Proseminar „Kurven und Flächen“ (WS 2003/04), Prof. Dr. Thomas Schick
Mathematisches Institut der Universität Göttingen

Isometrie

Vortrag von Andreas Sorge, 21.01.2004
andreas.sorge@stud.uni-goettingen.de

1 Einleitung

Durch die erste Fundamentalform einer regulären Fläche S haben wir einfache metrische Größen auf S wie Länge, Winkel und Flächeninhalt definiert und allein aus den inneren („intrinsischen“) Eigenschaften der Fläche berechnet.
Wir wollen nun den Begriff der *Isometrie* und den schwächeren Begriff der *konformen Abbildung* einführen. Unter einer Isometrie verändern zwei reguläre Flächen ihre metrischen Eigenschaften nicht, während eine konforme Abbildung lediglich die Winkel erhält.

1.1 Die erste Fundamentalform

Definition 1. Seien $S \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche, $p \in S$.

$$I_p : T_pS \to \mathbb{R}; w \mapsto <w, w>_p$$

heißt *erste Fundamentalform von S in $p \in S$.*

Lemma 1. *Sei $x(u, v)$ Parametrisierung bei $(u_0, v_0) = p \in S$. Sei $w \in T_pS$ mit $w := x_u u' + x_v v'$. Dann gilt:*

$$I_p(w) \quad = \quad (u')^2 E + 2u'v'F + (v')^2 G$$

mit $E = E(u_0, v_0) = <x_u, x_u>_p$, $F = F(u_0, v_0) = <x_u, x_v>_p$, $G = G(u_0, v_0) = <x_v, x_v>_p$.

Anmerkung. E, F, G hängen im allgemeinen von der Parametrisierung $x(u, v)$ ab!

2 Isometrie

Seien S und $\overline{S}$ stets reguläre Flächen.

Definition 2. Eine *Isometrie* ist ein Diffeomorphismus $\varphi : S \to \overline{S}$, für den $\forall p \in S$ und $\forall w_1, w_2 \in T_pS$ gilt:

$$< w_1, w_2 >_p \quad = \quad < D_p\varphi(w_1), D_p\varphi(w_2) >_{\varphi(p)}$$

Anmerkung. D.h. das innere Produkt bleibt unter dem Differential $D_p\varphi : T_pS \to T_{\varphi(p)}\overline{S}$ einer Isometrie φ unverändert.

Lemma 2. *Ein Diffeomorphismus $\varphi : S \to \overline{S}$ ist genau dann Isometrie zwischen S und $\overline{S}$, wenn sein Differential $D_p\varphi$ die erste Fundamentalform erhält, also $\forall p \in S, w \in T_pS$ gilt:*

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(D_p\varphi(w))$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Seien $p \in S$, $w \in T_pS$.

$$\Rightarrow I_p(w) = < w, w >_p = < D_p\varphi(w), D_p\varphi(w) >_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(D_p\varphi(w))$$

„$\Leftarrow$“: Seien $w_1, w_2 \in T_pS$.

$$\begin{aligned}
< w_1, w_2 >_p &= \frac{1}{2}(< w_1 + w_2, w_1 + w_2 >_p - < w_1, w_1 >_p - < w_2, w_2 >_p) \\
&= \frac{1}{2}(I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\
&= \frac{1}{2}(I_{\varphi(p)}(D_p\varphi(w_1 + w_2)) - I_{\varphi(p)}(D_p\varphi(w_1)) - I_{\varphi(p)}(D_p\varphi(w_2))) \\
&= < D_p\varphi(w_1), D_p\varphi(w_2) >_{\varphi(p)}
\end{aligned}$$

□

Definition 3. S und $\overline{S}$ heißen *isometrisch*, wenn zwischen ihnen eine Isometrie $\varphi : S \to \overline{S}$ existiert.

Definition 4. Seien $p \in S$ und $V \subset S$ Umgebung von $p \in V$. Eine Abbildung $\varphi : V \to \overline{S}$ heißt *lokale Isometrie*, wenn eine Umgebung $\overline{V} := \varphi(V) \subset \overline{S}$ von $\varphi(p) \in \overline{V}$ existiert, sodass $\varphi : V \to \overline{V}$ Isometrie ist.

