Die 2. Fundamentalform - Gauß-Abbildung

Vortrag im Proseminar

„Kurven und Flächen"

bei Prof. Thomas Schick

am 14. Januar 2004

von Alexander Mann

e-mail: fuenfundachtzig@gmx.de

1. Gauß-Abbildung und fundamentale Eigenschaften

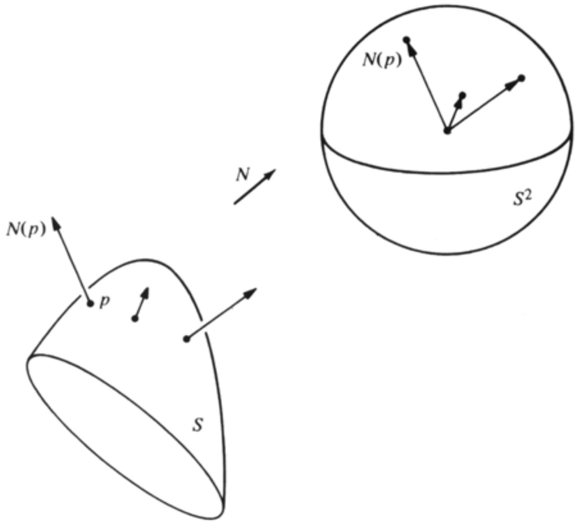
Ziel
Wir haben gesehen, dass die Änderungsrate der Tangente an eine Kurve C uns zu dem wichtigen geometrischen Begriff der Krümmung von C geführt hat. In diesem Abschnitt soll diese Idee auf reguläre Flächen übertragen werden. Wir werden dazu messen, wie schnell sich eine reguläre Fläche S von der Tangentialebene an S in einem Punkt p entfernt.

Einleitung: Orientierung einer Fläche
Aus Tanjas Vortrag über Tangentialebenen ist bekannt, dass wir zu einer gegebenen Parametrisierung $\mathbf{x} : U \subset \mathbf{R}^2 \to S$ einer regulären Fläche S bei einem Punkt $p \in S$ einen Einheitsnormalenvektor in jedem Punkt aus $\mathbf{x}(U)$ zuordnen können durch die Vorschrift

$$N(q) = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}(q), \quad q \in \mathbf{x}(U)$$

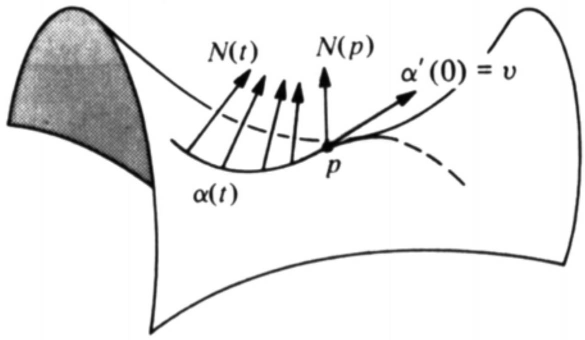
Dies ist eine differenzierbare Abbildung $N : \mathbf{x}(U) \to \mathbf{R}^3$. Man nennt eine reguläre Fläche *orientierbar*, wenn es ein auf der ganzen Fläche definiertes differenzierbares Einheitsnormalenvektorfeld gibt. Die Wahl eines solchen Vektorfeldes N heißt eine *Orientierung* von S. Nicht alle Flächen sind orientierbar (siehe Möbiusband).
Wichtig im folgenden ist vor allem die Berechnung von N(q).

Definition 1
Sei $S \subset \mathbf{R}^3$ eine Fläche mit Orientierung N. Die Abbildung $N : S \to \mathbf{R}^3$ hat ihre Werte in der Einheitssphäre $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$, eigentlich also $N : S \to S^2$. Diese Abbildung heißt *Gauß-Abbildung* von S.



