Übungen zur Topologie 1 — Wintersemester 00/01

Abgabe: 27. November, 13:30 Uhr, Kasten 37
Übung mittwochs, 11:15 im SR 5

Aufgabe 23: Sei X wegzusammenhängend und $f\colon X \to X$ eine beliebige stetige Abbildung. Zeige, dass $H_0(f)\colon H_0(X) \to H_0(X)$ die Identität auf $H_0(X)$ ist.

Gilt die entsprechende Aussage auch, wenn X nicht wegzusammenhängend ist?

Aufgabe 24:

(1) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung mit 0 als regulärem Wert. Setze $M := f^{-1}(0)$. Beweise, dass TM und $E := \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid df_p(v) = 0\}$ als Vektorraumbündel isomorph sind (es soll *nicht* nachgeprüft werden, dass E ein Vektorraumbündel ist).

(2) Beweise, dass $TS^{n-1} \cong \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid |p| = 1, p \perp v\}$ (als Bündel).

Aufgabe 25: Beweise für eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen, dass die zugehörige lange Homologiesequenz exakt ist.

Aufgabe 26: Zeige, dass TS^{n-1} trivial ist, falls der $\mathbb{R}^n$ die Struktur einer (nicht notwendig assoziativen) Divisionsalgebra zulässt.

$\mathbb{R}^n$ lässt die Struktur einer Divisionsalgebra zu, falls es eine Multiplikation $\phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt, die $\mathbb{R}$-bilinear ist, ein neutrales Element e hat mit $\phi(e, x) = \phi(x, e) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, die nullteilerfrei ist (d.h. $\phi(x, y) = 0 \implies x = 0$ oder $y = 0$), und, am wichtigsten, so dass für jedes $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ ein $y \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $\phi(x, y) = e$. Beispiele sind $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, aber es ist nicht gefordert dass das Produkt kommutativ oder auch nur assoziativ ist.

Tipp: Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren und Aufgabe 24.