. Sei dazu die Scheibe die Menge aller Punkte (r, ϕ) mit $0 \leq r \leq \sin \phi$ in Polarkoordinaten. Dann ist der Rand der Scheibe beschrieben durch $r = \sin \phi$. Dann ist

$$h_s(r, \phi) = \begin{cases} (r(1-2s), \phi) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ (\sin \pi r(2s-1), \pi r(2s-1)) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

die gesuchte Deformation. Nach Notiz 1.5 aber gibt es keinen Retrakt von der Scheibe auf ihren Rand.

Es gibt also topologische Räume X, die auf einen Teilraum Y deformiert werden können, der kein Retrakt von X ist. Natürlich stellt sich die Frage, ob es andersherum auch Retrakte gibt, die keine Deformation sind. Dazu zunächst das folgende

Lemma 1.10. *Sei $h(x, t)$ eine Deformation von X. Sei p ein beliebiger Basispunkt in X. Dann ist der von h_1 induzierte Homomorphismus*

$$(h_1)_* : \pi(X, p) \to \pi(X, h_1(p))$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Es werde ein Weg $a : I \to X$ durch $a(t) = h_t(p)$ definiert. Dann ist a ein Weg von p nach $q := h_1(p)$ und es sei $[a] =: \alpha$.

Es wird gezeigt werden, dass dann für ein $\beta \in \pi(X, p)$ gilt

$$(h_1)_*(\beta) = \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha$$

Damit folgt dann die Aussage, denn diese Abbildung ist schon beim Beweis der Unabhängigkeit vom Basispunkt als Isomorphismus nachgewiesen worden.[1]

Sei also $\beta \in \pi(X, p)$. Sei b ein Repräsentant von β. Definieren nun einige Homotopien[2]:

- Eine Homotopie von b nach $h_1 b$ ist gegeben durch

$$k_2(t) = h_s(b(t))$$

- Eine Homotopie von a^{-1} zum konstanten Weg in q wird definiert durch

$$j_s(t) = \begin{cases} a(1-(t-s)) & ,0 \leq s \leq t \leq 1 \\ q & ,0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

- Und schließlich eine Homotopie von a zum konstanten Weg in q:

$$l_s(t) = \begin{cases} a(s+t) & ,s+t \leq 1 \quad ,0 \leq s, t \leq 1 \\ q & ,s+t \geq 1 \quad ,0 \leq s, t \leq 1 \end{cases}$$

[1] Crowell & Fox, p.21, (3.1)

[2] Es handelt sich nur um Homotopien, nicht um Homotopien von Wegen, da keine festen Anfangs- und Endpunkte existieren.

Diese Homotopien passen zusammen, und das Produkt $\{j_s \cdot k_s \cdot l_s\}$ ist nun wirklich eine Homotopie von Wegen, daher gilt dann

$$a^{-1} \cdot b \cdot a \simeq c \cdot h_1 b \cdot c,$$

wobei c den konstanten Weg in q bezeichnet. Daraus folgt die Aussage, denn

$$\alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha = [a^{-1} \cdot b \cdot a] = [h_1 b] = (h_1)_* \beta.$$

□

Definition 1.11. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y \subset X$ heißt **durch eine Deformation realisierbar**, wenn es eine Deformation $\{h_s\}$ von X gibt, so dass $h_1 = if$, wobei $i : Y \to X$ die Inklusion bezeichnet.

Lemma 1.12. *Falls eine Abbildung $f : X \to Y$ durch eine Deformation realisierbar ist, dann ist für jeden Basispunkt $p \in X$ der induzierte Homomorphismus $f_* : \pi(X, p) \to \pi(Y, f(p))$ injektiv.*

Beweis. Mit Bezeichnungen wie oben gilt $h_1 = if$, also $(h_1)_* = i_* f_*$. Da $(h_1)_*$ nach Lemma 1.10 injektiv ist, muss auch f_* injektiv sein. □

Ein Raum X ist nun offenbar genau dann deformierbar in einen Teilraum Y, wenn es eine Abbildung $f : X \to Y$ gibt, die durch eine Deformation realisierbar ist.

Damit nun lassen sich Beispiele für Teilräume finden, die Retrakte sind, für die es aber keine Deformation von X auf Y gibt.