Die Gauß-Abbildung $N : S \to S^2$

Die Gauß-Abbildung ist differenzierbar. Im folgenden soll das Differential von N bei $p \in S$ mit dN_p bezeichnet werden. dN_p ist eine lineare Abbildung von $dN_p : T_p(S) \to T_{N(p)}(S^2)$. Da $T_p(S)$ und $T_{N(p)}(S^2)$ parallele Ebenen sind, kann man dN_p auch als lineare Abbildung von $T_p(S)$ auf sich selber aufgefasst werden.
dN_p misst, wie sich der Normalenvektor N von N(p) in einer Umgebung von p wegdreht. Während dieses Maß im Falle von Kurven durch eine Zahl gegeben war, ist es bei regulären Flächen charakterisiert durch eine lineare Abbildung.

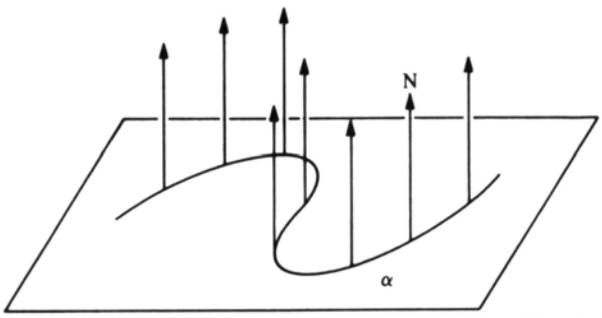


Der Normalenvektor N auf einer Kurve $\alpha(t)$ in S

Beispiel 1
Triviales Beispiel. Sei die Ebene P gegeben durch ax+by+cz = 0 gegeben. Der Einheits-normalenvektor

$$N = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = const.$$

Hieraus folgt, dass dN = 0.



In der Ebene: dN = 0

Beispiel 2
Einheitssphäre $S^2 = \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$.
Sei $\alpha(t) = (x(t),y(t),z(t))$ eine parametrisierte Kurve in S^2, so gilt (ableiten nach t): $2xx'+2yy'+2zz' = 0$, d.h. der Vektor (x,y,z) steht senkrecht auf der Sphäre im Punkt (x,y,z). Wir wählen N = (x,y,z) als Normalenvektorfeld, N zeigt weg vom Mittelpunkt der Sphäre. Eingeschränkt auf $\alpha(t)$ ist $N(t) = (x(t),y(t),z(t))$ eine vektorwertige Funktion von t, und es folgt für dN:

$$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

D.h. $dN_p(v) = v$ für alle $p\in S^2$ und alle $v\in T_p(S^2)$.

Proposition 1
Das Differential $dN_p : T_p(S) \to T_p(S)$ der Gauß-Abbildung ist eine selbst-adjungierte[a)] lineare Abbildung.

Beweis
Sei $\mathbf{x}(u,v)$ eine Parametrisierung von S bei p und $\{\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\}$ die zugehörige Basis von $T_p(S)$. Sei $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t),v(t))$ eine Kurve in S mit $\alpha(0) = p$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(\mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t),v(t))\Big|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0) \end{aligned} \tag{1}$$

Vergleich der letzten und ersten Gleichung in (1) liefert insbesondere: $dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u$ und $dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$. Um zu zeigen, dass dN_p selbst-adjungiert ist, genügt es aufgrund der Linearität zu zeigen, dass:

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle \tag{2}$$

Betrachte hierzu die beidseitigen Ableitungen von $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = 0$ und $\langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial v}\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{\partial}{\partial v} 0$$
$$\Rightarrow \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0$$

Analog:

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 0$$

Zusammenfassen der beiden Gleichungen ergibt die Gültigkeit von (2):

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle$$ q.e.d.

