Übungen zur Topologie 1 — Wintersemester 00/01

Abgabe: 15. Januar, 13:30 Uhr, Kasten 37
Übung mittwochs, 11:15 im SR 5

Aufgabe 44: Zeige, dass die Suspension von S^{n-1} homöomorph zu S^n ist.

Aufgabe 45: Gib $\mathbb{R}$ die CW-Struktur mit Null-Gerüst $X_0 = \mathbb{Z}$ und Eins-Gerüst $X_1 = \mathbb{R}$. Berechne die zelluläre Homologie dieses Kettenkomplexes.

Aufgabe 46: Seiem $X_1, \dots, X_n$ und A abgeschlossene Untermengen eines Raums X, so dass

- $X_i \cup X_j = A$ falls $i \neq j$
- $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$
- Für $i \neq j$ ist der Abschluss von $X - X_i$ disjunkt vom Abschluss von $X - X_j$.

Zeige, dass die induzierte Abbildung $H_n(X_i, A) \to H_n(X, A)$ für jedes i injektiv ist, und dass $H_n(X, A)$ die direkte Summe der Bilder der $H_n(X_i, A)$ ist.

Aufgabe 47: Sei $\Delta := \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$ die Diagonale im Einheitsquadrat in $\mathbb{R}^2$, $V := \Delta \cup [0,1] \times \{0\}$ ein “V”. Für $i \in \mathbb{N}$ sei $X_i := V \cup \{1/i\} \times [0, 1/i] \subset \mathbb{R}^2$. Überprüfe die Bedingungen von Aufgabe 46 (mit $X := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$). Zeige, dass $H_n(X_i, V) \to H_n(X, V)$ injektiv ist für jedes i.

Die zweite Folgerung von Aufgabe 46 ist nicht erfüllt (was wir leider nicht zeigen können). Versuche, ihr fehlschlagen plausibel zu machen.

Man könnte versuchen, $H_n(X, V)$ mittels Ausschneidung zu berechnen, indem man zwischen zwei aufeinanderfolgenden horizontalen Teilstrecken $\{1/n\} \times [0, 1/n]$ und $\{1/(n-1)\} \times [0, 1/(n-1)]$ jeweils die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken, also die Punkte $\{((2n-1)/2n(n-1), (2n-1)/2n(n-1)), (0, (2n-1)/2n(n-1))\}$ herausnimmt. Sei A die Vereinigung all dieser Mittelpunkte. Berechne $H_n(X - A, V - A)$. Warum darf man den Ausschneidungssatz für singuläre Homologie in dieser Situation nicht anwenden?