Definition 5. S heißt *lokal isometrisch zu $\overline{S}$*, falls $\forall p \in S$ eine lokale Isometrie zu $\overline{S}$ existiert.
S und $\overline{S}$ heißen *lokal isometrisch*, wenn S lokal isometrisch zu $\overline{S}$ und $\overline{S}$ lokal isometrisch zu S ist.

Lemma 3. *Sei $\forall p \in S$ ein Diffeomorphismus $\varphi : S \to \overline{S}$ lokale Isometrie. Dann ist φ (globale) Isometrie.*

Satz 4. *Seien $x : U \to S$ und $\overline{x} : U \to \overline{S}$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ Parametrisierungen für S bzw. $\overline{S}$ mit identischen Funktionen $E = \overline{E}, F = \overline{F}, G = \overline{G}$ der ersten Fundamentalform in U. Dann ist $\varphi = \overline{x} \circ x^{-1} : x(U) \to \overline{S}$ lokale Isometrie.*

Beweis. Es ist zu zeigen $\forall p \in x(U), w \in T_pS : I_p(w) = I_{\varphi(p)}(D_p\varphi(w))$.
Seien $p \in x(U)$, $w \in T_pS$. Dann ist w der Tangentenvektor an eine Kurve $x(u(t), v(t)) \in U$ im Punkt $p = x(u(0), v(0))$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} w &= u'x_u + v'x_v \\ \Rightarrow I_p(w) &= (u')^2E + 2u'v'F + (v')^2G \end{aligned}$$

$D_p\varphi(w)$ ist nun gerade der Tangentenvektor an die durch φ auf $\overline{S}$ abgebildete Kurve $x(u(t), v(t))$ im Punkt $\varphi(p)$, also an $\varphi(x(u(t), v(t))) = \overline{x} \circ x^{-1} \circ x(u(t), v(t)) = \overline{x}(u(t), v(t))$ im Punkt $\varphi(p) = \overline{x}(u(0), v(0))$ (siehe Abbildung 1).

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_p\varphi(w) &= u'\overline{x}_u + v'\overline{x}_v \\ \Rightarrow I_{\varphi(p)}(D_p\varphi(w)) &= (u')^2\overline{E} + 2u'v'\overline{F} + (v')^2\overline{G} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_p(w) = I_{\varphi(p)}(D_p\varphi(w)) \qquad \forall p \in S, w \in T_pS$$

□

Anmerkung. Die Umkehrung gilt nicht: Hat man Parametrisierungen für S und $\overline{S}$ mit unterschiedlichen Funktionen E, F, G, so ist eine Isometrie nicht ausgeschlossen - ggf. hat man nur die falsche Parametrisierung gewählt.

Beispiel 1 *(Ebene und Zylinder).* Sei $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | 0 < u < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$. Seien $E \subset \mathbb{R}^3$ die Ebene durch p_0 aufgespannt von den orthonormalen Vektoren w_1, w_2 und $Z \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder $Z = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1\}$. Dann sind Parametrisierungen $x : U \to E$, $\overline{x} : U \to Z$ gegeben durch

$$\begin{aligned} x(u, v) &= p_0 + uw_1 + vw_2 \\ \overline{x}(u, v) &= (cosu, sinu, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = 1, \\ & \overline{E} = 1, \qquad \overline{F} = 0, \qquad \overline{G} = 1. \end{aligned}$$

Dann ist nach Satz 4 $\varphi = \overline{x} \circ x^{-1}$ lokale Isometrie. Also sind Ebene und Zylinder lokal isometrisch.