Beispiel 1.13. Eine Kante K ist Retrakt von $\dot{Q}$ (vgl. Beispiel 1.2), aber $\dot{Q}$ kann nicht zu K deformiert werden, da $\pi(K)$ trivial ist und $\pi(\dot{Q}) \cong \mathbb{Z}$. Es kann also keine injektive Abbildung von $\pi(\dot{Q})$ nach $\pi(K)$ geben.

1.3 Deformationsretrakte

Definition 1.14. Ein Teilraum $Y \subset X$ heißt **Deformationsretrakt** von X, wenn es einen Retrakt $\rho : X \to Y$ gibt, der durch eine Deformation realisierbar ist.

Beispiel 1.15. In der Deformation der Scheibe auf ihren Mittelpunkt aus Beispiel 1.7 ist die Abbildung h_1 ein Retrakt, also ist der Mittelpunkt Deformationsretrakt der Scheibe und der Kreis Deformationsretrakt des Volltorus.

Ebenso ist h_1 aus Beispiel 1.8 ein Retrakt, also der Rand der Scheibe Deformationsretrakt von $D - p$.

Satz 1.16. *Sei X wegweise zusammenhängender topologischer Raum, sei $Y \subset X$ mit Inklusionsabbildung $i : Y \to X$. Es sei $\rho : X \to Y$ ein Retrakt, der durch eine Deformation realisierbar ist. Dann sind für alle Punkte $x \in X$ und $y \in Y$ die induzierten Homomorphismen*

$$\begin{aligned} \rho_* &: \pi(X, x) \to \pi(Y, \rho(x)) \\ i_* &: \pi(Y, y) \to \pi(X, y) \end{aligned}$$

Isomorphismen.

Beweis. Für ρ_* folgt die Aussage aus Lemma 1.12 und Lemma 1.4. Um die Aussage für i_* zu zeigen, betrachte

$$\pi(X,y) \xrightarrow{\rho_*} \pi(Y,y) \xrightarrow{i_*} \pi(X,y).$$

Es gibt eine Deformation $\{h_s\}$, so dass $h_1 = i\rho$ und nach Lemma 1.10 ist $(h_1)_* = i_*\rho_*$ ein Isomorphismus. Da aber auch ρ_* ein Isomorphismus ist, muss auch i_* ein solcher sein. □

Satz 1.17. *Wenn X in $Y \subset X$ deformierbar ist und es einen Retrakt $\rho : X \to Y$ gibt, dann ist Y Deformationsretrakt von X und ρ kann durch eine Deformation realisiert werden.*

Beweis. Sei $\{h_s\}$ eine Deformation von X in Y. Für jeden Punkt $p \in X$ definiert man

$$k_s(p) := \begin{cases} h_{2s}(p), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \rho h_{2-2s}(p), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Dann ist $k_0 = h_0 = \mathrm{Id}$. Der Retrakt ρ wird durch die Deformation realisiert, weil $k_1(p) = \rho h_0(p) = \rho(p) = (i\rho)(p)$. □

2 Homotopie-Typ

Definition 2.1. Stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen **homotop** ($f \simeq g$), wenn es eine Homotopie $h : X \times I \to Y$ gibt, mit $h_0 = f$ und $h_1 = g$.

Lemma 2.2. *Die Relation „homotop“ ist eine Äquivalenzrelation.*

Definition 2.3. Die topologischen Räume zusammen mit den Homotopieklassen stetiger Abbildungen bilden die Kategorie **h-TOP**.

Definition 2.4. Topologische Räume X und Y sind vom selben **Homotopie-Typ**, wenn sie in der Kategorie h-TOP isomorph sind, d.h. wenn es stetige Abbildungen $f : X \to Y, g : Y \to X$ gibt, so dass $gf \simeq \mathrm{Id}_X$ und $fg \simeq \mathrm{Id}_Y$.

f und g heißen dann **zueinander inverse Homotopieäquivalenzen**.

Satz 2.5. *Wenn X und Y wegweise zusammenhängend und vom selben Homotopie-Typ sind, dann ist $\pi(X)$ isomorph zu $\pi(Y)$.*

Beweis. **Prinzip des Beweises:** Seien $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ zueinander inverse Homotopie-Äquivalenzen. Es reicht zu zeigen, dass der Funktor $\pi_1 : \mathrm{TOP} \to \mathrm{GRP}$ homotope Abbildungen auf denselben Homomorphismus abbildet, dass also aus $f \simeq g$ folgt $\pi_1(f) = \pi_1(g)$, denn nach Voraussetzung ist $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$.

