Cauchy- Crofton- Formel

Andre Böhlke

3. Dezember 2003

Ziel: Wir wollen die Länge l einer Kurve C durch die Menge M der sie schneidenen Geraden und die Anzahl dieser Schnitte bestimmen.

Vorgehen: Zunächst definieren wir ein Maß μ auf solchen Mengen. Dann zeigen wir, dass μ die nötigen Eigenschaften hat.

Das Maß μ auf M: Sei g eine Gerade. Dann ist g eindeutig durch einen Winkel θ - ihre "Richtung" - und ihren Abstand p vom Ursprung bestimmt. Es gilt:

$$g = \{(x, y) \mid p = x \cos\theta + y \sin\theta\}$$

(Hessesche Normalform).

Die Menge aller Geraden im $\mathbf{R}^2$ ist also isomorph zu $\mathcal{L} = \{(p, \theta) \mid p \geq 0; 0 \leq \theta < 2\pi\} \subset \mathbf{R}^2$. Es liegt nun nahe μ als Integral über $\mathcal{L}$ zu definieren:

$$\mu := \int\int dp d\theta \tag{1}$$

Diese Definition macht nur Sinn, falls $\mu(M)$ unverändert bleibt, wenn ich C drehe und verschiebe. Sei also

$$\mathcal{G} := \left\{ F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2; x \mapsto \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid 0 \leq \phi < 2\pi; a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

die Menge der Dreh- Verschiebungen, dann sollte gelten: $\mu(M) = \mu(\widetilde{M})$ für alle $F \in \mathcal{G}$, wobei $\widetilde{M}$ die Menge der $F(C)$ schneidenen Geraden ist.

Die Invarianz von μ unter Dreh- Verschiebungen: Zu zeigen: μ ist invariant unter den von $\mathcal{G}$ erzeugten Transformationen.

Sei $F \in \mathcal{G}$. Nach Transformation der Koordinaten durch F hat eine Gerade $g = \{(x, y) \mid p = x \cos\theta + y \sin\theta\}$ die Form

$$\widetilde{g} = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \mid p - a\cos\theta - b\sin\theta = \widetilde{p} = \widetilde{x}\cos(\theta - \phi) + \widetilde{y}\sin(\theta - \phi)\}.$$

Es ist also

$$\omega(p, \theta) = (p - a\cos\theta - b\sin\theta,\ \theta - \phi)$$

die von F erzeugte Transformation.

Sei nun $S \subset \mathcal{L}$ und $\widetilde{S} = \{\omega(p,\theta) \mid (p,\theta) \in S\}$. Mit dem Transformationssatz ist

$$\int_S d\mu = \int_{\widetilde{S}} |\det(D\omega(p,\theta))| \, d\mu = \int_{\widetilde{S}} d\mu,$$

womit wir schon fertig sind.

Die Herleitung der Formel: Zunächst wollen wir mit unserem Maß μ die Länge l einer Strecke s messen. Dazu finden wir ein $F \in \mathcal{G}$, so dass s mittig im Ursprung liegt. Die Menge der s schneidenen Geraden entspricht nun $N = \left\{(p,\theta) \mid 0 \le p < |\cos\theta| \, \frac{l}{2}, \; 0 \le \theta \le 2\pi\right\} \Rightarrow$

$$\mu(N) = \int_0^{2\pi} \int_0^{|cos\theta|\frac{l}{2}} dp d\theta = \int_0^{2\pi} |cos\theta| \frac{l}{2} d\theta = \frac{l}{2} \int_0^{2\pi} |cos\theta| d\theta =$$
$$\frac{l}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos\theta d\theta - \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} cos\theta d\theta + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} cos\theta d\theta \right) = 2l \tag{2}$$

Wir können nun die Länge von Strecken messen.

Die Kurve C sei gegeben durch eine stetige Funktion $\alpha : [0,1] \to \mathbf{R}^2$. Sei $Z = (t_0, t_1, ..., t_n)$ mit $t_0 = 0$ und $t_n = 1$ ein Zerlegungsvektor von $[0,1]$, so können wir einen Polygonzug $P(Z)$ definieren, der die Kurve C annährt: Sei

$$p_i := \{\alpha(t_{i-1}) + \lambda(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})) \mid \lambda \in [0,1]\}$$

die i-te Strecke von $P(Z)$, so defineren wir:

$$P := \bigcup_{i=1}^{n} p_i.$$

Wir müssen hier noch voraussetzen, dass die Länge der p_i endlich für jedes Z, also C rektifizierbar ist.

Seien N_i die Mengen der Geraden, die p_i schneiden, und l_i die Längen der p_i, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} N_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} \mu(N_i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} l_i.$$

Um aus der obigen Ungleichung eine Gleichung zu machen, müssen wir unser Maß μ so verändern, dass $\bigcup_{i=1}^{n} N_i$ einer disjunkten Vereinigung entspricht. Dazu gewichten wir schneidenen Geraden g nach der Anzahl der i mit $g \in N_i$. Also:

$$\mu := \int \int n(p,\theta) \, dp d\theta,$$

wobei $n : \mathcal{L} \to \mathbb{N}$ die erwähnte Gewichtung ist. Wir erhalten:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} N_i\right) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} l_i.$$

Sei $|Z|$:="Menge der *'Zerlegungspunkte"', so gilt für* $|Z| \longrightarrow \infty$: $P = C$.

Setzen wir noch $\mu = \infty$ für nicht rektifizierbare Kurven, so können wir die Länge aller Kurven mit μ bestimmen:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(N_i\right) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} l_i = 2 \cdot l,$$

wobei l die Länge von C ist.

Literatur

[DoCarmo97] Do Carmo, M. P.: Differential Geometry of Curves and Surfaces (1-7. C.)