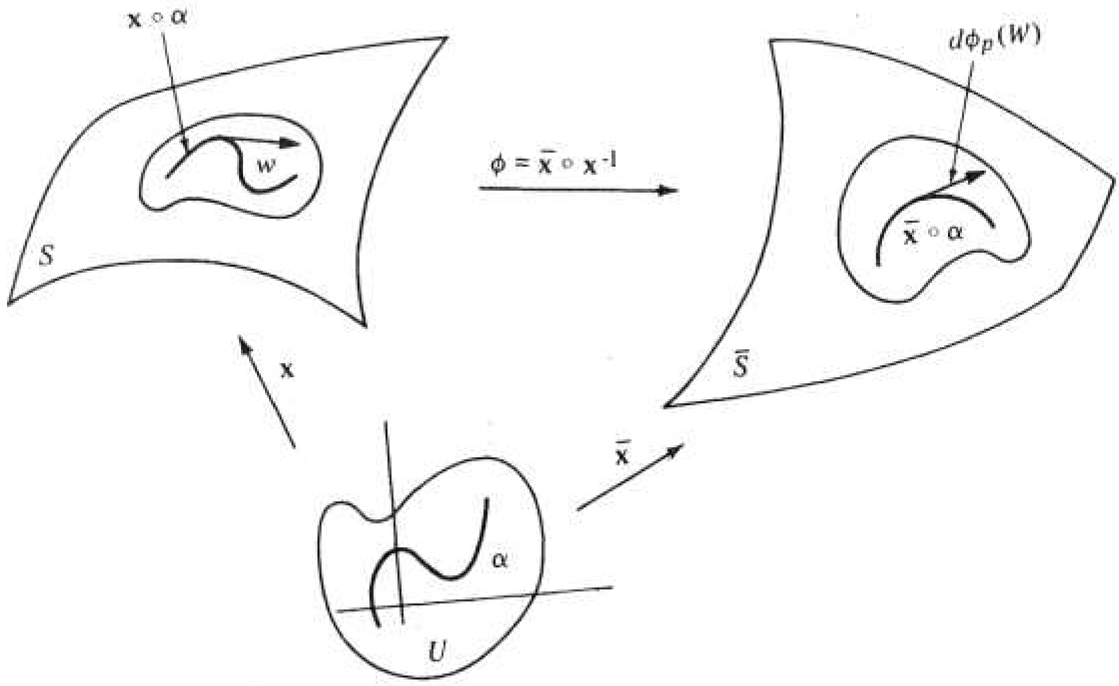

Abbildung 1: Zum Beweis von Satz 4, $\alpha(t) = (u(t), v(t))$

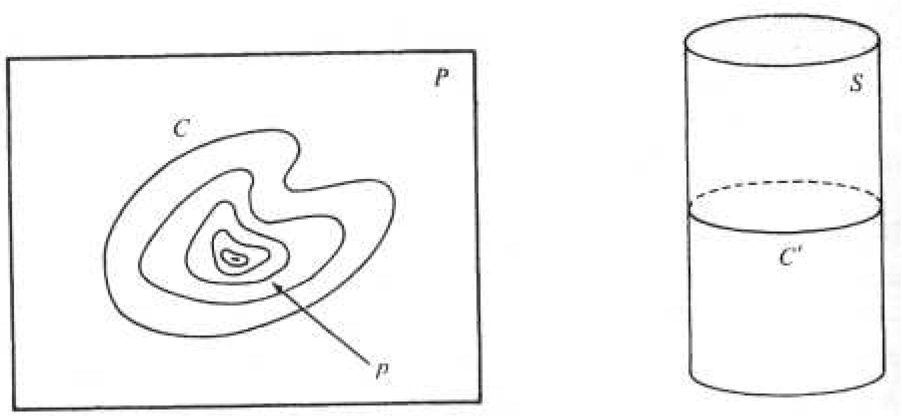

Abbildung 2: Ebene und Zylinder sind nicht homöomorph, da sich in der Ebene jede geschlossene Kurve C stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Für C' ist das auf dem Zylinder nicht möglich (Beispiel 1).

