Übungen zur Topologie 1 — Wintersemester 00/01

Abgabe: 11. Dezember, 13:30 Uhr, Kasten 37
Übung mittwochs, 11:15 im SR 5

Aufgabe 36: Sei $\phi_k \colon S^1 \to S^1$ gegeben durch $\phi_k(z) = z^k$. Sei $X_k = D^2 \cup_{\phi_k} S^1$ die Verklebung von D^2 und S^1 entlang des Randes von D^2 mittels der Abbildung ϕ_k (also der Quotient von $\{0\} \times D^2 \amalg \{1\} \times S^1$ unter der Äquivalenzrelation erzeugt von $(0, \phi_{n-1,k}(x)) \sim (1, x)$).

Berechne die singuläre Homologie von X_k.

Aufgabe 37: Welche endlichen Folgen (A_i) endlich erzeugter abelscher Gruppen lassen sich als singuläre Homologie eines geeigneten Raumes X realisieren (also $H_i(X) \cong A_i$)?

Tipp: Verwende die Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen.

Aufgabe 38: Sei $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots$, und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ der Limes der X_n. Sei ausserdem X_n eine abgeschlossene Teilmenge von X für jedes $n \in \mathbb{N}$, und sei X hausdorffsch.

Zeige: für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $K \subset X_N$.

Aufgabe 39: Finde eine in $\mathbb{R}^3 - K$ eingebettete 2-dimensionale Fläche mit einer Randkomponente (d.h. (F_g oder S^2) ohne eine eingebettete offene Scheibe), so dass der Rand genau die eingezeichnete Schleife S ist (Zeichnung reicht als Beweis). K und S wie in der Skizze.

Bemerkung: damit sieht man geometrisch, dass die Homologie von $\mathbb{R}^3 - K$ trivial ist.