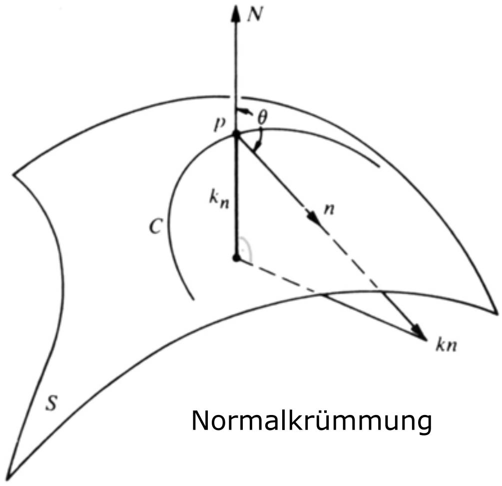
Dass dN_p eine selbst-adjungierte lineare Abbildung ist, erlaubt uns, dN_p eine quadratische Form $Q(v) = -\langle dN_p(v),v\rangle$, $v\in T_p(S)$ zuzuordnen.

Definition 2
Die quadratische Form II_p, definiert auf $T_p(S)$ durch $II_p(v) = -\langle dN_p(v),v\rangle$ heißt die ***zweite Fundamentalform*** von S bei p.

Definition 3
Sei C eine reguläre Kurve in S, die durch $p\in S$ geht, sei k die Krümmung von C in p und $\cos\theta = \langle n,N\rangle$, wobei n der Normalenvektor an C und N der Normalenvektor auf S in p ist. Die Zahl $k_n = k\cos\theta$ heißt dann die *Normalkrümmung* von $C \subset S$ in p.

[a)] Erinnerung: Eine lineare Abbildung heißt selbst-adjungiert, wenn sie gleich ihrer Adjungierten ist. D.h. dass $T = T^* \Rightarrow \langle T(B), A\rangle = \langle B, T(A)\rangle$, hierbei bezeichne $T : \vartheta \to \vartheta$ die lineare Abbildung und A, B sind Vektoren aus ϑ.

Man sieht, dass k_n also die Länge der Projektion des Vektors k*n auf die Normale an die Fläche in p angibt, was uns auf folgende geometrische Interpretation der 2. Fundamentalform führt.



Normalkrümmung

Geometrische Interpretation von II_p
Betrachte eine reguläre Kurve $C \subset S$, parametrisiert durch $\alpha(s)$ mit $\alpha(0) = p$, wobei s die Bogenlänge von C ist. Es bezeichne N(s) die Einschränkung des Normalenvektors N auf die Kurve $\alpha(s)$, dann gilt $\langle N(s),\alpha'(s)\rangle = 0$, also durch Umstellen nach Produktregel:

$$\langle N(s), \alpha''(s)\rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s)\rangle$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0)\rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0)\rangle \\ &= \langle N(0), \alpha''(0)\rangle \\ &= \langle N, kn\rangle(p) = k_n(p) \end{aligned}$$

Der Wert der zweiten Fundamentalform II_p ist für einen Einheitsvektor $v \in T_p(S)$ gleich der Normalkrümmung einer regulären Kurve, die durch p geht und tangential ist zu v. Insbesondere erhält man auch das folgende Ergebnis:

Proposition 2 (Meusnier)
Alle Kurven auf einer Fläche S, die in einem gegebenen Punkt $p \in S$ dieselbe Tangente haben, besitzen in diesem Punkt dieselbe Normalkrümmung.

Nach dem "Spectral Theorem" (Spektralsatz) gibt es zu jedem $p \in S$ eine Orthonormalbasis $\{e_1,e_2\}$ von $T_p(S)$, so dass $dN_p(e_1) = -k_1e_1$ und $dN_p(e_2) = -k_2e_2$ (Eigenwerte und -vektoren). Sei $k_1 \geq k_2$. k_1 und k_2 sind Maximum und Minimum der zweiten Fundamentalform II_p eingeschränkt auf den Einheitskreis in $T_p(S)$, d.h. sie sind die Extremwerte der Normalkrümmung bei p. Hieraus gewinnt man die folgende Definition:

Definition 4
Die maximale Normalkrümmung k_1 und die minimale Normalkrümmung k_2 heißen *Hauptkrümmungen* bei p. Die zugehörigen Richtungen, d.h. die durch die Eigenvektoren e_1, e_2 gegebenen Richtungen heißt *Hauptkrümmungsrichtungen* bei p.