Es wäre also $\pi_1(f) \circ \pi_1(g) = \pi_1(f \circ g) = \pi_1(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\pi_1(X)}$. Damit wäre $\pi_1(f)$ injektiv. Analog wäre $\pi_1(g) \circ \pi_1(f) = \mathrm{Id}_Y$, also $\pi_1(f)$ surjektiv, damit also $\pi_1(f) : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ ein Isomorphismus.

Seien also $f, g : X \to Y$ homotop. Betrachtet man die Inklusionen

$$i_k : X \to X \times I, \quad x \mapsto (x, k), \quad k = 0, 1$$

reicht es sogar zu zeigen, dass $\pi_1(i_0) = \pi_1(i_1)$, denn bezeichne $h : X \times I \to Y$ eine Homotopie von f nach g, dann ist $h \circ i_0 = f$ und $h \circ i_1 = g$, falls also $\pi_1(i_0) = \pi_1(i_1)$ gilt, so gilt

$$\pi_1(f) = \pi_1(h \circ i_0) = \pi_1(h) \circ \pi_1(i_0) = \pi_1(h) \circ \pi_1(i_1) = \pi_1(h \circ i_1) = \pi_1(g)$$

und die Aussage wäre gezeigt.

Das Problem ist nun, dass diese gesuchte Gleichheit für den Funktor π_1 nicht gilt, da die Fundamentalgruppe vom Basispunkt abhängig ist. Sei also $x_0 \in X$ der Basispunkt und $i_k, k = 0, 1$ wie oben.

Sei $a : I \to X \times I, t \mapsto (x_0, t)$ und bezeichne φ den zugehörigen Basispunktwechsel-Isomorphismus, d.h.

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \pi_1(X \times I, (x_0, 1)) & \to & \pi_1(X \times I, (x_0, 0)) \\ & \beta & \mapsto & [a]^{-1}\beta[a] \end{array}$$

Dann gilt für die induzierten Abbildungen immerhin noch $\pi_1(i_0) = \varphi \circ \pi_1(i_1)$, sie sind also gleich bis auf Isomorphie.

Nachweis. Es sei $c : I \to X$ Schleife um x_0. Dann ist

$$\pi_1(i_0)[c] = [i_0(c)] = [t \mapsto (c(t), 0)].$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \varphi \circ \pi_1(i_1)[c] &= \varphi([i_1(c)]) = [a]^{-1}[i_1(c)][a] \\ &= [t \mapsto (x_0, 1-t)][t \mapsto (c(t), 1)][t \mapsto (x_0, t)]. \end{aligned}$$

Eine Homotopie, die die Gleichheit dieser Homotopieklassen zeigt, ist

$$h_s(t) = \begin{cases} (x_0, ts) & , t \in [0, 1] \\ (c(t-1), s) & , t \in [1, 2] \\ (x_0, s(1-(t-2))) & , t \in [2, 3] \end{cases}$$

□

Damit ist nun also

$$\pi_1(f) = \pi_1(h \circ i_0) = \pi_1(h) \circ \pi_1(i_0) = \pi_1(h) \circ \varphi \circ \pi_1(i_1)$$

Sei $d : I \to Y, t \mapsto h(x_0, t)$ ein Weg in Y (von $f(x_0)$ nach $g(x_0)$) und ψ wieder der zugehörige Basispunktwechsel-Isomorphismus:

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \pi_1(Y, g(x_0)) & \to & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ & \beta & \mapsto & [d]^{-1}\beta[d] \end{array}$$

Dann gilt $\pi_1(h) \circ \varphi \circ \pi_1(i_1) = \psi \circ \pi_1(g) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, denn sei $c : I \to X$ eine Schleife um x_0, dann ist

$$\begin{aligned} (\pi_1(h) \circ \varphi \circ \pi_1(i_1))\,[c] &= (\pi_1(h) \circ \varphi)[i_1(c)] \\ &= \pi_1(h)\,([t \mapsto (x_0, 1-t)][t \mapsto (c(t), 1)][t \mapsto (x_0, t)]) \\ &= [t \mapsto h(x_0, 1-t)][t \mapsto g(c(t))][t \mapsto h(x_0, t)] \\ &= \psi[t \mapsto g(c(t))] = \psi \circ \pi_1(g)[c] \end{aligned}$$

Zusammen gilt also

$$\pi_1(f) = \psi \circ \pi_1(g)$$

wobei ψ ein Isomorphismus ist.

