Übungen zur Topologie 1
Wintersemester 00/01

Wir erwarten, dass mindestens 4 der folgenden 5 Aufgaben gelöst werden

Abgabe: 6. November, 12:00 Uhr, Kasten 37
Übung Mittwochs, 11:15 im SR 5

Aufgabe 10: Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Sei G eine endliche Gruppe und $\alpha\colon G \to Diff(M)$ ein Homomorphismus von G in die Gruppe der Diffeomorphismen von M (man sagt dann: G *operiert auf* M). Wir schreiben $g \cdot p$ oder gp für $\alpha(g)(p)$ ($g \in G$, $p \in M$).

Wir fordern zusätzlich, dass diese Operation *frei* ist, d.h. wenn immer ein $p \in M$ existiert mit $\alpha(g)(p) = p$, so folgt $g = 1$.

Beweise: die Operation definiert auf M eine Äquivalenzrelation, wobei $p \sim q \iff q = gp$ für ein $g \in G$. Sei $N := M/G$ die Menge der Äquivalenzklassen unter dieser Äquivalenzrelation. Wir geben M/G die Quotiententopologie mittels der offensichtlichen Projektion $M \to M/G$.

Zeige, dass M/G eine Mannigfaltigkeit ist. Zeige, dass man M/G eine glatte Struktur geben kann, so dass die Projektion $M \to M/G$ glatt ist.

Freiwillige Zusatzaufgabe: Gelten die entsprechenden Aussagen auch, wenn die Operation nicht frei ist? Oder wenn die Gruppe unendlich ist? Gib eine Beweisskizze, oder eine “Skizze” eines Gegenbeispiels.

Aufgabe 11: Zeige, dass $\mathbb{R}P^n$ eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit ist. Tipp: Verwende, dass das gleiche für S^n gilt.

Aufgabe 12: Zeige mit Hilfe des Satzes von Sard, dass jede glatte Abbildung $f\colon S^k \to S^n$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist, wenn $k < n$.

Aufgabe 13: Was ist falsch mit folgendem Beispiel: Sei M die Menge der reellen Zahlen mit der diskreten Topologie, also eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die kanonische Abbildung $M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x$ hat keine regulären Werte, im Widerspruch zum Satz von Sard (dessen Beweis ja in der Vorlesung auch nicht gegeben wurde).

Aufgabe 14: Sei $P \in \mathbb{C}[z]$ ein nicht-konstantes Polynom. Definiere

$$\hat{P}\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1 : (x:y) \mapsto \begin{cases} (p(x/y) : 1), & \text{falls } y \neq 0 \\ (1:0), & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass $\hat{P}$ differenzierbar ist, und bestimme $rg_p\hat{P}$ für alle $p \in \mathbb{C}P^1$.