Übungen zur Topologie 1 — Wintersemester 00/01

Abgabe: 20. November, 13:30 Uhr, Kasten 37
Übung mittwochs, 11:15 im SR 5

Aufgabe 19: Seien E, F Vektorraumbündel über einem Raum X, $f\colon Y \to X$, $g\colon Z \to Y$ stetig. Zeige

(1) $f^*(E \oplus F) \cong f^*E \oplus f^*F$

(2) Es gibt Iso $\Phi\colon (f \circ g)^*E \cong g^*(f^*E)$ so dass $\overline{f \circ g} = \overline{f} \circ \overline{g}\colon \Phi\colon (f \circ g)^*E \to E$.

Aufgabe 20: Sei $E := \{(v, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 \mid v \in x\}$ (Erinnerung: $\mathbb{R}P^1$ ist die Menge der 1-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^2$, so dass $v \in x$ Sinn macht). Zeige:

(1) E ist ein Vektorraumbündel über $\mathbb{R}P^1$.

(2) E ist homöomorph zum randlosen Möbiusband.

(3) $E \oplus E$ ist ein triviales Vektorraumbündel.

Aufgabe 21: Zeige, dass jedes eindimensionale Vektorraumbündel über S^1 entweder trivial ist oder isomorph zum Bündel E aus Aufgabe 20 (beachte: $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$). Verwende ohne Beweis, dass jedes Bündel über $[0, 1]$ trivial ist.

Aufgabe 22: Sei X eine Menge (weiter nichts). Zeige: es gibt eine abelsche Gruppe $\mathbb{Z}[X]$ und eine Abbildung $i\colon X \to \mathbb{Z}[X]$ so dass, wenn immer eine abelsche Gruppe A und eine Abbildung $f\colon X \to A$ gegeben ist, genau ein Gruppenhomomorphismus $F\colon \mathbb{Z}[X] \to A$ existiert, so dass $F \circ i = f$.

Zeige dass $\mathbb{Z}[X]$ bis auf Isomorphie eindeutig ist. Bemerkung: jede solche Gruppe $\mathbb{Z}[X]$ heisst *von X erzeugte freie abelsche Gruppe.*