Dies reicht glücklicherweise immer noch aus, um die Aussage zu beweisen, denn wenn f und g wieder zueinander inverse Homotopie-Äquivalenzen sind, dann ist also $\pi_1(g) \circ \pi_1(f) = \psi \circ \mathrm{Id}_X$ und weil ψ ein Isomorphismus ist, ist $\pi_1(f)$ immer noch injektiv. Surjektivität zeigt sich ganz analog. $\square$

Lemma 2.6. *Sei $Y \subset X$ Deformationsretrakt von X. Dann sind Y und X vom selben Homotopie-Typ.*

Beweis. Sei $\rho : X \to Y$ die Retraktionsabbildung und $i : Y \to X$ die Inklusion. Dann gilt $\rho \circ i = \mathrm{Id}_Y$, weil ρ Retrakt ist. Andererseits gilt aber auch $i \circ \rho = h_1 \simeq \mathrm{Id}_X$, weil es eine Deformation $\{h_s\}$ von X nach Y gibt. Also sind ρ und i zueinander inverse Homotopieäquivalenzen. $\square$

Beispiel 2.7. Ein Punkt einer konvexen Menge C ist Deformationsretrakt von C, dass heißt, dass jede konvexe Menge vom Homotopie-Typ eines Punktes ist.

Insbesondere sind die Scheibe und ihr Mittelpunkt vom selben Homotopie-Typ, woraus folgt, dass auch Volltorus und Kreis denselben Homotopie-Typ darstellen. Dies gilt ebenfalls für den Torus und den Volltorus ohne den „zentralen Kreis“.

3 Beispiele

Bislang kennen wir also die Fundamentalgruppe von Räumen der Homotopie-Typen Punkt, Kreis, Sphäre und Einpunkt-Vereinigung zweier Kreise.

3.1 Die n-blättrige Rose

Definition 3.1. Die **n-blättrige Rose** $C_{(n)}$ ist die Vereinigung von n Kreisen $X_1, \ldots, X_n$ in einem Punkt p.

Satz 3.2. *Die Fundamentalgruppe von $C_{(n)}$ ist die freie Gruppe vom Rang n.*

Beweis. Induktion nach n. $C_{(1)}$ ist ein Kreis, dessen Fundamentalgruppe schon als freie Gruppe vom Rang 1 nachgewiesen wurde. Also betrachtet man

$$\begin{aligned} C_{(n+1)} &= C_{(n)} \cup X_{n+1} \\ \{p\} &= C_{(n)} \cap X_{n+1}. \end{aligned}$$

Bis darauf, dass diese Mengen keine offenen Teilmengen von $C_{(n+1)}$, könnte man hierauf Van-Kampen anwenden und wäre fertig.

Sei N eine offene Umgebung von p in $C_{(n+1)}$, bestehend aus p und $2(n+1)$ disjunkten, offenen Bögen, die allesamt p als einen ihrer Endpunkte haben. Dann ist $C_{(n)}$ ein Deformationsretrakt von $C_{(n)} \cup N$, X_{n+1} einer von $X_{n+1} \cup N$ und $\{p\}$ einer von $\{p\} \cup N$. Diese sind offene Teilmengen von $C_{(n+1)}$ und man kann Van-Kampen anwenden. $\square$

3.2 Die Sphäre mit $n \geq 1$ Löchern

Indem man eines der Löcher genügend aufweitet und dann alles auf die Ebene projeziert, sieht man, dass die Sphäre mit $n \geq 1$ Löchern vom selben Homotopie-Typ ist wie die Scheibe mit $n-1$ Löchern. Wenn $n > 1$ ist, enthält diese eine $n-1$-blättrige Rose als Deformationsretrakt, daher ist die Fundamentalgruppe der Sphäre mit n Löchern isomorph zur freien Gruppe vom Rang $n-1$.