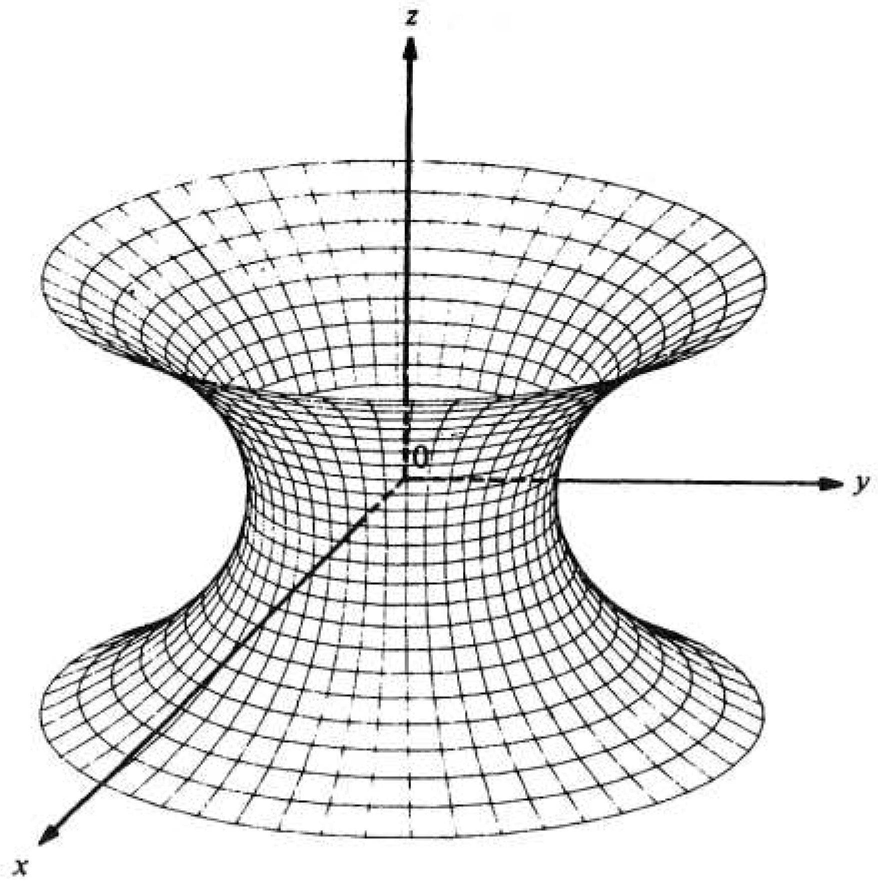

Abbildung 3: Das Katenoid ist der Rotationskörper des Cosinus hyperbolicus.

Anmerkung. Ebene und Zylinder sind mitnichten (global) isometrisch, da sie noch nicht einmal homöomorph sind (siehe Abbildung 2).

Beispiel 2 (Katenoid und Helikoid). Sei $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \in (0, 2\pi)\}$. Das *Katenoid* $K \subset \mathbb{R}^3$ ist der Rotationskörper (siehe Abbildung 3) der Kettenlinie (Cosinus hyperbolicus). Eine Parametrisierung $x : U \to K$ mit a konstant ist gegeben durch

$$x(u,v) \quad = \quad (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$$

$$\Rightarrow \quad E = a^2 \cosh^2 v, \qquad F = 0, \qquad G = a^2 \cosh^2 v$$

Das *Helikoid* $H \subset \mathbb{R}^3$ entsteht durch Verschraubung einer Geraden. Eine Parametrisierung ist gegeben durch

$$x(\overline{u}, \overline{v}) \quad = \quad (\overline{v} \cos \overline{u}, \overline{v} \sin \overline{u}, a\overline{u})$$

Wähle eine passendere Parametrisierung $\overline{x} : H \to U$ durch $\overline{u} = u, \overline{v} = a \sinh v$:

$$\Rightarrow \overline{x}(u,v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{E} = a^2 \cosh^2 v, \qquad \overline{F} = 0, \qquad \overline{G} = a^2 \cosh^2 v$$

Nach Satz 4 sind Katenoid und Helikoid lokal isometrisch. Eine Vorstellung davon, wie die Isometrie wirkt, vermitteln die Abbildungen 4 und 5.