In der Basis $\{e_1,e_2\}$ hat die Matrix von dN_p die Form $\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}$. Man definiert:

Definition 5
Sei $p \in S$ und $dN_p : T_p(S) \to T_p(S)$ sei das Differential der Gauß-Abbildung. Die Determinante von dN_p ist die *Gaußsche Krümmung K* von S in p. Das negative der halben Spur von dN_p heißt *mittlere Krümmung H* von S in p:

$$K = k_1k_2\,, \qquad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

2. Gauß-Abbildung in lokalen Koordinaten

Ziel
Bisher haben wir mit der Gauß-Abbildung und den dazugehörigen Definitionen gearbeitet, ohne ein Koordinatensystem zu definieren. Um allgemeinere Situationen behandeln und Rechnungen einfacher durchführen zu können, soll nun die Darstellung der zweiten Fundamentalform und das Differential der Gauß-Abbildung in lokalen Koordinaten ausgedrückt werden.

Einführen lokaler Koordinaten
Sei $\mathbf{x}(u,v)$ eine Parametrisierung einer regulären Fläche bei einem Punkt $p \in S$. Sei $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t),v(t))$ eine parametrisierte Kurve auf S mit $\alpha(0) = p$. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir nicht mehr explizit dazu, dass alle unten auftretenden Funktionen für ihren Wert in p stehen.

Es gilt $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$ (Tangentenvektor) und

$$dN(\alpha') = N'(u(t),v(t)) = N_u u' + N_v v' \qquad (1)$$

Da N_u und N_v in $T_p(S)$ liegen, können wir schreiben:

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \quad {}^{b)} \\ N_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\Rightarrow} dN(\alpha') &= (a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v)u' + (a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v)v' \\ &= (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v \end{aligned}$$

Was sich auch schreiben lässt als:

$$dN\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Wir können also das Differential der Gauß-Abbildung dN in der Basis $\{\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\}$ darstellen als 2x2-Matrix (a_{ij}).

Betrachten wir nun die zweite Fundamentalform II_p in der Basis $\{\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\}$. Nach Def. 2 und Formel (1):

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'),\alpha' \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle, \\ &= -e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 \end{aligned}$$

wobei wir e, f und g wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} e &:= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle \\ f &:= -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ g &:= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle \end{aligned} \qquad (3)$$

Für (3) wurde verwendet, dass $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ senkrecht auf N stehen, d.h.

$$\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$$

Wir wollen nun die Matrix (a_{ij}) in Termen der Koeffizienten e, f, g ausdrücken. Dazu setzen wir (2) in (3) ein:

$$-f = \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + a_{21}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G \text{ und}$$

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F \\ -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F \\ -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G \end{aligned} \qquad (4)$$

---

b) Dies, in Verbindung mit den später berechneten Koeffizienten a_{ij}, sind die Gleichungen von Weingarten.

(Erinnerung: Im letzten Vortrag hatten wir die Koeffizienten der ersten Fundamentalform definiert:
$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$, $F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$, $G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$)

Wir können nun die Gleichungen (4) schreiben als:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \tag{5}$$

Mit der inversen Matrix **A**, definiert als

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \text{ c)}$$

folgt aus (5):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \mathbf{A} \tag{6}$$

Hieraus erhält man die folgenden Ausdrücke für die Koeffizienten (a_{ij}) der Matrix von dN bezüglich der Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$:

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2} \qquad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2} \qquad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$$

Wir können nun die Gaußsche Krümmung K und die mittlere Krümmung H in lokalen Koordinaten berechnen. Aus Def. 5 folgt direkt:

$$K = |a_{ij}| = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \text{ d)} \tag{7}$$

Um H zu berechnen müssen wir etwas weiter ausholen und uns erinnern, dass $-k_1$ und $-k_2$ die Eigenwerte von dN sind:

$dN(v) = -kv = -kIv$, $v \in T_p(S)$, $v \neq 0$, wobei I die Einheitsmatrix ist.