4 Van Kampen und Gruppen-Präsentationen

Nun soll noch eine Formulierung des Satzes von van Kampen mit präsentierten Gruppen gegeben werden. Sei dazu wie früher $X = X_1 \cup X_2$ die Vereinigung zweier offener Teilmengen, so dass X_1, X_2 und $X_0 = X_1 \cap X_2$ alle wegweise zusammenhängend und nichtleer sind. Sei $p \in X_0$ und $G = \pi(X,p)$ und $G_i = \pi(X_i, p)$. Weiterhin gebe es Präsentationen der Gruppen

$$\begin{aligned} G_1 &= |X : R|_{\phi_1} \\ G_2 &= |Y : S|_{\phi_2} \\ G_0 &= |Z : T|_{\phi_0}. \end{aligned}$$

Die von den Inklusionen induzierten Homomorphismen bilden ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & G_0 \arrow[dl, "\theta_1"'] \arrow[dr, "\theta_2"] \arrow[dd, "\omega_0"'] & \\ G_1 \arrow[dr, "\omega_1"'] & & G_2 \arrow[dl, "\omega_2"] \\ & G & \end{tikzcd} \qquad \omega_0 = \omega_1\theta_1 = \omega_2\theta_2$$

Es bezeichnen nun weiterhin $F_1 = F[X], F_2 = F[Y], F_0 = F[Z]$ und $F = F[X \cup Y]$. Dann sind $F_1, F_2 \subset F$ Untergruppen. Nun existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\phi : F \to G$, so dass $\phi_{|F_i} = \omega_i \phi_i$ für $i = 1, 2$, weil F freie Gruppe ist und ϕ auf den Erzeugern gegeben ist. Für ϕ gilt dann offenbar $\phi(R) = \phi(S) = 1$.

Für $z \in Z$ findet man ein Urbild von $\theta_i \phi_0 z$ in F_i unter ϕ_i, da ϕ_i surjektiv ist, $i = 1, 2$. Diese Mengenabbildungen können also, da F_0 frei ist, zu Homomorphismen $\overline{\theta_i}$ fortgesetzt werden, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[d, "\phi_1"] & F_0 \arrow[l, "\overline{\theta_1}"'] \arrow[r, "\overline{\theta_2}"] \arrow[d, "\phi_0"] & F_2 \arrow[d, "\phi_2"] \\ G_1 & G_0 \arrow[l, "\theta_1"'] \arrow[r, "\theta_2"] & G_2 \end{tikzcd}$$

Sei nun $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$. Betrachte die Menge $\{\overline{\theta_1} z_k \overline{\theta_2} z_k^{-1}\}_{k=1,2,\dots} \subset F$. Da

$$\begin{aligned}
\phi(\overline{\theta_1} z_k \overline{\theta_2} z_k^{-1}) &= \phi(\overline{\theta_1} z_k)\phi(\overline{\theta_2} z_k^{-1}) \\
&= \omega_1\phi_1(\overline{\theta_1} z_k)\omega_2\phi_2(\overline{\theta_2} z_k^{-1}) \\
&= \omega_1\theta_1(\phi_0 z_k)\omega_2\theta_2(\phi_0 z_k^{-1}) \\
&= \omega_0(\phi_0 z_k)\omega_0(\phi_0 z_k^{-1}) \\
&= \omega_0(\phi_0 z_k \phi_0 z_k^{-1}) = 1,
\end{aligned}$$

ist $N(R \cup S \cup \{\overline{\theta_1} z_k \overline{\theta_2} z_k^{-1}\}) \subset \ker(\phi)$.

Hiervon gilt sogar die Umkehrung $\ker(\phi) \subset N(R \cup S \cup \{\overline{\theta_1} z_k \overline{\theta_2} z_k^{-1}\})$, was im folgenden gezeigt werden soll.

Sei dazu H eine Gruppe und $\psi : F \to H$ ein Homomorphismus, der $\psi(R \cup S \cup \{\overline{\theta_1} z_k \overline{\theta_2} z_k^{-1}\}) = 1$ erfüllt. Dann existieren Homomorphismen $\psi_i : G_i \to H, i = 1, 2$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
F_i \arrow[r, "\psi|_{F_i}"] \arrow[d, "\phi_i"'] & H \\
G_i \arrow[ur, "\psi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Da außerdem $\psi\overline{\theta_1} z_k = \psi\overline{\theta_2} z_k$ gilt, weil $\psi(\overline{\theta_1} z_k \overline{\theta_2} z_k^{-1}) = 1$ ist, ist