2.1 Abstand

Definition 6. Seien $p, q \in S$. Der *intrinsische Abstand* d zwischen p und q ist definiert als:

$$d(p,q) := \inf\{l(\alpha(t))|\alpha(t) \quad \text{Kurve in} \quad S \quad \text{mit} \quad \alpha(t_1) = p, \alpha(t_2) = q\}$$

Satz 5. *Der Abstand d ist invariant unter Isometrien, d.h. wenn $\varphi : S \to \overline{S}$ Isometrie ist, dann gilt $\forall p, q \in S$ $d(p,q) = d(\varphi(p), \varphi(q))$.*

3 Konforme Abbildungen

Im folgenden wollen wir den Begriff der Isometrie abschwächen und ganz analog den Begriff der konformen Abbildung einführen.

Definition 7. Ein Diffeomorphismus $\varphi : S \to \overline{S}$ heißt *konforme Abbildung*, wenn eine differenzierbare Funktion $\lambda : S \to \mathbb{R}$ existiert mit $\lambda \neq 0$ $\forall p \in S$, sodass $\forall p \in S$ und $\forall v_1, v_2 \in T_pS$ gilt:

$$< D_p\varphi(v_1), D_p\varphi(v_2) > = \lambda^2(p) < v_1, v_2 >$$

Anmerkung. Eine konforme Abbildung erhält die Winkel, nicht notwendigerweise die Längen.

Definition 8. S und $\overline{S}$ heißen *konform*, wenn zwischen ihnen eine konforme Abbildung $\varphi : S \to \overline{S}$ existiert.

Definition 9. Seien $p \in S$ und $V \subset S$ Umgebung von $p \in V$. Eine Abbildung $\varphi : V \to \overline{S}$ heißt *lokal konforme Abbildung* bei p, wenn eine Umgebung $\overline{V} := \varphi(V) \subset \overline{S}$ existiert, sodass $\varphi : V \to \overline{V}$ eine konforme Abbildung ist.

Definition 10. S heißt *lokal konform* zu $\overline{S}$, falls $\forall p \in S$ eine lokal konforme Abbildung nach $\overline{S}$ existiert.