Es folgt, dass dN + kI nicht invertierbar ist[e)], die Determinante ist also Null:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \tag{8}$$

Da k_1 und k_2 die Wurzeln der obigen quadratischen Gleichung sind, schließen wir anhand von Definition 5, dass

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \tag{9}$$

womit sich (8) schreiben lässt als

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

und sich nach der „p-q-Formel" ergibt, dass

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K} \tag{10}$$

Wählen wir $k_1(q) \geq k_2(q)$, $q \in S$, so folgt aus dieser Beziehung, dass die Funktionen k_1 und k_2 stetig sind in S und differenzierbar sind in S, außer vielleicht bei $H^2 = K$.

---

c) $|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG - F^2} \Rightarrow$ Nenner $\neq 0$

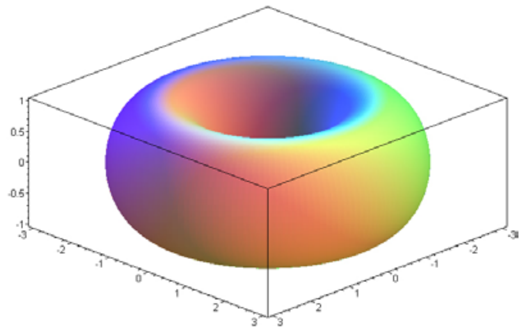
d) Dies sieht man besonders einfach, wenn man berücksichtigt, dass (det A)(det B) = det (AB) und Gleichung (6) verwendet.

e) da ker(dN+kI) $\neq \{0\}$

Beispiel 1
Gaußsche Krümmung beim Torus
Wir verwenden folgende Parametrisierung des Torus:
$\mathbf{x}(u,v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u)$, $0 < u < 2\pi$, $0 < v < 2\pi$, $r > 0$, $a > r$

Wir berechnen zunächst einige benötigte Vektoren:

$$\mathbf{x}_u = (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u)$$
$$\mathbf{x}_v = (-(a + r\cos u)\sin v, (a + r\cos u)\cos v, 0)$$
$$\mathbf{x}_{uu} = (-r\cos u\cos v, -r\cos u\sin v, -r\sin u)$$
$$\mathbf{x}_{uv} = (r\sin u\sin v, -r\sin u\cos v, 0)$$
$$\mathbf{x}_{vv} = (-(a + r\cos u)\cos v, -(a + r\cos u)\sin v, 0)$$



Ein Torus mit a = 2, r = 1

Es ergibt sich für E, F und G mit $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$:

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = r^2$$
$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = r\sin u\cos v(a + r\cos u)\sin v - r\sin u\sin v(a + r\cos u)\cos v = 0$$
$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = (a + r\cos u)^2$$

Wir erinnern uns, dass wir das innere Produkt von Vektorprodukt und einem Vektor als Determinante einer 3x3-Matrix schreiben können:

$\langle u \wedge v, w \rangle = |(u, v, w)|$ für u, v, w $\in \mathbf{R}^3$

Außerdem wissen wir (aus dem vergangenen Vortrag von Matthias über die erste Fundamentalform), dass

$$|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG - F^2} \; .$$

Wir erhalten damit für e, f und g:

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-(a + r\cos u)\cos v * r\cos u, -r\cos u * (a + r\cos u)\sin v,$$
$$- r\sin u\cos v(a + r\cos u)\cos v - r\sin u\sin v(a + r\cos u)\sin v)$$

$$e = \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}, \mathbf{x}_{uu} \right\rangle = \frac{(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{r^2(a + r\cos u)}{r(a + r\cos u)} = r$$

$$f = \frac{(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = 0$$

$$g = \frac{(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \cos u(a + r\cos u)$$