$$\psi_1\theta_1\phi_0 z_k = \psi_1\phi_1\overline{\theta_1} z_k = \psi\overline{\theta_1} z_k = \psi\overline{\theta_2} z_k = \psi_2\phi_2\overline{\theta_2} z_k = \psi_2\theta_2\phi_0 z_k,$$

was man schön in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[d, "\phi_1"] \arrow[ddr, bend right=60, "\psi"'] & F_0 \arrow[l, "\overline{\theta_1}"'] \arrow[r, "\overline{\theta_2}"] \arrow[d, "\phi_0"'] & F_2 \arrow[d, "\phi_2"'] \arrow[ddl, bend left=60, "\psi"] \\
G_1 \arrow[dr, "\psi_1"'] & G_0 \arrow[l, "\theta_1"'] \arrow[r, "\theta_2"] & G_2 \arrow[dl, "\psi_2"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

verfolgen kann, und damit $\psi_0 = \psi_1\theta_1 = \psi_2\theta_2$ wohldefiniert, da die $\phi_0 z_k$ G_0 erzeugen.

Damit ist man in einer Situation, in der man van Kampen anwenden kann,

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "\theta_2"] \arrow[d, "\theta_1"] & G_2 \arrow[d, "\omega_2"] \arrow[ddr, bend left, "\psi_2"] & \\
G_1 \arrow[r, "\omega_1"] \arrow[drr, bend right, "\psi_1"'] & G \arrow[dr, dotted, "\lambda"] & \\
& & H
\end{tikzcd} \qquad \psi_1\theta_1 = \psi_2\theta_2$$

es existiert also ein eindeutiger Homomorphismus $\lambda : G \to H$, so dass $\psi_i = \lambda\omega_i, i = 1, 2$. Sei nun $u_i \in F_i, i = 1, 2$ ein beliebiges Element. Dann gilt

$$\psi u_i = \psi_i\phi_i u_i = \lambda\omega_i\phi_i u_i = \lambda\phi u_i$$

und also

$$\psi = \lambda\phi.$$

Damit ist $\ker(\phi) \subset \ker(\psi)$. Damit gilt also der

Satz 4.1. *Unter den Voraussetzungen dieses Kapitels gilt*

$$G = |X, Y : R, S, \{\overline{\theta_1} z_k \overline{\theta_2} z_k^{-1}\}|_\phi.$$

Beispiel 4.2 (Fundamentalgruppe des Torus T^2). Sei der Torus $T^2 =: X$ zerlegt in X_1 und X_2, so dass X_1 der Torus mit einem Loch ist und X_2 eine offene Scheibe. Der Schnitt $X_0 = X_1 \cap X_2$ ist dann ein offener Ring. Man kann nun sehen[3], dass X_1 vom selben Homotopie-Typ ist wie eine 2-blättrige Rose, d.h. $\pi(X_1)$ ist die freie Gruppe vom Rang 2. X_2 ist vom Homotopie-Typ eines Punktes, hat also eine triviale Fundamentalgruppe. X_0 enthält einen Kreis als Deformationsretrakt, also ist $\pi(X_0) \cong \mathbb{Z}$.

In Termen von präsentierten Gruppen gilt also

$$\begin{aligned} G_0 &= (t :) \\ G_1 &= (x, y :) \\ G_2 &= (:) \end{aligned}$$

und man kann van Kampen anwenden. Dieser sagt nun, dass

$$G = (x, y : \overline{\theta_1} t \overline{\theta_2} t^{-1})$$

ist. In diesem Fall sind die Präsentationshomomorphismen alles Isomorphismen, es gilt (mit Bezeichnungen wie oben) $\overline{\theta_i} = \theta_i$ (bis auf Isomorphie). θ_i waren die von den Inklusionen induzierten Abbildungen. Da G_2 trivial ist, kann θ_2 nur die triviale Abbildung sein. Man muss sich also ansehen, was mit dem Erzeuger von G_0 unter θ_1 passiert. Dieser wird gerade auf $xyx^{-1}y^{-1}$ abgebildet. Für die Fundamentalgruppe des Torus gilt also

$$\pi(T^2) = (x, y : xyx^{-1}y^{-1}).$$

Dies ist die freie abelsche Gruppe vom Rang 2.

[3] Dies sieht man, indem man das Loch vergrößert. Bilder dazu im Crowell und Fox, p.68.