Übungen zur Topologie 1 — Wintersemester 00/01

Abgabe: 22. Januar, 13:30 Uhr, Kasten 37
Übung mittwochs, 11:15 im SR 5

Aufgabe 48: Berechne die zelluläre Homologie von $\mathbb{R}P^n$. Dabei verwenden wir die Filtrierung mit $X_k = \mathbb{R}P^k$.

Zur Erinnerung: $\mathbb{R}P^k$ ist der Quotient von S^k unter der Antipodenabbildung. $\mathbb{R}P^{k+1}$ erhält man als pushout $D^{k+1} \leftarrow S^k \xrightarrow{q^k} \mathbb{R}P^k$ mit der anklebenden Abbildung q^k gegeben durch die kanonische Projektion $S^k \to \mathbb{R}P^k$. (Diese Tatsachen sollen nicht bewiesen werden).

Aufgabe 49: Seien M_1, M_2 zwei glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeiten ohne Rand und $i_k \colon (D^n) \to M_k$ glatte Einbettungen. Die *zusammenhängende Summe* der beiden Mannigfaltigkeiten ist definiert als

$$M_1 \# M_2 := (M_1 - i_1(0)) \amalg (M_2 - i_2(0)) / \sim,$$

wobei $i_1(rs) \sim i_2((1-r)s)$ für $r \in (0,1)$, $s \in S^{n-1}$.

- Zeige, dass $M_1 \# M_2$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist.
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eulercharakteristiken (vorausgesetzt, dass die Homologie $H_*(M_k, \mathbb{Q})$ endlich-dimensional ist). Verwende, dass man M_k eine CW-Struktur geben kann, bei der $i_k((D^n)^\circ)$ eine offene n-Zelle ist.
- Berechne möglichst weitgehend den Zusammenhang zwischen $H_*(M_1 \# M_2)$ und $H_*(M_1)$, $H_*(M_2)$.

Aufgabe 50: Berechne die Kohomologie (mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten) des n-Torus T^n.

Aufgabe 51: Berechne die zelluläre Homologie von $\mathbb{R}P^n$ mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ Koeffizienten und mit $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ Koeffizienten.