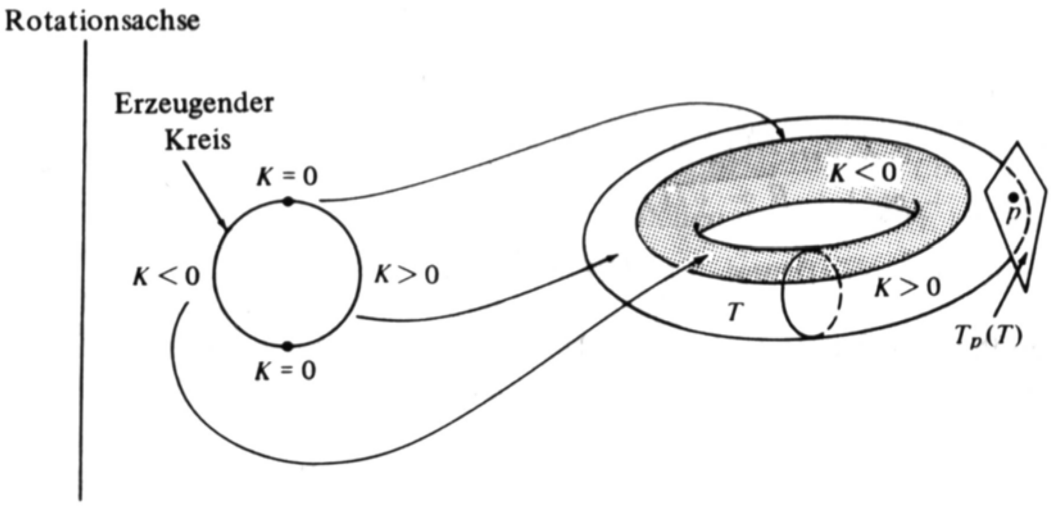
Damit folgt für K:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{r\cos u(a + r\cos u)}{(r(a + r\cos u))^2} = \frac{\cos u}{r(a + r\cos u)}$$

Bei $u = \pi/2$ und $u = 3\pi/2$, d.h. auf den Breitenkreisen, ist $K = 0$. Man nennt solche Punkte, an denen $K = 0$ aber $dN_p \neq 0$ ist[f)], parabolische Punkte. Auf dem Bereich mit $\pi/2 < u < 3\pi/2$ ist $K < 0$, dies sind hyperbolische Punkte. Auf dem restlichen Intervall zwischen 0 und 2π ist die Krümmung $K > 0$, liegen also elliptische Punkte vor. Man stelle sich jeweils den Schnitt des Torus mit einer Tangentialebene im entsprechenden Punkt vor.

---

f) Punkte, bei denen $dN_p = 0$, heißen Flachpunkte. Vergleiche Ebene.



Die Gaußsche Krümmung K beim Torus

Proposition 3
Sei $p \in S$ ein elliptischer Punkt einer Fläche S. Dann gibt es eine Umgebung V von p in S, so dass alle Punkte in V auf derselben Seite der Tangentialebene $T_p(S)$ liegen. Ist $p \in S$ ein hyperbolischer Punkt, dann gibt es in jeder Umgebung V von p in S Punkte, die auf beiden Seiten von $T_p(S)$ liegen.

Dieser Satz wird hier ohne Beweis angeführt. Zur Veranschaulichung eignet sich gut das oben behandelte Beispiel des Torus.

Notation:

$\langle a,b \rangle$	: inneres (auch Skalar-) Produkt
$a \wedge b$	: Vektor- (auch Kreuz-) Produkt
$\mathbf{R}$	: Raum der reellen Zahlen
S	: reguläre Fläche im $\mathbf{R}^3$
$T_p(S)$	: Tangentialebene an S mit Berührpunkt in p
$\mathbf{x}_u$	: $\mathbf{x}_u \equiv \partial x/\partial u$; $\mathbf{x}_{uu} \equiv \partial^2 x/\partial u^2$, etc.

Literatur:

Manfredo P. do Carmo: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen; Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1983