Übungen zur Topologie 1 — Wintersemester 00/01

Abgabe: 4. Dezember, 13:30 Uhr, Kasten 37
Übung mittwochs, 11:15 im SR 5

Aufgabe 27: Sei $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Zeige dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Die Sequenz besitzt einen Spalt $s\colon C \to B$, d.h. einen Homomorphismus s, so dass $g \circ s = \mathrm{id}_C$.

(2) Es gibt einen Homomorphismus $t\colon B \to A$ mit $t \circ f = \mathrm{id}_A$.

(3) Es gibt einen Isomorphismus $\phi\colon B \to A \oplus C$ so dass $\phi \circ f = i_A$ und $g = p_C \circ \phi$, wobei $i_A\colon A \to A \oplus C$ und $p_C\colon A \oplus C \to C$ die offensichtlichen Inklusionen und Projektionen sind.

Aufgabe 28: Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$ und $p \in S^n$. Die Ein-Punkt Vereinigung von X und S^n (entlang x_0 und p) ist definiert als $X \vee S^n := (X \amalg S^n)/(x_0 \sim p)$. Wir haben die offensichtlichen Inklusionen $i_X\colon X \to X \vee S^n$, $i_{S^n}\colon S^n \to X \vee S^n$, und Projektionen $p_X\colon X \vee S^n \to X$, $p_{S^n}\colon X \vee S^n \to S^n$.

Sei h_* eine Homologietheorie. Zeige: $\tilde{h}_n(X \vee S^n) \cong \tilde{h}_n(X) \oplus \tilde{h}_n(S^n)$, und die Isomorphismen sind gegeben durch $\tilde{h}_n(p_X) \oplus \tilde{h}_n(p_{S^n})$ mit Inversem $\tilde{h}_n(i_X) + \tilde{h}_n(i_{S^n})$.

Zusatzaufgabe: Finde eine Verallgemeinerung auf mehr Räume als nur S^n (mit geeigneten Bedingungen).

Aufgabe 29: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und sei $f\colon U \to V$ ein Homöomorphismus. Zeige, dass $n = m$.

Tipp: Berechne die Homologie des Paares $(U, U - \{*\})$.

Aufgabe 30: Sei $f_n\colon S^1 \to S^1$ gegeben durch $f(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ (wir fassen S^1 auf als Teilmenge von $\mathbb{C}$). Zeige $\deg(f_n) = n$.

Tipp: betrachte eine Faktorisierung $f_n\colon S^1 \to S^1 \vee \cdots \vee S^1 \to S^1$ und benutze Aufgabe 28.