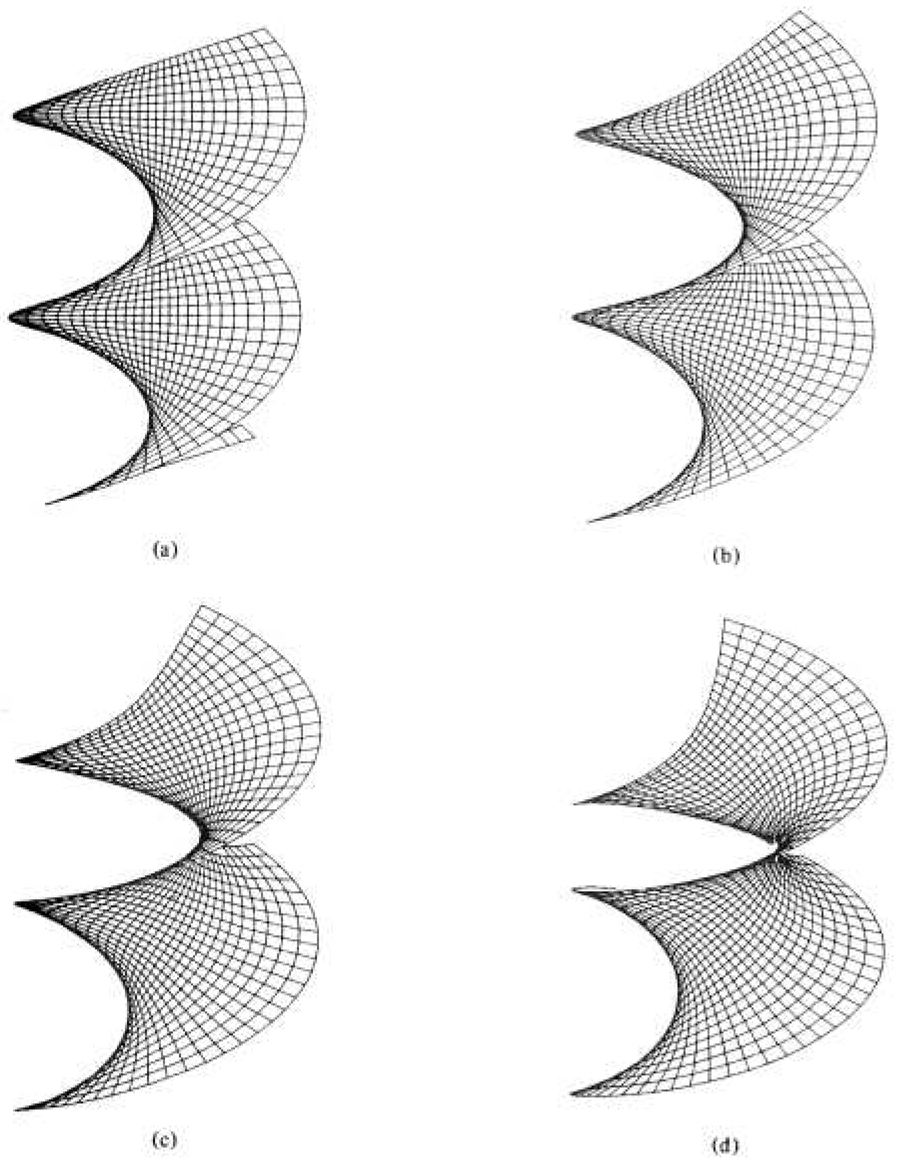

Abbildung 4: Die lokale Isometrie zwischen Katenoid und Helikoid: eine Umdrehung des Helikoids wird aufgeklappt...

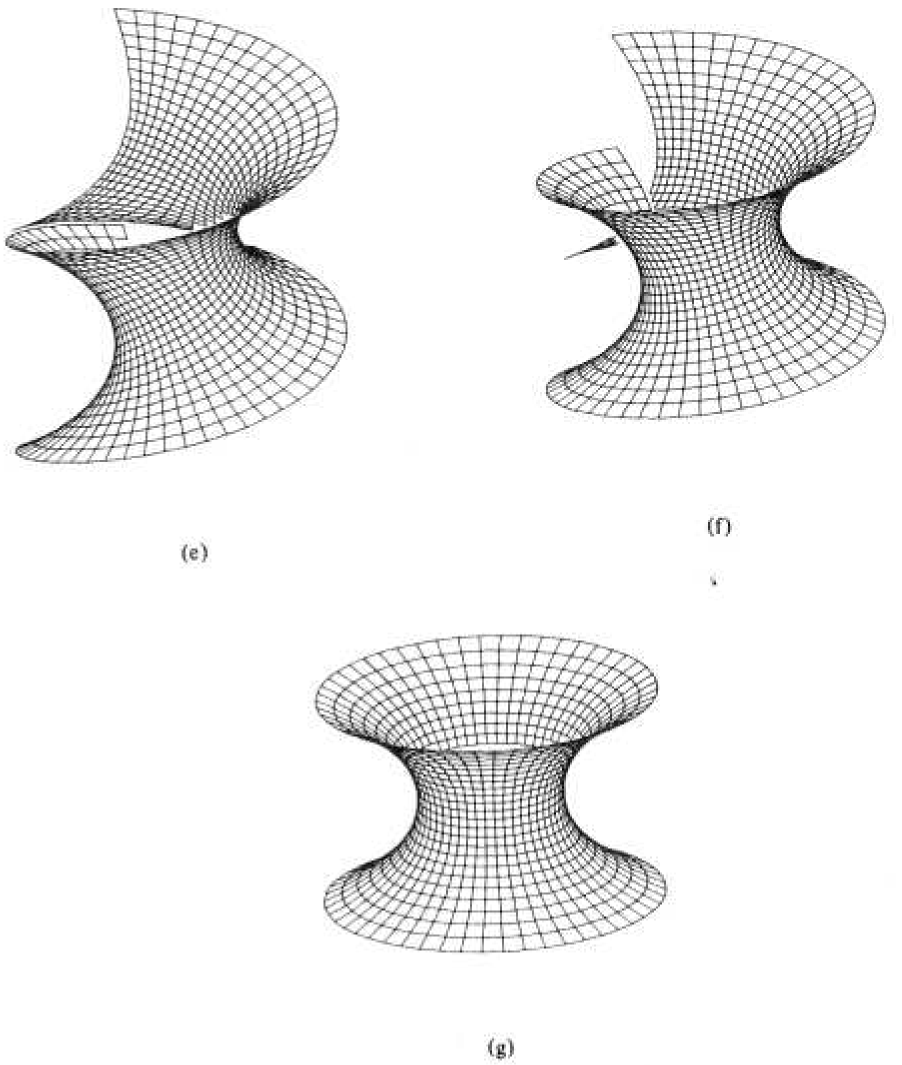

Abbildung 5: ... und zu einem Katenoiden zusammengefügt.

