# Übungen zur Topologie 1 — Wintersemester 00/01

Abgabe: 12. Januar, 13:30 Uhr, Kasten 37
Übung mittwochs, 11:15 im SR 5
Die Übung am 7.1. (erster Vorlesungstag) wird ausfallen.

**Aufgabe 40**: Sei $X$ ein CW-Komplex mit $n$-Skelett $X_n$. Zeige mittels Induktion:

(1) $H_i(X_n) = 0$ für $i > n$.

(2) Die Inklusion $X_{n-1} \hookrightarrow X_n$ induziert einen Isomorphismus $H_i(X_{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_i(X_n)$ für $i < n-1$.

Folgere: $H_i(X) \cong H_i(X_n)$ für $i < n$.

**Aufgabe 41**: Sei $X$ ein CW-Komplex. Dann besitzt auch $X \times [0,1]$ und die Suspension $\Sigma X$ eine CW-Struktur.

**Aufgabe 42**: Ein Teilraum $A$ von $X$ heisst Umgebungsdeformationsretrakt (NDR), falls es eine Umgebung $U$ von $A$ und eine Homotopie $h\colon U \times [0,1] \to U$ gibt, so dass für alle $a \in A$, $u \in U$, $t \in [0,1]$ gilt: $h(u,0) = u$, $h(u,1) \in A$, $h(a,t) = a$. Zeige:

(1) Ist $X$ ein CW-Komplex und $A$ ein Unterkomplex, so ist $A$ ein NDR.

(2) Falls $A$ ein abgeschlossenes NDR von $X$ ist, gilt $H_*(X,A) \cong \tilde{H}_*(X/A)$.

Hierbei erhält man den Quotientenraum $X/A$, indem man alle Punkte aus $A$ zu einem Element identifiziert (mit der entsprechenden Quotiententopologie).

**Aufgabe 43**: Sei $R$ ein kommutativer Ring mit 1 und $S_1, S_2$ seien kommutative $R$-Algebren. Bestimme das push-out von $S_1 \leftarrow R \rightarrow S_2$ in der Kategorie der kommutativen $R$-Algebren.

(Eine $R$-Algebra $S$ ist ein Ring $S$ mit 1 mit einem vorgegebenen Ringhomomorphismus $R \to S$ (der die 1 auf die 1 abbildet). $R$-Algebrenhomomorphismen sind mit diesem vorgegebenen Ringhomomorphismus verträglich.)

**Frohe Weihnachten, wir treffen uns hoffentlich genauso gesund und munter wie jetzt spätestens im neuen Jahr!**