Lemma 6. *Lokale Konformität ist eine Äquivalenzrelation.*

Satz 7. *Seien $x : U \to S$ und $\overline{x} : U \to \overline{S}$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ Parametrisierungen für S bzw. $\overline{S}$. Wenn eine differenzierbare Funktion $\lambda : U \to \mathbb{R}$ mit $\lambda(x) \neq 0$ $\forall x \in U$ existiert, sodass $E = \lambda^2\overline{E}$, $F = \lambda^2\overline{F}$, $G = \lambda^2\overline{G}$ gilt, dann ist $\varphi = \overline{x} \circ x^{-1} : x(U) \to \overline{S}$ lokal konforme Abbildung.*

Die wichtigste Eigenschaft konformer Abbildungen wird durch das folgende Theorem ausgedrückt:

Theorem. *Alle regulären Flächen sind paarweise lokal konform.*

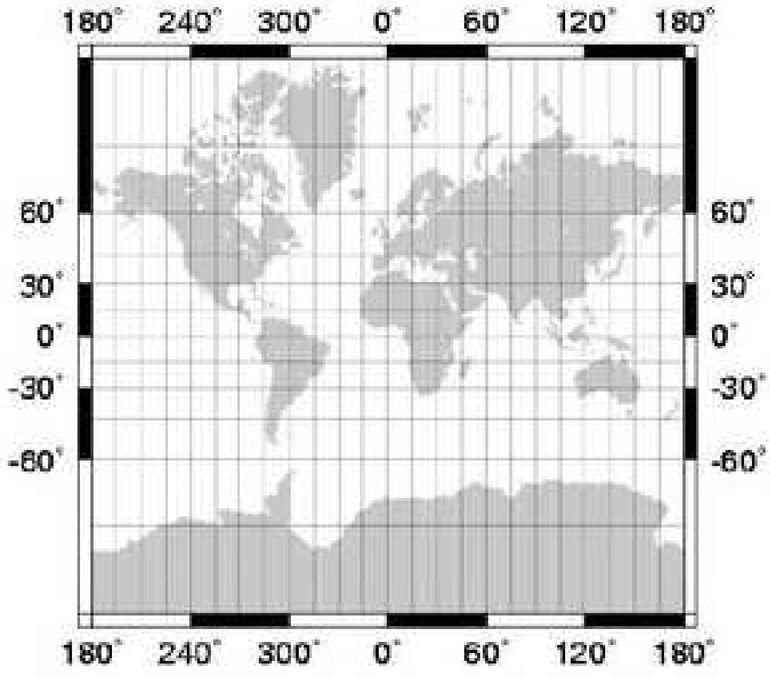

Abbildung 6: Die Mercator-Projektion des Globus

Beispiel 3 *(Mercator-Projektion).* Eine Anwendung von konformen Abbildungen ist die *Mercator*-Projektion des Globus auf eine flache Karte. Nachteil: Flächen nahe am Pol werden sehr verzerrt dargestellt, da zwar die Winkel, nicht aber die Längen erhalten sind.

4 Ausblick

Dass sich die Oberfläche einer Kugel im Gegensatz zur Oberfläche eines Zylinders nicht durch eine (lokale) Isometrie auf die Ebene abbilden lässt, ergibt sich aus dem folgenden Theorem:

Theorem (Theorema egregium von Gauss). *Die Gauss-Krümmung K einer regulären Fläche ist invariant unter lokalen Isometrien.*

5 Literatur

- do Carmo, Manfredo P.: Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, New Jersey, 1976
- Kühnel, Wolfgang: Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds, American Mathematical Society, 2002